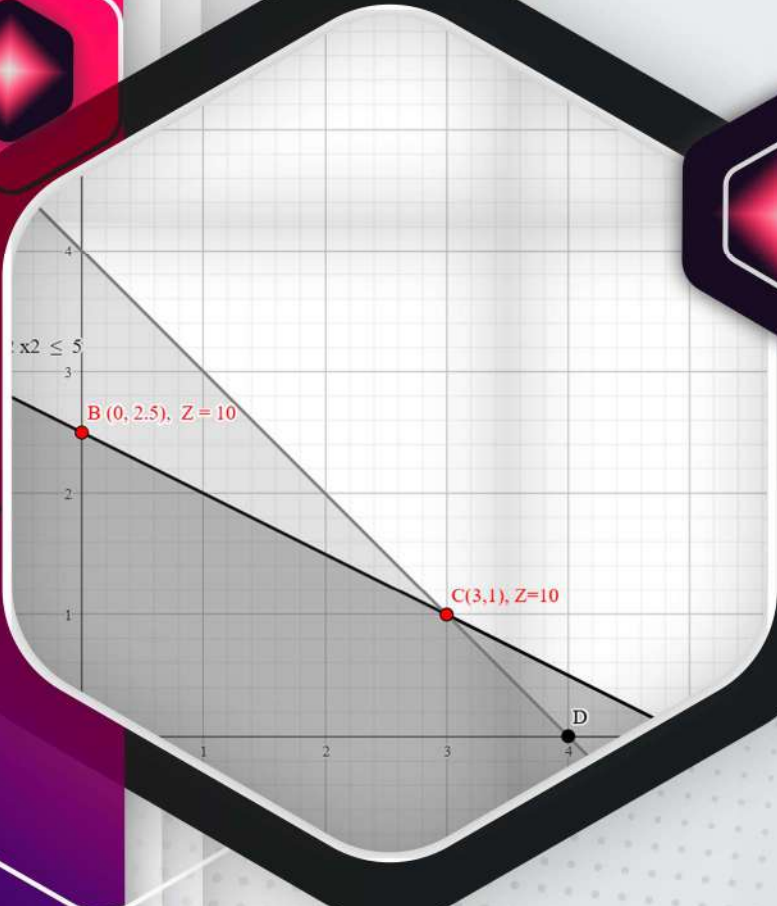
1era Ed.
2024

PUERTO MADERO
EDITORIAL

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES CON UN ENFOQUE PRÁCTICO EN LA ADMINISTRACIÓN

TOMO I: PROGRAMACIÓN LINEAL



FREDDY MARCO ARMIJOS ARCOS

puertomaderoeditorial.com.ar
La Plata - Argentina

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES CON UN ENFOQUE PRÁCTICO EN LA ADMINISTRACIÓN.
TOMO I: PROGRAMACIÓN LINEAL

ISBN: 978-631-6557-43-8

ISBN: 978-631-6557-43-8

PUERTO MADERO EDITORIAL

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES CON UN ENFOQUE PRÁCTICO EN LA ADMINISTRACIÓN. TOMO I: PROGRAMACIÓN LINEAL

Operations Research with a Practical Approach in Administration. Volume I: Linear Programming

AUTOR:

Freddy Marco Armijos Arcos

ISBN: 978-631-6557-43-8

Armijos Arcos, Freddy Marco
Investigación de operaciones con un enfoque práctico en la administración : tomo 1 : programación lineal / Freddy Marco Armijos Arcos ; Editado por Juan Carlos Santillán Lima. - 1a ed - La Plata : Puerto Madero Editorial Académica, 2024.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-631-6557-43-8

1. Matemática Aplicada. I. Santillán Lima, Juan Carlos, ed. II. Título.
CDD 519.8

ISBN: 978-631-6557-43-8

Primera Edición, Agosto 2024

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES CON UN ENFOQUE PRÁCTICO EN LA ADMINISTRACIÓN. TOMO I: PROGRAMACIÓN LINEAL
ISBN: 978-631-6557-43-8

Editado por:
Sello editorial: ©Puerto Madero Editorial Académica
Nº de Alta: 933832

Editorial: © Puerto Madero Editorial Académica
CUIL: 20630333971
Calle 45 N491 entre 4 y 5
Dirección de Publicaciones Científicas Puerto Madero Editorial Académica
La Plata, Buenos Aires, Argentina
Teléfono: +54 9 221 314 5902
+54 9 221 531 5142
Código Postal: AR1900

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review)

Corrección y diseño:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: José Luis Santillán Lima

Diseño, Montaje y Producción Editorial:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: Santillán Lima, José Luis

Director del equipo editorial: Santillán Lima, Juan Carlos

Editor: Santillán Lima, Juan Carlos

Hecho en Argentina
Made in Argentina

ISBN: 978-631-6557-43-8

ISBN: 978-631-6557-43-8

AUTORES:

Freddy Marco Armijos Arcos

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Facultad de Administración de Empresas, Grupo de Investigación para la Sostenibilidad de Cuencas Hidrográficas (GISOCH), Panamericana Sur km 1½, EC-060155, Riobamba, Chimborazo, Ecuador

freddym.armijos@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-2687-3339

ISBN: 978-631-6557-43-8

ISBN: 978-631-6557-43-8

CONTENIDO

ISBN: 978-631-6557-43-8

ÍNDICE DE FIGURAS

ISBN: 978-631-6557-43-8

ISBN: 978-631-6557-43-8

ÍNDICE DE TABLAS

ISBN: 978-631-6557-43-8

ISBN: 978-631-6557-43-8

ÍNDICE DE EJERCICIOS

ISBN: 978-631-6557-43-8

ISBN: 978-631-6557-43-8

RESUMEN

La investigación de operaciones es una disciplina importante en la toma de decisiones estratégicas dentro de sectores como la administración, producción, logística y finanzas. Este libro está diseñado para estudiantes universitarios de carreras en ciencias administrativas, proporcionándoles herramientas matemáticas aplicadas, sin requerir un conocimiento previo en matemática avanzada. A diferencia de otros textos que se centran en la teoría y en la resolución metódica de problemas matemáticos, este libro pone un fuerte énfasis en la aplicación práctica de estos conceptos en la gestión empresarial cotidiana. El enfoque principal de este tomo es la Programación Lineal, y aborda casos concretos y ejercicios prácticos que permiten a los estudiantes aplicar las técnicas de investigación de operaciones a problemas administrativos reales, conectando la teoría con la práctica. Aunque existen textos avanzados que abordan la investigación de operaciones, estos suelen estar dirigidos a audiencias con un sólido trasfondo matemático, lo que restringe su accesibilidad. Por lo que el enfoque práctico de este libro llena una laguna en la literatura educativa, proporcionando una herramienta valiosa para estudiantes de ciencias administrativas que buscan integrar la investigación de operaciones en su vida profesional diaria.

Palabras clave: Investigación de Operaciones, Investigación Operativa, Programación Lineal, Ciencias Administrativas, Administración de Empresas

ISBN: 978-631-6557-43-8

ABSTRACT

Operations research is a crucial discipline in strategic decision-making across sectors such as management, production, logistics, and finance. This book is designed for university students in administrative science programs, providing them with applied mathematical tools without requiring advanced mathematical knowledge. Unlike other texts that focus primarily on theory and the methodical resolution of mathematical problems, this book emphasizes the practical application of these concepts in everyday business management. The primary focus of this volume is Linear Programming, and it tackles concrete cases and practical exercises that allow students to apply operations research techniques to real administrative problems, bridging the gap between theory and practice. While there are advanced texts on operations research, they are typically aimed at audiences with a strong mathematical background, which limits their accessibility. Therefore, the practical focus of this book fills a gap in the educational literature, offering a valuable resource for administrative science students who seek to integrate operations research into their day-to-day professional lives.

Palabras clave: Investigación de Operaciones, Investigación Operativa, Programación Lineal, Ciencias Administrativas, Administración de Empresas

ISBN: 978-631-6557-43-8

INTRODUCCIÓN

La investigación de operaciones es una disciplina fundamental en la toma de decisiones estratégicas en diversos sectores, incluyendo la administración, la producción, la logística y las finanzas (Hillier & Lieberman, 2024; Taha, 2022; Winston, 2022). Sin embargo, su aplicación sigue siendo limitada entre los profesionales de las ciencias administrativas que no provienen de una formación matemática avanzada, lo que genera una brecha entre la teoría y la práctica (Ben-Tal et al., 2009; Gass & Fu, 2013; Powell & Baker, 2003; Rardin, 2017). Este libro ha sido diseñado específicamente para estudiantes universitarios que desean desarrollar carreras en las ciencias administrativas como Administración de Empresas, Finanzas, Mercadotecnia, Contabilidad y Auditoría, que no cuentan con un *background* previo en investigación de operaciones. El objetivo principal es proporcionar a estos estudiantes las herramientas necesarias para incorporar la matemática en su práctica profesional diaria, de manera que puedan responder afirmativamente a la pregunta de si es relevante aprender sobre investigación de operaciones, incluso si su enfoque profesional no es estrictamente matemático.

Actualmente, la enseñanza de la investigación de operaciones en las ciencias administrativas se enfrenta a un desafío en particular: En muchos planes de estudio, se presenta como un conjunto de técnicas avanzadas, enfocadas casi exclusivamente en la resolución metódica de problemas matemáticos, sin una conexión clara con su aplicación en la práctica cotidiana de la gestión empresarial, creando una desconexión entre la teoría y la práctica (Joyce & Cartwright, 2020). Como consecuencia se limita la capacidad de los futuros profesionales para aplicar estos conocimientos en la optimización de recursos y la toma de decisiones en entornos empresariales complejos.

En el ámbito global, existen textos importantes de referencia que abordan la investigación de operaciones desde una perspectiva más avanzada y técnica, tales como "*Operations Research. An Introduction*" (Taha, 2022) y "*Operations Research: Aplications and Algorithms*" (Winston, 2022), que son ampliamente reconocidos por su profundidad y rigor. Sin embargo, estos textos suelen estar dirigidos a audiencias con un fuerte trasfondo matemático, se encuentran en un idioma extranjero, y, además, son de pago, lo que limita su accesibilidad para todos los estudiantes. Otros textos relevantes como "*Introductions to Operations Research*" (Hillier & Lieberman, 2024) y "*Engineering Optimization: Theory and Practice*" (Rao, 2009) también han contribuido

ISBN: 978-631-6557-43-8

significativamente a la literatura en este campo, pero nuevamente, su enfoque es más adecuado para aquellos con una base sólida en matemáticas e ingeniería.

Dentro del ámbito universitario ecuatoriano, también se ha contribuido con libros importantes sobre el tema como "Investigación Operativa para Administración y Finanzas" (Toscano, 2022), "Investigación operativa. Programación lineal en las Ciencias Administrativas" (Granizo, 2021); que se centran en la enseñanza de las técnicas de resolución de problemas, su enfoque es predominantemente metodológico, relegando la aplicación práctica en contextos administrativos. Amplían el enfoque práctico textos como el de (Ávalos Reyes & Cepeda Silva, 2024; González Ariza & García Llinás, 2015); pero este libro busca ser una alternativa accesible y práctica, diseñado para aquellos que, sin ser expertos en matemáticas, buscan comprender y aplicar los principios de la investigación de operaciones en su vida profesional.

De esta forma, se ha identificado el problema que, en la enseñanza actual de la investigación de operaciones la tendencia es a enfocarse en la parte metódica de la resolución de problemas, a menudo mediante la aplicación de algoritmos y técnicas matemáticas complejas, sin prestar suficiente atención a la aplicación práctica y contextual en casos administrativos reales. Este enfoque, es útil en la formación técnica mas no logra equipar a los estudiantes con las competencias necesarias para aplicar estos conceptos en escenarios del mundo real, donde la toma de decisiones rara vez sigue un modelo estrictamente predecible (Booth & Rowlinson, 2006).

Este libro aborda las ideas fundamentales de la investigación de operaciones iniciando con la Programación Lineal; y en particular, el capítulo 2 se centra en la aplicación práctica de estos conceptos, presentando ejercicios y casos que permiten a los estudiantes ver cómo las técnicas de investigación de operaciones pueden ser utilizadas para resolver problemas administrativos concretos. Se aspira a llenar una laguna en la literatura educativa actual, donde los recursos disponibles para aprender investigación de operaciones tienden a estar dirigidos a estudiantes de matemáticas o ingeniería, dejando a un lado a aquellos que se especializan en ciencias administrativas. La importancia del presente trabajo radica, pues, en su capacidad para vincular la teoría con la práctica, facilitando la comprensión y aplicación de la investigación de operaciones en la administración.

ISBN: 978-631-6557-43-8

CAPÍTULO 1.

1 FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1 Introducción al Modelado en Investigación de Operaciones

1.1.1 Modelo

Un modelo puede ser definido como: "*Una representación simplificada de un proceso o sistema complejo*" (David, 2001) por lo que está diseñado para capturar sus aspectos esenciales. Alternativamente se puede entender el modelo como la representación externa y explícita de una parte de la realidad según se percibe por quienes buscan comprenderla y analizarla.

Es necesario no confundir el modelo del modelado, este último es la serie de pasos metódicos tanto creativos como técnicos que llevan a la construcción del modelo, involucra la abstracción y simplificación de la realidad para representar los aspectos esenciales de un sistema, mientras que el modelo es la herramienta que se utiliza para analizar y tomar decisiones basadas en esa representación simplificada (Hillier & Lieberman, 2024; Taha, 2022).

En este sentido, es el modelado la piedra angular en la investigación de operaciones (IO). Y es a través de modelos matemáticos, que se busca representar o capturar las características esenciales de los sistemas reales de manera simplificada para analizar y optimizar procesos complejos, con el fin de identificar soluciones óptimas que mejoren la toma de decisiones en contextos organizacionales (Devi et al., 2020).

Existen diversos tipos de modelos en IO, cada uno adecuado para distintos tipos de problemas. Los modelos más comunes incluyen la Programación Lineal (PL), la Programación Entera, Programación Dinámica, Modelos de Redes, cada uno con sus propias técnicas y algoritmos de solución, que son seleccionados según la naturaleza y complejidad del problema (Caballero & Grossmann, 2007; Sekhon & Bloom, 2024).

1.1.2 Principios del Modelado Matemático

Los modelos en IO pueden variar desde representaciones simples hasta complejas, dependiendo del sistema o problema que se desea resolver. Siendo el principal desafío en el modelamiento el encontrar un equilibrio entre la simplicidad y la precisión; un modelo demasiado detallado puede volverse inanalizable, mientras que uno muy simplificado

ISBN: 978-631-6557-43-8

puede no capturar adecuadamente la realidad del sistema. Es crucial que el modelo sea lo suficientemente detallado para ser útil, pero también lo suficientemente simple para ser manejable (Carter et al., 2017).

En los primeros intentos de abordar y resolver un problema es fundamental mantener una mentalidad abierta y creativa. Por lo que es beneficioso conocer tantas estrategias de resolución de problemas y heurísticas como sea posible, para ser capaz de utilizarlas o desarrollar nuevas a partir de ellas. Al comenzar a construir un modelo, es útil recordar que no existe una receta precisa que indique cómo construir un modelo y no necesariamente existe un modelo "correcto" (Kallrath, 2021).

En la investigación de operaciones, los modelos se estructuran en torno a ciertos principios fundamentales. Como se observa en la siguiente figura:

Figura 1-1 Flujo del modelado

Elaborado por el autor. Basado en (Taha, 2022)

El primero, la identificación clara del problema, que incluye determinar las alternativas de decisión, los criterios de evaluación y las restricciones de forma que procure reflejar la realidad del sistema. A partir de ello se procede a la formulación matemática, que implica expresar las relaciones entre las variables de decisión, los objetivos y las restricciones en forma de ecuaciones o inecuaciones; en este proceso a menudo requiere hacer suposiciones simplificadoras para que el modelo sea manejable y resoluble, sin perder la esencia del problema real. Una vez formulado, se soluciona. Sin embargo, la construcción de modelos en IO es un proceso iterativo, los modelos iniciales a menudo se ajustan o modifican a medida que se obtiene más información sobre el sistema o a medida que se prueban soluciones preliminares. Por ello antes de la implementación como último paso, hace falta la validación del modelo, donde se compara el desempeño del modelo con el comportamiento real del sistema para asegurar su precisión y relevancia. (Taha, 2022)

El propósito final de la IO en la Administración es apoyar la toma de decisiones en la gestión de las organizaciones, por lo que, en la práctica, la aplicación de estos

ISBN: 978-631-6557-43-8

modelos requiere no solo conocimientos técnicos en modelado matemático, sino también una comprensión profunda del contexto organizacional y los procesos operativas. La experiencia y el juicio son aspectos clave en la construcción de modelos, por lo que, los modelos en IO deben integrarse con el conocimiento de los expertos en el dominio para que sus soluciones sean viables y aplicables en el mundo real (Willemain, 1994).

1.2 Programación lineal

1.2.1 Definición

La programación lineal (PL) es una técnica de optimización fundamental en el campo de la investigación de operaciones, con capacidad de proporcionar un enfoque sistemático y cuantitativo a la toma de decisiones, a partir de un modelamiento matemático para optimizar una función lineal. (Rao, 2009).

Tabla 1-1 Ejemplos de funciones lineales y no lineales

Función	¿Es lineal?
$5x - 2y - z = 7$	SI, con tres variables
$y = -4x + 3, \quad s.t\ x \geq 0$	SI, con restricciones
$y = 10\left(1 + \frac{x}{3}\right)^2$	NO, es una función cuadrática por el exponente
$y = 2\,e^{0.5x}$	NO, es una función exponencial

Elaborado por el autor

En el campo de la administración la PL tiene una amplia gama de aplicaciones, que incluyen la asignación de recursos, la planificación de la producción y la optimización de la fuerza laboral y carteras financieras, gestión de inventarios, programación de transporte, y otras. Esto se debe a que la PL proporciona flexibilidad y el rigor matemático permitiendo analizar y optimizar sus operaciones de una manera más sistemática y basada en evidencias (Dantzig, 2002).

En este sentido los problemas de PL deben seguir lo siguiente: Se trata de maximizar o minimizar una función objetivo, que es una función lineal usualmente expresada como la suma ponderada de unas variables de decisión. Los valores que toman esas variables de decisión deben satisfacer un conjunto de restricciones o condiciones cada una de las cuales debe expresarse como una ecuación o inecuación lineal. Y, existe una restricción de asociada exclusivamente a la variable, generalmente puede ser que esta es no negativa o puede ser irrestricta en cuanto a signo (Hillier & Lieberman, 2024)

ISBN: 978-631-6557-43-8

Adicionalmente, los problemas de programación lineal deben cumplir cuatro suposiciones fundamentales:

- Proporcionalidad: La contribución de cada variable de decisión a la función objetivo y a las restricciones es directamente proporcional a su valor, esto implica que la relación entre las variables y los resultados es lineal.
- Aditivita: Indica que la función objetivo y las restricciones son la suma de las contribuciones individuales de cada variable de decisión. Las interacciones entre variables no afectan la suma total; cada variable contribuye de manera independiente.
- Divisibilidad: Permite que las variables de decisión tomen valores fraccionarios, lo que es esencial para la aplicación de métodos de programación lineal que asumen un rango continuo de valores para las variables.
- Certidumbre: Plantea que todos los parámetros del problema (la función objetivo, las variables de decisión involucradas, y las restricciones) son conocidos con certeza, sin incertidumbre en los datos. (Winston, 2022)

Estas suposiciones son esenciales para garantizar que los modelos de programación lineal representen adecuadamente la realidad y puedan ser resueltos de manera eficiente

1.2.2 Ejemplo de aplicación

Ejercicio 1-1 Planteamiento: Producción

Una tienda de artesanía fabrica y vende platos y tazas de cerámica. La tienda obtiene una ganancia de $4 por plato y $5 por taza. Un plato requiere 1 hora de trabajo y 4 libras de arcilla. Una taza requiere 2 horas de trabajo y 3 libras de arcilla. Se dispone de 8 horas de trabajo cada día y en la tienda trabajan 5 personas. La tienda puede obtener solo 120 libras de arcilla por día. Halla la ganancia máxima por día y determina qué cantidad de cada producto se debe fabricar. Problema adatado de (Riddle, 2010; Russell & Taylor, 2011)

Basados en la Figura 1-1 Flujo del modelado, para la formulación del problema al menos se requieren los siguientes pasos:

ISBN: 978-631-6557-43-8

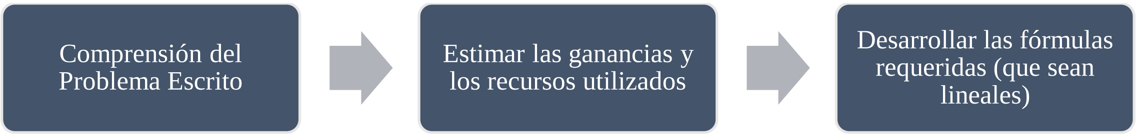


Figura 1-2 Flujo resumen para la formulación del modelo de Programación lineal

Elaborado por el autor

Se tiene que tomar en consideración que todos los modelos de Investigación de Operaciones, en los que se incluye el de Programación Lineal, debe constar de tres componentes básicos:

- Las variables de decisión que se pretende determinar
- El objetivo o la meta que se requiere optimizar
- Las restricciones que la solución debe satisfacer

Para el problema, por tanto, consideraríamos la definición de las variables del modelo:

$$x_1 = Número\ de\ platos\ a\ fabricar\ por\ día$$

$$x_2 = Número\ de\ tazas\ a\ fabricar\ por\ día$$

El objetivo del problema es que necesitamos incrementar al máximo posible nuestras ganancias o utilidades por lo que se requiere maximizar los dos componentes de la utilidad diaria, considerando las unidades en las que se trabaja, en este caso dólares. Por lo que se tendría:

$$Utilidad\ platos\ en\ dólares = \frac{4\ USD}{plato} * x_1\ platos = 5x_1$$

$$Utilidad\ tasas\ en\ dólares = \frac{5\ USD}{tasa} * x_2\ tazas = 5x_2$$

Siendo z la utilidad diaria en dólares, la función objetivo para la tienda queda:

$$\max z = 4x_1 + 5x_2$$

Considerando ahora las restricciones se tiene que:

$$Consumo\ de\ la\ materia\ prima \leq Disponibilidad\ de\ materia\ prima$$

El consumo diario de arcilla es de 4 libras para los platos y 3 libras para las tasas, y el total disponible es de 120 libras de arcilla al día. Considerando que estamos trabajando en las mismas unidades, la primera restricción es:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

Siguiendo el mismo razonamiento, se tiene la restricción del máximo número de horas que se tiene para el trabajo, teniendo en consideración las unidades:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$Horas\ requeridas\ para\ la\ fabricación \leq Total\ de\ horas\ disponibles$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 8 * 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

Finalmente se deben considerar las restricciones implícitas es decir que están sobreentendidas en el problema y por eso no se han planteado de forma escrita, en este problema la fabricación de cada elemento es un número positivo o cero, que se conoce como restricción de no negatividad, por lo tanto, se expresa de la siguiente forma:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Así, el modelo completo queda de la siguiente forma:

$$\max z = 4x_1 + 5x_2$$

$$sujeto\ a: 4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Con este ejemplo podemos observar en primer lugar, que las funciones expresadas son de tipo lineal, las dos variables x_1 y x_2 que para el caso también se podían haber denominado x y y o cualquier otra nomenclatura no están relacionadas entre sí, no tienen exponentes, logaritmos, funciones geométricas, etc.; por lo tanto, son lineales.

Además, cumple las suposiciones de proporcionalidad y aditividad ya que si elaboro un plato (x_1) voy a ganar 4 USD, si elaboro 2 gano 8 USD y así sucesivamente, de igual manera con las tazas (x_2); a la vez, la función objetivo es la suma de la contribución de la ganancia de cada variable es decir si elaboro un plato y una taza ganaré 9 USD (4 +5). También es cierto respecto a la certidumbre, es decir en el planteamiento estoy convencido del valor de la utilidad para cada producto, así también de cuántas horas de trabajo y la cantidad de material se necesitan.

Respecto a la divisibilidad, en este caso, no se cumple, ya que se trata de productos enteros, pero si el problema fuera reformulado y hablamos de lotes el problema si satisficiera esta suposición ya que puedo incluir una producción de medio lote, etc. En este caso particular, cuando las respuestas deben ser enteros se denominan problemas de programación entera, que para efectos prácticos los trataremos como programación líneal pura y recurriremos a las soluciones computacionales para su resolución.

1.3 Solución gráfica para problemas de dos variables

ISBN: 978-631-6557-43-8

Encontrar una solución óptima para un problema de programación lineal implica asignar valores a las variables de decisión de manera que se logre un objetivo específico y se cumplan las restricciones. Para un problema con n variables de decisión, cualquier solución puede representarse mediante un punto $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. El espacio factible (o región factible) para el problema es el conjunto de todos esos puntos que satisfacen las restricciones impuestas. Por lo tanto, el espacio factible incluye todas las soluciones posibles, sin embargo, que sea factible no implica que sea la solución óptima. Una solución óptima factible es un punto dentro de este espacio que es tan efectivo como cualquier otro para alcanzar el objetivo deseado.

En este sentido, la resolución de problemas de programación lineal con solo dos variables de decisión puede ilustrarse gráficamente. Los problemas de programación lineal con más de dos variables de decisión requieren métodos de solución más avanzados y no pueden ilustrarse fácilmente de manera gráfica. Sin embargo, el estudio gráfico de problemas sencillos será útil para comprender el método de solución general que se presentará más adelante. En síntesis, la solución gráfica requiere de dos pasos:

- Determinar el espacio de soluciones factibles
- Determinar la solución óptima de entre todos los puntos localizados en el espacio de soluciones

Ejercicio 1-2 Solución Gráfica: Producción

Iniciando con el paso 1, de determinar el espacio de soluciones, se debe considerar las restricciones de no negatividad $x_1, x_2 \geq 0$, lo que implica que la figura se encuentra en el primer cuadrante del eje horizontal x_1 y el eje vertical x_2. Se consideran ahora las dos restricciones y los puntos de intersección:

ISBN: 978-631-6557-43-8

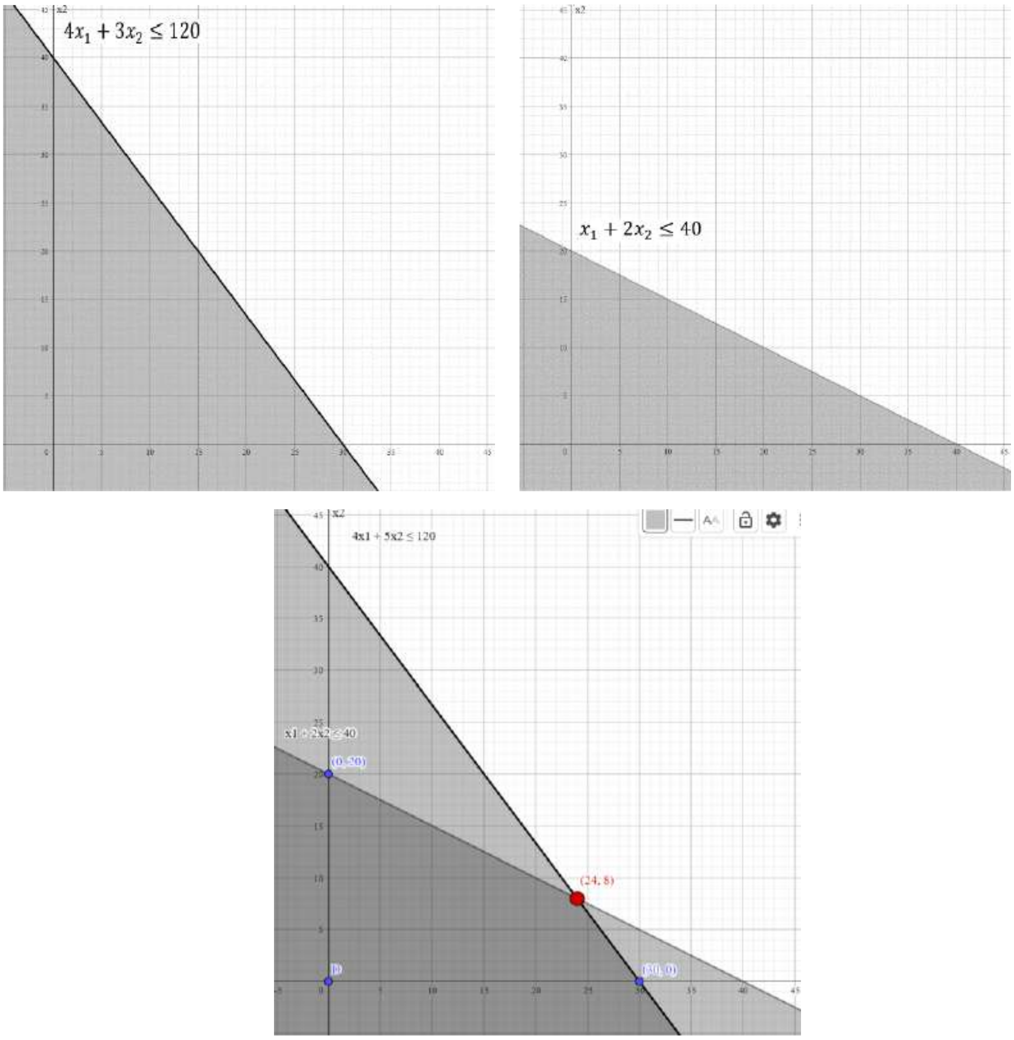


Figura 1-3 Grafico de las restricciones e intersección

Elaborado por el autor

En la escala de gris más oscura se tiene lo que se conoce como el espacio de soluciones factible, dado por los vértices A, B, C, D

Para el paso dos se observa que el espacio es finito, en consecuencia, es requerido un proceso sistemático para determinar la solución optimo, para ello se toma en consideración que estará siempre en un punto asociado a la esquina o en ocasiones a toda la línea recta. Por lo tanto, se reemplazan en la función objetivo los 4 vértices para decidir el valor máximo de z

$$z = 4x_1 + 5x_2$$

$$A = (30,0); z = 4 \cdot 30 + 5 \cdot 0 = 120$$

$$B = (24,8); z = 4 \cdot 24 + 5 \cdot 8 = 136$$

$$C = (0,20); z = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 20 = 100$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Se omite el punto D, al ser $(0,0)$ lo que implica que no se haría nada, y de igual forma no se obtiene utilidad alguna. De esta forma se observa que, el valor óptimo estaría en $(x_1, x_2)(24, 8); z = 136$

Un último paso que estará presente en todas las aplicaciones de los modelos de investigación de operaciones es la interpretación. Que en este caso sería: Se requiere fabricar 24 platos y 8 tazas al día para maximizar la utilidad diaria a $ 136.

1.4 El método simplex

El método Simplex es una técnica general para resolver problemas de programación lineal que fue desarrollada en 1947 por George B. Dantzig. Sin embargo, la mayoría de los problemas reales son tan grandes que resolverlos manualmente mediante el método Simplex es impracticable, por lo que estos problemas deben ser solucionados a partir de algunas modificaciones implementándose en un computador (Nabli, 2009).

El método Simplex es un algoritmo iterativo que comienza con una solución factible inicial, se mueve repetidamente hacia una solución básica adyacente a la anterior, se asegura que es una solución factible, y revisa si es la mejor solución, cuando se encuentra una solución óptima, lo que significa que no se puede hacer ninguna mejora adicional, se detiene (Maroto Álvarez et al., 2012).

1.4.1 La forma estándar

Para utilizar el método Simplex, es necesario expresar el problema de programación lineal en su forma estándar. Para un programa lineal con n variables y m restricciones, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z = \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
sujeto\ a: \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

Si definimos:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ⬚ & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & ⬚ & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos un sistema de ecuaciones lineales, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, que consiste en m ecuaciones y n incógnitas. Las n incógnitas incluyen las variables de decisión originales y cualquier otra variable que se haya introducido para lograr la forma estándar. Por lo que puede ser resuelto basado en la eliminación de Gauss-Jordan, que partiendo del sistema de ecuaciones original, lo transforma utilizando operaciones de fila, en un sistema equivalente en el cual se puede leer la solución directamente (Granizo Espinoza, 2021).

Aunque esta es la forma estándar será requerida por el método Simplex, no necesariamente surge de manera natural cuando formulamos por primera vez los modelos de programación lineal. Pueden ser necesarias varias modificaciones para transformar la formulación original de un problema de programación lineal en la forma estándar, que incluyen variables de holgura y artificiales según la siguiente tabla:

Tabla 1-2 Coeficientes para llegar a la forma estándar del método Simplex

Tipo de restricción	Coeficientes de variables de holgura (s)	Coeficientes de variables artificiales (R)
Menor o igual que ≤	+1	0
Mayor o igual que ≥	-1	+1
Igual =	0	+1

Fuente: (Izar Landeta, 2012)

Por su parte para transformar un problema de minimización a maximización solo es necesario invertir los signos:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n$$

$$\max(-z) = -\ c_1x_1 - c_2x_2 - \ \dots - c_nx_n$$

Ejercicio 1-3 Solución mediante simplex: Producción

Del ejercicio anterior es necesario plantear en el ejercicio en su forma estándar, para lo cual se transforman los $\leq$ a $=$ mediante el añadir variables de holgura respectivamente, quedando:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$\max z = 4x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$sujeto\ a: 4x_1 + 3x_2 + s_1 = 120$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 40$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Nótese que se han asignado coeficientes cero a la función objetivo de maximización.

A partir de aquí se realizan las operaciones, iniciando con la definición de un pivote que es una secuencia de operaciones elementales sobre filas acorde a Gauss-Jordan aplicadas al sistema de ecuaciones actual, de esta forma se crea un sistema equivalente en el que una nueva variable ahora tiene un coeficiente de uno en una ecuación y ceros en todas las demás ecuaciones.

Durante el proceso de aplicar operaciones de pivote a un problema de programación lineal, es conveniente utilizar una representación tabular del sistema de ecuaciones. Esta representación se conoce como una tabla Simplex (o en inglés Simplex Tableu).

Para llevar un seguimiento conveniente del valor de la función objetivo, tal como se ve afectada por las operaciones de pivote, tratamos la función objetivo como una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones y la incluimos en la tabla. En el ejemplo, la ecuación de la función objetivo se escribe como:

$$z - 4x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

De esta forma nuestra tabla es la siguiente:

Tabla 1-3 Tabla simplex inicial – Ejercicio Producción

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	**Solución**
z	1	-4	-5	0	0	0
s_1	0	4	3	1	0	120
s_2	0	1	2	0	1	40

A partir de aquí se requieren realizar los siguientes pasos:

- Examinar los elementos de la fila superior, es decir, la fila con la función objetivo. Si todos los elementos son mayores que cero entonces la solución actual es la óptima, de lo contrario seguir con el siguiente paso

ISBN: 978-631-6557-43-8

- Seleccionar como la variable no básica que entrará en la base, a aquella variable que corresponda al coeficiente más negativo en la fila superior. Esto identifica la columna de pivote
- Examinar los coeficientes en la columna de pivote. Si todos los elementos son menores que cero la solución no es acotada es decir no existe solución óptima.
- Calcular las razones $\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ donde la solución sea mayor que cero, y luego seleccionar el mínimo valor de θ_i. Con esto se ha seleccionado la fila pivote y el elemento pivote que es la intersección de la fila con la columna
- Para obtener la siguiente tabla (que representará la nueva solución básica factible), divide cada elemento en la fila de pivote por el elemento de pivote. Usa esta fila ahora para realizar operaciones sobre las otras filas con el fin de obtener ceros en el resto de la columna de pivote, incluida la fila objetivo. Esto constituye una operación de pivote, realizada sobre el elemento de pivote, con el propósito de crear un vector unitario en la columna de pivote, con un coeficiente de uno para la variable seleccionada para la base.

Para el ejercicio se desarrolla de la siguiente manera:

Tabla 1-4 Desarrollo del método simplex – Ejercicio Producción

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	1	-4	-5	0	0	0	Paso 1 (coeficiente menor)
s_1	0	4	3	1	0	120	Paso 3: 120/3 = 40
s_2	0	1	2	0	1	40	Paso 3: 40/2 = 20

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	1	-4	-5	0	0	0	
s_1	0	4	3	1	0	120	
s_2	0	0.5	1	0	0.5	20	Dividir para 2

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	1	-1.5	0	0	2.5	100	Fila 1 + 5 * Fila 3
s_1	0	2.5	0	1	-1.5	60	Fila 2 - 3 * Fila 3
s_2	0	0.5	1	0	0.5	20	

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	1	-1.5	0	0	2.5	100	Selección de nuevo pivote

ISBN: 978-631-6557-43-8

s_1	0	2.5	0	1	-1.5	60	
s_2	0	0.5	1	0	0.5	20	

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	1	-1.5	0	0	2.5	100	
s_1	0	1	0	0.4	-0.6	24	Se dividió para 2.5
s_2	0	0.5	1	0	0.5	20	

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	1	0	0	0.6	1.6	136	Fila 1 + 1.5 * Fila 2
x_1	0	1	0	0.4	-0.6	24	
x_2	0	0	1	-0.2	0.8	8	Fila 1 + 1.5 * Fila 2

Elaborado por el autor

Una vez aislado las variables básicas x_1 y x_2 se puede determinar su resultado, a saber 24 y 8 respectivamente, así mismo en la primera fila de la función objetivo la variable z ha quedado aislada y su resultado es 136.

El resultado por tanto es similar al ejercicio que fue resuelto con el método gráfico: Se requiere fabricar 24 platos y 8 tazas al día para maximizar la utilidad diaria a $ 136.

1.4.2 El método Big M

El método M, fue desarrollado como una de las técnicas de Programación Lineal más antiguas. Se inicia con la forma de ecuación, colocando las variables Tabla 1-2; por ejemplo, si la ecuación no tiene una holgura, se agrega una variable artificial, R_i, para formar una solución inicial parecida a la solución básica de total holgura. Sin embargo, las variables artificiales no forman parte del problema original, y se requiere un "artificio" de modelado para igualarlas a cero en el momento en que se alcance la iteración óptima, siempre que exista una solución factible. La meta se logra penalizando estas variables en la función objetivo utilizando un valor que es lo suficientemente grande o tiende al infinito $M \to \infty$, siendo $-M$ en problemas de maximización, y M en problemas de minimización (Taha, 2022).

Dada su naturaleza algebraica, nunca se utiliza en códigos computacionales por su inherente error de redondeo. En su lugar se prefiere el método de dos fases (el método no se incluye en este tomo). Sin embargo, el uso de penalizaciones, como lo requiere el método M, es un importante concepto en muchas instancias de modelado de Investigación de Operaciones.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Ejercicio 1-4 Ejemplo de resolución mediante Big M

Se propone el siguiente ejercicio planteado de maximización

$$\min z = 4x_1 + x_2$$
$$sujeto\ a: \ 3x_1 + x_2 \ = 10$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 20$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

El primer paso consiste en colocar las restricciones en la forma estándar, en este caso no es necesario cambiar la función objetivo de minimización a maximización ya que en la solución final se considerará que la respuesta es $-z$. Así el planteamiento es el siguiente:

$$\min z = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + MR_1 + MR_2$$
$$sujeto\ a: \ 3x_1 + x_2 + R_1 = 10$$
$$4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 20$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 15$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

Debido a que la función objetivo tiene una parte numérica y una parte algebraica, la forma de resolución es añadiendo dos filas correspondientes a ello. Quedando el problema como matriz de la siguiente forma:

Tabla 1-5 Tabla simplex inicial – Ejercicio Big M

		4	1	0	0	M	M	0
	Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	**Solución**
M	R_1	3	1			1		10
M	R_2	4	3	-1			1	20
0	s_2	1	2		1			15
	Núm.	4	1	0	0	0	0	0
	Alg.	-7	-4	1	0	0	0	-30

Elaborado por el autor

Para el cálculo de las filas numérica y algebraica se procede como el índice es igual al elemento correspondiente a la columna en el renglón objetivo menos la sumatorio de los productos de los elementos de la columna por el respectivo elemento de la columna objetivo. Para el caso de la columna x_1, sería:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$4-(3*M+4*M+1*0)=4-7M$$

Donde el 4 y el -7 se colocan en las columnas inferiores. Una vez obtenido aquello, el pivote se lo toma del menor número M, en este caso -7, y para la fila se procede de similar forma que en la formulación simplex estándar. Los siguientes pasos son similares, así resolviendo es:

Tabla 1-6 Desarrollo del método simplex – Big M

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Observación
R_1	3	1	0	0	1	0	10	Pivote
R_2	4	3	-1	0	0	1	20	
s_2	1	2	0	1	0	0	15	
Núm.	4	1	0	0	0	0	0	
Alg.	-7	-4	1	0	0	0	-30	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Observación
R_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	Dividir para 3
R_2	4	3	-1	0	0	1	20	
s_2	1	2	0	1	0	0	15	
Núm.	4	1	0	0	0	0	0	
Alg.	-7	-4	1	0	0	0	-30	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Observación
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	
R_2	0	1.67	-1	0	-1.33	1	6.67	Fila R2 – 4 R1
s_2	0	1.67	0	1	-0.33	0	11.67	Fila s2 – R1
Núm.	0	-0.33	0	0	-1.33	0	-13.33	Fila núm – 4 R1
Alg.	0	-1.67	1	0	2.33	0	-6.67	Fila alg + 4 R1

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Observación
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	
R_2	0	1.67	-1	0	-1.33	1	6.67	Nuevo pivote
s_2	0	1.67	0	1	-0.33	0	11.67	
Núm.	0	-0.33	0	0	-1.33	0	-13.33	
Alg.	0	-1.67	1	0	2.33	0	-6.67	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Observación
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	
R_2	0	1	-0.6	0	-0.8	0.6	4	Divido para 1.67
s_2	0	1.67	0	1	-0.33	0	11.67	
Núm.	0	-0.33	0	0	-1.33	0	-13.33	
Alg.	0	-1.67	1	0	2.33	0	-6.67	

ISBN: 978-631-6557-43-8

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Observación
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	F1 – 0.33*F2
R_2	0	1	-0.6	0	-0.8	0.6	4	
s_2	0	1.67	0	1	-0.33	0	11.67	F3 - 1.67*F2
Núm.	0	-0.33	0	0	-1.33	0	-13.33	Núm + 0.33*F2
Alg.	0	-1.67	1	0	2.33	0	-6.67	Alg +1.67*F2

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Observación
x_1	1	0	0.2	0.0	0.6	-0.2	2	$x_1 = 2$
R_2	0	1	-0.6	0.0	-0.8	0.6	4	$x_2 = 4$
s_2	0	0	1	1	1	-1	5	
Núm.	0	0	-0.2	0	-1.6	0.2	-12	$z = 12$
Alg.	0	0	0	0	1	1	0	

Elaborado por el autor

Así, la respuesta es $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, y $z = 12$

1.5 Herramientas computacionales

Como se mencionó, en la práctica, los modelos de Programación Lineal suelen implicar cientos de variables y restricciones, y por tanto se requieren herramientas de computador como único medio viable para resolverlos. Entre ellos están Excel Solver, AMPL, LINGO, e incluso algunas funciones construidas para MATLAB o R. En esta sección presenta el primero de ellos que al estar incorporado en Microsoft Excel no requiere de instaladores adicionales, y en general los usuarios están acostumbrados a la estructura de hojas de cálculo. Cabe destacar que Solver puede manejar problemas enteros y no lineales.

El complemento Solver está disponible cuando se instala Microsoft Office o Excel, sin embargo, para utilizarlo primero debe ser cargado en Excel. Para revisar los pasos correspondientes según el sistema operativo y versiones del software recomienda ingresar en el Soporte Técnico de Microsoft, en este apartado se describe para Windows 11 y Microsoft Excel 2016.

- Ir a Archivo, y seguir en la sección de Opciones
- Hacer clic en Complementos, y en el cuadro de Administrar, seleccione Complementos de Excel.
- Hacer clic en Ir

ISBN: 978-631-6557-43-8

- En el cuadro de Complementos disponibles, activar la casilla Solver, y a continuación, hacer clic en aceptar.
- Si el complemento no está enumerado en el cuadro, buscarlo con la sección de Examinar, y si no está instalado actualmente en el equipo hacer clic en Sí
- Una vez cargado el complemento de Solver, el comando respectivo estará disponible en el grupo Análisis de la pestaña Datos. (Microsoft, 2024)

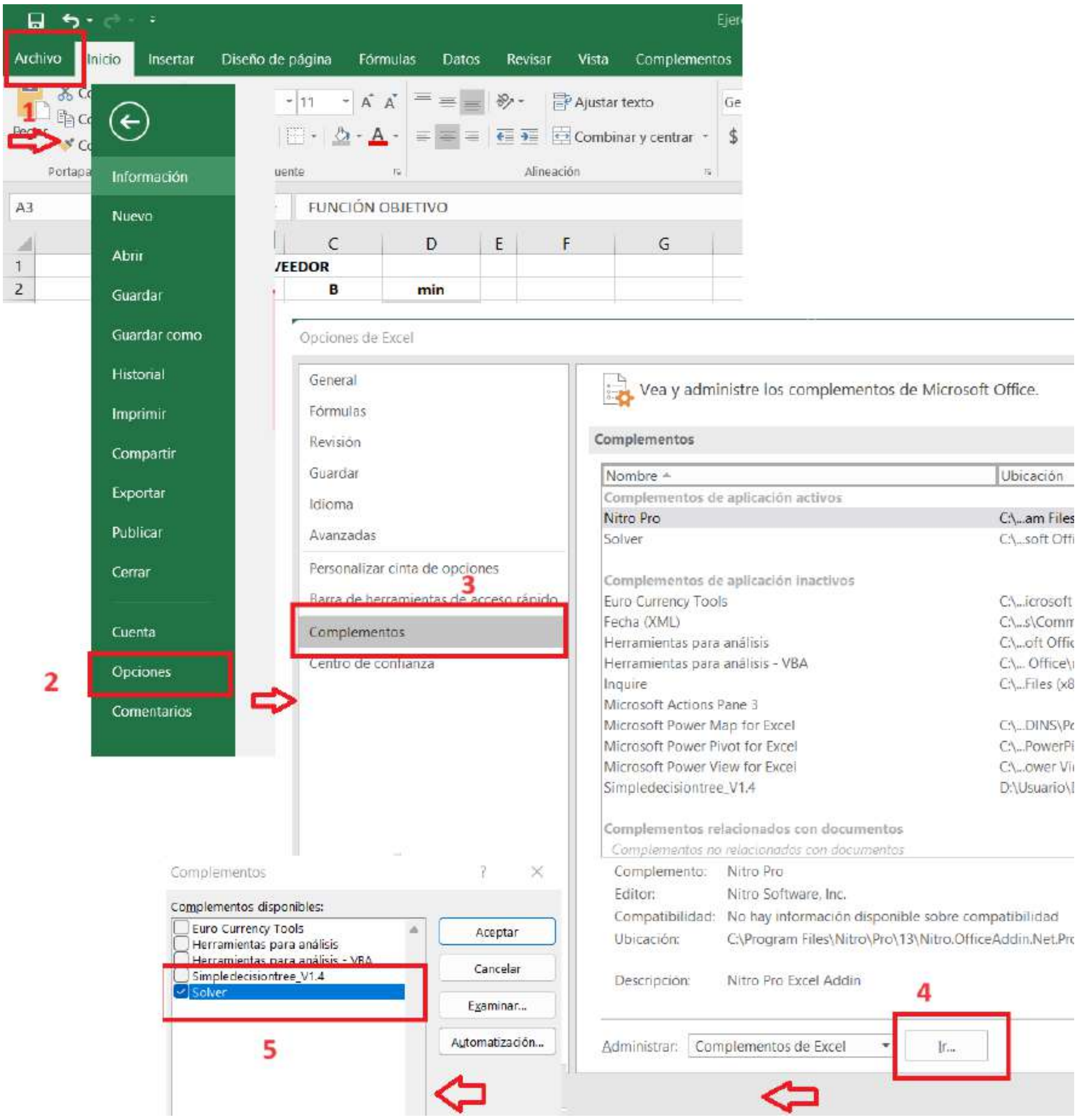


Figura 1-4 Pasos para la activación del Complemento Solver de Excel

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

Ejercicio 1-5 Solución Mediante Solver: Producción

El ejercicio planteado es el siguiente:

$$\max z = 4x_1 + 5x_2$$
$$sujeto\ a: 4x_1 + 3x_2 \leq 120$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

En primer lugar, se colocarán los datos en la hoja de cálculo, cabiendo señalar que la posición de las celdas es indistinta y dependerá del usuario la mejor forma y más entendible para sí mismo. En las filas C

	A	B	C	D	E	F
1		PRODUCTO				UTILIDAD
2		PLATOS (x1)	TAZAS (x2)			max z
3	FUNCIÓN OBJETIVO	4	5			
4						
5	RESTRICCIONES					
6	Cantidad de arcilla	4	3		≤	120
7	Horas de trabajo	1	2		≤	40
8						
9	RESPUESTAS					
10						

Figura 1-5 Ingreso de datos iniciales a Excel

Elaborado por el autor

Para vincular Solver con los datos de la hoja de cálculo es necesario proporcionar las expresiones algebraicas de la función objetivo y la parte izquierda de las restricciones. En este caso, las fórmulas para cada celda serían:

Tabla 1-7 Fórmulas a ingresar – Resolución en Solver

	Expresión algebraica	Celda	Fórmula en la hoja de cálculo
Objetivo z	$4x_1 + 5x_2$	F3	SUMAPRODUCTO(B3:C3,B9:C9)
Restricción arcilla	$4x_1 + 3x_2$	D6	SUMAPRODUCTO(B6:C6,$B$9:$C$9)
Restricción horas	$x_1 + 2x_2$	D7	SUMAPRODUCTO(B7:C7,$B$9:$C$9)

Elaborado por el autor

Como siguiente paso es necesario colocar todos los parámetros que exige Solver. Primero la función objetivo para lo cual se señala la celda F3, con el tipo que en este caso maximización. En la sección cambiando las celdas variables se colocan las celdas donde se imprimirán las respuestas, es decir, B9:C9. Para las restricciones se debe colocar como referencia de celda aquella que tenga la fórmula, por ejemplo, D6; luego el signo de la restricción $\leq$, y finalmente el valor de la restricción que es la celda F6, el mismo paso

ISBN: 978-631-6557-43-8

para la restricción de horas de trabajo. Para ahorrar tiempo, es posible incluir en un solo bloque todas las restricciones siempre y cuando tengan el mismo signo. Como el problema tiene la restricción implícita de que sean no negativas se coloca el *check* en la sección respectiva. Y en método de resolución "Simplex LP". Las siguientes figuras muestran el ingreso de los parámetros:

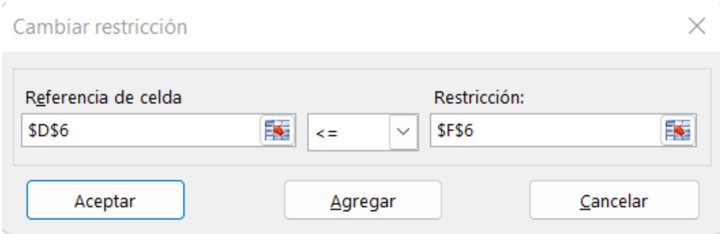


Figura 1-6 Ingreso de restricciones en Solver

Elaborado por el autor

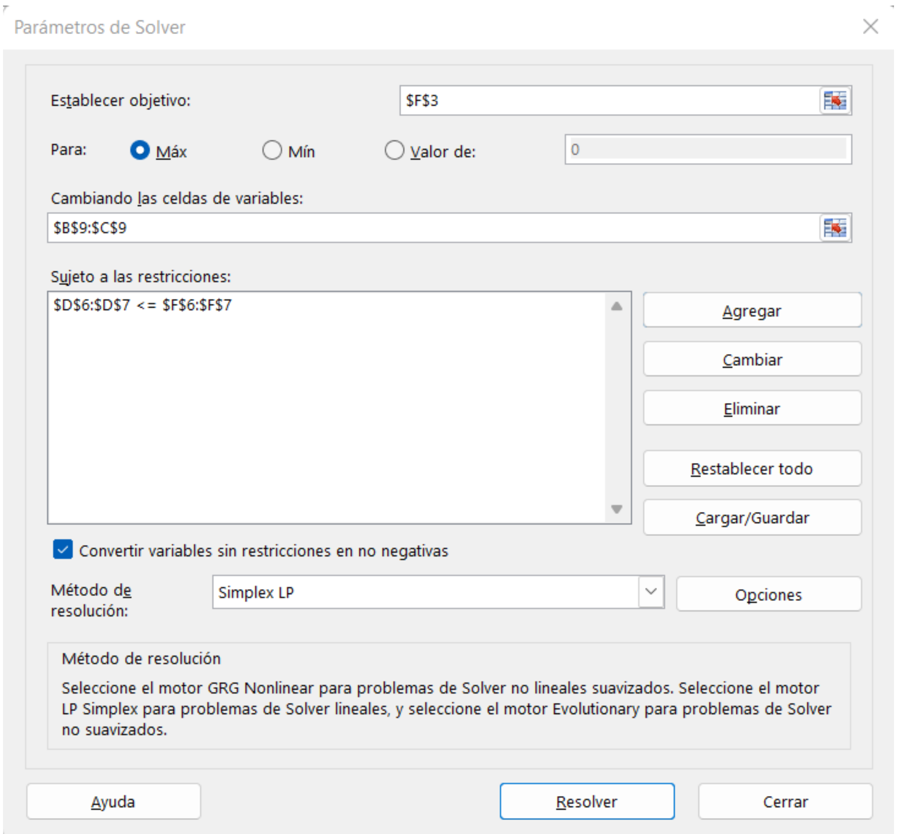


Figura 1-7 Ingreso de parámetros en Solver

Elaborado por el autor

Finalmente, aparecerá la pantalla mencionando si se encontró una solución factible, para lo cual aceptamos.

ISBN: 978-631-6557-43-8

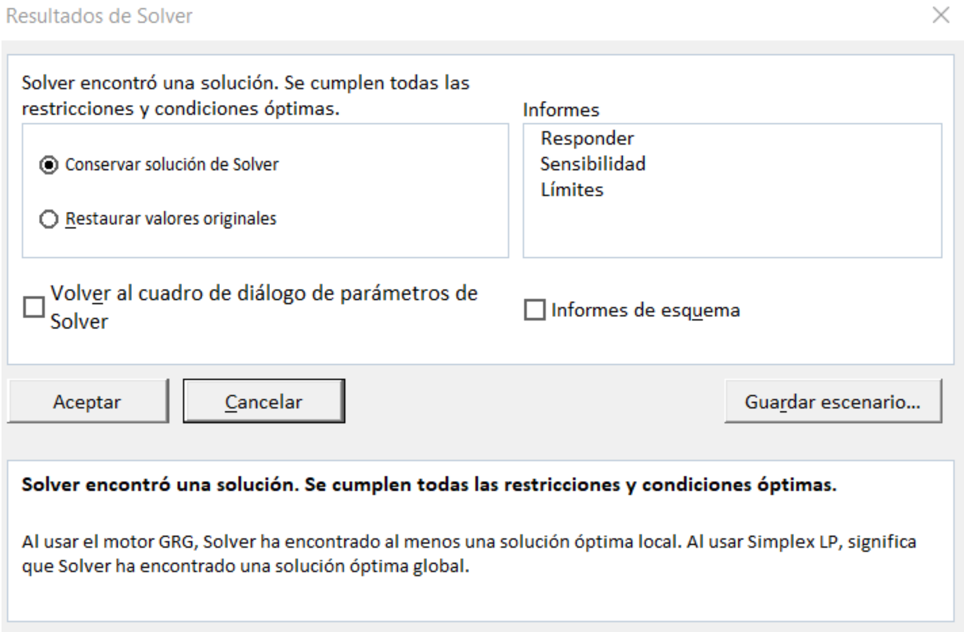


Figura 1-8 Resolución exitosa del ejercicio en Solver

Elaborado por el autor

En el ejercicio planteado, la hoja de cálculo final es la siguiente:

	A	B	C	D	E	F
1		PRODUCTO				UTILIDAD
2		PLATOS (x1)	TAZAS (x2)			max z
3	FUNCIÓN OBJETIVO	4	5			136
4						
5	RESTRICCIONES					
6	Cantidad de arcilla	4	3	120	≤	120
7	Horas de trabajo	1	2	40	≤	40
8						
9	RESPUESTAS	24	8			
10						

Figura 1-9 Respuesta obtenida

Elaborado por el autor

Cuya interpretación es idéntica a los ejercicios anteriores, es decir, se requiere fabricar 24 platos y 8 tazas al día para maximizar la utilidad diaria a $ 136.

** Fin del ejercicio **

1.6 Ejercicios de aplicación

1.6.1 Maximización

Ejercicio 1-6 Utilidades por Producción (Papel)

ISBN: 978-631-6557-43-8

Problema adaptado de (Taha, 2022): Considerar a una industria papelera que produce dos tipos de papel blanco y crema para distribuirlos a diferentes fabricantes, por el papel blanco recibe una utilidad neta semanal de $ 4 000 por cada lote, y de $ 5 000 por cada lote de papel crema (se pueden producir fracciones de lote). Respecto a la producción se utilizan como materia prima a) pulpa de papel, y b) agentes químicos de blanqueamiento y cada tipo de papel requiere diferentes cantidades de cada una como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1-8 Disponibilidad de materia prima. Ejercicio Producción

Materia Prima	Papel blanco	Papel crema	Disponibilidad
MP.A Pulpa de papel (toneladas)	4	6	24
MP. B Agente de blanqueamiento (metros cúbicos)	2	1	6

Elaborado por el autor

Además, por cuestión de producción, se ha determinado que los lotes fabricados de papel blanco no pueden exceder a la del papel crema en más de uno. Y en el estudio de mercado se ha visto que el máximo de venta de papel blanco es de dos lotes.

Se requiere determinar la mejor combinación óptima en la producción de los dos tipos de papel, de manera que se maximice la utilidad semanal.

Para resolver el problema, en primer lugar, debemos definir las variables de decisión; en este caso lo que tratamos de determinar es cuántos lotes de cada tipo de papel, en ese caso x_1 será la cantidad de lotes de papel blanco a producir y x_2 la cantidad de lotes de papel crema.

La meta de la papelera es maximizar la utilidad semanal de ambos tipos de papel, es decir ganar lo más posible. Así, la función objetivo sería:

$$\max z = 4000x_1 + 5000x_2$$

A continuación, definimos las restricciones limitadas por la cantidad de materia prima que tengo disponible. Por la Materia Prima A, que se refiere a la pulpa de papel se tiene que el papel blanco consume 4 toneladas y el crema 6 toneladas y tengo disponible 24 toneladas, que expresado queda:

$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

Asimismo, para la Materia Prima B del agente de blanqueamiento quedaría:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Ahora bien, también se menciona de la restricción de producción que el papel blanco no puede exceder al crema en más de un lote, es decir, si produzco 3 lotes de papel blanco, lo mínimo de papel crema son 2 lotes. Expresando en fórmula sería:

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

Finalmente, la restricción de la demanda menciona que solo vendería dos lotes de papel blanco, por tanto, no debería producir más de esa cantidad:

$$x_1 \leq 2$$

La restricción implícita requiere que las dos variables x_1 y x_2 sean no negativas, es decir puedo producir solo valores positivos o cero. En este caso no existe la restricción de que sean enteros, ya que se menciona que se puede producir fracciones de lotes.

Resumiendo, el modelo completo, queda:

$$\max z = 4000x_1 + 5000x_2$$

$$\begin{aligned} \textit{sujeto a}: \quad & 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo de manera gráfica observamos el área de soluciones factibles entre las inecuaciones, y que están delimitadas por la figura ABCDEF, reemplazando los valores de cada punto en la función objetivo nos da:

$$z = 4000x_1 + 5000x_2$$

$$A = (0,0), z = 0; \qquad B = (1,0), z = 4000$$

$$C = (2,1), z = 13000; \qquad D = (2,2), z = 18000$$

$$E = (1.5,3), z = 21000; \qquad F = (0,4), z = 20000$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

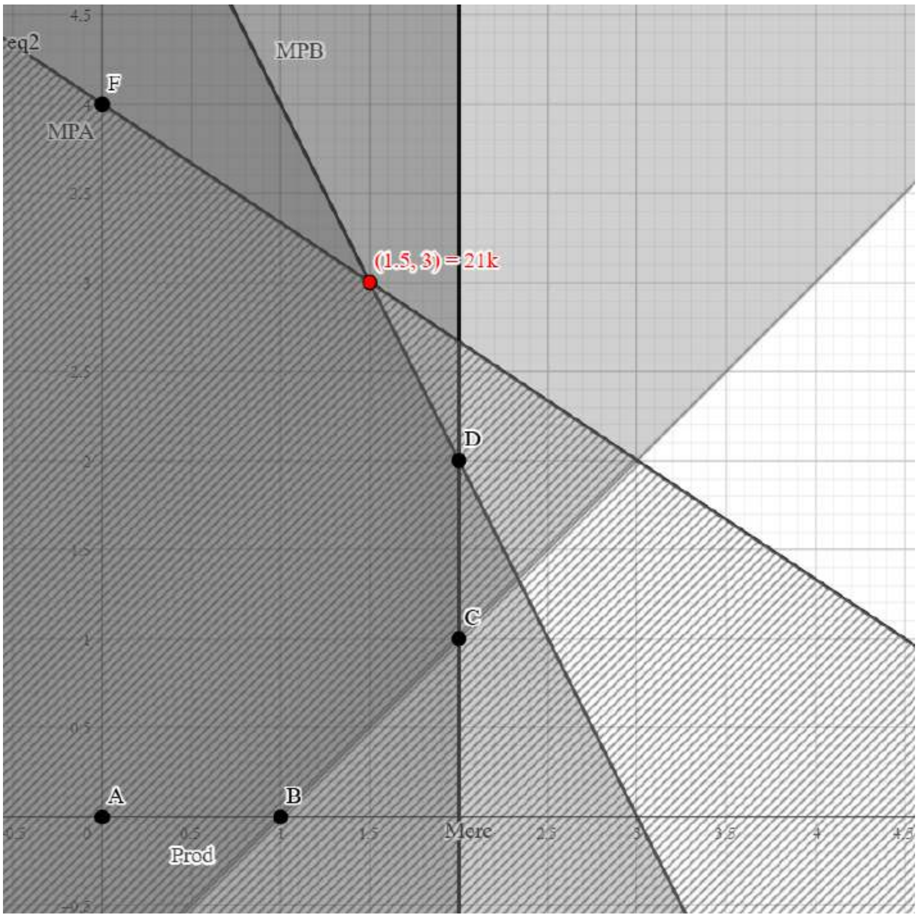
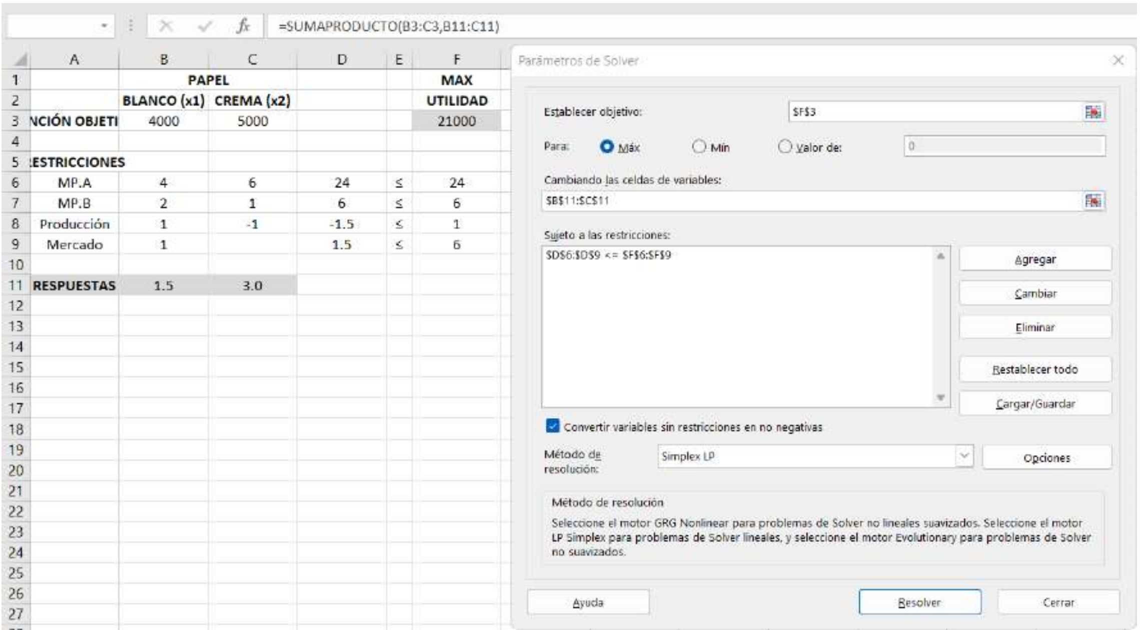


Figura 1-10 Resolución gráfica: Ejercicio Producción

Elaborado por el autor

Utilizando solver:



	A	B	C	D	E	F
1		PAPEL				MAX
2		BLANCO (x1)	CREMA (x2)			UTILIDAD
3	NCIÓN OBJETI	4000	5000			21000
4						
5	ESTRICCIONES					
6	MP.A	4	6	24	≤	24
7	MP.B	2	1	6	≤	6
8	Producción	1	-1	-1.5	≤	1
9	Mercado	1		1.5	≤	6
10						
11	RESPUESTAS	1.5	3.0			

Figura 1-11 Resolución con Solver: Ejercicio Producción

ISBN: 978-631-6557-43-8

Elaborado por el autor

Por tanto, la respuesta es $x_1 = 1.5$, $x_2 = 3$, $z = 21\,000$. Cuya interpretación sería: Para maximizar mi utilidad a un valor de $ 21 000 debo producir semanalmente 1.5 lotes de papel blanco y 3 lotes de papel crema.

** Fin del ejercicio **

Ejercicio 1-7 Utilidades por Producción #2 (Papel)

Del ejercicio anterior, la Empresa Papelera decide producir un tercer tipo de papel llamado opaco-intermedio. Los requerimientos de las materias primas MP.A de pulpa de papel y MP.B de producto químico son de 0.5 toneladas y 0.75 metros cúbicos respectivamente, y la utilidad por cada lote producido es de $ 1000. Además, no se podrá vender más de 1.5 lotes de este nuevo tipo de papel. Modifique el modelo para tener en cuenta la nueva situación y determinar la solución óptima.

Ahora añadimos una nueva variable que será x_3 correspondiente al número de lotes producidos del papel opaco-intermedio, así nuestras funciones quedarían:

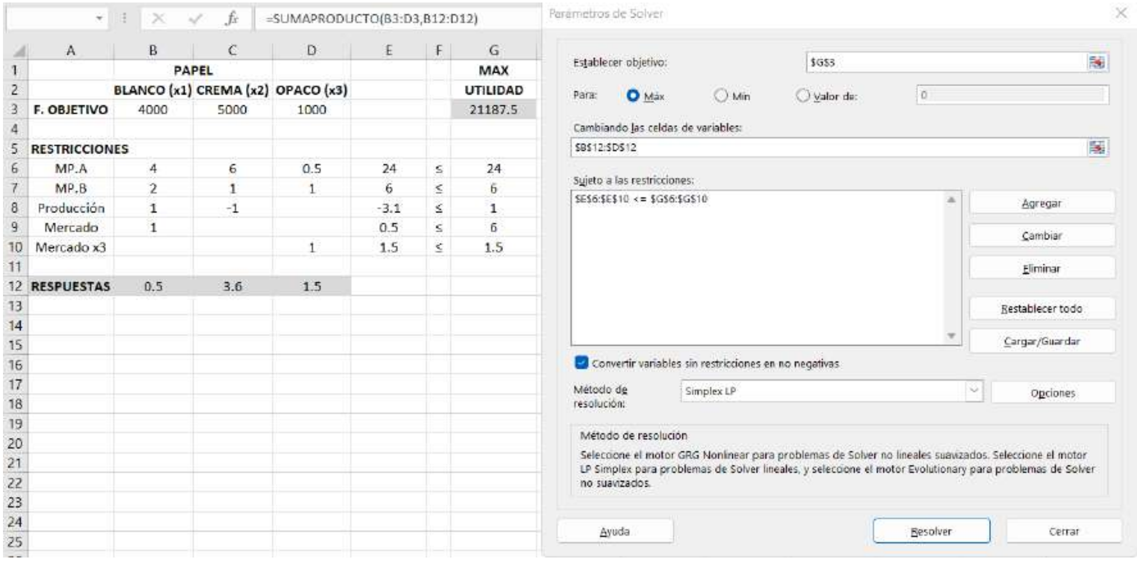
$$\max z = 4000x_1 + 5000x_2 + 1000x_3$$

$$\begin{aligned} \textit{sujeto a:} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 0.5x_3 \leq 24 \\ & 2x_1 + x_2 + 0.75x_3 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_3 \leq 1.5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si se observa la modificación ocurre en la función objetivo y en las primeras dos restricciones, no se afectan las restricciones de producción ni la de mercado y se añade la nueva restricción respecto al nuevo tipo de papel.

Resolviendo en solver, tenemos:

ISBN: 978-631-6557-43-8



	A	B	C	D	E	F	G
1		PAPEL					MAX
2		BLANCO (x1)	CREMA (x2)	OPACO (x3)			UTILIDAD
3	F. OBJETIVO	4000	5000	1000			21187.5
4							
5	RESTRICCIONES						
6	MP.A	4	6	0.5	24	≤	24
7	MP.B	2	1	1	6	≤	6
8	Producción	1	-1		-3.1	≤	1
9	Mercado	1			0.5	≤	6
10	Mercado x3			1	1.5	≤	1.5
11							
12	RESPUESTAS	0.5	3.6	1.5			

Figura 1-12 Resolución con Solver: Ejercicio Producción Papel 2

Elaborado por el autor

La respuesta es, se deben producir 0.5 lotes de papel blanco, 3.6 lotes de papel crema, y 1.5 lotes de papel opaco, de esta forma nuestra utilidad será de $ 21187.50, incrementando en $ 187.50 respecto a la producción anterior. Adicionalmente se observa que se producirá menos papel blanco y más papel crema.

** Fin del ejercicio **

1.6.2 Minimización

Ejercicio 1-8 Válvulas de corazón

Hilal & Erikson (1981) describe una aplicación en un entorno real en American Edwards Laboratories para mejorar la productividad en la producción de válvulas para el corazón de origen biológico. Las válvulas son bioprotésis elaboradas de corazón de porcinos y se implantan en humanos. Dado que las válvulas requeridas por las personas tienen diferente tamaño de las proporcionadas por los porcinos, existe una discordancia en la oferta y demanda generando cientos de miles de dólares por inventario no deseado. Para ello se ha generado un modelo de programación lineal para determinar la combinación óptima de proveedores disponibles respecto a la distribución de la demanda.

Asumir la siguiente situación, donde la compañía tiene dos proveedores A y B que suministra tres tipos de tamaños 1, 2, y 3 (el proveedor siempre provee los 3 tamaños acorde a los porcentajes establecidos, no puede separar y proveer por cada tamaño) siguiendo la siguiente distribución histórica

ISBN: 978-631-6557-43-8

Tabla 1-9 Distribución porcentual por proveedor

Proveedor	Tamaño		
	1	**2**	**3**
A	0.30	0.50	0.20
B	0.10	0.60	0.30

Fuente: (Hilal & Erikson 1981)

Los costos de compra y procesamiento por proveedor A y B son de \$12.40 y \$13.00 dólares respectivamente (calculado de precios base de válvula de \$10, \$14, \$12 y distribuido por proveedor, suponiendo que siempre provee con el porcentaje establecido). La demanda por tamaño es de 100, 300, y 250 unidades. Plantear y resolver

Considerando que se refiere a costos de cada proveedor nuestras variables de análisis son cuánto compramos a cada uno es decir x_a para el proveedor A y x_b para el proveedor B, la función objetivo será de minimización, siendo:

$$\min z = 12.4\, x_a + 13.0\, x_b$$

Respecto a la demanda de cada tamaño los proveedores deberán satisfacer:

$$0.30\, x_a + 0.10\, x_b \geq 100$$

$$0.50\, x_a + 0.60\, x_b \geq 300$$

$$0.20\, x_a + 0.30\, x_b \geq 250$$

Incluyendo la restricción implícita de no negatividad y ya que no se pueden comprar fracciones de válvulas:

$$x_a, x_b \geq 0$$

$$x_a, x_b \in \mathbb{Z}$$

Resolviendo de la manera gráfica:

ISBN: 978-631-6557-43-8

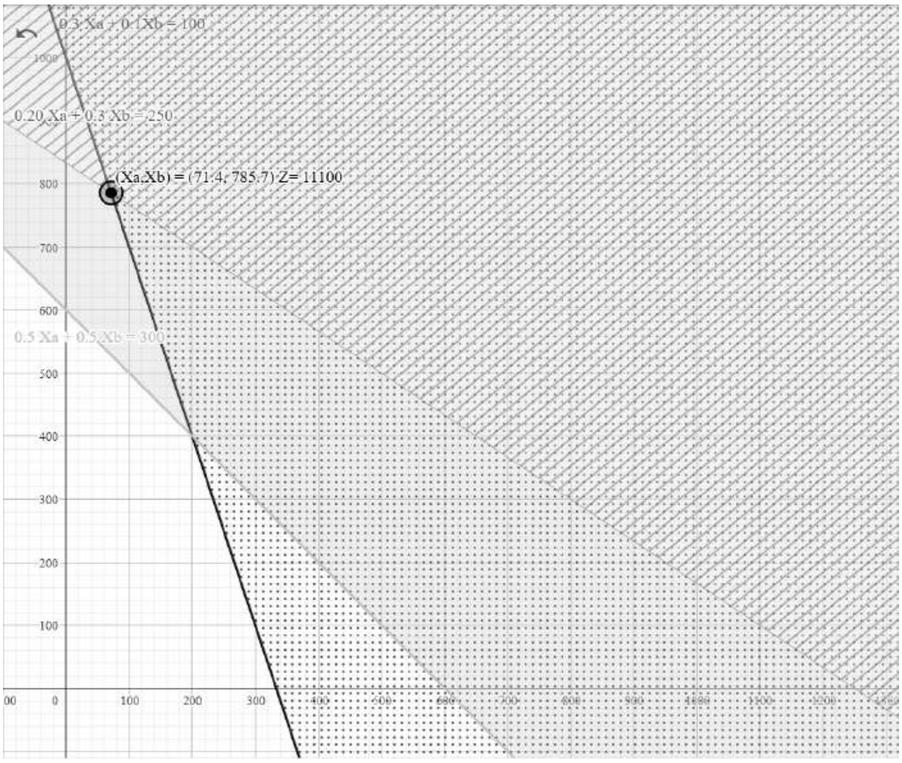


Figura 1-13 Resolución gráfica: Ejercicio Válvulas de Corazón

Elaborado por el autor

La respuesta de manera gráfica es de (71.4, 785.7), como en este caso no se puede comprar en fracciones, es necesario redondear, y verificar si las respuestas cumplen con las condiciones. En este caso, es mejor recurrir a herramientas computacionales.

Resolviendo utilizando solver:

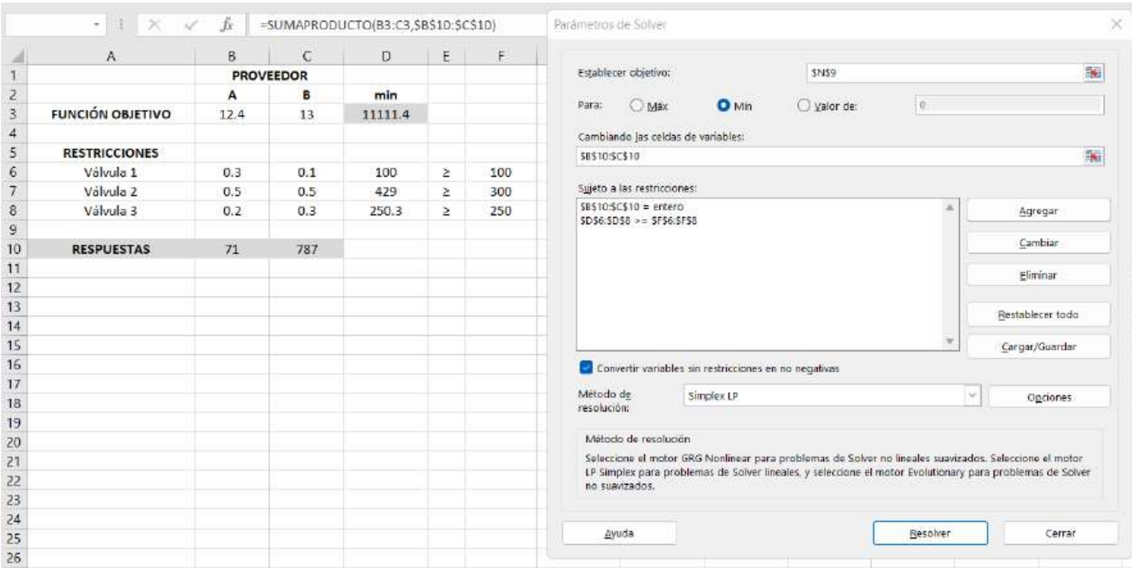


Figura 1-14 Resolución con Solver: Ejercicio Válvulas de Corazón

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

De esta forma la respuesta es: $x_a = 71$ y $x_b = 787$, con $z = 11\,111.40$ cuya interpretación es que se debe requerir del proveedor A un total de 71 válvulas y del proveedor B, 787, con el fin de minimizar los costos de compra y procesamiento a un total de $ 11 111.40

** Fin del ejercicio **

Ejercicio 1-9 Válvulas de corazón (2)

Adaptando el ejercicio Ejercicio 1-8 Válvulas de corazón, se propone: Un laboratorio requiere optimizar los costos de adquisición y almacenado de material de origen orgánico animal que son utilizados para su producto de válvulas de corazón para humanos. Se requieren tres tipos de insumos válvulas grandes, medianas y pequeñas con un número de 450, 500 y 500 respectivamente. Para ello cuenta con tres proveedores 1, 2, y 3. En cada lote comprado, los proveedores, ofrecen un porcentaje específico de cada válvula, según se anota en la siguiente tabla:

Tabla 1-10 Distribución porcentual por proveedor

Tamaño	**Proveedor**		
	1	**2**	**3**
V. Grande	0.40	0.30	0.20
V. Mediana	0.40	0.35	0.20
V. Pequeña	0.20	0.35	0.60

Elaborado por el autor

Los costos asociados a los proveedores 1, 2, y 3 respectivamente son en miles de dólares: 5, 4 y 3. Plantear y ofrecer un plan de compra

Nuestras variables están asociadas a cuánto debemos pedir a cada proveedor, es decir, en las variables en las que tenemos poder de decisión, nótese que la tabla del presente ejercicio es transpuesta al anterior por lo que no se puede asignar indistintamente a las filas o a las columnas las variables, así en este caso tendríamos tres variables: x_1 para el proveedor, y x_2, x_3 para los otros dos proveedores.

La función objetivo en este caso es de minimización, ya que queremos reducir costos considerando aquellos referidos a cada proveedor:

$$\min z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Las restricciones corresponden a la cantidad de cada tipo de válvula que el laboratorio necesita, de esta forma, para las válvulas grandes, medianas y pequeñas tenemos las restricciones:

$$0.40\,x_1 + 0.30\,x_2 + 0.20\,x_3 \geq 450 \rightarrow Válvulas\ grandes$$
$$0.40\,x_1 + 0.35\,x_2 + 0.20\,x_3 \geq 500 \rightarrow Válvulas\ medianas$$
$$0.20\,x_1 + 0.35\,x_2 + 0.60\,x_3 \geq 500 \rightarrow Válvulas\ pequeñas$$

Incluyendo las restricciones implícitas de no negatividad y de no fraccionario:

$$x_i \geq 0\ y\ x_i \in \mathbb{Z}\quad para\ todo\ i\ (i = 1,2,3)$$

Resolviendo el planteamiento en solver:

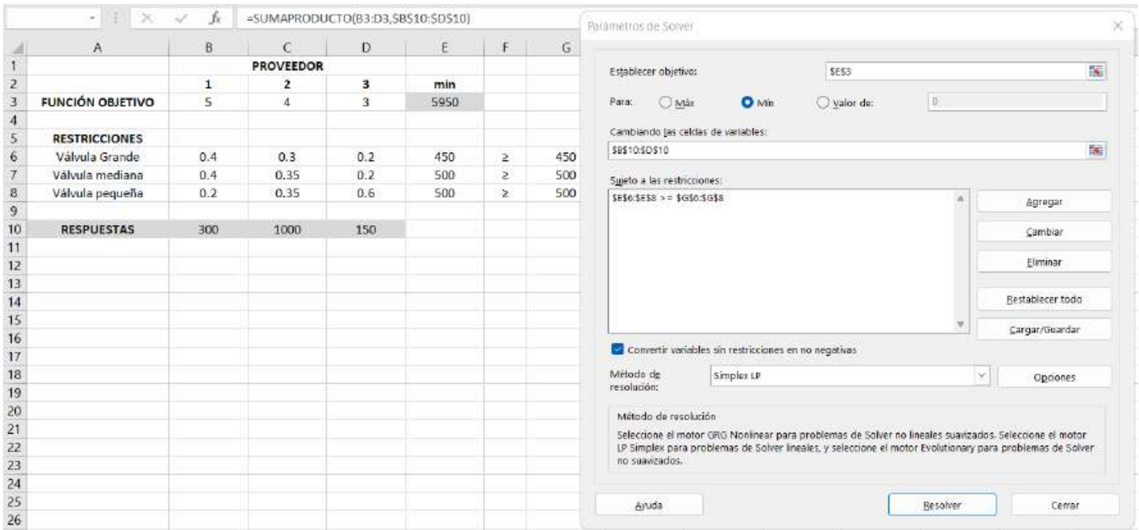


Figura 1-15 Resolución con Solver: 2 Ejercicio Válvulas de Corazón

Elaborado por el autor

Nótese que no se ha incluido la restricción de que las respuestas sean enteros únicamente por comodidad.

Así, la respuesta numérica es: $x_1 = 300, x_2 = 1000, x_3 = 150, z = 5950$, finalmente es necesario interpretar la respuesta:

Se requiere, solicitar 300 lotes de material orgánico al proveedor 1, 1000 al proveedor 2, y 150 al proveedor 3; de esta forma los costos de compra y almacenamiento serían el mínimo posible de 5 950 000 USD (recordando que la unidad era miles de dólares)

** Fin del ejercicio **

ISBN: 978-631-6557-43-8

CAPÍTULO 2

2 APLICACIONES PRÁCTICAS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LAS CIENCIAS ADMINISTRATIVAS

Como ya se ha observado en el Capítulo 1, la programación lineal es una herramienta poderosa que ha encontrado una amplia gama de aplicaciones en el campo de la administración, lo cual permite a los gerentes y tomadores de decisiones optimizar recursos, mejorar procesos y alcanzar objetivos estratégicos de manera eficiente.

Una de las áreas clave donde se ha aplicado la programación lineal es en la optimización de operaciones de producción, lo que ha permitido maximizar la productividad y los ingresos, esto se ha aplicado desde los años 60 como lo muestra Attra y otros (1961), y en la actualidad gracias a la capacidad computacional se han estudiado aplicaciones relacionadas con la programación por metas, buscando un equilibrio entre diferentes indicadores clave y en sistemas adaptativos complejos en la toma de decisiones estratégicas (Herrera-Sánchez et al., 2020; Wollmann & Steiner, 2017). Más allá de estos ejemplos, la programación lineal también se aplica en la planificación de proyectos, la asignación de recursos, la gestión de inventarios y la toma de decisiones financieras, entre otras áreas (Caballero & Grossmann, 2007).

En este capítulo se plantean diferentes ejercicios que ilustran estas aplicaciones.

2.1 Producción y Servicios

2.1.1 Planificación de desarrollo urbano

Boaden (1977) detalla la estructura de los modelos de programación lineal aplicados a la distribución óptima de usos de suelo, considerando que la función objetivo debe tener la siguiente estructura:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} V_j x_j + F$$

Donde V_j es el flujo de dinero por unidad de tipo de uso de suelo j; F es el valor presente neto fijado por el flujo de caja; n es el número de los diferentes tipos de uso de suelo.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Las restricciones por su parte son de dos tipos: las relacionadas con los recursos limitados por el proyecto, y las ligadas al planificador que requiere cumplir con sus objetivos a la vez que sobrelleva las restricciones de las autoridades.

Ejercicio 2-1 Construcción de ciudadelas

Considerar una inmobiliaria en la provincia de Chimborazo que va a desarrollar un proyecto de ciudadela alrededor de la laguna Valle Hermoso en el municipio de Guano. La zona no posee alcantarillado sanitario, por lo que las viviendas que ya se encuentran construidas allí recurrieron a fosas sépticas, sin embargo, debido a las pocas restricciones del departamento de gestión ambiental la mayoría de estas fosas están instaladas de manera inadecuada, lo que causó contaminación en la laguna e inició un proceso de eutrofización (Romero Medina, 2019). En este sentido el municipio aprobó reglamentos más estrictos para los futuros proyectos que se desarrollen alrededor de la laguna.

La inmobiliaria está estudiando la posibilidad de desarrollar su proyecto en un terreno de 12 hectáreas, y planea construir casas con modelo unificado unifamiliares y dobles, y casas con planos personalizados para una familia. Para ello ha dividido en secciones de 150 metros cuadrados al terreno. Las casas unifamiliares requieren dos secciones (300 m^2), las dobles, tres secciones (450 m^2), y las personalizadas cuatro secciones (600 m^2) de manera que las fosas sépticas puedan ser diseñadas adecuadamente, y como requisito no más de la mitad de las casas deben ser unifamiliares. Adicionalmente, se requiere una sección de recreación para parques por cada 100 familias, y para las calles y áreas de servicios el 15% del área total.

Las ganancias estimadas por cada vivienda son de $ 10000 dólares para las casas unifamiliares, $ 12000 para las dobles y para las personalizadas $ 15000.

La empresa para construir el proyecto deberá pagar un mínimo de $100 000 al municipio. Por cada casa también se requiere el pago de una membresía para la gestión de la ciudadela que es de $1000 para las unifamiliares, $1200 por las dobles, y 1400 por las personalizadas, por su parte la inmobiliaria debe pagar $800 por unidad de recreación.

Para la gestión del agua el municipio ha asignado 50 000 litros al día para la ciudadela, con datos históricos se estima que una casa unifamiliar usa 100 l, una doble 150 l, 210 l para las personalizadas, y 115 l para las áreas recreativas.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Desarrolle un modelo de Programación Lineal para determinar el plan óptimo para la constructora y determine la solución en Solver.

Planteamiento del modelo matemático.

En primer lugar, es necesario definir las variables de decisión, en este caso lo que debemos considerar cuántas casas vamos a construir, por lo que:

$$x_1 = Número\ de\ casas\ unifamiliares$$

$$x_2 = Número\ de\ casas\ dobles$$

$$x_3 = Número\ de\ casas\ personalizadas\ (para\ 3\ familias)$$

Sin embargo, también se debe tomar en cuenta el espacio que va a dedicar a las áreas recreativas ya que este dependerá del número de casas construidas

$$x_4 = Número\ de\ lotes\ asignados\ a\ áreas\ recreativas$$

En este caso no es una variable de decisión el área dedicada a las calles y áreas de servicios ya que conocemos directamente el valor resultado del 15%.

La función objetivo está relacionada con maximizar las utilidades, que se calcula con los ingresos de las utilidades menos los costos por membresía y los impuestos al municipio, así:

$$\max z = (10000x_1 + 12000x_2 + 15000x_3) - (1000x_1 + 1200x_2 + 1400x_3 + 100000)$$

$$\max z = 9000x_1 + 10800x_2 + 13600x_3 - 100000$$

A continuación, se generan las restricciones, iniciando la relacionada con el área disponible. Se menciona que se tiene 12 hectáreas, pero se requiere unificar las unidades por lo que se trabajará en secciones, una sección tiene 150 m^2 por lo tanto transformado se tiene:

$$12\ ha \frac{10000m^2}{1ha} \cdot \frac{1\ sección}{150\ m^2} = 800\ secciones$$

Teniendo en cuenta que únicamente se ocupa el 85% del área total y según el número de secciones que ocupa cada una de las casas, se tendría:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 0.85 \cdot 800$$

Del total de casas, no puede haber más del 50% de casas unifamiliares, expresando en función será:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_1 \leq 0.5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 - 0.5x_4 \leq 0$$

Por cada 100 familias se debe generar una sección de recreación, considerando que cada casa tiene diferente número de familias se establece:

$$\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{100} \leq x_4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 100x_4 \leq 0$$

Respecto a la restricción de la cantidad de agua disponible:

$$100x_1 + 150x_2 + 210x_3 + 115x_4 \leq 50000$$

Y finalmente, las restricciones implícitas de no negatividad y de enteros

Por tanto, el modelo planteado es:

$$\max z = 9000x_1 + 10800x_2 + 13600x_3 - 100000$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 680 \\ & 0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 - 0.5x_4 \leq 0 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - 100x_4 \leq 0 \\ & 100x_1 + 150x_2 + 210x_3 + 115x_3 \leq 50000 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Resolución

Ingresando los datos en solver tal como muestra la siguiente tabla se obtienen las respuestas:

H3 =SUMAPRODUCTO(B3:E3,B11:E11)+F3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		USO DE SUELO						MAX
2		UNI.F (x1)	DOBLE (x2)	PERS (X3)	REC (X4)			UTILIDAD
3	FUNCIÓN OBJETIVO	9000	10800	13600	0	-100000		2578400
4								
5	RESTRICCIONES							
6	Espacio Total	2	3	4	1	680	≤	680
7	Máximo de casas	0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0.0	≤	0
8	Areas Verdes	1	2	1	-100	-96.0	≤	0
9	Agua disponible	100	150	210	115	34325.0	≤	50000
10								
11	RESPUESTAS	138.0	133.0	0.0	5.0			

Figura 2-1 Resolución con Solver. Ejercicio construcción de ciudadela

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_1 = 138, x_2 = 133, x_3 = 0, x_4 = 5, z = 2578400$$

Interpretación

Para maximizar la utilidad a $2,578,400 USD se requiere construir 138 casas unifamiliares y 133 casas dobles. Lo que implica que no es adecuado dedicar el terreno para la construcción de casas con planos personalizados, y por el número de casas se tendrá que dedicar 5 secciones para áreas verdes y recreativas.

** Fin del ejercicio **

2.1.2 Producción de bienes

De manera similar al Ejercicio 1-1 el planteamiento de estos ejercicios se basa en plantear la función objetivo se plantea a través de:

$$\max/\min z = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

Donde la función de z dependerá si se trata de optimizar utilidades $\max z$ o de minimizar costos unitarios $\min z$; C_i representa las utilidades calculadas a partir de los ingresos y egresos de cada producto x_i, en un número total de n

Las restricciones sueles estar asociadas a la maquinaria $\leq$ o a la demanda mínima en el mercado $\geq$

Ejercicio 2-2 Producción chaquetas

Una empresa de moda confecciona cuatro productos clave: chompas de mujer y hombre, y chaquetas de mujer y hombre. Para calcular cuál serán sus productos en los que tendrá mayor utilidad decide aplicar un modelo de programación lineal, considerando 3 procesos: Corte/Preparación, Confección, y Terminados. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes:

Tabla 2-1 Tiempo, Costo y Precio de venta. Ejercicio producción

Proceso	Tiempo en el proceso (h)				Capacidad (h)	Costo (USD/h)
	Chompa Mujer	Chompa Hombre	Chaqueta Mujer	Chaqueta Hombre		
Preparación y Corte	4	3	3	2	500	10
Confección	3	3	1	2	400	5
Terminados	3	2	2	1	350	4

ISBN: 978-631-6557-43-8

Precio de venta (USD)	80.0	70.0	50.0	44.0

Elaborado por el autor

Adicionalmente, si es que se producen chompas al menos el 25% del total de chompas deben ser de mujer, y viceversa, es decir no se pueden confeccionar la totalidad de chompas solo para hombre o solo para mujer.

Para la resolución, en primer lugar, se requiere plantear las variables de decisión, que en este caso serán cada uno de los productos que yo deseo confeccionar:

$$x_1 = Número\ de\ chompas\ de\ mujer\ a\ producir$$

$$x_2 = Número\ de\ chompas\ de\ hombre\ a\ producir$$

$$x_3 = Número\ de\ chaquetas\ de\ mujer\ a\ producir$$

$$x_4 = Número\ de\ chaquetas\ de\ hombre\ a\ producir$$

En este caso la función objetivo, está sujeta a maximizar la utilidad por la producción de la ropa. Inicialmente podríamos pensar que:

$$\max z = 80x_1 + 70x_2 + 50x_3 + 44x_4$$

Sin embargo, tenemos que considerar los costos de producción, y para cada producto es diferente, ya que usa un número de horas específico en cada proceso, y para cada proceso se tiene un costo. De esta manera se calcularían los costos:

$$Costo = \sum horas_{maquinaria} * costo_{hora}$$

$$Costo\ x_1 = 4 * 10 + 3 * 5 + 3 * 4 = 67$$

$$Costo\ x_2 = 3 * 10 + 3 * 5 + 2 * 4 = 53$$

$$Costo\ x_3 = 3 * 10 + 1 * 5 + 2 * 4 = 43$$

$$Costo\ x_4 = 2 * 10 + 2 * 5 + 1 * 4 = 34$$

Por tanto, la función objetivo son el precio de venta (ingreso) menos los costos (egresos):

$$\max z = (80 - 67)x_1 + (70 - 53)x_2 + (50 - 43)x_3 + (44 - 34)x_4$$

$$\max z = 13x_1 + 17x_2 + 7x_3 + 10x_4$$

Considerando las restricciones, tenemos 3 procesos: corte, confección y terminado con un máximo de horas que se puede asignar a cada uno, sería:

Para corte:

$$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 500$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Es decir, 4 horas en chompas mujer, 3 horas en chompas hombre, 3 horas en chaquetas mujer y 2 horas en chaquetas hombre deben ocupar las 500 horas o menos disponibles.

De manera similar para confección y terminado

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 400$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 350$$

Las siguientes restricciones se asignan a las condiciones impuestas por la demanda, es decir siempre debo tener un 25% de chompas de mujer del total de chompas producidas (que es la suma de las de mujer más la de hombre), expresando matemáticamente:

$$x_1 \geq 0.25\ (x_1 + x_2)$$

$$x_1 \geq 0.25x_1 + 0.25x_2$$

$$x_1 - 0.25x_1 - 0.25x_2 \geq 0$$

$$0.75x_1 - 0.25x_2 \geq 0$$

$$-0.75x_1 + 0.25x_2 \leq 0$$

Nótese que para esta ocasión se ha procedido paso por paso el despeje de las incógnitas, para señalar que siempre es preferible colocar las restricciones en forma de $\leq$

De manera similar para el 25% de chompas de hombre respecto al total, se tendría:

$$x_2 \geq 0.25\ (x_1 + x_2)$$

$$0.25x_1 - 0.75x_2 \leq 0$$

Finalmente, se consideran las restricciones implícitas y de que deben ser enteros

El modelo final es:

$$\begin{aligned}
\max z = {} & 13x_1 + 17x_2 + 7x_3 + 10x_4 \\
s.t. \quad & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 500 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 400 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 500 \\
& -0.75x_1 + 0.25x_2 \leq 0 \\
& 0.25x_1 - 0.55x_2 \leq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, y\ son\ enteros
\end{aligned}$$

Solucionando en solver se obtiene: $x_1 = 30, x_2 = 90, x_3 = 34, x_4 = 3, z = 2188$, según se observa en la siguiente figura:

ISBN: 978-631-6557-43-8

H4 =SUMAPRODUCTO(B4:E4,B13:E13)

B4 =B3-(B7*$J$7+B8*$J$8+B9*$J$9)

F7 =SUMAPRODUCTO(B7:E7,$B$13:$E$13)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		USO DE SUELO						MAX		
2		CHOP.M (x1)	CHAP.H (x2)	CHAQ.M (X3)	CHAQ.H (X4)			UTILIDAD		
3	*Precio Venta*	*80*	*70*	*50*	*44*					
4	**FUNCIÓN OBJETIVO**	**13**	**17**	**7**	**10**			2188		
5										
6	**RESTRICCIONES**									*COSTO*
7	Corte	4	3	3	2	498	≤	500		*10*
8	Confección	3	3	1	2	400.0	≤	400		*5*
9	Terminado	3	2	2	1	341.0	≤	350		*4*
10	Chaquetas	-0.75	0.25			0.0	≤	0		
11	Chaquetas	0.25	-0.75			-60.0	≤	0		
12										
13	**RESPUESTAS**	30.0	90.0	34.0	3.0					

Figura 2-2 Resolución con Solver. Ejercicio Producción Ropa

Elaborado por el autor

Procediendo a la interpretación, tomemos en cuenta lo útil de la programación lineal, ya que a simple vista lo que deberíamos producir más son chompas de hombre, luego chompas de hombre, chaquetas de hombre y finalmente chaquetas de mujer; luego tal vez, quisiéramos analizar las horas y las chaquetas de hombre serían mejor porque se demoran menos. Sin embargo, si observamos el resultado, no sigue ninguna de esas lógicas, y es que la PL justamente hace que se tomen en consideración todas las variables y restricciones a la vez. Este ejercicio el siguiente capítulo, servirá para el análisis de sensibilidad, la diferencia con la programación entera y se observarán otros detalles importantes.

La respuesta final es: Para maximizar mi utilidad a $ 2188 dólares, es necesario planificar mi producción de forma que se realicen 30 chompas de mujer, 90 chompas de hombre, 34 chaquetas de mujer y 3 chaquetas de hombre.

** Fin del ejercicio **

Otro aspecto cuando planteamos problemas de producción es el de la producción conjunta, esto implica según explica Drury (1992) que, en ocasiones, se tiene la siguiente estructura de producción:

ISBN: 978-631-6557-43-8

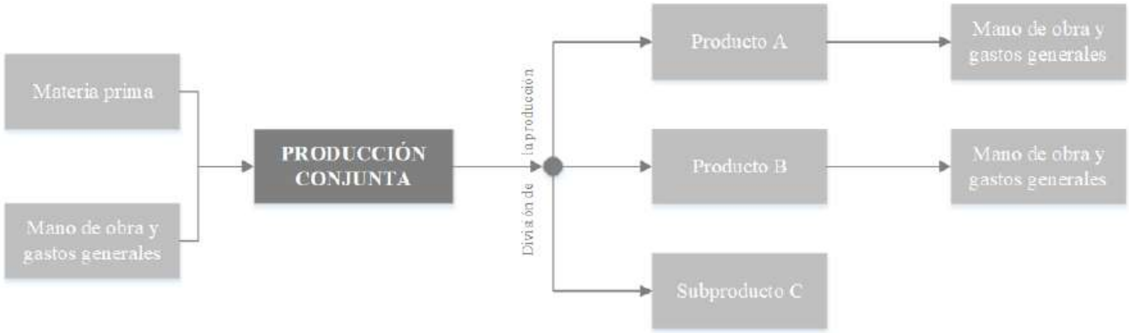


Figura 2-3 Diagrama de Flujo para Producción Conjunta

Elaborado por el autor

Es decir, que previo a realizar un producto se ha realizado un proceso previo que también sirvió para otro producto. En el caso del ejercicio anterior, podría decirse que para hacer las chompas se seguía el mismo proceso de cortado, y luego se separaba según confección y terminados. Estos casos, deben ser tratados con cuidado sobre todo en el planteamiento de las restricciones.

Ejercicio 2-3 Producción conjunta de dos productos: Perfumes

Una emprendedora que comercia con esencias y extractos de perfume, ha decidido ponerse instalar un pequeño laboratorio de forma que elabore sus propios aromas, en este sentido iniciará con dos eau de toilette “Aura” y “Bruma” para fabricar cada tipo de perfume puede comprar por $ 3.00 la materia prima, procesar la materia prima requiere 1 hora de trabajo en el laboratorio; cuando se ha procesado rinde para 3 onzas de Aura y 4 onzas de Bruma; cada onza se vende a $7.00 y $6.00 respectivamente. También tiene la opción de no solo generar la esencia del eau de toilette, sino de hacer un extracto más concentrado o eau de parfum, un Perfume Aura se vendería en 18 USD/oz y un Perfume Bruma en 14 USD/oz; para generar los extractos se requiere trabajo adicional en el laboratorio, de forma que para procesar una onza de Aura y convertirlo en una onza Perfume Aura cuesta $4.00 y se requieren 3 horas, para una onza de Perfume Bruma se tiene un costo de procesamiento de $4.00 y se requieren 2 horas de trabajo por onza de Bruma. Cada mes se tiene un total de 60 horas de tiempo para trabajar en el laboratorio y se puede comprar hasta 40 unidades de materia prima. Suponiendo que el costo de trabajo en el laboratorio es un costo fijo: Formule el problema de Programación Lineal que determine cómo el emprendimiento maximizaría sus ganancias

ISBN: 978-631-6557-43-8

Siguiendo la estructura de solución ya determinada, se requiere definir las variables de decisión, primero cuánto deberíamos comprar de materia prima:

$$x_1 = unidades\ de\ materia\ prima\ a\ comprar$$

Inicialmente podríamos pensar que tenemos que comprar la totalidad disponible es decir las 40 unidades, sin embargo, recordemos que tenemos otros procesos por ejemplo el de laboratorio, ¿qué haría si tengo la materia prima pero no dispongo de las horas disponibles para trabajarlo?, por eso es una variable, porque hasta no resolver mi modelo no he determinado la cantidad a comprar.

Las siguientes variables de decisión están asociadas a los eau de toilette y de parfum, que sería:

$$x_2 = onzas\ de\ eau\ de\ toilette\ de\ Aura\ vendidas$$
$$x_3 = onzas\ de\ Perfume\ Aura\ vendidas$$
$$x_4 = onzas\ de\ eau\ de\ toilette\ de\ Bruma\ Vendidas$$
$$x_5 = onzas\ de\ Perfume\ Bruma\ vendidas$$

La función objetivo está relacionado con las ganancias que se tendrán por la venta de los eau y los perfumes, menos los gastos en la compra de la materia prima y los del tiempo en el laboratorio.

$$\max z = -3x_1 + 7x_2 + 18x_3 - 4x_3 + 6x_4 + 14x_5 - 4x_5$$
$$\max z = -3x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 6x_4 + 10x_5$$

Continuamos con las restricciones, que en este caso son la cantidad de materia prima que puedo comprar:

$$x_1 \leq 400$$

y el número de horas de laboratorio que puedo dedicar para los tres procesos que necesitan: la materia prima, y los perfumes, en este caso los eau no requieren laboratorio ya que vienen procesados directamente de la materia prima:

$$x_1 + 3x_3 + 2x_5 \leq 60$$

Las siguientes restricciones son las que se refieren a la producción conjunta, ya que si resolviéramos el ejercicio anterior tendríamos un error ya que $x_2\ y\ x_4$ tenderían al infinito, la que tendríamos que razonar es la que viene dada por la producción conjunta, de la siguiente manera:

ISBN: 978-631-6557-43-8

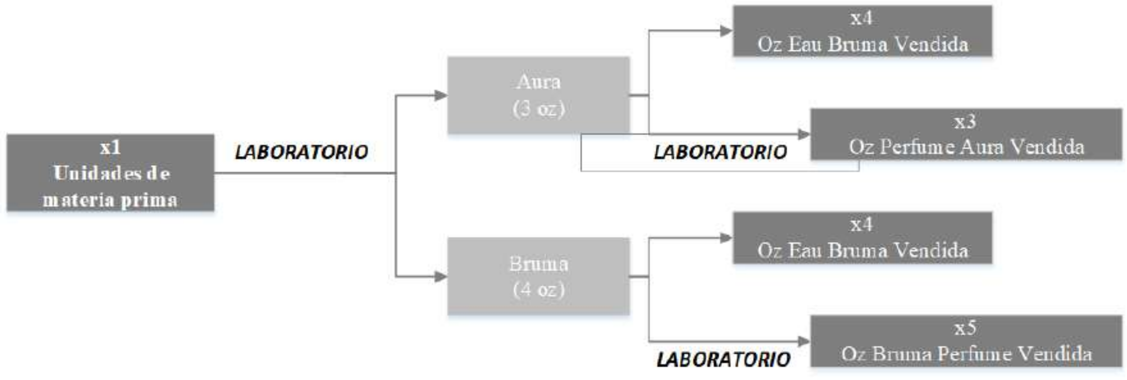


Figura 2-4 Proceso combinado. Ejercicio Producción Perfume

Elaborado por el autor

Adicionalmente, se deben tomar en cuenta las unidades, así las siguientes restricciones siguen el formato:

$$Onzas\ vendidas\ de\ eau + perfume$$
$$= libras\ de\ materia\ prima * \frac{onzas\ en\ bruto\ producidas}{1\ libra\ de\ materia\ prima}$$

Reflejándose en:

$$x_2 + x_3 = 3x_1$$
$$-3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Y

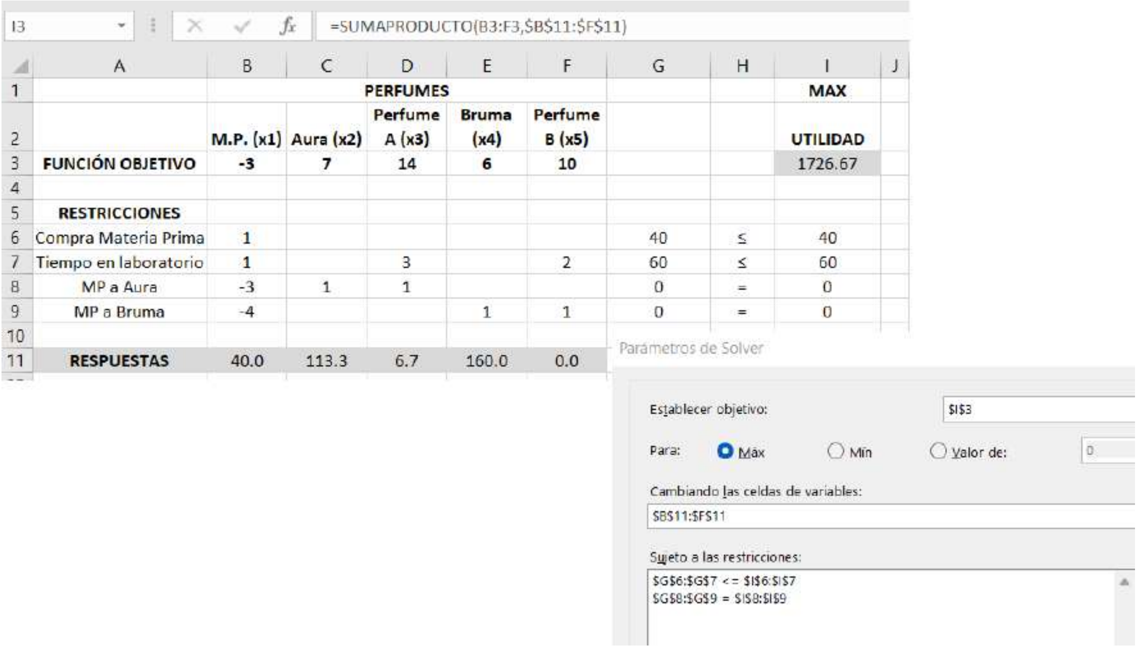
$$x_4 + x_5 = 3x_1$$
$$-3x_1 + x_4 + x_5 = 0$$

En este caso no se tomará en cuenta la restricción de número entero, considerando que se puede vender fracciones de volúmenes y su pago proporcional, la única restricción implícita será la de no negatividad.

Combinando todos los puntos anteriores, el modelo es:

$$\begin{array}{ll}
\max z = & 13x_1 + 17x_2 + 7x_3 + 10x_4 \\
s.t. & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 500 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 400 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 500 \\
 & -0.75x_1 + 0.25x_2 \leq 0 \\
 & 0.25x_1 - 0.55x_2 \leq 0 \\
\multicolumn{2}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, y\ son\ enteros}
\end{array}$$

ISBN: 978-631-6557-43-8



I3 =SUMAPRODUCTO(B3:F3,$B$11:$F$11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				PERFUMES					MAX
2		M.P. (x1)	Aura (x2)	Perfume A (x3)	Bruma (x4)	Perfume B (x5)			UTILIDAD
3	FUNCIÓN OBJETIVO	-3	7	14	6	10			1726.67
4									
5	RESTRICCIONES								
6	Compra Materia Prima	1					40	≤	40
7	Tiempo en laboratorio	1		3		2	60	≤	60
8	MP a Aura	-3	1	1			0	=	0
9	MP a Bruma	-4			1	1	0	=	0
10									
11	RESPUESTAS	40.0	113.3	6.7	160.0	0.0			

Figura 2-5 Resolución en Solver. Ejercicio Producción Perfume

Elaborado por el autor

La respuesta es: $x_1 = 40, x_2 = 113.3, x_3 = 6.7, x_4 = 160, x_5 = 0,\ z = 1726.67$, que interpretando: La máxima utilidad a obtener es de \$ 1726.67 cada mes, comprando las 40 unidades de materia prima que estaban disponibles, y elaborando a partir de ella 113.3 onzas de eau de Aura, 160 onzas de eau de Bruma, y únicamente 6.7 oz de Perfume Aura, sin que sea necesario realizar Perfume Bruma.

** Fin del ejercicio **

Cuando requerimos programación por metas en la producción Herrera-Sánchez y otros (2020) detalla que, el primer paso es fijar los objetivos $f(x)$, que se consideren relevantes, luego determinar el nivel de logro, t, que corresponda a cada objetivo para incorporar en el modelo respecto a las desviaciones: d_i^+como la variable de desviación positiva que cuantifica el exceso de logro de una meta, y d_i^- la que cuantifica la falta de logro de una meta como desviación negativa, la interpretación de lo deseado dependerá de cada modelo.

Para la función objetivo, se inducen variables de desviación a_j acorde a los coeficientes de logro donde cada uno es función de las desviaciones. De esta forma, el modelo matemático para la programación de metas queda expresado de la siguiente manera:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$\min z = \sum a_i d_i^{+,-}$$

Ejercicio 2-4 Programación por metas en mantenimiento

Considerar una línea de producción que requiere mantenimiento, cuando se necesita mantenimiento correctivo el costo asociado es de $ 3000, si es preventivo $ 2500 y si es predictivo $ 4500. Los tiempos que demora cada uno de ellos es de 3.0 horas, 3.5 horas y 4.0 horas respectivamente. Como referencia previa según el historial se tiene un promedio de 4 mantenimientos correctivos, 10 de preventivos y 2 órdenes de mantenimiento predictivo. De esta forma, se ha establecido una política que se mantengan como máximo los 4 mantenimientos correctivos, se mantengan 2 predictivos a lo largo del tiempo, y que como mínimo se realicen los 10 preventivos. Del presupuesto total como máximo el 20% se asignará a mantenimientos correctivos. Los recursos disponibles son $ 50000 y 70 horas de mano de obra.

La idea es permitir metas múltiples y no solo lograr el costo mínimo. Para ello la meta es utilizar todo el presupuesto asignado, cumpliendo el tiempo disponible y las rutinas que se hayan establecido en su política.

Un planteamiento inicial para la producción sería el minimizar los costos que se dan en el mantenimiento $\min z = 3000x_1 + 2500x_2 + 4500x_3$ pero esto no tendría sentido para el modelo de programación lineal, ya que la respuesta sería que no se hagan mantenimientos. Por lo que en realidad lo que deseamos es saber cuántos de los mantenimientos preventivos pueden asignarse a correctivos, y adicionalmente queremos saber cuál es el presupuesto en exceso que estamos considerando. Ante esto, añadiremos las variables de desviaciones, teniendo como variables:

$$x_1 = número\ de\ mantenimientos\ correctivos$$

$$x_2 = número\ de\ mantenimientos\ preventivos$$

$$x_3 = número\ de\ mantenimientos\ predictivos$$

$$d_1^+ = exceso\ de\ uso\ del\ presupuesto\ (desviación)$$

$$d_1^- = presupuesto\ no\ usado$$

$$d_2^+ = exceso\ de\ tiempo\ utilizado\ para\ cumplir\ el\ plan$$

$$d_2^- = tiempo\ no\ usado$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$d_3^+ = mantenimientos\ preventivos\ adicionales\ realizados$$

$$d_3^- = mantenimientos\ faltantes\ para\ cumplir\ con\ el\ plan$$

Para la función objetivo, lo que no queremos, o deseamos minimizar los presupuestos gastados en exceso y el tiempo usado en exceso. Entonces:

$$\min z = a_1 d_1^+ + a_2 d_2^+$$

Las restricciones vendrían a ser las siguientes, por el presupuesto:

$$3000x_1 + 2500x_2 + 4000x_3 - d_1^+ + d_1^- = 50000$$

Nótese que el presupuesto es $=$ y no $\leq$ esto se debe a que cualquier faltante se almacenará en la variable d_1^+ algo similar a lo realizado en el método simplex para colocarlo en la forma estándar.

Para los tiempos, de manera similar:

$$3x_1 + 3.5x_2 + 4x_3 - d_2^+ + d_2^- = 60$$

Para las políticas, en este caso la correctiva y la predictiva tienen ya establecidas, mientras que para la preventiva se desea incluir las variables de desviación:

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 - d_3^+ + d_3^- = 10$$

$$x_3 = 2$$

La última restricción es la relacionada con el máximo presupuesto asignable al mantenimiento correctivo, en este caso:

$$3000x_1 \leq 0.20(3000x_1 + 2500x_2 + 4000x_3)$$

$$2400x_1 - 500x_2 - 800x_2 \leq 0$$

Finalmente, como restricciones implícitas tenemos que todas serán no negativas, y el número de mantenimientos y sus desviaciones serán enteras

$$x_1, x_2, x_3, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^- \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, d_3^+, d_3^- \in \mathbb{Z}$$

Por conveniencia, a partir de ahora los ejercicios con varias variables no serán unificados en el modelo resumen, y se colocará la tabla Excel con los resultados de Solver

ISBN: 978-631-6557-43-8

M3 =SUMAPRODUCTO(B3:J3,$B$14:$J$14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1					MANTENIMIENTOS								MAX
2		Correc. (x1)	Prevent. (x2)	Predict. (x3)	Exceso presupuesto (d1+)	Presupuesto no usado (d1-)	Exceso tiempo (d2+)	Tiempo no usado (d2-)	Mnt. Prev. Adicionales (d3+)	Mnt. Prev. Faltantes (d3-)			UTILIDAD
3	FUNCIÓN OBJETIVO				1		1						0.00
4													
5	RESTRICCIONES												
6	Presupuesto	3000	2500	4000	-1	1					50000	=	50000
7	Tiempos	3	3.5	4			-1	1			60	=	60
8	Politica Correctiva	1									3	≤	4
9	Politica Preventiva		1						-1	1	10	=	10
10	Política Predictiva			1							2	=	2
11	Max. Asignable a Corr.	2400	-500	-800							-400	≤	0
12													
13													
14	RESPUESTAS	3.0	12.0	2.0	0.0	3000.0	0.0	1.0	2.0	0.0			

Figura 2-6 Resolución con Solver. Ejercicio mantenimiento

Elaborado por el autor

La respuesta obtenida es de $x_1 = 3, x_2 = 12, x_3 = 2$ que significa el número de mantenimientos a realizar, ya con este dato podemos interpretar que el número de mantenimientos preventivos es 12, por lo que estamos realizando 2 más que el histórico, y ese valor de 2 es el de d_3^+ que significa el número de mantenimientos adicionales. Además, $d_1^- = 3000$ indica que tenemos un presupuesto de $ 3000 no utilizado, y un tiempo $d_2^- = 1$ de una hora que no se aprovecha en mantenimientos.

Adicionalmente observamos que los mantenimientos correctivos que se deben hacer son 3. Como se señaló, si no hubiéramos analizado con programación lineal podríamos suponer que no debemos realizar mantenimientos correctivos. Sin embargo, este tipo de planteamiento nos sirve para obtener un valor aceptable, que no necesariamente será cero.

** Fin del ejercicio **

2.1.3 Gestión de inventario

Para comprender los problemas de manejo de inventario es importante conocer el flujo con el que se maneja el mismo. La siguiente figura muestra cómo se realiza en un período con cuatro períodos:

Figura 2-7 Esquema de manejo de inventarios

Elaborado por el autor

Nótese la estructura del inventario, por ejemplo, para el período 2:

$$I_2 = I_1 + x_2 - d_2$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Así, la formula general es:

$$I_t = I_{t-1} + x_t - d_t, \qquad para\ todo\ t = 1,2,3, \ldots$$

Lo que significa el inventario en el período actual es igual a lo que se tenía en el inventario anterior sumado a lo producido menos lo vendido. (Taha, 2022) Bajo este concepto, se desarrollan los siguientes ejercicios

Ejercicio 2-5 Producción con inventario: Libros

Una papelería que imprime libros de fotografías de alta calidad, desea generar el mejor esquema de producción considerando que puede almacenar productos para el siguiente trimestre. La demanda de un artículo durante los siguientes cuatro trimestres es de 280, 400, 450 y 300 unidades, respectivamente. El precio de producir una unidad el primer trimestre es de $ 20.00 en el primer trimestre y se estima que para cada trimestre subsiguiente se incrementará en un 5% debido a la inflación. La producción máxima en cada trimestre es de 400, y aunque se puede aprovechar elaborando más libros los primeros trimestres antes de que se incremente el precio de producción, mantener almacenados los mismos tiene un costo de $3.80 por cada uno ya que requieren condiciones especiales para que no pierdan el color, además solo se pueden almacenar hasta 80 en la sección destinada para ello. Desarrolle un modelo de programación lineal para determinar el esquema de producción óptimo para cumplir con la demanda a la vez que minimiza sus costos.

Considerando la estructura de manejo de inventario de la Figura 2-7, tendríamos las siguientes variables de decisión:

$$x_i = Libros\ elaborados\ en\ el\ trimestre\ i$$

$$I_i = Libros\ mantenidos\ en\ el\ inventario\ al\ final\ del\ trimestre\ i$$

$$Para\ i = 1, 2, 3, 4$$

Nótese el uso de la nomenclatura, para reducir la repetición de cada índice. Ahora respecto a las variables de la demanda o las ventas d_i, estas ya tienen valores por lo que no son de decisión.

La función objetivo en este caso es de minimizar los costos asociados a toda la cadena de producción e inventario, siendo en primer lugar el costo de la producción en cada trimestre y el costo de almacenamiento del inventario, teniendo:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$\min z = 20.0\, x_1 + 20(1.05)x_2 + 20(1.05)^2 x_3 + 20(1.05)^3 x_4 + 3.80\,(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

$$\min z = 20x_1 + 21x_2 + 22.05x_3 + 23.15x_4 + 3.8I_1 + 3.8I_2 + 3.8I_3 + 3.8I_4$$

Para cada trimestre, tenemos:

$$x_1 - d_1 = I_1$$
$$I_1 + x_2 - d_2 = I_2$$
$$I_2 + x_3 - d_3 = I_3$$
$$I_3 + x_4 - d_4 = 0$$

Reemplazando con los valores de d_i, y reorganizando de manera que las incógnitas se mantengan en el lado izquierdo y los valores en el derecho, queda:

$$x_1 - I_1 = 280$$
$$x_2 + I_1 - I_2 = 400$$
$$x_3 + I_2 - I_3 = 450$$
$$x_4 + I_3 = 300$$

Respecto a la restricción de producción máxima:

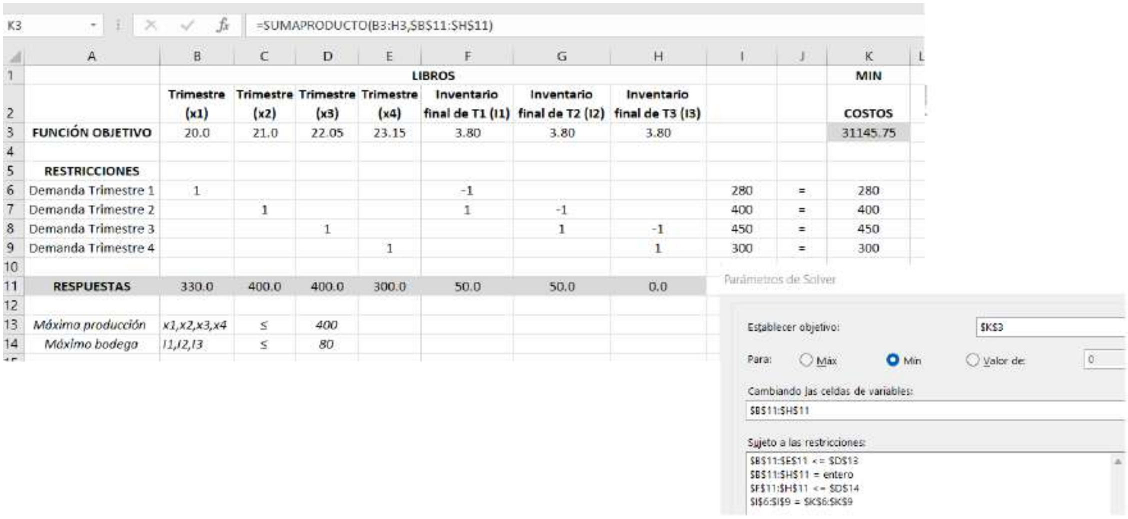
$$x_i \leq 400, \qquad para\ todo\ i = 1,2,3,4$$

Y la restricción de máxima capacidad de bodega

$$I_i \leq 80, \qquad para\ todo\ i = 1,2,3$$

Más las restricciones implícitas de no negatividad y de que sean enteros

$$x_i \geq 0\ para\ i = 1,2,3,4;\ I_i \geq 0\ \ para\ i = 1,2,3$$
$$x_i, I_i \in \mathbb{Z}$$


K3 =SUMAPRODUCTO(B3:H3,$B$11:$H$11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		LIBROS									MIN
2		Trimestre (x1)	Trimestre (x2)	Trimestre (x3)	Trimestre (x4)	Inventario final de T1 (I1)	Inventario final de T2 (I2)	Inventario final de T3 (I3)			COSTOS
3	FUNCIÓN OBJETIVO	20.0	21.0	22.05	23.15	3.80	3.80	3.80			31145.75
4											
5	RESTRICCIONES										
6	Demanda Trimestre 1	1				-1			280	=	280
7	Demanda Trimestre 2		1			1	-1		400	=	400
8	Demanda Trimestre 3			1			1	-1	450	=	450
9	Demanda Trimestre 4				1			1	300	=	300
10											
11	RESPUESTAS	330.0	400.0	400.0	300.0	50.0	50.0	0.0			
12											
13	*Máxima producción*	*x1,x2,x3,x4*	≤	*400*							
14	*Máximo bodega*	*I1,I2,I3*	≤	*80*							

Figura 2-8 Resolución con Solver. Ejercicio inventario libros

ISBN: 978-631-6557-43-8

Elaborado por el autor

Con ello las respuestas son las siguientes: $x_1 = 330, x_2 = 400, x_3 = 400, x_4 = 300$ que implica la producción en cada trimestre, relacionado con los inventarios $I_1 = 50, I_2 = 50, I_3 = 0$, es decir en el trimestre 1 y el trimestre 2 se almacenaran 50 libros, mientras que para el tercer trimestre no hace falta tener inventariado, $z = 31145.75$ es la cantidad de dólares con la cual se garantiza el mínimo gasto. El esquema de la respuesta es la siguiente:

El esquema de la respuesta es la siguiente:

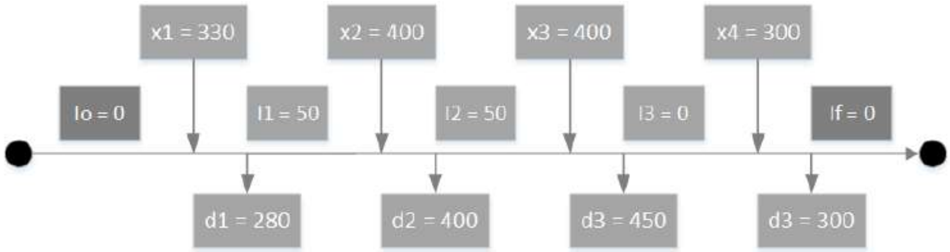


Figura 2-9 Esquema de la solución. Ejercicio inventario libros

Elaborado por el autor

** Fin del ejercicio **

Ejercicio 2-6 Producción con tiempos extra e inventarios: Galletas

Una empresa que fabrica galletas, quiere determinar su programa de producción para los siguientes 4 trimestres del año. Acorde a su estudio histórico, la distribución de producción fue de 35, 40, 60 y 70 quintales para cada trimestre, las cuales deben ser cumplidas a tiempo. Al inicio del primer trimestre se cuenta con un inventario de 10 quintales. Se debe decidir cuánto se producirá por cada trimestre, lo cual será vendido o almacenado. Por cada trimestre, la cadena de producción puede manufacturar hasta 40 quintales a un costo regular de $ 40 USD, pero en caso necesario se puede aumentar la capacidad, pero a un costo de $ 45 por cada quintal. Lo que se quede almacenado en inventario tiene un costo de $ 2 para mantenerlo en buenas condiciones para el siguiente trimestre. Asuma que es posible vender y/o almacenar fracciones de quintal.

Usar programación lineal para minimizar los costos de producción e inventario para los cuatro trimestres del año.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Para definir las variables de decisión consideramos tres tipos de procesos que puede seguir: la producción normal, la con sobretiempo y lo inventariado, de forma que:

$$x_t = quintales\ producidos\ en\ el\ trimestre\ t, a\ ritmo\ normal$$

$$y_t = quintales\ producidos\ en\ el\ trimestre\ t, a\ sobretiempo$$

$$I_t = número\ de\ quintales\ que\ se\ almacenan$$

$$Donde\ t = 1,2,3,4$$

Nótese que en el caso de I_t, se permite I_0 que es la cantidad inventariada al inicio del año, aunque ya que sabemos de antemano que su valor es 10 antes e de comenzar el programa de producción y que I_4 será 0 ya que no queremos inventario al final del año

Con esto, la función objetivo de minimizar los costos se determina por la suma de cada una de las variables anteriores a su precio establecido:

$$\min z = 40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 45(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 2(I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

$$I_o = 10, I_4 = 0$$

Expandiendo:

$$\min z = 40x_1 + 40x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45y_1 + 45y_2 + 45y_3 + 45y_4 + 20 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3$$

Las restricciones seguirán la estructura de la Figura 2-7, dónde la ecuación base es:

$$I_t = I_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t$$

Para lo cual ya conocemos los valores de d_t ($d_1 = 35, d_2 = 40, d_3 = 60, d_4 = 70$). Con lo que:

$$I_1 = I_0 + x_1 + y_1 + d_1, \qquad x_1 + y_1 - I_1 = 25$$

$$I_2 = I_1 + x_2 + y_2 + d_2, \qquad x_2 + y_2 + I_1 - I_2 = 40$$

$$I_3 = I_2 + x_3 + y_3 + d_3, \qquad x_3 + y_3 + I_2 - I_1 = 60$$

$$I_4 = I_3 + x_4 + y_4 + d_4, \qquad x_3 + y_3 - I_3 = 70$$

Los valores máximos de x_t son de 40, ya que es la producción máxima en tiempo regular, por tanto:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 40$$

Además de la no negatividad:

$$x_t, y_t, I_t \geq 0$$

Resolviendo en Solver:

ISBN: 978-631-6557-43-8

O4 =SUMAPRODUCTO(B4:L4,$B$12:$L$12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1							GALLETAS								
2		Producción normal (por trimestre)				Producción sobretiempo (por trimestre)				Inventario al final del trimestre					MIN
3		x1	x2	x3	x4	y1	y2	y3	y4	I1	I2	I3			COSTOS
4	FUNCIÓN OBJETIVO	40.0	40.0	40	40.00	45.0	45.0	45	45.00	2.00	2.00	2.00			8035.00
5															
6	RESTRICCIONES														
7	Demanda Trimestre 1	1				1				-1			25	=	25
8	Demanda Trimestre 2		1				1			1	-1		40	=	40
9	Demanda Trimestre 3			1				1			1	-1	60	=	60
10	Demanda Trimestre 4				1				1			1	70	=	70
11															
12	RESPUESTAS	40.0	40.0	40.0	40.0	0.0	0.0	5.0	30.0	15.0	15.0	0.0			
13															
14	*Máxima producción*		*x1,x2,x3,x4*	≤	*40*										

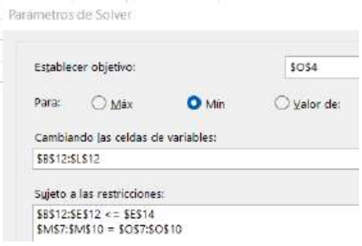


Figura 2-10 Resolución con Solver. Ejercicio galletas

Elaborado por el autor

Con lo cual: $z = 8035, x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 40, y_1 = y_2 = 0, y_3 = 5, y_4 = 30, I_1 = I_2 = 15, I_3 = 0$, es decir para minimizar el costo de producción a $ 8035 se debe utilizar al máximo la capacidad de producción cada trimestre y elaborar los 40 quintales, por su parte necesitaremos trabajo en sobretiempo en el trimestre 3 para elaborar 5 quintales, y en trimestre 4 para elaborar 30 quintales, adicionalmente necesitaremos almacenar y mantener en inventario al final de los trimestres 1 y 2 un total de 15 quintales.

** Fin del ejercicio **

Ahora hay que tener en consideración que el ejercicio anterior es un modelo, por lo que es una simplificación de la realidad. Esta aclaración es importante ya que si consideramos más aspectos podríamos no cumplir las suposiciones de linealidad, porque el costo de producción puede cambiar acorde a cuántos quintales manufacturamos puede ser que por cada quintal adicional producido el costo va aumentando y no fuera constante, ejemplo, para el primer a cuarto quintal $1, para el quinto hasta el décimo $1.50, a partir del 11, $ 2.50. etc. Además, pueden existir costos de suavización de la producción considerando contratación y despido de trabajadores, un ejercicio al respecto se resolverá en el punto 2.2.2. También la demanda que no puede ser satisfecha inmediatamente pude que se satisfaga en períodos futuros bajo costos de penalización. También se considera que para el ejercicio tomamos en cuenta el histórico, pero si consideramos que las

ISBN: 978-631-6557-43-8

demandas futuras no pueden ser conocidas con certeza se viola la suposición de certidumbre.

Por lo tanto, vale resaltar nuevamente que estas interpretaciones dejan ver que las suposiciones fundamentales de un modelo de programación lineal pueden ser desafiadas por las complejidades del mundo real, requiriendo ajustes o técnicas más avanzadas para modelar adecuadamente el problema.

2.1.4 Mezcla y Refinación

Ejercicio 2-7 Problema de la dieta

Una empresa productora de comida para mascotas, va a elaborar una nueva marca para gatos mayores de 7 años en una presentación de 100 gramos, por lo que en primer lugar ha realizado un análisis de las necesidades nutricionales mínimas a cumplir: se toman en cuenta cuatro parámetros proteína, grasa, fibra y sales; por cada 100 g de producto se necesita cumplir con al menos 8 g de proteína y 6 g de grasa, a la vez que no se debe sobrepasar los 2 g de fibra, y 0.4 g de sales. Por otra parte, considerando su experiencia va a utilizar seis materias primas cuyo precio ya ha sido consultado con sus proveedores, además de su contenido de los componentes nutricionales acorde a la siguiente tabla.

Tabla 2-2 Contenido de nutrientes por materia prima g por g. Ejercicio de la Dieta

	Proteína	Grasa	Fibra	Sales	Precio (centavos.USD)
Pollo	0.150	0.060	0.001	0.002	1.0
Carne	0.200	0.090	0.005	0.005	1.2
Mariscos	0.120	0.110	0.003	0.007	1.4
Arroz	0.000	0.010	0.100	0.002	0.2
Trigo	0.040	0.010	0.150	0.008	0.5
Gel	0	0	0	0	0.6

Elaborado por el autor

Se requiere minimizar el costo en la fabricación del producto.

En primer lugar, definimos las variables de decisión, que en este caso son cuánto de cada materia prima compraremos, a saber:

$$x_1 = gramos\ de\ pollo\ a\ comprar$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_2 = gramos\ de\ carne\ a\ comprar$$

$$x_3 = gramos\ de\ mariscos\ procesados\ a\ comprar$$

$$x_4 = gramos\ de\ arroz\ a\ comprar$$

$$x_5 = gramos\ de\ trigo\ a\ comprar$$

$$x_6 = gramos\ de\ gel\ a\ comprar\ para\ incorporar$$

Respecto a la cantidad de producto que tiene que ser elaborado:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

Para definir las restricciones tenemos que tomar en cuenta el requerimiento nutricional del producto, y considerar si es lo mínimo que tenemos que cumplir, en cuyo caso será el signo de restricción $\geq$, o si es lo máximo que puede contener, en dónde se usará $\leq$. Con ello, y usando la información de la tabla:

$$0.150x_1 + 0.200x_2 + 0.120x_3 + 0.000x_4 + 0.040x_5 + 0.0x_6 \geq 8$$

$$0.060x_1 + 0.090x_2 + 0.110x_3 + 0.010x_4 + 0.010x_5 + 0.0x_6 \geq 6$$

$$0.001x_1 + 0.005x_2 + 0.003x_3 + 0.100x_4 + 0.150x_5 + 0.0x_6 \geq 0.5$$

$$0.001x_1 + 0.005x_2 + 0.003x_3 + 0.100x_4 + 0.150x_5 + 0.0x_6 \leq 1.8$$

$$0.002x_1 + 0.005x_2 + 0.007x_3 + 0.002x_4 + 0.008x_5 + 0.0x_6 \leq 0.4$$

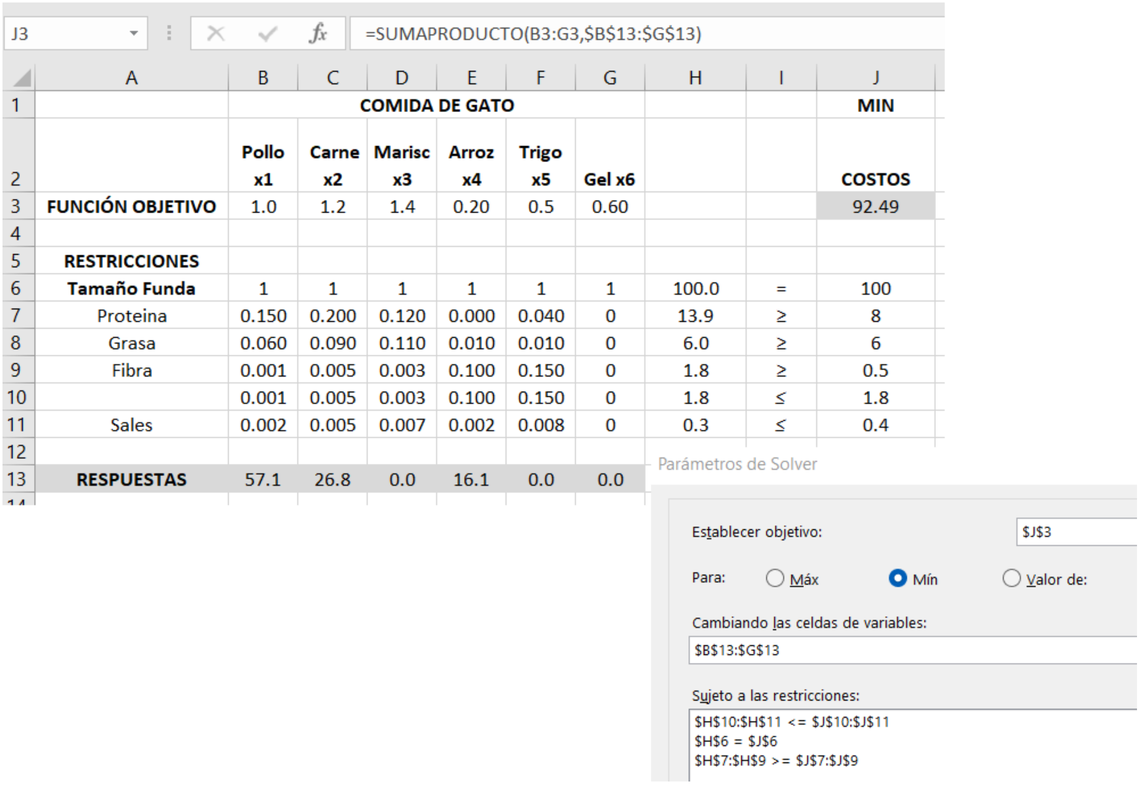
Nótese que los coeficientes de las restricciones 3 y 4 son los mismos ya que para la restricción de fibra debemos cumplir tanto con la condición de mínimo contenido como de máximo contenido.

Consideramos finalmente la restricción de no negatividad, y en este caso no es necesario que las variables sean enteros.

$$x_i \geq 0, \qquad para\ i = 1,2,3,4,5,6$$

Ingresando la información en Solver y resolviendo:

ISBN: 978-631-6557-43-8



J3 =SUMAPRODUCTO(B3:G3,$B$13:$G$13)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		COMIDA DE GATO								MIN
2		Pollo x1	Carne x2	Marisc x3	Arroz x4	Trigo x5	Gel x6			COSTOS
3	FUNCIÓN OBJETIVO	1.0	1.2	1.4	0.20	0.5	0.60			92.49
4										
5	RESTRICCIONES									
6	Tamaño Funda	1	1	1	1	1	1	100.0	=	100
7	Proteina	0.150	0.200	0.120	0.000	0.040	0	13.9	≥	8
8	Grasa	0.060	0.090	0.110	0.010	0.010	0	6.0	≥	6
9	Fibra	0.001	0.005	0.003	0.100	0.150	0	1.8	≥	0.5
10		0.001	0.005	0.003	0.100	0.150	0	1.8	≤	1.8
11	Sales	0.002	0.005	0.007	0.002	0.008	0	0.3	≤	0.4
12										
13	RESPUESTAS	57.1	26.8	0.0	16.1	0.0	0.0			

Figura 2-11 Resolución con Solver. Problema de la Dieta 1

Elaborado por el autor

Con esto: $x_1 = 57.1, x_2 = 26.8, x_4 = 16.1, x_3 = x_5 = x_6 = 0, z = 92.49$ lo que implica que para que el producto cumpla con todos los requerimientos nutricionales a un costo mínimo de $ 0.9249 USD (recordando que la función objetivo estaba en centavos), se debe proceder a comprar 57.1 g de pollo, 26.8 g de carne y 16.1 g de arroz por cada producto de 100 g que se elabore.

Ejercicio 2-8 Problema de la dieta (2)

Del ejercicio anterior, una vez que la empresa ha analizado que si le resulta conveniente ya que el precio que estimaban debía ser menor a $ 1.00 para proceder con la fabricación, quiere incluir un producto similar pero que en este caso tenga sabor a marisco, para ello la preparación debe tener al menos el mismo contenido de marisco que la suma de pollo y carne.

Para este nuevo requerimiento se incrementa la siguiente restricción:

$$x_3 \geq x_1 + x_2$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 \geq 0$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Con lo cual:

J3 =SUMAPRODUCTO(B3:G3,$B$14:$G$14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		COMIDA DE GATO								MIN
2		Pollo x1	Carne x2	Marisc x3	Arroz x4	Trigo x5	Gel x6			COSTOS
3	FUNCIÓN OBJETIVO	1.0	1.2	1.4	0.20	0.5	0.60			94.53
4										
5	RESTRICCIONES									
6	Tamaño Funda	1	1	1	1	1	1	100.0	=	100
7	Proteina	0.15	0.2	0.12	0	0.04	0	9.3	≥	8
8	Grasa	0.06	0.09	0.11	0.01	0.01	0	6.0	≥	6
9	Fibra	0.001	0.005	0.003	0.1	0.15	0	1.8	≥	0.5
10		0.001	0.005	0.003	0.1	0.15	0	1.8	≤	1.8
11	Sales	0.002	0.005	0.007	0.002	0.008	0	0.3	≤	0.4
12	Sabor Marisco	-1	-1	1				0.0	≥	0
13										
14	RESPUESTAS	34.3	0.0	34.3	16.6	0.0	14.7			

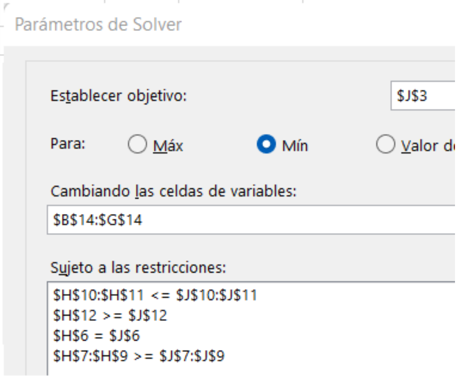


Figura 2-12 Resolución con Solver. Problema de la Dieta 2

Elaborado por el autor

Con esto: $x_1 = 34.3, x_3 = 34.3, x_4 = 16.6, x_6 = 14.7, x_2 = x_5 = 0, z = 94.53$ lo que implica que para que el nuevo producto cumpla con todos los requerimientos nutricionales a un costo mínimo de $ 0.9453 USD, se debe proceder a comprar 34.3 g de pollo, 34.3 g de pollo y 16.6 g de arroz y 14.7 g de gel por cada producto de 100 g que se elabore.

Nótese que a priori se pudiera pensar que para solucionar el problema solo se cambiarían las cantidades de carne, pollo y marisco; pero, de allí la importancia del modelo, en el segundo caso ya necesitaríamos gel para completar la fórmula.

** Fin del ejercicio**

Una aplicación común de la aplicación de la programación lineal desde los años 1950 se ha dado en la industria del petróleo en particular en la mezcla del crudo para la producción de sus derivados. De manera general, el modelo queda planteado con una función objetivo

ISBN: 978-631-6557-43-8

de maximización de utilidades, con la restricción de octanaje, u otro aspecto de decisión que toman la siguiente forma:

$$B_{tot}(ON)_{tot} = \sum_{i=1}^{n} B_i(ON)_i$$

Donde B_{tot} son los barriles totales de gasolina a ser obtenida, ON_{tot} el octanaje deseado para esta gasolina, B_i los diferentes componentes o crudo que serán procesados, y ON_i el octanaje que posee cada componente i. (Al-Mutaz & Al-Fariss, 1997)

El siguiente es un ejercicio que ilustra cómo se plantean y resuelven los ejercicios de este tipo

Ejercicio 2-9 Problema de la mezcla: Refinería

Ejercicio adaptado de (Wakefield, 2014): Considere que en el diseño de una nueva refinería se producirán tres tipos de gasolina clasificadas según su octanaje y porcentaje de azufre, para ello ingresarán como materia prima para la mezcla tres tipos de crudo que provienen de diferentes pozos. Siendo los precios de venta de Gasolina Súper A de $ 70.00 USD el barril, Súper B $ 60.00, y Extra $ 50.00, por su parte el crudo se compra en Venezuela $ 45.00, Napo $ 25.00, y Tiputini $ 20.00. La capacidad de compra y procesamiento es de 5000 barriles de cada tipo de crudo al día.

Los tres tipos de gasolina que se quiere producir tienen las siguientes características, Súper-A tendrá un octanaje promedio de al menos 90 y como máximo un contenido de azufre del 1%, Súper-B acepta como mínimo octanaje promedio de 89, y es más laxo con el azufre que podrá ser hasta 2%, finalmente, la gasolina Extra tendrá un octanaje de 87 y como mucho 1% de azufre.

Los octanajes y contenido de azufre con los que viene el crudo son de: Venezuela 92 de octanaje y 0.5% de contenido de azufre, los crudos de Ecuador Napo y Tiputini tienen un octanaje de 86 y 90, con contenido de azufre de 2.0% y 3.0% respectivamente.

El costo de transformación y mezcla de cada barril de crudo en un barril de gasolina cuesta $ 4.00, y la refinería procesará hasta 14000 barriles diarios.

Se estará obligado a proveer cada día al menos 300 barriles de Súper-A 2000 de Súper B y 1000 de Extra.

Formule el modelo de Programación Lineal que permitirá a la Refinería maximizar sus utilidades diarias.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Para proceder a la solución proceder a definir las variables de decisión; en primera instancia podríamos pensar que serían los tres tipos de gasolina que se producirían: $x_1, x_2\ y\ x_3$, pero no es el caso ya que cada crudo puede una vez procesado convertirse en cada tipo de gasolina, es decir tenemos una combinación de variables.

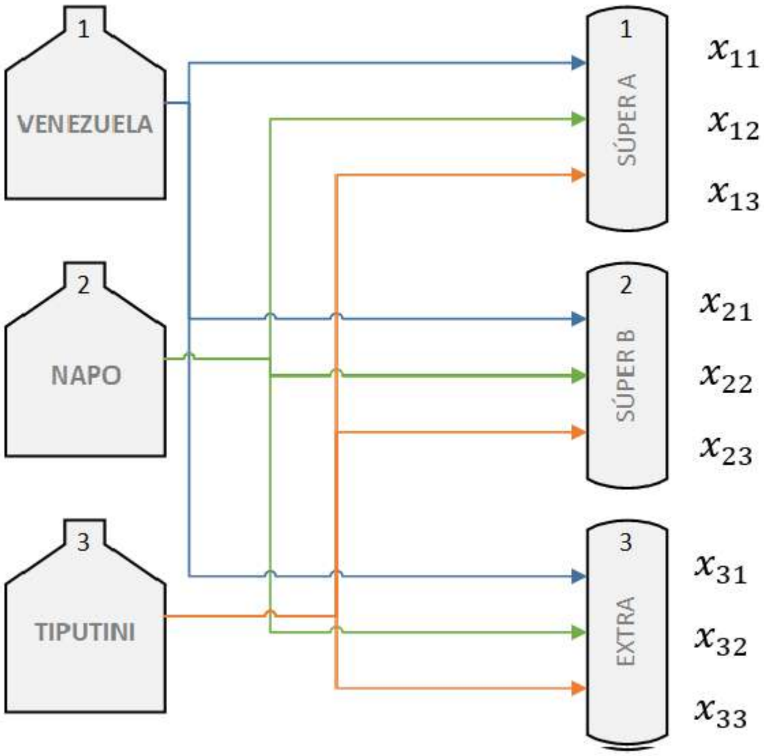


Figura 2-13 Esquema de variables. Ejercicio Gasolinas

Elaborado por el autor

Por lo tanto, nuestras variables de decisión:

$x_{i,j}$ *que es la cantidad de barriles del crudo i, producidos para cada gasolina j*

Donde $i = j = 1,2,3$ En total 9 variables

Si queremos saber cuántos barriles de crudo se compran, tendríamos:

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = total\ barriles\ de\ crudo\ i$$

Y si, deseamos ver el número total de barriles de gasolinas producidos:

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = total\ barriles\ de\ gasolina\ j$$

La función objetivo por su parte corresponde a las utilidades calculadas por los ingresos de venta de gasolina, menos los egresos por la compra de cada crudo y la fabricación de cada gasolina. Considerando lo anterior:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$Ingresos = 70 * SúperA + 60 * SúperB + 50 * Extra$$

$$Ingresos = 70\,(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Los gastos por compra:

$$Compra = 45 * Venezuela + 25 * Napo + 20 * Tiputini$$

$$Compra = 45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 25(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 20(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Nótese la diferencia en los coeficientes de los ingresos con los egresos, en las gasolinas los que coinciden son los segundos subíndices, mientras los que coinciden en los gastos son los primeros subíndices, considerando en la gráfica que los crudos corresponden a i, y las gasolinas a j.

Los gastos por procesar, corresponden a todas las combinaciones:

$$Procesamiento = 4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Por tanto, nuestra función objetivo queda:

$$\begin{aligned}\max z = {} & 70x_{11} + 70x_{21} + 70x_{31} + 60x_{12} + 60x_{22} + 60x_{32} + 50x_{13} + 50x_{23} \\ & + 50x_{33} \\ & - (45x_{11} + 45x_{12} + 45x_{13} + 25x_{21} + 25x_{22} + 25x_{23} + 20x_{31} \\ & + 20x_{32} + 20x_{33}) - (4x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 4x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 4_{31} \\ & + 4_{32} + 4x_{33})\end{aligned}$$

$$\max z = 31x_{11} + 41x_{21} + 46x_{31} + 11x_{12} + 31x_{22} + 36x_{32} + x_{13} + 26x_{23} + 50x_{33}$$

Existirán problemas cuyas combinaciones sean numerosas por lo que expandir será poco práctico en tales ocasiones, de esta forma se debe acostumbrar a utilizar los subíndices. Por ejemplo, para la siguiente restricción que corresponde a que el máximo de compra son 5000 barriles:

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} \leq 5000$$

Para todo $i = \{1,2,3\}$ donde 1=Venezuela, 2=Napo, y 3=Tiputini

La restricción de producción es:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq 14000$$

Esto significa que la sumatoria de todos los crudos que producen todas las gasolinas no podrá exceder los 14000 barriles que es el máximo de la producción. Por esta ocasión se expande las sumatorias para tener más claro lo expresado:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 14000$$

Con respecto a las demandas del mercado que se deben cumplir:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 3000, \qquad (Súper - A)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 2000, \qquad (Súper - B)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 3000, \qquad (Extra)$$

Nótese nuevamente los subíndices, que coinciden en el segundo por cada restricción, recordando esto es porque este señala la gasolina, y el primero el origen del crudo.

Ahora corresponde a lo correspondiente al octanaje. La idea principal es que el ratio del crudo i utilizado para realizar la gasolina j debe cumplir con las expectativas, entonces se tiene:

$$\frac{barriles\ de\ crudo\ i\ usado\ para\ la\ gasolina\ j}{barriles\ de\ gasolina\ j\ hechas} = \frac{x_{ij}}{x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}}$$

Cada uno de estos ratios se debe multiplicar con el octanaje que tiene cada crudo, cuya suma deberá cumplir el requisito de la gasolina. Siendo:

$$92(ratio\ del\ crudo\ 1\ en\ la\ gasolina\ j) + 86(ratio\ dl\ crudo\ 2\ en\ la\ gasolina\ j) + 90(ratio\ del\ crudo\ 3\ en\ la\ gasolina\ j) \geq nivel\ requerido$$

Para la gasolina se tiene:

$$92\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} + 86\frac{x_{21}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} + 90\frac{x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 90$$

A primera vista parecería que no cumple con la suposición más importante de la linealidad. Sin embargo, los denominadores son comunes para todos, lo que significa que pasarán al lado derecho multiplicando y obtendríamos:

$$92x_{11} + 86x_{21} + 90x_{31} \geq 90(x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

La cual si es lineal. Similar con las otras gasolinas:

$$92\frac{x_{12}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} + 86\frac{x_{22}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} + 90\frac{x_{32}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 89$$

$$92x_{12} + 86x_{22} + 90x_{32} \geq 89(x_{11} + x_{21} + x_{31}), \qquad Súper\ B$$

$$92\frac{x_{13}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} + 86\frac{x_{23}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} + 90\frac{x_{33}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 87$$

$$92x_{12} + 86x_{22} + 90x_{32} \geq 89(x_{11} + x_{21} + x_{31}), \qquad Extra$$

Como vemos en el caso anterior vemos que las ecuaciones toman la forma de

$$Suma\ de\ componentes\ de\ crudo \geq o \leq requerimiento\ gasolina$$

Por tanto, para el azufre, tendríamos las siguientes restricciones:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31} \leq 0.01(x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

$$0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31} \leq 0.02(x_{12} + x_{22} + x_{32})$$

$$0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31} \leq 0.01(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Realizando las operaciones respectivas en todas las restricciones anteriores quedará:

$$2x_{11} - 4x_{21} \geq 0$$

$$3x_{12} - 3x_{22} + x_{32} \geq 0$$

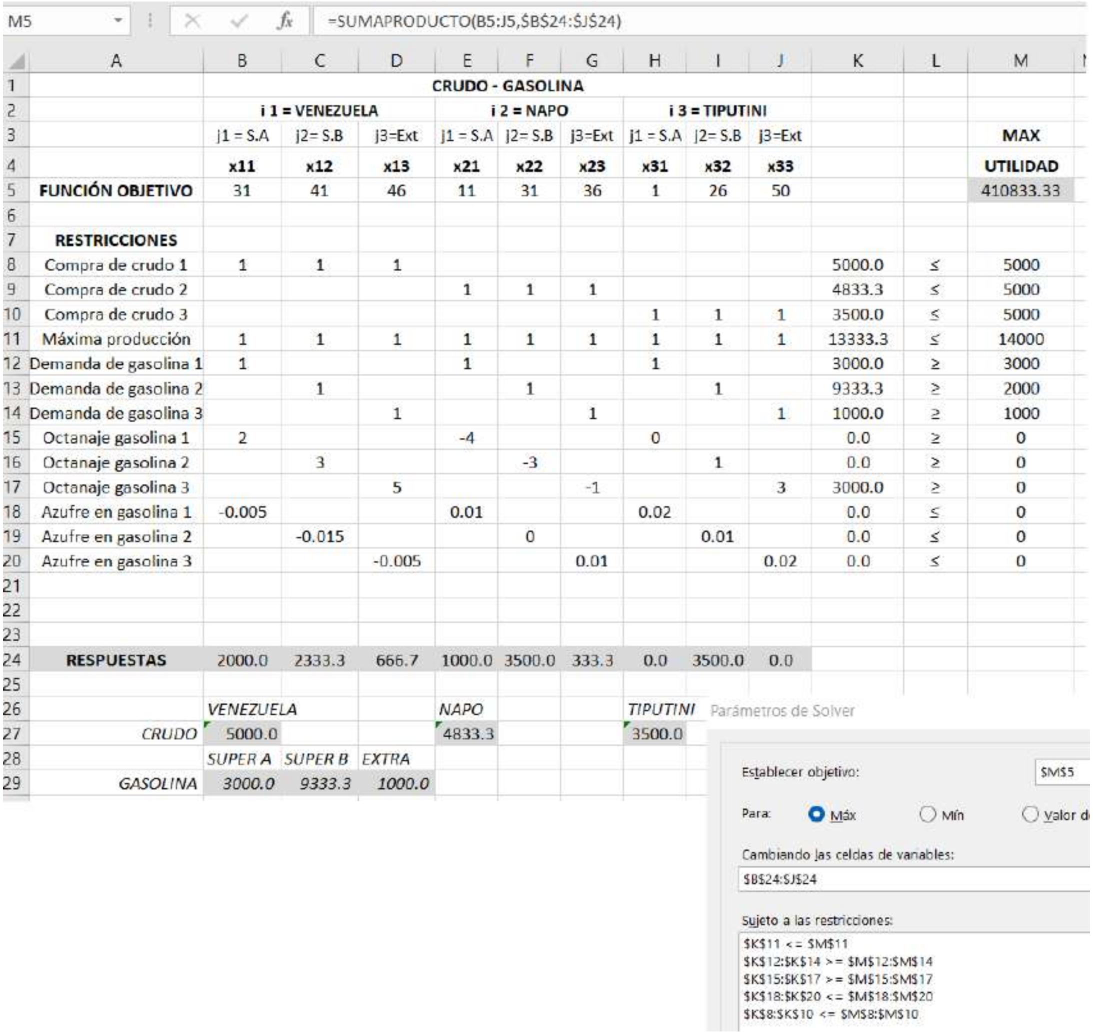
$$5x_{13} - x_{23} + 3x_{33} \geq 0$$

$$-0.005x_{11} + 0.01x_{21} + 0.02x_{31} \leq 0$$

$$-0.015x_{12} + 0.01x_{32} \leq 0$$

$$-0.005x_{13} + 0.01x_{23} + 0.02x_{33} \leq 0$$

Finalmente consideramos la restricción de no negatividad donde todos los $x_{ij} \geq 0$. Y resolviendo:



M5 =SUMAPRODUCTO(B5:J5,$B$24:$J$24)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	CRUDO - GASOLINA											
	i 1 = VENEZUELA			i 2 = NAPO			i 3 = TIPUTINI					
	j1 = S.A	j2= S.B	j3=Ext	j1 = S.A	j2= S.B	j3=Ext	j1 = S.A	j2= S.B	j3=Ext			MAX
	x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33			UTILIDAD
FUNCIÓN OBJETIVO	31	41	46	11	31	36	1	26	50			410833.33
RESTRICCIONES												
Compra de crudo 1	1	1	1							5000.0	≤	5000
Compra de crudo 2				1	1	1				4833.3	≤	5000
Compra de crudo 3							1	1	1	3500.0	≤	5000
Máxima producción	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13333.3	≤	14000
Demanda de gasolina 1	1			1			1			3000.0	≥	3000
Demanda de gasolina 2		1			1			1		9333.3	≥	2000
Demanda de gasolina 3			1			1			1	1000.0	≥	1000
Octanaje gasolina 1	2			-4			0			0.0	≥	0
Octanaje gasolina 2		3			-3			1		0.0	≥	0
Octanaje gasolina 3			5			-1			3	3000.0	≥	0
Azufre en gasolina 1	-0.005			0.01			0.02			0.0	≤	0
Azufre en gasolina 2		-0.015			0			0.01		0.0	≤	0
Azufre en gasolina 3			-0.005			0.01			0.02	0.0	≤	0
RESPUESTAS	2000.0	2333.3	666.7	1000.0	3500.0	333.3	0.0	3500.0	0.0			

	VENEZUELA			NAPO		TIPUTINI
CRUDO	5000.0			4833.3		3500.0
	SUPER A	SUPER B	EXTRA			
GASOLINA	3000.0	9333.3	1000.0			

Parámetros de Solver

Establecer objetivo: $M$5

Para: Máx Mín Valor d

Cambiando las celdas de variables: $B$24:$J$24

Sujeto a las restricciones:
$K$11 <= $M$11
$K$12:$K$14 >= $M$12:$M$14
$K$15:$K$17 >= $M$15:$M$17
$K$18:$K$20 <= $M$18:$M$20
$K$8:$K$10 <= $M$8:$M$10

ISBN: 978-631-6557-43-8

Figura 2-14 Resolución con Solver. Ejercicio Gasolinas

Elaborado por el autor

Procediendo a la interpretación, optimizaremos las ganancias a z 410,833.33 dólares diarios, mediante el esquema de producción con el que el crudo x_{1j} Venezuela debemos traer 5000 barriles, de x_{2j} Napo 4833.3 barriles, y x_{3j} Tiputini 3500 barriles, para producir $x_{i1} = 3000$ barriles de gasolina Súper A $x_{i2} = 9333.3$ de Súper B, y $x_{i3} = 1000$ de Extra.

Con ello, la siguiente figura ilustra el resultado obtenido, que se puede interpretar de la siguiente manera de los 5000 barriles de Venezuela, $x_{11} = 2000$ se dedicarán a la gasolina Súper A, $x_{12} = 2333.3$ a Súper B, $x_{13} = 666.7$ barriles totales a Extra; por su parte de los 4833.3 de barriles de crudo Napo, $x_{21} = 1000$ se dedicarán a la gasolina Súper A, $x_{22} = 3500$ a Súper B, y $x_{13} = 333.3$ de barriles totales a Extra. Finalmente, del crudo Tiputini se dedicarán exclusivamente para Súper B $x_{32} = 3500$

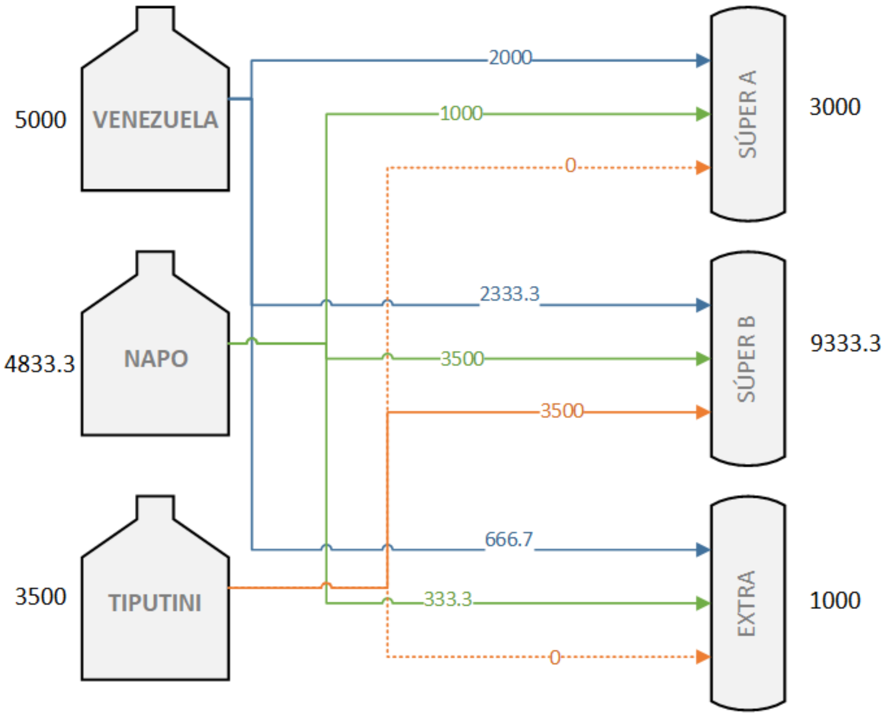


Figura 2-15 Resultado ilustrado. Ejercicio Gasolinas

Elaborado por el autor

Interpretaciones adicionales respecto a las restricciones de octanaje podemos observar en los valores de x_{2j} que es el crudo Napo, lo que sugiere que la cantidad de octanaje del mismo es demasiado baja y por tanto perjudica a la producción de la gasolina

ISBN: 978-631-6557-43-8

requerida, en cambio en las restricciones de azufre interpretamos lo contrario con el crudo de Venezuela, donde x_{1j} son negativas y aportan a reducir el contenido de azufre de las gasolinas.

** Fin del ejercicio**

Como observamos la programación lineal es bastante útil en estos casos y puede ser tan "larga" incluyendo varias variables o varios procesos en cuyos casos se implementan modelos mixtos obteniendo resultados en un tiempo computacional bastante aceptables. Un ejemplo de esto puede consultarse en (Jia & Ierapetritou, 2003)

Ejercicio 2-10 Problema de aleaciones: Minerales

Considerar una metalurgia (Ejercicio adaptado de (Taha, 2022)), la cual fabrica dos tipos de aleaciones de minerales, I y II, que se venden a $200.00 y $300.00 respectivamente. Para ello ocupa 3 minerales y cada uno tiene una composición específica de 4 componentes principales A, B, C y D según se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2-3 Tasa de interés y porcentaje de morosidad. Préstamos Ecuador

Mineral	Componente (ton/ton)				Disponible	Precio
	A	B	C	D	(ton)	(USD/ton)
1	0.2	0.1	0.3	0.3	1000	30
2	0.1	0.2	0.3	0.3	2000	40
3	0.05	0.05	0.7	0.2	3000	50

Elaborado por el autor

Las especificaciones de la Aleación I, son que debe tener en sus componentes como máximo 80% de A, 30% de B, y como mínimo 50% de D. Por otra parte, la Aleación II debe tener entre 40% y 60% del componente B, mínimo el 30% del C y máximo el 70% del D.

Desarrolle el modelo de programación lineal para determinar cuánto se debe producir de cada tipo.

La función objetivo en este caso está sujeta a tres parámetros, el tipo de aleación y el tipo de mineral de origen, por un lado, y las toneladas totales producidas, con lo que se tiene:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_{ij} = Toneladas\ de\ cada\ compenente\ en\ la\ aleación, donde\ i$$
$$= \{1,2,3\}\ es\ el\ mineral, y\ j = \{1,2\} = \{I, II\}\ es\ la\ aleación.$$

Entonces, por ejemplo, x_{12} significa el mineral 1 que se encuentra presente en la aleación II.

La otra variable de decisión es:

$$y_j = toneladas\ finales\ de\ la\ aleación\ j = \{1,2\} = \{I, II\}$$

La función objetivo viene dada por las ganancias de y_j, menos los gastos de x_{ij}; siendo:

$$\max z = 200y_1 + 300y_2 - [30(x_{11} + x_{12}) + 40(x_{21} + x_{22}) + 50(x_{31} + x_{32})]$$

Para las restricciones consideramos el máximo porcentaje de cada constituyente en el producto final I:

$$0.2x_{11} + 0.1x_{21} + 0.05x_{31} \leq 0.8\, y_1$$
$$0.1x_{11} + 0.2x_{21} + 0.05x_{31} \leq 0.3y_1$$
$$0.3x_{11} + 0.3x_{21} + \quad 0.2x_{31} \geq 0.5y_1$$

Para el producto final II:

$$0.1x_{12} + 0.2x_{22} + 0.05x_{32} \geq 0.4\, y_2$$
$$0.1x_{12} + 0.2x_{22} + 0.05x_{32} \leq 0.6\, y_2$$
$$0.3x_{12} + 0.3x_{22} + \quad 0.7x_{32} \geq 0.3y_2$$
$$0.3x_{12} + 0.3x_{22} + \quad 0.2x_{32} \leq 0.7y_1$$

Por la cantidad máxima disponible:

$$x_{11} + x_{12} \leq 1000$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 2000$$
$$x_{31} + x_{32} \leq 3000$$

Del total del material de trabajo:

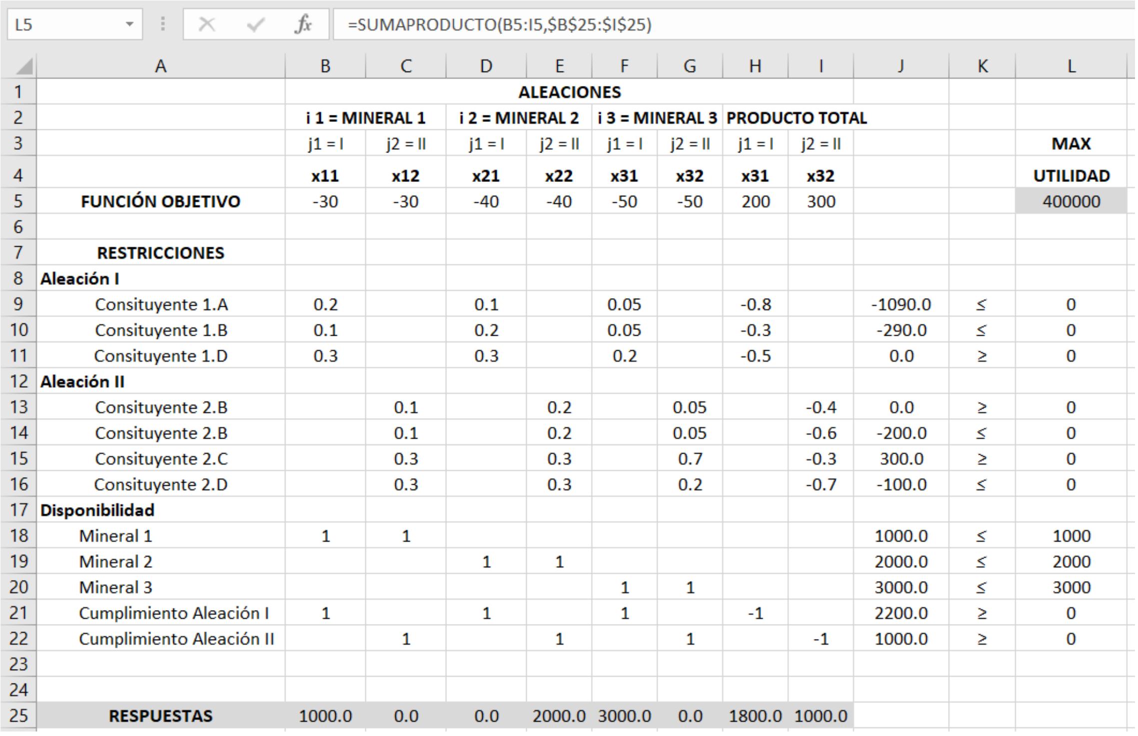
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq y_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq y_2$$

Con la restricción de no negatividad:

$$x_{ij}, y_j \geq 0, para\ i = \{1,2,3\}, j = \{1,2\}$$

Organizando para su resolución en Solver:

ISBN: 978-631-6557-43-8


L5 | =SUMAPRODUCTO(B5:I5,$B$25:$I$25)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1					ALEACIONES							
2		i 1 = MINERAL 1		i 2 = MINERAL 2		i 3 = MINERAL 3		PRODUCTO TOTAL				
3		j1 = I	j2 = II	j1 = I	j2 = II	j1 = I	j2 = II	j1 = I	j2 = II			MAX
4		x11	x12	x21	x22	x31	x32	x31	x32			UTILIDAD
5	FUNCIÓN OBJETIVO	-30	-30	-40	-40	-50	-50	200	300			400000
6												
7	RESTRICCIONES											
8	Aleación I											
9	Consituyente 1.A	0.2		0.1		0.05		-0.8		-1090.0	≤	0
10	Consituyente 1.B	0.1		0.2		0.05		-0.3		-290.0	≤	0
11	Consituyente 1.D	0.3		0.3		0.2		-0.5		0.0	≥	0
12	Aleación II											
13	Consituyente 2.B		0.1		0.2		0.05		-0.4	0.0	≥	0
14	Consituyente 2.B		0.1		0.2		0.05		-0.6	-200.0	≤	0
15	Consituyente 2.C		0.3		0.3		0.7		-0.3	300.0	≥	0
16	Consituyente 2.D		0.3		0.3		0.2		-0.7	-100.0	≤	0
17	Disponibilidad											
18	Mineral 1	1	1							1000.0	≤	1000
19	Mineral 2			1	1					2000.0	≤	2000
20	Mineral 3					1	1			3000.0	≤	3000
21	Cumplimiento Aleación I	1		1		1		-1		2200.0	≥	0
22	Cumplimiento Aleación II		1		1		1		-1	1000.0	≥	0
23												
24												
25	RESPUESTAS	1000.0	0.0	0.0	2000.0	3000.0	0.0	1800.0	1000.0			

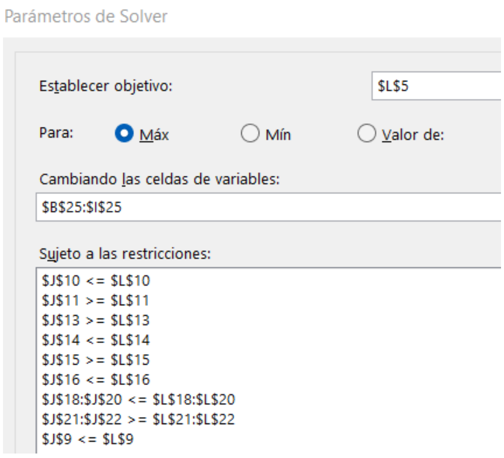


Figura 2-16 Resolución con Solver. Ejercicio aleaciones de minerales

Elaborado por el autor

Por lo tanto, la respuesta es $y_1 = 1800, y_2 = 1000$ que se deberá realizar 1800 toneladas de la Aleación I, y 1000 toneladas de la aleación II, para obtener $z = 400000$ equivalente a $ 400,000.00 de ganancia, además el mineral 1 y el 3 se dedicarán exclusivamente para la aleación I, mientras que, el mineral 2 para la aleación II.

2.2 Programación del trabajo

Uno de los contextos de aplicación de la programación lineal es la programación de horarios de trabajo, donde el objetivo es maximizar la producción respetando las

ISBN: 978-631-6557-43-8

limitaciones de un recurso, sin embargo, hay que considerar que cuando hablamos de trabajadores estamos manejando programación entera, además la naturaleza dinámica de los problemas puede requerir otro tipo de algoritmos. Con todo, se ha demostrado en aplicaciones prácticas cómo es posible incorporar relaciones y condiciones complejas para la ejecución de tareas y el despliegue de recursos simultáneos usando programación lineal (García-Nieves et al., 2019; Krajewski et al., 1980).

2.2.1 Distribución de horas de trabajo

Consideremos una semana laboral de 5 días con 2 días sucesivos de descanso, en el que se requiere asignar a los empleados para los diferentes días. Al ser un problema común, Baker (1974) desarrolló un modelo manual para este tipo de problemas, en donde:

$$W = \sum_{i=1}^{7} x_i$$

Sujeto a:

$$x_{j-1} + x_j = b_j \; con \; 2 \leq j \leq 7, y$$

$$x_7 + x_1 \leq b_1 \; cuando \; j = 1$$

En este caso W es la fuerza de trabajo, x_i son los trabajadores asignados para el día i, y b_j el número de trabajadores que puede descansar en el día i. Las restricciones pueden ser reformuladas como:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq b_5$$

Considerando a b_j como el número de trabajadores necesarios para ese día.

Ejercicio 2-11 Distribución de jornadas de trabajo: Supermercado

Un supermercado necesita distribuir a sus trabajadores en diferentes jornadas de trabajo de 5 días seguidos y 2 de descanso, de manera que se cumpla los requerimientos de sus clientes, por ejemplo, un trabajador podrá empezar su jornada un lunes y terminará el viernes, con sábado y domingo de descanso, otro empezará un jueves, y trabajará hasta el lunes, con los martes y miércoles de descanso, etc. Los requerimientos por día de lunes a domingo son 16, 11, 17, 13, 15, 19, 14 respectivamente. ¿Cuál es el número mínimo de empleados para cumplir con las expectativas?

ISBN: 978-631-6557-43-8

En primer lugar, requerimos definir nuestras variables de decisión, que serían los trabajadores que contratamos e inicien su jornada cada día de la semana, siendo:

$$x_i = \textit{número de trabajadores que inician su semana en } i$$

$$i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$i = \{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo\}$$

La función objetivo, a partir de ello, será minimizar el número de trabajadores contratados para toda la semana, entonces

$$\min z = \sum_{i=1}^{7} x_i$$

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Para las restricciones tenemos que considerar lo requerido cada día, así para el día lunes se requieren 16 trabajadores. Nos podríamos ver tentados a colocar como $x_1 \geq 16$, sin embargo, este razonamiento no es correcto ya que el día lunes no solo trabajan los que han sido contratados para trabajar de lunes a viernes, que es lo que representa x_1, sino que también trabajan los que fueron contratados a empezar su jornada el jueves x_4, ya que ellos trabajan el jueves, viernes, sábado, domingo y lunes, de igual manera los contratados que inicien el viernes x_5, el sábado x_6, y el domingo x_7 también trabajarán los lunes; solo los que inician sus jornadas el martes y miércoles no trabajan el lunes ya que forma parte de su descanso de dos días. Entonces, para el lunes la restricción adecuada es:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$$

Bajo el mismo razonamiento, realizamos para todos los días de la semana:

$$\begin{array}{llr}
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16, & & lunes \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11, & & martes \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 17, & & miércoles \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \quad + x_7 \geq 13, & & jueves \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 15, & & viernes \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 19, & & sábado \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14, & & domingo
\end{array}$$

Finalmente, se consideran las restricciones de no negatividad y de que son enteros:

$$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}$$

Resolviendo, tenemos:

ISBN: 978-631-6557-43-8

K4 =SUMAPRODUCTO(B4:H4,$B$15:$H$15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		TRABAJADORES REQUERIDOS									
2		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo			MIN
3		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7			TRABAJADORES
4	FUNCIÓN OBJETIVO	1	1	1	1	1	1	1			23
5											
6	RESTRICCIONES										
7	Requeridos el lunes	1			1	1	1	1	16	≥	16
8	Requeridos el martes	1	1			1	1	1	17	≥	11
9	Requeridos el miércoles	1	1	1			1	1	18	≥	17
10	Requeridos el jueves	1	1	1	1			1	16	≥	13
11	Requeridos el viernes	1	1	1	1	1			15	≥	15
12	Requeridos el sábado		1	1	1	1	1		19	≥	19
13	Requeridos el domingo			1	1	1	1	1	14	≥	14
14											
15	RESPUESTAS	3	6	1	5	0	7	1			

Parámetros de Solver

Establecer objetivo: $K$4

Para: Máx Mín Valor

Cambiando las celdas de variables:
$B$15:$H$15

Sujeto a las restricciones:
$B$15:$H$15 = entero
$I$7:$I$13 >= $K$7:$K$13

Figura 2-17 Resolución con Solver. Ejercicio programación Supermercado

Elaborado por el autor

Así, la respuesta de $x_1 = 3, x_2 = 6, x_3 = 1, x_4 = 5, x_5 = 0, x_6 = 7, x_7 = 1$ significa que contrataremos a 3 empleados para que inicien el día lunes, 6 el martes, 1 el miércoles, 5 el jueves, ninguno el viernes, 7 el sábado y 1 el domingo, lo que da un total de 23 trabajadores.

Un punto interesante a notar es el lado izquierdo de las restricciones. Ya que en este caso habrá días en los que estén presentes más trabajadores que los mínimos requeridos. Si en los resultados, observamos para el día lunes tenemos $16 \geq 16$ es decir se cumple, el martes $17 \geq 11$ también se cumple con los 11 requeridos pero tenemos 6 trabajadores extras ya que según sus jornadas también cumplieron los otros días, en este caso nos ofrece información para saber que los días martes, miércoles y jueves tendremos más trabajadores que los mínimos, siendo el martes el mayor; por lo que ese día podríamos aprovechar para asignar más tareas como inventariado de productos o lo que amerite según el modelo tratado.

** Fin del ejercicio **

Las cuestiones de modelado que surgen en el ejercicio anterior hacen ver de que se trata de un problema de programación estática, ya que se asume que el supermercado

ISBN: 978-631-6557-43-8

tiene el mismo horario cada semana, cuando en la realidad, hay feriados, vacaciones, entre otros. El ejercicio siguiente formulará un ejemplo de ese caso.

Además, si se quisiera establecer un modelo más competo para considerar un número mucho más grande de variables podría ser muy grande, puede ser que se tengan dificultades para encontrar una solución exacta, sin embargo, es posible como se ejemplifica en el trabajo de Love y Hoey (Love & Hoey, 1990). Por último, si el número de empleados es para cajeros, en ese caso sería más útil utilizar la teoría de colas.

2.2.2 Contratación de personal

Ejercicio 2-12 Distribución de jornadas de trabajo: Programadores

Problema basado en (Wagner, 1975; Winston, 2022). Como parte de las jornadas electorales a realizarse en mayo, se debe desarrollar un software de tal forma que cumpla con los requisitos de lectura de actas y publicación de resultados. Para ello, la ESPOCH ha decidido presentarse al concurso, y mediante un conjunto de expertos en informática y Scrum Management, se tiene que cada mes se tomarán el siguiente número de *story points SP* (en manejo de proyectos ágiles, un story point es una estimado del esfuerzo que tomará realizar una tarea o historia de usuario, tomando en consideración factores como la complejidad, la incertidumbre y el riesgo, y no solamente las horas de trabajo como punto de medición): Enero, 600; febrero, 700; marzo, 800; abril, 950, y mayo 1100.

Para inicio de enero, la ESPOCH ya contaría con 50 profesionales expertos los cuales pueden dedicar hasta 16 SP por mes. Sin embargo, se requerirán nuevos programadores los que necesitarán entrenamiento y supervisión y costará un promedio de 5 SP del mes de los programadores expertos realizar esta tarea por cada uno de los nuevos. Cada programador experto tiene un sueldo de $ 2000.00 cumpla o no sus 16 SP asignados, y cada programador nuevo ingresa con un sueldo de $ 1000.00 hasta que cumpla su entrenamiento y de allí pasará a formar parte de los programadores expertos. Se espera que por la carga de trabajo y por buscar otros trabajos el 5% de los programadores expertos renunciará cada mes.

Formular un modelo de Programación Lineal que asegure que la ESPOCH cumpla con el contrato.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Considerar la función objetivo, que está en relación a los programadores expertos x_i, y a los nuevos en el proyecto y_i. Donde:

$$x_i = Número\ de\ programadores\ expertos\ para\ el\ mes\ i$$

$$y_i = Número\ de\ programadores\ en\ entrenamiento\ para\ el\ mes\ i$$

Para la función objetivo, requerimos minimizar los costos asociados a la contratación de personal, por tanto:

$$\min z = 2000(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 1000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

Para las restricciones, consideramos el número de *story points* que tendrán disponibles los programadores expertos para dedicarlos al proyecto que está en función de los 16 de cada uno restando aquellos que dediquen a entrenar al nuevo personal:

$$16x_1 - 5y_1 \geq 600$$

$$16x_2 - 5y_2 \geq 700$$

$$16x_3 - 5y_3 \geq 800$$

$$16x_4 - 5y_4 \geq 950$$

$$16x_5 - 5y_5 \geq 1100$$

La siguiente restricción está relacionada con el número de programadores expertos que estarán formando parte del proyecto, y que en cada mes se van modificando restando los que van saliendo por otras oportunidades y sumando los técnicos nuevos que ya han pasado su entrenamiento, de forma que tendremos:

$$x_t = x_{t-1} + y_{t-1} - 0.05x_{t-1}$$

$$x_t - 0.95x_{t-1} - y_{t-1} = 0$$

Que, para cada mes queda como sigue:

$$x_1 = 50$$

$$x_2 - 0.95x_1 - y_1 = 0$$

$$x_3 - 0.95x_2 - y_2 = 0$$

$$x_4 - 0.95x_3 - y_3 = 0$$

$$x_5 - 0.95x_4 - y_4 = 0$$

Nótese que no se tiene y_5 dentro de las ecuaciones y es de esperar un valor de cero, ya que no tiene sentido administrativamente el pagar el entrenamiento a personas cuando ya se acaba el proyecto.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Por el momento, únicamente consideramos la restricción de no negatividad. Y posteriormente se discutirá porque en este problema no se puede aplicar la programación entera.

N4 =SUMAPRODUCTO(B4:K4,$B$21:$K$21)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		TRABAJADORES REQUERIDOS												MINIMIZAR
2		EXPERIMENTADOS					NUEVOS							SUELDO
3		x1	x2	x3	x4	x5	y1	y2	y3	y4	y5			TRABAJADORES
4	FUNCIÓN OBJETIVO	2000	2000	2000	2000	2000	1000	1000	1000	1000	1000			593777
5														
6	RESTRICCIONES													
7	SP a cumplir en													
8	Enero	16					-5					800	≥	600
9	Febrero		16					-5				718	≥	700
10	Marzo			16					-5			800	≥	800
11	Abril				16					-5		950	≥	950
12	Mayo					16					-5	1100	≥	1100
13	Tecnicos disponibles en													
14	Enero	1										50	=	50
15	Febrero	-0.95	1				-1					0	=	0
16	Marzo		-0.95	1				-1				0	=	0
17	Abril			-0.95	1				-1			0	=	0
18	Mayo				-0.95	1				-1		0	=	0
19														
20														
21	RESPUESTAS	50.0	47.5	53.6	62.3	68.8	0.0	8.5	11.5	9.5	0.0			
22														
23	APROX	50	48	54	63	69	0	9	12	10	0			599000

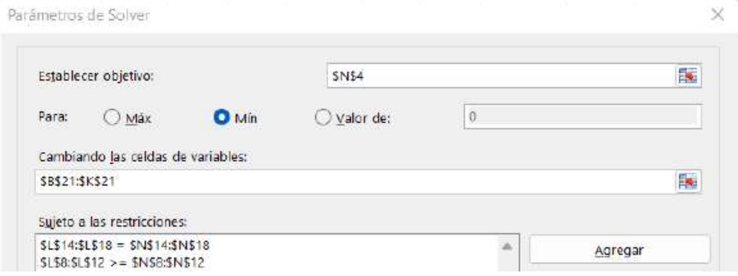


Figura 2-18 Resolución con Solver. Ejercicio Programadores

Elaborado por el autor

Tenemos, como respuesta: $x_1 = 50, x_2 = 47.5, x_3 = 53.6, x_4 = 63, x_5 = 69$ que son los programadores expertos que tendremos cada mes; $y_1 = y_5 = 0, y_2 = 8.5, y_3 = 11.5, y_4 = 10$ son los nuevos programadores contratados cada mes, con lo cual $z = 593{,}777$ que es el valor mínimo en dólares que esperamos gastar.

Ahora bien, tendríamos que haber considerado la programación entera, ya que las personas contratadas no se les permite trabajar medio tiempo según se afirma en el problema. Pero en ese caso estaríamos violando la linealidad porque el 5% de trabajadores no necesariamente va a ser un número entero, tomemos como ejemplo el primer mes, que de 50 el 5% es 2.5 trabajadores, al redondear dejaríamos de tener la suposición de proporcionalidad, es por eso que no es aplicable. (*No intente realizar en Solver con la*

ISBN: 978-631-6557-43-8

restricción de entero, ya que puede entrar en un bucle bastante largo tratando de encontrar la matriz solución) De esta manera, solo lo redondeamos de manera manual, siendo los trabajadores necesarios por cada mes: 50, 48, 54, 63, 69 de programadores expertos, y de 0, 9, 12, 10 y 0 de nuevos programadores que ingresen al proyecto. Con ello el valor mínimo a gastar en personal será de $ 599,000.

** Fin del ejercicio **

Ejercicio 2-13 Nivelación de la producción: Contratación y Despido

Una empresa azucarera requiere planificar su trabajo para la temporada de la zafra de caña de azúcar, que será desde febrero a mayo. En total cada mes se requerirá desbrozar un total de 80, 110, 80, 95 hectáreas respectivamente, el rendimiento de cada hectárea es de 70 toneladas métricas por hectárea. La empresa ya tiene a 10 empleados con nombramiento, pero no son suficientes en la temporada por lo que se puede satisfacer la necesidad contratando y despidiendo trabajadores temporales, el costo de inducción y equipo de protección personal para los contratos es de $ 50.00 USD, y el costo de indemnizaciones al despedirlos asciende a $ 150.00, el sueldo por mes es de $ 450.00. Un trabajador de nombramiento ya que cuenta con experiencia es capaz de procesar 140 toneladas métricas al mes, mientras que uno contratado procesa 105 toneladas al mes. La empresa puede procesar más de lo que se requiere cada mes y guardar el excedente para ser procesado después, sin embargo, esto tendrá un costo de retención de $ 75.00 por hectárea adicional desbrozada.

Desarrolle la política óptima de contratación y despido durante el horizonte de planificación de 4 meses.

En primer lugar, es necesario unificar unidades ya que para la producción tenemos hectáreas y toneladas métricas, en este caso, se considerará todo a hectáreas procesadas. Así, cada trabajador procesa:

$$trab.nombramiento = 140\,\frac{ton}{mes}\,\frac{1\,ha}{70\,ton} = 2\,\frac{ha}{mes}$$

$$trab.contratado = 105\,\frac{ton}{mes}\,\frac{1\,ha}{70\,ton} = 1.5\,\frac{ha}{mes}$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Como el modelo no nos pide que la política incluya a los trabajadores de nombramiento, podemos excluir lo que ellos de por sí ya trabajan, y considerar únicamente la demanda restante para cada mes que se requiere procesar. Entonces, para cada mes:

$$d_{febrero} = 80ha - 10trab\ \frac{2\ ha}{trab} = 60\ ha$$

$$d_{marzo} = 110ha - 10trab\ \frac{2\ ha}{trab} = 90\ ha$$

$$d_{abril} = 80ha - 10trab\ \frac{2\ ha}{trab} = 60\ ha$$

$$d_{mayo} = 95ha - 10trab\ \frac{2\ ha}{trab} = 75\ ha$$

Otra consideración es que el horizonte de planificación es de 4 meses, sin embargo, los despidos por lo general se procesan al fin de mes y hasta los primeros días del siguiente, por lo que, los despidos que se hagan al final del mes 4 se procesan al inicio del mes 5. En este caso tenemos, para los aspectos de producción 4 meses, y para las consideraciones de los trabajadores 5 meses.

Nuestras variables serán:

$x_i = cantidad\ neta\ de\ trabajadores\ al\ inicio\ del\ mes\ i$

$S_i = cantidad\ de\ trabajadores\ contratados\ o\ despedidos\ al\ inicio\ del\ mes\ i$

$I_i = Unidades\ (en\ hectáreas)\ para\ ser\ inventariadas\ al\ final\ del\ mes\ i$

$d_i = Unidades\ (en\ hectáreas)\ que\ requieren\ ser\ procesadas\ hasta\ fin\ de\ mes\ i$

Algunas de estas variables ya cuentan con datos, como d_i o x_5 sin embargo se incluyen en el modelo para su mejor comprensión. Y podemos afirmar que $x_i, I_i, y\ d_i$ son no negativas, pero esto no es cierto en el caso de S_i ya que puede tomar valores positivos si se contrata o negativos si se despide, por lo que S_i es irrestricto en cuanto a signo (en breve se verá cómo se procesa esta variable en estos casos).

Para la primera restricción se tomará en cuenta los aspectos de la producción. Las hectáreas trabajadas por cada trabajador x_i son de 1.5 en este caso tendremos lo que quedará en bodega según se vio en el Ejercicio 2-5, se tiene:

$$1.5x_1 = 60 + I_1, \qquad febrero$$

$$I_1 + 1.5x_2 = 90 + I_2, \qquad marzo$$

$$I_2 + 1.5x_3 = 60 + I_3, \qquad abril$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$I_3 + 1.5x_4 = 75, \qquad mayo$$

$$I_4 = 0$$

Para la contratación y despido, la fuerza laboral adicional inicia con los trabajadores a principios de febrero, a principios de marzo x_2 se ajustará hacia arriba o abajo mediante los despidos o contratos S_2, y la misma idea para los meses de $x_3, y\ x_4$,, para el principio del mes de junio será necesario despedir a todo trabajador adicional con lo que $x_5 = 0$, esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 = S_1$$

$$x_2 = x_1 + S_2$$

$$x_3 = x_2 + S_3$$

$$x_4 = x_3 + S_4$$

$$x_5 = x_4 + S_5 = 0$$

$$x_i \geq 0, y\ S_i\ irrestrictas$$

A continuación, desarrollamos la función objetivo, cabe destacar que no se ha seguido el orden común de desarrollar primero esta, para comprender el cómo se procesan las variables irrestrictas en este caso.

La meta es minimizar los costos agregados de la zafra, es decir los costos de contratación y despido de los empleados, y lo que cuesta mantener en bodega si se ha procesado en exceso. Para el costo de bodega/inventario es:

$$Costo\ retención = 75(I_1, I_2 + I_3)$$

Ahora para el modelado de contratación y despido se tiene dos valores, para contratar se tiene que añadir un valor de \$ 50.00 y para despedir de \$ 150.00, en este sentido tenemos:

$$Costos\ contrato\ y\ despido$$
$$= 50(Cantidad\ trabajadores\ contratados\ al\ principio\ del\ mes)$$
$$+ 150(Cantidad\ de\ trabajadores\ despedidos\ al\ principio\ del\ mes)$$

Para este caso podemos recordar el Ejercicio 2-4 en el que teníamos que tratar el exceso o faltante de diferentes variables, así para el caso de la variable S_1 se tiene un exceso (+) es decir es necesario despedir cuando es negativo, y se tiene un faltante (-) y es necesario contratar cuando es positivo, quedando:

$$S_1 = S_i^- - S_i^+, \qquad con\ S_i^-\ y\ S_i^+ \geq 0$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Ahora lo que era una variable irrestricta se ha convertido en dos variables no negativas. En la que interpretamos a S_i^- como los trabajadores a ser contratados (porque existe el faltante -) y S_i^+ como los trabajadores a ser despedidos (porque existe un exceso +). Por ejemplo, si $S_i^- = 7, S_i^+ = 0$ entonces $S_i = 7 - 0 = +7$ lo que representa una contratación, o si $S_i^- = 0, S_i^+ = 3$ entonces $S_i = 0 - 3 = -3$ que representa despidos.

La base de desarrollo de esta sustitución también tiene inherente que $S_i^- \, y \, S_i^+$ no pueden ser positivos al mismo tiempo, confirmado por la intuición, pero también se comprueba matemáticamente con la teoría de Programación Lineal Avanzada, que no es parte de este Tomo.

Con esto, los costos de contratación y despido son:

$$Costo\ contratación = 50(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-)$$

$$Costo\ despido = 150(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+ + S_5^+)$$

De antemano conocemos que al inicio del mes 5 no habrá contratos, por lo que $S_5^- = 0$, pero si habrá despidos. El último costo asociado es el de los sueldos donde:

$$Sueldos = 450\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

El modelo completo queda:

$$\min z = 450(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 50(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-) + 150(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+ + S_5^+) + 75(I_1, I_2 + I_3)$$

Sujeto a:

$$1.5x_1 - I_1 = 60$$

$$1.5x_2 + I_1 - I_2 = 90$$

$$1.5x_3 + I_3 - I_2 = 60$$

$$1.5x_4 - I_3 = 75$$

$$x_1 = S_1^- - S_1^+$$

$$x_2 = x_1 + S_2^- - S_2^+$$

$$x_3 = x_2 + S_3^- - S_3^+$$

$$x_4 = x_3 + S_4^- - S_4^+$$

$$0 = x_4 - S_5^+$$

Donde:

$$x_i, S_i, I_i \geq 0, \qquad para\ todo\ i$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1								TRABAJADORES REQUERIDOS													MINIMIZAR
2		NETO DE TRABAJADORES TEMPORALES						CONTRATOS				DESPIDOS					INVENTARIO				COSTOS
3		x1	x2	x3	x4	x5	s1-	s2-	s3-	s4-	s1+	s2+	s3+	s4+	s5+	I1	I2	I3			
4	FUNCIÓN OBJETIVO	450	450	450	450	450	50	50	50	50	150	150	150	150	150	75	75	75			98625
5																					
6	RESTRICCIONES																				
7	*Producción - Inventario*																				
8	Mes 1	1.5														-1			60	≥	60
9	Mes 2		1.5													1	-1		90	≥	90
10	Mes 3			1.5													1	-1	60	≥	60
11	Mes 4				1.5														75	≥	75
12	*Trabajadores*																				
13	Inicio mes 1	1					-1				1								0	=	0
14	Inicio mes 2	-1	1					-1				1							0	=	0
15	Inicio mes 3		-1	1					-1				1						0	=	0
16	Inicio mes 4			-1	1					-1				1					0	=	0
17	Final del mes 4				-1	1									1				0	=	0
18	Inicio mes 5					1													0	=	0
19																					
20	RESPUESTAS	50.0	50.0	40.0	50.0	0.0	50.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0	10.0	0.0	50.0	15.0	0.0	0.0			

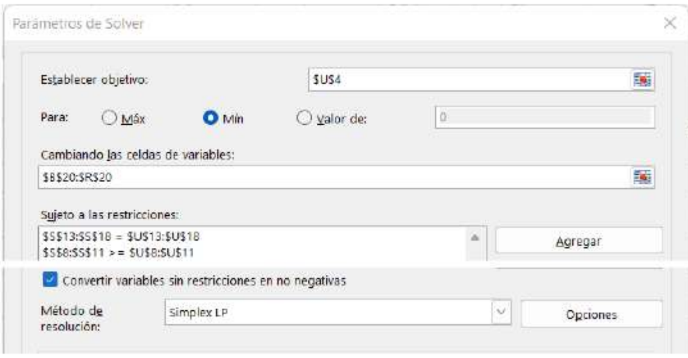


Figura 2-19 Resolución con Solver. Ejercicio Zafra-Azúcar

Elaborado por el autor

Ahora, se requiere de la interpretación del resultado. Con respecto al neto de los trabajadores, que se tendrá: $x_1 = x_2 = 50, x_3 = 40, x_4 = 50, x_5 = 0$ lo que significa que para los meses de febrero y marzo (1 y 2), se tendrán a 50 trabajadores, en el mes 3 de abril se tendrán 40, lo cual significa que se despidieron a 10 trabajadores al inicio de abril confirmado con $S_3^+ = 10$, pero que para el mes 4 de mayo se vuelven a contratar al inicio $S_4^- = 10$, con lo que se tendrán trabajando en mayo a 50 personas; finalmente al inicio del mes de junio se despiden a todos los contratos temporales con lo que $S_5^+ = 50$. En lo que respecta a la producción solo al final del primer mes analizado I_1se almacenará la producción de 15 hectáreas.

Ojo no confundir los superíndices (+) y (-), (+) significa un exceso por lo que se despide, y (-) una necesidad por lo que se contrata.

** Fin del ejercicio **

Ejercicio 2-14 Nivelación de la producción: Compra y Venta

ISBN: 978-631-6557-43-8

Considerar un centro de acopio en una provincia de la sierra del Ecuador, con una capacidad de 2000 sacos de papa, acorde a sus datos históricos se tiene un estimado de compra y venta de papa, según se observa en la siguiente tabla:

Tabla 2-4 Datos de compra y venta de sacos de papas

Mes	Precio de venta ($)	Precio de compra ($)
Enero	3	8
Febrero	6	8
Marzo	7	2
Abril	1	3
Mayo	4	4
Junio	5	3
Julio	5	3
Agosto	1	2
Septiembre	3	5
Octubre	2	5

Elaborado por el autor

Al inicio del año se tiene 600 sacos. Cada mes, se puede comprar y vender acorde a los precios anteriores. La secuencia del proceso es la siguiente: 1) Observar el stock inicial de trigo. 2) Se puede vender cualquier cantidad de trigo hasta el stock inicial al precio de venta del mes actual. 3) Se puede comprar, al precio de compra del mes actual, tanto trigo como se desee, sujeto a la limitación del tamaño del almacén.

La meta es generar un modelo de programación lineal, para determinar cómo maximizar las ganancias en los próximos 10 meses.

Las variables de decisión son:

$$x_i = sacos\ de\ papas\ comprados\ en\ el\ mes\ i$$

$$y_i = sacos\ de\ papas\ vendidas\ por\ cada\ mes\ i$$

$$I_i = sacos\ de\ papas\ en\ inventario\ al\ mes\ i$$

$$Donde\ i = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

La función objetivo para maximizar la ganancia:

$$\max z = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 + y_4 + 4y_5 + 5y_6 + 5y_7 + y_8 + 3y_9 + 2y_{10} - (8x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 5x_9 + 5x\_10$$

Las restricciones a tener, son la de venta de los sacos en inventario:

$$y_i - I_i \leq 0$$

Compras hasta mantener la capacidad de inventario:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_1 + I_1 - y_1 \leq 20$$

El balance en el inventario tiene que mantenerse:

$$I_{i+1} - I_i - x_i + y_i = 0$$

AF3 =SUMAPRODUCTO(B3:AE3,$B$38:$AE$38)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
1		SACOS - COMPRA										SACOS - VENTA										SACOS - INVENTARIO												
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8	y9	y10	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10			
3	FUNCIÓN OBJETIVO	-8	-8	-2	-3	-4	-3	-3	-2	-5	-5	3	6	7	1	4	5	5	1	3	1											16200	MAXIMIZAR	
4																																		
5	Restricción																																	
6	Venta - Inventario 1											1										-1										-600	≤	0
7	Venta - Inventario 2												1										-1									-600	≤	0
8	Venta - Inventario 3													1										-1								0	≤	0
9	Venta - Inventario 4														1										-1							-2000	≤	0
10	Venta - Inventario 5															1										-1						-2000	≤	0
11	Venta - Inventario 6																1										-1					0	≤	0
12	Venta - Inventario 7																	1										-1				0	≤	0
13	Venta - Inventario 8																		1										-1			0	≤	0
14	Venta - Inventario 9																			1										-1		0	≤	0
15	Venta - Inventario 10																				1										-1	0	≤	0
16	Capacidad 1	1										-1										1										600	≤	2000
17	Capacidad 2		1										-1										1									600	≤	2000
18	Capacidad 3			1										-1										1								2000	≤	2000
19	Capacidad 4				1										-1										1							2000	≤	2000
20	Capacidad 5					1										-1										1						2000	≤	2000
21	Capacidad 6						1										-1										1					2000	≤	2000
22	Capacidad 7							1										-1										1				0	≤	2000
23	Capacidad 8								1										-1										1			2000	≤	2000
24	Capacidad 9									1										-1										1		0	≤	2000
25	Capacidad 10										1										-1										1	0	≤	2000
26	Balance 1	-1										1										-1	1									0	=	0
27	Balance 2		-1										1										-1	1								0	=	0
28	Balance 3			-1										1										-1	1							0	=	0
29	Balance 4				-1										1										-1	1						0	=	0
30	Balance 5					-1										1										-1	1					0	=	0
31	Balance 6						-1										1										-1	1				0	=	0
32	Balance 7							-1										1										-1	1			0	=	0
33	Balance 8								-1										1										-1	1		0	=	0
34	Balance 9									-1										1										-1	1	0	=	0
35	Balance 10										-1										1										-1	0	=	0
36																																		
37																																		
38	RESPUESTAS	0	0	2000	0	0	2000	0	2000	0	0	0	0	600	0	0	2000	2000	0	2000	0	600	600	600	2000	2000	2000	2000	0	2000	0			

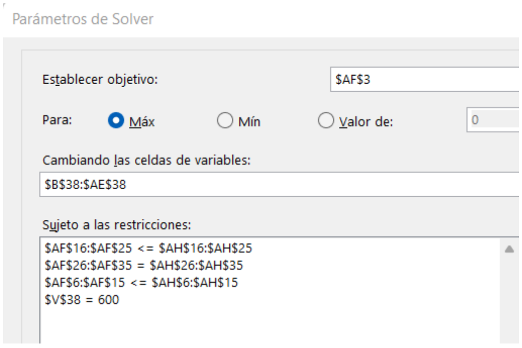


Figura 2-20 Resolución con Solver. Ejercicio Centro de Acopio

Elaborado por el autor

El esquema de ventas es de 600 sacos en marzo, 2000 en mayo, 2000 en junio y 2000 en agosto, sin que se mantenga inventario. El esquema de compras es en marzo, junio y agosto de 2000 USD.

2.3 Gestión Financiera

Las aplicaciones anteriores han mostrado como la programación lineal sirve para maximizar ganancias y minimizar costos; sin embargo, en este numeral se tratará de

ISBN: 978-631-6557-43-8

identificar la combinación óptima de proyectos o inversiones que generen el mayor retorno posible, teniendo en cuenta las restricciones presupuestarias y los riesgos asociados, lo que se traduce en una toma de decisiones más informada y efectiva (Ford, 1973). Considerando a la programación lineal como una herramienta funcional para la gestión de estrategias financieras en las organizaciones (Espinoza Carrión et al., 2019)

2.3.1 Préstamos bancarios

Ejercicio 2-15 Préstamos bancarios

Una cooperativa de ahorros está desarrollando una política de préstamos a partir de un capital otorgado de 1.2 millones de dólares. En este sentido la siguiente tabla muestra los datos aproximados pertinentes:

Tabla 2-5 Tasa de interés y porcentaje de morosidad. Préstamos Ecuador

Tipo de préstamo	Tasa de interés (%)	% de mora
Personal	21	10
Comercial	12	4
Compra de Automóviles	15	7
Hipotecario interés social	5	3
Agrícola	8	5

Elaborado por el autor

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses. La visión de la cooperativa indica que un mínimo del 40% de préstamos deben ser considerados para préstamos agrícolas y para casas de interés social, y deben dedicarse en valores iguales. A la vez que como máximo se considere el 50% de los préstamos personales con respecto a los préstamos personales, comerciales y automóviles. Y, dado que una concesionaria firmó un convenio con la cooperativa, al menos 25000 dólares se dedicarán a préstamos para automóviles. La cooperativa limitará su proporción de deudas impagables al 5%.

Utilizando programación lineal formule la política de préstamos.

Considerar en primer lugar las variables de decisión, que en este caso son los montos asignados a los diferentes tipos de préstamos, que por comodidad se tratarán en miles de dólares:

$$x_1 = miles\ de\ dólares\ para\ préstamos\ personales$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$x_2 = miles\ de\ dólares\ para\ préstamos\ comerciales$

$x_3 = miles\ de\ dólares\ para\ préstamos\ de\ compra\ de\ autos$

$x_4 = miles\ de\ dólares\ para\ préstamos\ hipotecarios\ para\ vivienda$

$x_5 = miles\ de\ dólares\ para\ préstamos\ agrícolas$

Con ello, se debe generar la función objetivo que en este caso viene dado por la diferencia del ingreso por los intereses cobrados menos la pérdida por deudas impagables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamos al corriente, es decir que cuando se ha perdido el 10% de los préstamos personales por mora, significa que solo se ganará intereses por el 90% de los préstamos que si está pagando. Tomando en consideración esto, la fórmula general es

$$rendimiento = interés(1 - mora) - mora$$

Por lo que la función será maximizar rendimientos:

$$\begin{aligned} \max z = 0.21(1-0.1)x_1 + 0.12(1-0.04)x_2 + 0.15(1-0.07)x_3 \\ + 0.05(1-0.03)x_4 + 0.08(1-0.05)x_5 \\ - (0.1x_1 + 0.04x_2 + 0.07x_3 + 0.03x_4 + 0.05x_5) \end{aligned}$$

$$\max z = 0.089x_1 + 0.075x_2 + 0.070x_3 + 0.019x_4 + 0.026x_5$$

El problema en este caso tiene seis restricciones: el monto máximo que se puede prestas, las dos condiciones para los préstamos de interés social, la relación entre préstamos personales, comerciales y de automóviles, el convenio con la concesionaria, y el máximo permitido de deuda impagable.

Respecto al monto máximo se tiene (en miles de dólares):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1200$$

Con respecto a que el 40% de los préstamos tienen que ser para vivienda social y agricultura se podría pensar inicialmente que se formula como $x_4 + x_5 \geq 0.4(1200)$, pero tiene su limitación ya que el monto que se utilizará no necesariamente serán los 1.2 millones, y que en realidad dependerá del esquema usado, así que en realidad la restricción es:

$$x_4 + x_5 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$despejando$$

$$-0.4x_1 - 0.4x_2 - 0.4x_3 + 0.6x_4 + 0.6x_5 \geq 0, \qquad o$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \leq 0$$

También los préstamos sociales deben ser iguales, así que:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_4 = x_5, \qquad x_4 - x_5 = 0$$

Respecto a los préstamos de tipo personal se dice que no podrán exceder el 50% de lo que se dedique a los personales, comerciales y de automóviles, teniendo:

$$x_1 \leq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$despejando$$
$$0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.3x_3 \leq 0$$

En convenio se deberá dedicar:

$$x_3 \geq 25$$

Y en deudas impagables no se excederá el 5%:

$$0.1x_1 + 0.04x_2 + 0.07x_3 + 0.03x_4 + 0.05x_5 \leq 0.05(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$
$$0.05x_1 - 0.01x_2 + 0.02x_3 - 0.02x_4 + 0x_5 \leq 0$$

El modelo final ha quedado como sigue:

$$\max z = 0.089x_1 + 0.075x_2 + 0.070x_3 + 0.019x_4 + 0.026x_5$$

$$\begin{array}{llllllll}
s.t & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & x_5 & \leq 1200 \\
 & 0.4x_1 + & 0.4x_2 + & 0.4x_3 - & 0.6x_4 - & 0.6x_5 & \leq 0 \\
 & & & & x_4 - & x_5 & = 0 \\
 & 0.5x_1 - & 0.5x_2 - & 0.5x_3 & & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & & & \geq 25 \\
 & 0.05x_1 - & 0.01x_2 + & 0.02x_3 - & 0.02x_4 & & \leq 0
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Resolviendo con Solver de Excel:

ISBN: 978-631-6557-43-8

B6 =B4*(1-B5)-B5

I6 =SUMAPRODUCTO(B6:F6,$B$16:$F$16)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				PRÉSTAMOS					
2		personal	comercial	autos	casas	agricola			
3		x1	x2	x3	x4	x5			
4	*Interés*	*0.21*	*0.12*	*0.15*	*0.05*	*0.08*			**MAX**
5	*Mora*	*0.1*	*0.04*	*0.07*	*0.03*	*0.05*			**RECAUDAR**
6	**FUNCIÓN OBJETIVO**	**0.089**	**0.075**	**0.070**	**0.019**	**0.026**			**67.27**
7									
8	**RESTRICCIONES**								
9	Máximo préstamo	1	1	1	1	1	1200.0	≤	1200
10	Interés Social	0.4	0.4	0.4	-0.6	-0.6	0.0	≤	0
11					1.0	-1.0	0.0	=	0
12	Personales	0.5	-0.5	-0.5			-172.5	≤	0
13	Convenio			1.0			25.0	≥	25
14	Impagables	0.05	-0.01	0.02	-0.02	0.00	0.0	≤	0
15									
16	**RESPUESTAS**	187.5	507.5	25.0	240.0	240.0			
17									

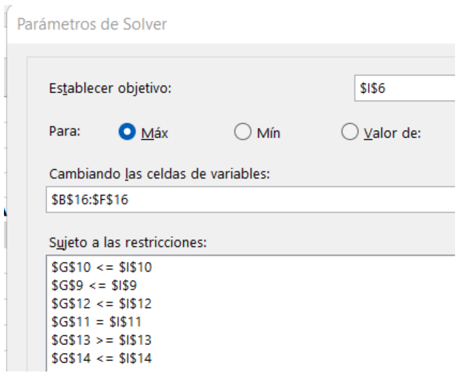


Figura 2-21 Resolución con Solver. Ejercicio Préstamos

Elaborado por el autor

Por tanto, el esquema de préstamos es el siguiente $x_1 = 187.5, x_2 = 507.5, x_3 = 25, x_4 = x_5 = 240.0, z = 67.2790$: \$ 187,500 se dedicarán a préstamos de tipo personal, \$ 507,500 a comerciales, se cumplirá con el mínimo establecido para préstamos de autos con \$25,000 los préstamos para vivienda popular y agrícolas tendrán un monto asignado de \$240,000, con ello se tendrá un ingreso neto de \$ 67,279.00, lo que corresponde a una tasa de rendimiento de:

$$TR = \frac{z}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \frac{67.279}{1200}$$

$$TR = 5.6\%$$

2.3.2 Presupuesto de capital

ISBN: 978-631-6557-43-8

Dentro de las decisiones de para la distribución de capitales, la programación lineal puede ser utilizado para obtener la combinación óptima de los proyectos, cuándo pedir prestado y cuándo prestar los fondos acordes a ciertas condiciones de límite de deuda y calendarios a cumplir. Robichek & Weingartner (1965) señala que este tipo de problemas se formulan como:

$$\max \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

$$sujeto\ a: \sum c_{tj} x_j \leq C_t, \qquad 0 \leq x_j \leq 1$$

En donde b_j denota el valor presente neto referido a los ingresos y egresos de los proyectos j, c_{tj} es el valor presente de los egresos requeridos por el proyecto j, en el tiempo t, y C_t son los fondos disponibles para la inversión en todos los proyectos para el período t, tomando en cuenta que solo puedo invertir en un proyecto hasta el 100% de su valor, es decir no se pueden realizar dos proyectos del mismo tipo $x_j \leq 1$.

Ejercicio 2-16 Inversiones en proyectos

Problema propuesto para resolución por parte del estudiante de (Taha, 2022): una empresa inmobiliaria "está considerando seis posibles proyectos de construcción durante los próximos 4 años. La empresa puede emprender cualquiera de los proyectos en parte o en su totalidad. La ejecución parcial de un proyecto prorrateará proporcionalmente tanto el rendimiento como los desembolsos de efectivo. El valor presente neto, los desembolsos y los fondos disponibles [en miles de dólares] se presentan en la tabla"

Tabla 2-6 Desembolsos y rendimiento. Ejercicio de inversión en proyectos

	Desembolso en efectivo				
Proyecto	**Año 1**	**Año 2**	**Año 3**	**Año 4**	**Rendimiento**
A	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40
B	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80
C	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75
D	7.2	10.5	7.5	5.0	14.80
E	12.3	10.1	8.3	6.3	18.20
F	9.2	7.8	6.9	5.1	12.35
Fondo disponible	60.0	70.0	35.0	20.0	

Fuente: (Taha, 2022)

ISBN: 978-631-6557-43-8

"Sin tomar en cuenta el valor del tiempo en el dinero debido a inflación, formular el problema como un modelo de programación lineal, y determinar la combinación óptima de proyectos para que se maximice el rendimiento total"

Definiendo las variables de decisión tenemos que decidir en cuáles proyectos vamos a invertir siendo:

$$x_j = porcentaje\ de\ inversión\ en\ el\ proyecto\ j$$

$$con\ j = \{A, B, C, D, E, F\}$$

Para ello vamos a maximizar el rendimiento o valor presente neto, considerando los coeficientes a obtener al final de la inversión.

$$\max z = 32.4x_A + 35.8x_B + 17.75x_C + 14.80x_D + 18.20x_E + 12.35x_F$$

Las restricciones cumpliendo con lo expuesto por Robichek & Weingartner (1965) son:

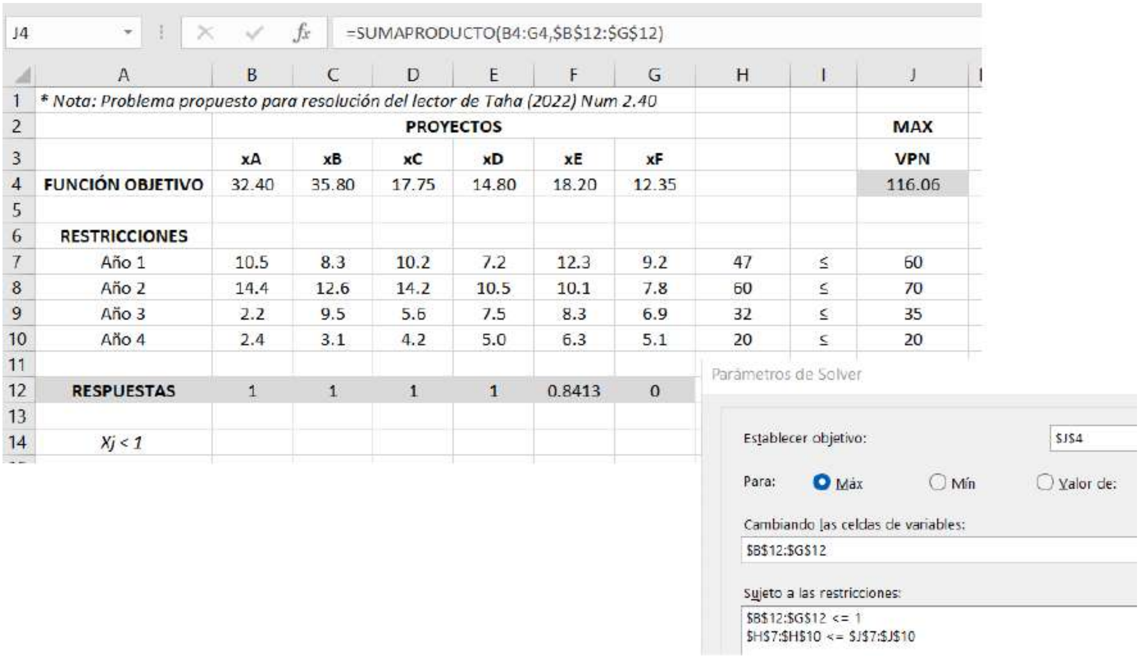
$$10.5x_A + 8.3x_B + 10.2x_C + 7.2x_D + 12.3x_E + 9.2x_F \leq 60$$

$$14.4x_A + 12.6x_B + 14.2x_C + 10.5x_D + 10.1x_E + 7.8x_F \leq 70$$

$$2.2x_A + 9.5x_B + 5.6x_C + 7.5x_D + 8.3x_E + 6.9x_F \leq 35$$

$$2.4x_A + 3.1x_B + 4.2x_C + 5.0x_D + 6.3x_E + 5.1x_F \leq 20$$

Con $0 \leq x_j \leq 1$


J4 =SUMAPRODUCTO(B4:G4,$B$12:$G$12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	* Nota: Problema propuesto para resolución del lector de Taha (2022) Num 2.40									
2		PROYECTOS								MAX
3		xA	xB	xC	xD	xE	xF			VPN
4	FUNCIÓN OBJETIVO	32.40	35.80	17.75	14.80	18.20	12.35			116.06
5										
6	RESTRICCIONES									
7	Año 1	10.5	8.3	10.2	7.2	12.3	9.2	47	≤	60
8	Año 2	14.4	12.6	14.2	10.5	10.1	7.8	60	≤	70
9	Año 3	2.2	9.5	5.6	7.5	8.3	6.9	32	≤	35
10	Año 4	2.4	3.1	4.2	5.0	6.3	5.1	20	≤	20
11										
12	RESPUESTAS	1	1	1	1	0.8413	0			
13										
14	Xj < 1									

Parámetros de Solver
Establecer objetivo: $J$4
Para: Máx Mín Valor de:
Cambiando las celdas de variables:
$B$12:$G$12
Sujeto a las restricciones:
$B$12:$G$12 <= 1
$H$7:$H$10 <= $J$7:$J$10

Figura 2-22 Resolución con Solver. Ejercicio Inversiones

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

Por tanto, la respuesta es: $x_A = x_B = x_C = x_D = 1, x_E = 0.841, x_F = 0, z = 116.06$, que implica que se deberán tomar la totalidad de las inversiones A, B, C y D, y se invertirá en el 84.1% para el proyecto E, por su parte no es conveniente invertir en el proyecto F. De esta forma se tendrá un rendimiento esperado de $ 116061 USD.

Ejercicio 2-17 Inversiones en proyectos (2)

"Considerando al ejercicio, suponer que cualquier fondo que no se haya utilizado el año anterior puede ser utilizado el año siguiente"

En este caso se han añadido 4 nuevas variables:

$$S_i = Fondos\ sobrantes\ prestados\ del\ año\ i, \qquad i = \{1,2,3,4\}$$

Supongamos que S_1 es una "inversión" en este caso para la restricción en el año 1 cualquier inversión que hagamos tendrá signo positivo, para el año 2 S_1 deja de ser inversión y pasa a formar parte de los fondos disponibles, y la nueva "inversión" pasará a ser S_2, con ello nuestras restricciones son modificadas:

$$10.5x_A + 8.3x_B + 10.2x_C + 7.2x_D + 12.3x_E + 9.2x_F + S_1 = 60$$
$$14.4x_A + 12.6x_B + 14.2x_C + 10.5x_D + 10.1x_E + 7.8x_F + S_2 = 70 + S_1$$
$$2.2x_A + 9.5x_B + 5.6x_C + 7.5x_D + 8.3x_E + 6.9x_F + S_3 = 35 + S_2$$
$$2.4x_A + 3.1x_B + 4.2x_C + 5.0x_D + 6.3x_E + 5.1x_F + S_4 = 20 + S_3$$

Ninguno de los sobrantes tiene influencia en la función objetivo.

Respecto a las restricciones implícitas se mantiene $0 \leq x_j \leq 1$, y para $S_i \geq 0$, notando que S_i viene expresado en miles de dólares por lo que para ellos no aplica la restricción de ≤ 1

Con ello nuestro ejercicio pasa a ser resuelto:

N4 =SUMAPRODUCTO(B4:K4,$B$12:$K$12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	* Nota: Problema propuesto para resolución del lector de Taha (2022) Num 2.40													
2		PROYECTOS						SOBRANTES / REINVERTIDOS						MAX
3		xA	xB	xC	xD	xE	xF	S1	S2	S3	S4			VPN
4	FUNCIÓN OBJETIVO	32.40	35.80	17.75	14.80	18.20	12.35							127.72
5														
6	RESTRICCIONES													
7	Año 1	10.5	8.3	10.2	7.2	12.3	9.2	1				60	=	60
8	Año 2	14.4	12.6	14.2	10.5	10.1	7.8	-1	1			70	=	70
9	Año 3	2.2	9.5	5.6	7.5	8.3	6.9		-1	1		35	=	35
10	Año 4	2.4	3.1	4.2	5.0	6.3	5.1			-1	1	20	=	20
11														
12	RESPUESTAS	1	1	1	1	1	0.710	4.9648	7.6241	4.6228	0			
13														
14	Xj < 1													

ISBN: 978-631-6557-43-8

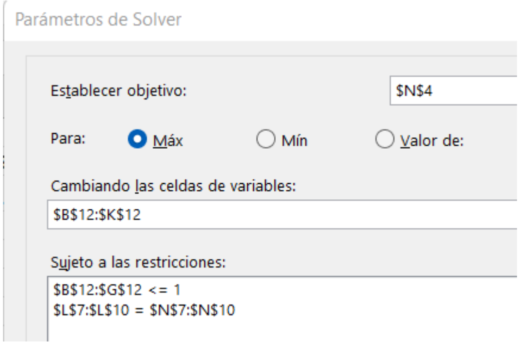


Figura 2-23 Resolución con Solver. Ejercicio Inversiones (2)

Elaborado por el autor

Por tanto, la respuesta es: $x_A = x_B = x_C = x_D = x_E = 1,\ x_F = 0.710, z = 127.72$, que implica que se deberán tomar la totalidad de las inversiones A, B, C, D y E y en F se invertirá en el 71.0 %. De esta forma se tendrá un rendimiento esperado de $ 127720 USD, un incremento de $ 11600 respecto a las inversiones sin considerar los sobrantes.

** Fin del ejercicio **

2.3.3 Planificación financiera a corto plazo

Ejercicio 2-18 Planificación Financiera a corto plazo

Ejercicio adaptado de (Neave & Wiginton, 1981; Winston, 2022): Considerar una pequeña empresa de tecnología que fabrica tabletas y auriculares inalámbricos. Los costos de mano de obra por unidad, y de materia prima para las tabletas es de $ 50.00 y $ 30.00 y para los auriculares $ 35.00 y $ 40.00; por otra parte, los precios de venta de cada producto son de $100.00 y $90.00 respectivamente.

El 1 de diciembre de 2024, la empresa cuenta con suficiente materia prima para fabricar 100 tabletas y 100 auriculares. En la misma fecha, el balance general de la empresa se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 2-7 Activos y Pasivos. Empresa de tecnología

	Activos ($)	Pasivos ($)
Efectivo	10,000	
Cuentas por cobrar	3,000	
Inventario	7,000	
Préstamo del banco		10,000

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

Por lo que la razón corriente es de 2 (la relación entre activos y pasivos).

La empresa debe determinar cuántas tabletas y auriculares deben producirse durante diciembre, considerando que la demanda es lo suficientemente alta como para asegurar que todos los productos fabricados se venderán. Sin embargo, todas las ventas se realizan a crédito, por lo que el pago de los productos fabricados en diciembre no se recibirá hasta el 1 de febrero de 2025.

Durante diciembre, la empresa cobrará \$2000 de las cuentas por cobrar, y deberá pagar \$1000 del préstamo pendiente y una renta mensual de \$1000. El 1 de enero de 2025, la empresa recibirá un envío de materia prima por un valor de \$2000, que se pagará el 1 de febrero. La gerencia ha decidido que el saldo de efectivo al 1 de enero de 2025 debe ser al menos \$4000. Además, el banco de requiere que la razón corriente al comienzo de enero sea de al menos 2.

Para maximizar la contribución al beneficio de la producción de diciembre, es decir, los ingresos que se recibirán menos los costos variables de producción, ¿qué debería producir la empresa durante diciembre? Formular el modelo con programación lineal.

Las variables de decisión se definen a partir de cuántas tabletas y cuantos audífonos deseo manufacturar durante el mes de diciembre:

$$x_1 = número\ de\ tabletas\ a\ manufacturar\ en\ diciembre$$

$$x_2 = número\ de\ audífonos\ a\ manufacturar\ en\ diciembre$$

Se desea maximizar las utilidades, considerando que de cada una está dada por el precio de venta menos los costos de materia prima y de producción:

$$\max z = (100 - 50 - 30)x_1 + (90 - 35 - 40)x_2$$

$$\max z = 20x_1 + 15x_2$$

Respecto a las restricciones de disponibilidad de materia prima, tenemos que no se puede exceder la producción de 100 artículos:

$$x_1, x_2 \leq 100$$

El dinero en efectivo requerido al inicio del siguiente año debe ser de al menos \$ 4000. Este se calcula mediante la cantidad de dinero en efectivo de diciembre, más los ingresos por los pagos en las cuentas por cobrar menos el pago del préstamo, la renta y los costos asociados al pago de mano de obra.

$$10000 + 2000 - 1000 - 1000 - 50x_1 - 35x_2 \geq 4000$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$50x_1 + 32x_2 \leq 6000$$

En referencia a la razón corriente es necesario calcular la posición financiera de la compañía para el 1 de enero. De manera que:

$$efectivo = 10000 - 50x_1 - 35x_2$$

$$cuentas\ por\ cobrar = 3000 + 100x_1 + 90x_2 - 2000$$

$$valor\ del\ inventario = 7000 - (30x_1 + 40x_2) + 2000$$

$$pasivos = 10000 - 1000 + 2000$$

Con ello la restricción es:

$$\frac{activos}{pasivos} \geq 2$$

$$\frac{(10000 - 50x_1 - 35x_2) + (1000 + 100x_1 + 90x_2) + (9000 - 30x_1 - 40x_2)}{11000} \geq 2$$

$$20000 + 20x_1 + 15x_2 \geq 22000$$

$$20x_1 + 15x_2 \geq 2000$$

Planteando el modelo final, es:

$$\max z = 20x_1 + 15x_2$$

$$
\begin{aligned}
s.t \qquad & 50x_1 + 35x_2 \leq 6000 \\
& 20x_1 + 15x_2 \leq 2000 \\
& x_1 \qquad\quad \leq 100 \\
& \qquad\quad x_2 \leq 100
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2 \geq 0\ y\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Resolviendo:

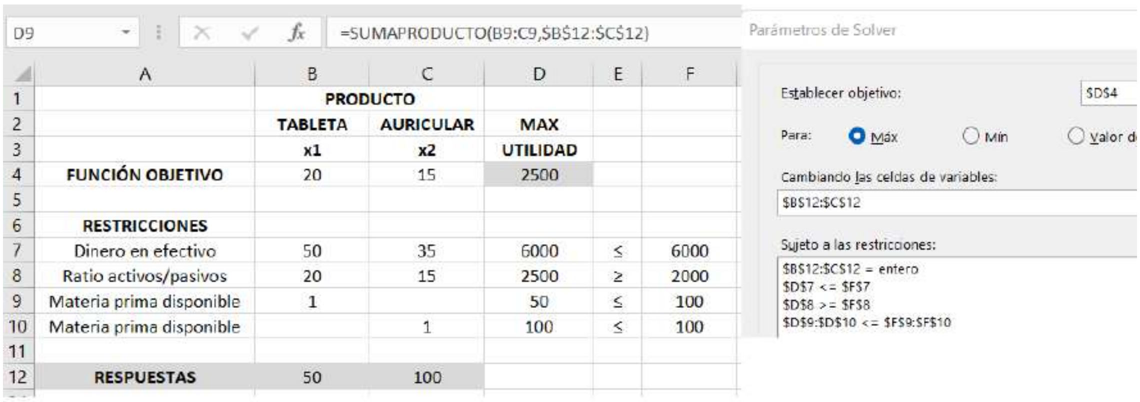


Figura 2-24 Resolución con Solver. Ejercicio Activos/Pasivos

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

La respuesta por tanto es $x_1 = 50, x_2 = 100, z = 2500$ es decir para mantener una utilidad máxima de $ 2500 USD y cumplir con todas las restricciones ligadas a la planificación financiera se requieren manufacturar 50 tabletas y 100 auriculares el mes de diciembre.

2.3.4 Planificación financiera a períodos múltiples

Los planteamientos de este tipo de ejercicios, es similar a las inversiones de proyectos, con la consideración que las variables estarán sujetas al cambio en el flujo de efectivo y no en el retorno anual, es decir los retornos pueden ser entregados en cualquier momento y no necesariamente al final de la inversión

Ejercicio 2-19 Inversiones en proyectos (3)

Tomar en consideración una inmobiliaria que se encuentra analizando si invertir en dos proyectos con un horizonte temporal de 4 años, el primero respecto a una construcción a las afueras de la ciudad (A) y el segundo dentro de la ciudad (B) para lo cual posee un capital inicial de $ 200,000.00, y destinará $100,000.00 para el inicio de los años subsiguientes; el proyecto dentro de la ciudad requiere una mayor inversión inicial pero los réditos económicos se esperan para el año 3, mientras para el de fuera de la ciudad se tiene una menor inversión inicial pero su retorno se espera para el final del horizonte de inversión. Los flujos de caja esperado para los proyectos se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2-8 Flujo de inversión (en cientos de miles de dólares). Ejercicio inversiones

Proyectos	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Final año 4
A	-1.0	-3.1	-1.5	2.2	5.1
B	-2.4	-2.0	1.5	1.8	2.7

Elaborado por el autor

El flujo negativo significa que la inmobiliaria tiene que asignar dinero al proyecto, y el positivo que recibe regalías por el mismo. Al inicio de cada año la inmobiliaria puede pedir un préstamo adicional de $ 200,000.00 con una tasa de interés del 13%, y tiene que ser pagado al final del año. En caso de tener superávit este dinero se puede invertir en los proyectos o en una póliza anual con un retorno anual del 8%.

ISBN: 978-631-6557-43-8

La inmobiliaria puede participar totalmente o en parte en cada uno de los proyectos. Determine el nivel de participación de forma que se maximice el rendimiento al final del horizonte de inversión.

Definiendo las variables de decisión, las primeras se refieren al dinero a colocar en los proyectos de inversión, pero en este caso tenemos dos alternativas el pedir préstamos cada año y el de invertir en pólizas cada año. De esta forma tenemos:

$x_j = porcentaje\ de\ participación\ en\ el\ proyecto\ j = \{A, B\}$

$p_i = cantidad\ de\ dinero\ pedido\ a\ préstamo\ para\ el\ año\ i = \{1,2,3,4\}$

$s_i = superávit\ a\ ser\ invertido\ en\ pólizas\ en\ el\ año\ i = \{1,2,3,4\}$

La función objetivo será los réditos recibidos por el proyecto más los intereses que se ganen en la póliza final menos el préstamo. Primero para tener una mejor comprensión temporal definiremos cómo se comporta el flujo del dinero cada año y si corresponde a una restricción o parte de la función objetivo.

El año 1, tengo un capital de $ 200,000, que para simplificar utilizaremos su equivalente en cientos de miles de dólares 2, de este capital restaré el porcentaje que invierta en x_A, x_B, tendré ingresos adicionales si decido hacer el préstamo p_1 o tendré invertir los sobrantes para ingresar a la póliza s_1, con lo que mi flujo llega a un equilibrio. Así la fórmula queda:

$$2 - 1.0x_A - 2.4x_B + p_1 - s_1 = 0$$

Hay que recordar que estamos usando el signo negativo para inversiones y positivos para ingresos. Para el inicio del segundo año, tengo el capital asignado de 1 (cientos de miles de dólares), la siguiente inversión que requieren los proyectos x_A, x_B, el pago que tendríamos que hacer del préstamo del año 1 (si es que lo hicimos) más los intereses del 13%, y la ganancia por los intereses del 8% en la póliza del año 1 (de igual manera si la hemos hecho), más la decisión si pedimos otro préstamo este año p_2 o si invertimos en póliza s_2. Con ello:

$$1 - 3.1x_A - 2.0x_B - 1.13p_1 + p_2 + 1.08s_1 - s_2 = 0$$

Con el mismo razonamiento para el año 3 y 4:

$$1 - 1.5x_A + 1.5x_B - 1.13p_2 + p_3 + 1.08s_2 - s_3 = 0$$

$$1 + 2.2x_A + 1.8x_B - 1.13p_3 + p_4 + 1.08s_3 - s_4 = 0$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Finalmente, lo que queremos determinar es la utilidad que tendremos al final del año 4, la cual está compuesta de los réditos de los proyectos x_A, x_B más los intereses ganados en la póliza del año 4, menos el pago del préstamo del último año. Nótese que no se acumulan los valores de los pagos de préstamos anteriores ni los intereses de las pólizas ya que estas son reinvertidas inmediatamente al final de cada año. Por tanto:

$$utilidad = 5.1x_A + 2.7x_B - 1.13p_4 + s_4$$

Y esta última es la que queremos maximizar.

Respecto a los préstamos, tenemos la restricción de que no podrán ser mayores a 2 (es decir 200,000.00 USD):

$$p_i \leq 2, \qquad i = \{1,2,3,4\}$$

Y las restricciones implícitas de porcentaje para x_j y de no negatividad para p_i y s_i

$$0 \leq x_j \leq 1; \;\; j = \{A, B\}$$

$$p_i, s_i \geq 0; \;\; i = \{1,2,3,4\}$$

Utilizando Solver para obtener las respuestas:

L9 =SUMAPRODUCTO(B9:K9,$B$11:$K$11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		PROYECTOS		PRESTAMOS				SOBRANTES / SUPERÁVIT						
2		xA	xB	p1	p2	p3	p4	s1	s2	s3	s4			
3	RESTRICCIONES													
4	Año 1	-1.0	-2.4	1.0				-1.0				-2	=	-2
5	Año 2	-3.1	-2.0	-1.13	1.0			1.08	-1.0			-1	=	-1
6	Año 3	-1.5	1.5		-1.13	1.0			1.08	-1.0		-1	=	-1
7	Año 4	2.2	1.8			-1.13	1.0			1.08	-1.0	-1	=	-1
8	FUNCIÓN OBJETIVO													
9	Final Año 4	5.1	2.7				-1.130				1.08	6.746	MAXIMIZAR	
10													RENDIMIENTO	
11	RESPUESTAS	0.1296	1.0000	0.52955	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	3.13			
12														
13		*Xj < 1*			pi < 20 000 USD									

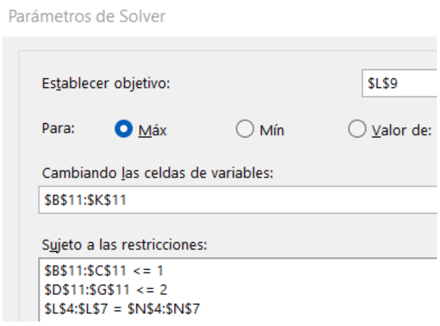


Figura 2-25 Resolución con Solver. Ejercicio Inversiones 3

Elaborado por el autor

Notemos el detalle que para esta ocasión la función objetivo se encuentra en la celda L9, se ha procedido de esta manera para tener una mejor comprensión de los

ISBN: 978-631-6557-43-8

horizontes temporales, yendo del año 1 al 4 que son las restricciones, y al final del año 4 la utilidad.

Interpretando los resultados tenemos: $x_A = 0.1296, x_B = 1.00, p_1 = 0.529, p_2 = 2.00, s_3 = 0.05, s_4 = 3.13, y\ p_3 = p_4 = s_1 = s_2 = 0, con\ z = 6.746\ (cientos\ USD)$. Por tanto, para obtener la máxima utilidad de $ 676,580.00, tendremos que invertir en la totalidad del proyecto B, y asignar una participación del 12.96% en el proyecto A, para conseguir esto se requerirán dos préstamos, en el año 1 de $ 52,955.00 y el año 2 de $ 200,000.00; en el año 3 y 4 tendremos superávit por lo que se invertirían en pólizas, el año 3 $ 5,000.00, y el año 4 $ 313,400.00.

Es importante notar la "fragilidad" del modelo ante cambios en el mercado. Para ejemplo, colocar que la inversión en el año 1 del proyecto B es de 2.5, en cuyo caso $x_A = 0.324, x_B = 0.670$. Por lo que se resalta la importancia de la certidumbre de los datos que alimentarán al modelo.

** Fin del ejercicio **

Ejercicio 2-20 Inversiones en pólizas

Recurriendo a la formulación del modelo de programación lineal, ¿cuál es el plan de inversión adecuado a 10 años? Los fondos a asignar serán desde el primer al décimo año: $2000, $2000, $2500, $2500, $3000, $3500, $3500, $4000, $4000, $5000. Los tipos de bonos en los que se puede invertir son: Bonos anuales con rendimiento del 7.5%, bonos a seis años con rendimiento de 7.9% a un precio de mercado del 98%, bonos a nueve años con intereses a 8.5% con precio del mercado al 1.02 del valor nominal.

Las variables de decisión en este caso son:

$$x_i = inversiones\ con\ retorno\ anual, i = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$y_i = inversiones\ con\ retorno\ a\ 6\ años, i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$u_i = inversiones\ con\ retorno\ a\ 9\ años, i = \{1, 2\}$$

Como se nota, los valores de 1, son diferentes, ya que por ejemplo para la inversión con retorno a 9 años, no se puede invertir el año 3, ya que su retorno está fuera del horizonte de 10 años, recibiendo sus réditos al final del año 11.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Para calcular el retorno de $x_{i+1} = 1.075x_i$, de $y_{i+6} = 0.98y_i(1 + 0.079)^6$, y para $u_{i+9} = 1.02(1 + 0.085)^9$

La función objetivo, sería al final del año 10, donde:

$$\max z = 1.075x_{10} + 1.5456y_5 + 2.1255u_2$$

Organizando en Solver, se tiene la siguiente tabla:

S16 =SUMAPRODUCTO(B16:R16,$B$18:$R$18)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1							INVERSION ANUAL							INVERSION A 6 AÑOS			NVERSION A 9 AÑO:				
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	y1	y2	y3	y4	y5	z1	z2			
3	RESTRICCIONES																				
4	Año 1	1.0										0.98					1.02		2000	=	2000
5	Año 2	-1.075	1.0										0.98					1.02	2000	-	2000
6	Año 3		-1.075	1.0										0.98					2500	-	2500
7	Año 4			-1.075	1.0										0.98				2500	=	2500
8	Año 5				-1.075	1.0										0.98			3000	=	3000
9	Año 6					-1.075	1.0												3500	=	3500
10	Año 7						-1.075	1.0				-1.5465							3500	-	3500
11	Año 8							-1.075	1.0				-1.5465						4000	-	4000
12	Año 9								-1.075	1.0				-1.5465					4000	=	4000
13	Año 10									-1.075	1.0				-1.5465		-2.1255		5000	=	5000
14																					
15	FUNCIÓN OBJETIVO																				
16	Final Año 10										1.075					1.5465		2.1255	46848.02	MAXIMIZAR	
17																				RENDIMIENTO	
18	RESPUESTAS	0	0	2500	5188	0	3500	7263	11807	16693	27112	0	0	0	0	8752	1961	1961			

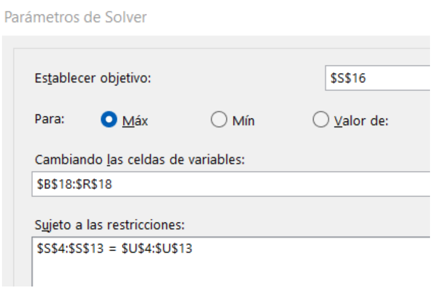


Figura 2-26 Resolución con Solver. Ejercicio Polizas

Elaborado por el autor

A partir de ello, tenemos el siguiente cronograma de inversiones:

Año 1: Inversión a 9 años $ 2000.00, Año 2: $ 2000.00 a 9 años, Año 3: $ 2500.00 a 6 años, Año 4: $ 2500.00 a 6 años, Año 5: $ 3000.00 a 6 años, Año 6: $ 3500.00, Año 7: $ 7263.00 procedente de los $ 4000.00 asignados más los intereses de la inversión de 6 años, Año 8: $ 11807.00 a un año, Año 9: $ 20559.00, Año 10: $35218.00.

La ganancia final es de $ 46,750.29, y el rendimiento final considerando una inversión de $ 32,000.00 es de 46%

ISBN: 978-631-6557-43-8

CAPÍTULO 3

3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

3.1 Volviendo al algoritmo simplex

Previo a definir el análisis de sensibilidad es necesario revisar a detalle el algoritmo simplex, ya que hasta el momento los capítulos 1 y 2 han mostrados ejercicios que tienen solución y es única, pero esto no siempre es el caso.

3.1.1 Big M, de algebraico a numérico

Se definió en el numeral 1.4.2 que M era un valor lo suficientemente grande que tiende a infinito. Aquí, se resolvió el método M con filas adicionales con los coeficientes de la fila del objetivo i-ésimo en la tabla simplex, con lo que se reduce a calcular las constantes a_i y b_i en la expresión algebraica $a_iM + b_i$. La razón por la que este procedimiento no se utiliza en la práctica es el potencial sobrecoste computacional asociado con el cálculo y la comparación de las constantes. Por tanto, se prefiere el tratamiento numérico de problemas, en comparación con el tratamiento algebraico; los métodos numéricos permiten la implementación directa en computadoras mejorando la estabilidad del algoritmo (Press et al., 2007).

Se volverá ahora a resolver el Ejercicio 1-4, usando un reemplazo numérico del valor de M

Ejercicio 3-1 Ejemplo de resolución mediante Big M

El ejercicio planteado de maximización

$$\min z = 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} sujeto\ a\colon\ 3x_1 + x_2 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El primer paso consiste en colocar las restricciones en la forma estándar, en este caso no es necesario cambiar la función objetivo de minimización a maximización ya que en la solución final se considerará que la respuesta es $-z$. Así el planteamiento es el siguiente:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$\min z = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{aligned} sujeto\ a\!: \ 3x_1 + x_2 \quad & \quad + R_1 \quad = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - s_1 \quad & \quad + R_2 = 20 \\ x_1 + 2x_2 \quad + s_2 \quad & \quad = 15 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ante la decisión de qué valor de M deberíamos usar, la respuesta dependerá de los datos del problema de programación lineal original. La penalización M debe ser lo suficientemente grande en relación con los coeficientes objetivos originales para forzar a que las variables artificiales sean cero, pero a la vez no debe ser innecesariamente demasiado grande, ya que esto podría llevar errores de redondeo. En el ejemplo presente, los coeficientes objetivos de $x_1\ y\ x_2$ son 4 y 1, respectivamente, es razonable establecer $M = 100$.

Nuestra tabla simplex inicial ahora toma la siguiente forma:

Tabla 3-1 Tabla simplex inicial

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	**Solución**
z	1	-4	-1	0	0	-100	-100	0
R_1	0	3	1	0	0	1	0	10
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	20
s_2	0	1	2	0	1	0	0	15

Elaborado por el autor

El primer paso ahora es aislar los elementos de la función objetivo de la fila superior, por lo que se requerirá utilizando Gauss-Jordan eliminar los valores de -100, que tomó M, y a partir de allí iniciar con los pasos generales para resolver la Tabla Simplex.

Tabla 3-2 Resolución Tabla Simplex

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	**Solución**	**Operación**
z	-4	-1	0	0	-100	-100	0	Fz + 100 F.R1 + 100 F.R2
R_1	3	1	0	0	1	0	10	
R_2	4	3	-1	0	0	1	20	
s_2	1	2	0	1	0	0	15	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	**Solución**	**Operación**
z	-4	-1	0	0	-100	-100	0	Fz + 100 F.R1 + 100 F.R2
R_1	3	1	0	0	1	0	10	
R_2	4	3	-1	0	0	1	20	

ISBN: 978-631-6557-43-8

s_2	1	2	0	1	0	0	15	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
z	0	167	-100	0	-232	0	680	F.Z - 696 F.x1
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	
R_2	0	1.67	-1	0	-1.33	1	6.67	F.R2 - 4 F.x1 (Nuevo pivot)
s_2	0	1.67	0	1	-0.33	0	11.67	F.s2-F.x1

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
z	0	0	0.2	0	-98.4	-100.2	12	F.z – 167 F.x2
x_1	1	0	0.2	0	0.6	-0.2	2	F.x1 – 0.33 F.x2
x_2	0	1	-0.6	0	-0.8	0.6	4	Dividido para 1.67
s_2	0	0	1	1	1	-1	5	F.s2 – 1.67 F.x2

Elaborado por el autor

3.1.2 Método de las dos fases

En el método big M, puede conducir a un error de redondeo, el método de dos fases elimina el uso de la constante M. En la primera fase se trata de encontrar la solución factible básica inicial y, si se halla una, se procede a la segunda fase para resolver el problema original.

Para la fase 1 se coloca el problema en forma de ecuación agregando las variables de holgura y artificiales necesarias a las restricciones, exactamente igual al ejercicio anterior. A continuación, determinar una solución básica de la ecuación resultante que siempre minimice la suma de las variables artificiales, independientemente si la función objetivo es de maximización o minimización. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene una solución factible. De lo contrario, si el valor mínimo es cero, se sigue con la siguiente fase: Usar la solución factible de la fase 1 como una solución factible básica inicial para el problema original (De la Cruz et al., 2024)

Con el mismo ejercicio anterior tenemos:

Ejercicio 3-2 Ejemplo de resolución mediante el método de las dos fases

La tabla simplex toma ahora esta forma, y a la vez procediendo a

Tabla 3-3 Tabla simplex inicial

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución
r	0	0	0	0	-1	-1	0
R_1	3	1	0	0	1	0	10

ISBN: 978-631-6557-43-8

R_2	4	3	-1	0	0	1	20
s_2	1	2	0	1	0	0	15

Elaborado por el autor

Operando mediante Gauss-Jordan para tener como base las variables básicas:

Tabla 3-4 Resolución Tabla Simplex Fase 1

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
r	0	0	0	0	-1	-1	0	
R_1	3	1	0	0	1	0	10	
R_2	4	3	-1	0	0	1	20	
s_2	1	2	0	1	0	0	15	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
r	7	4	-1	0	0	0	30	F.r + F.R1 + F.R2
R_1	3	1	0	0	1	0	10	(Nuevo Pivot)
R_2	4	3	-1	0	0	1	20	
s_2	1	2	0	1	0	0	15	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
r	7	4	-1	0	0	0	30	F.r - 7 F.R1
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	
R_2	4	3	-1	0	0	1	20	
s_2	1	2	0	1	0	0	15	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
r	0	1.67	-1	0	-2.33	0	6.67	
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	
R_2	0	1.67	-1	0	-1.33	1	6.67	(Nuevo pivote)
s_2	0	1.67	0	1	-0.33	0	11.67	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
r	0	1.67	-1	0	-2.33	0	6.67	F.r -1.67 F.R2
x_1	1	0.33	0	0	0.33	0	3.33	F.x1 - 0.33 F.R2
R_2	0	1	-0.6	0	-0.8	0.6	4	
s_2	0	1.67	0	1	-0.33	0	11.67	Fs2 - 1.67 F.s2

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solución	Operación
r	0	0	0	0	-1	-1	0	SI ES CERO !
x_1	1	0	0.2	0	0.6	-0.2	2	
x_2	0	1	-0.6	0	-0.8	0.6	4	
s_2	0	0	1	1	1	-1	5	

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

Para la siguiente fase, el problema queda de la siguiente manera:

$$\min z = 4x_1 + x_2$$
$$x_1 + 0.2s_1 = 2$$
$$x_2 - 0.6s_2 = 4$$
$$s_1 + s_2 = 5$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

La tabla simplex y su resolución se muestra a continuación:

Tabla 3-5 Resolución Tabla Simplex Fase 2

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	-4	-1	0	0	0	
x_1	1	0	0.2	0	2	Pivot inicial
x_2	0	1	0	-0.6	4	
s_2	0	0	1	1	5	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	0	-1	0.8	0	8	Fz + 4 F.x1
x_1	1	0	0.2	0	2	
x_2	0	1	0	-0.6	4	Nuevo Pivot
s_2	0	0	1	1	5	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	0	0	0.8	-0.6	12	$z = 12$
x_1	1	0	0.2	0	2	$x_1 = 2$
x_2	0	1	0	-0.6	4	$x_2 = 4$
s_2	0	0	1	1	5	

Elaborado por el autor

Con lo que se ha obtenido los mismos resultados que los métodos anteriores.

3.1.3 Casos especiales

Teóricamente, el algoritmo del simplex tal como está descrito anteriormente, puede fallar en encontrar la solución óptima de un problema de programación lineal. Por el bien de la exhaustividad, se discutirá en este punto el tipo de situación en la cual el simplex puede fallar. Sin embargo, los problemas de PL que surgen en aplicaciones reales raramente presentan este comportamiento indeseable.

ISBN: 978-631-6557-43-8

3.1.3.1 Degeneración y convergencia

Un PL es degenerado si tiene al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, se puede presentar un empate por la relación mínima, el cual puede romperse arbitrariamente, esto hace que, al menos una solución básica factible en la cual una variable básica es igual a cero en la siguiente iteración. La degeneración puede hacer que las iteraciones ocurran de forma indefinida en un bucle infinito y el algoritmo nunca se termine. (Taha, 2022; Winston, 2022)

Ejercicio 3-3 Resolución de un problema con tabla simplex degenerada

Tomemos el siguiente ejemplo,

$$\max z = 3x_1 + 9x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

De forma gráfica tenemos lo siguiente:

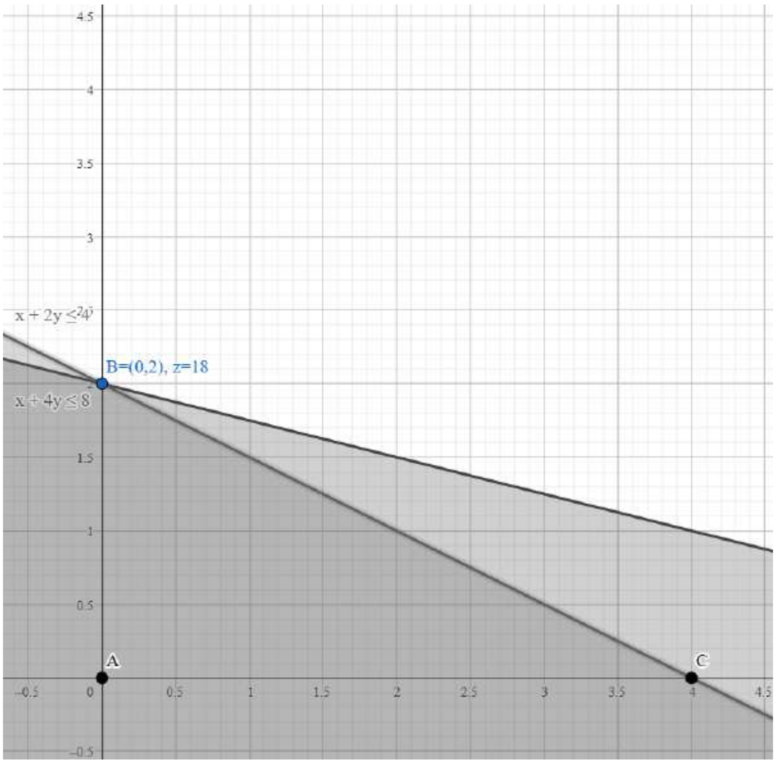


Figura 3-1 Resolución gráfica. Ejercicio Degenerado

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

Se observa que la respuesta se encuentra en el punto B, el cual está dentro de dos restricciones redundantes, es decir, si prescindimos de una de las inecuaciones la respuesta seguiría siendo la misma, otra nomenclatura es que el problema está sobredeterminado y los recursos utilizados serían superfluos. Respecto a las soluciones computacionales no existen técnicas de computo eficientes para identificar directamente este tipo de restricciones y los códigos comerciales lo que hacen es perturbar periódicamente los valores de las variables básicas.

Tabla 3-6 Resolución Tabla Simplex - Degenerado

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	**Solución**	**Operación**
z	1	-3	-9	0	0	0	
s_1	0	1	4	1	0	8	Pivote empatado
s_2	0	1	2	0	1	4	Pivote empatado

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	**Solución**	**Operación**
z	1	-0.75	0	2.25	0	18	F.z + 9 F.x1
x_2	0	0.25	1	0.25	0	2	Desempate arbitrario
s_2	0	0.5	0	-0.5	1	0	F.z - 2 F.x1

Elaborado por el autor

Aquí tenemos el problema cuando la solución es 0, lo cual no nos permitirá dividir para observar si el siguiente pivot es adecuado. En este caso, para encontrar únicamente dividiríamos para 0.5 para que ingrese la variable x_1

Tabla 3-7 Resolución Tabla Simplex - Degenerado

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	**Solución**	**Operación**
z	1	-0.75	0	2.25	0	18	
x_2	0	0.25	1	0.25	0	2	
x_1	0	1	0	-1	2	0	Dividir para 0.5

Elaborado por el autor

Con esto la respuesta es $x_1 = 0, x_2 = 2, z = 18$ sin embargo, si aumentamos el número de variables, la selección del siguiente pivote con varias soluciones de cero se haría arbitraria nuevamente impidiendo a la resolución computacional del problema

ISBN: 978-631-6557-43-8

3.1.3.2 Cantidad infinita de soluciones

Un modelo de programación lineal puede tener una cantidad infinita de óptimos cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria. El siguiente ejemplo ilustra de manera gráfica y en la tabla simplex este tipo de problemas

Ejercicio 3-4 Resolución de un problema con soluciones infinitas

Tomar el siguiente ejemplo:

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$
$$s.t. \qquad x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 + \ x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

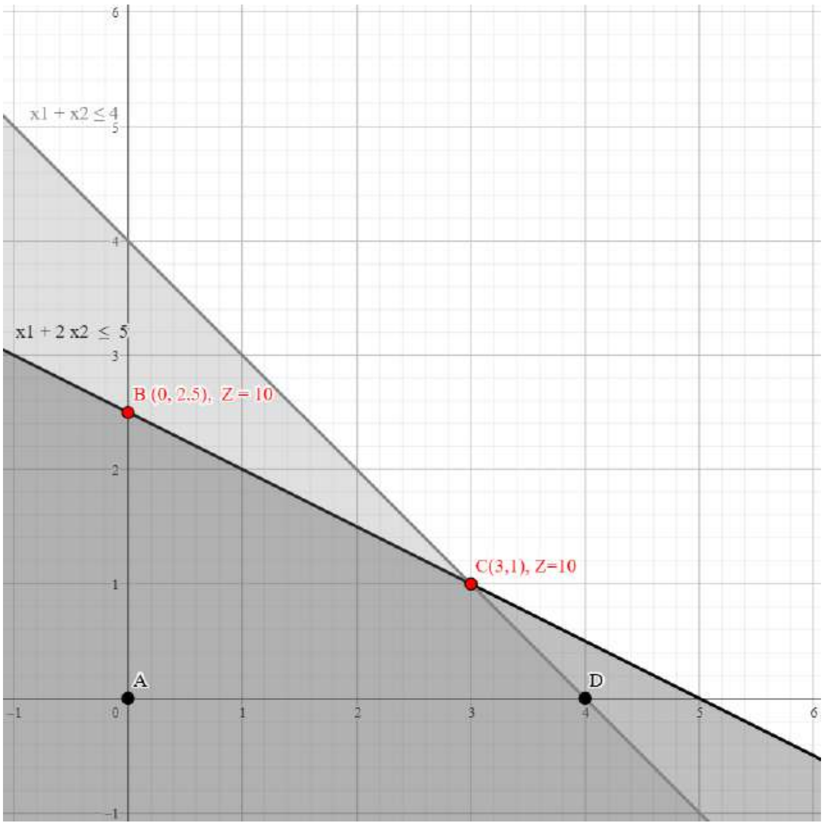


Figura 3-2 Resolución gráfica. Ejemplo Infinitas Soluciones

Elaborado por el autor

La Figura anterior demuestra cómo pueden surgir varias soluciones de un problema, que en este caso es un valor $z = 10$ y se dan en los puntos B y C, a los que se incluiría toda la recta entre esos puntos.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Para la generación de la tabla simplex se tendrá:

Tabla 3-8 Resolución Tabla Simplex Fase 2

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	-2	-4	0	0	0	
s_1	1	2	1	0	5	Pivot inicial
s_2	1	1	0	1	4	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	0	0	2	0	10	Fz + 4 F.x1
x_2	0.5	1	0.5	0	2.5	
s_2	0.5	0	-0.5	1	1.5	F.s2 – F.x1

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	0	0	2	0	10	
x_1	0	1	1	-1	1	F.x1 - 0.5F.x2
x_2	1	0	-1	2	3	(Nuevo pivot)

Elaborado por el autor

En este caso la respuesta en la iteración 3 es $x_1 = 3, x_2 = 1, z = 10$. Pero tomemos en cuenta que en la segunda iteración ya se convirtió en cero toda la fila objetivo, eso implica que la respuesta $x_2 = 2.5, z = 10$, también es óptima, y en este caso $s_2 = 1.5, con\ lo\ que\ x_1 = 0$.

3.1.3.3 *Solución no acotada (tiende al infinito)*

Esto ocurre cuando una de las variables puede incrementarse de forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones. Por lo tanto, el valor de la función objetivo asociado también puede ser no acotado. La razón normalmente indica que el modelo está mal construido, ya que no se han tomado en cuenta algunas restricciones clave. Otra posibilidad es que las estimaciones de los coeficientes de las restricciones quizá no sean precisas (Taha, 2022).

Ejercicio 3-5 Resolución de un problema con soluciones no acotadas

Tomar el siguiente ejemplo:

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t. \qquad x_1 - x_2 \leq 5$$

$$2x_1 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Resolviendo de forma gráfica, se tiene:

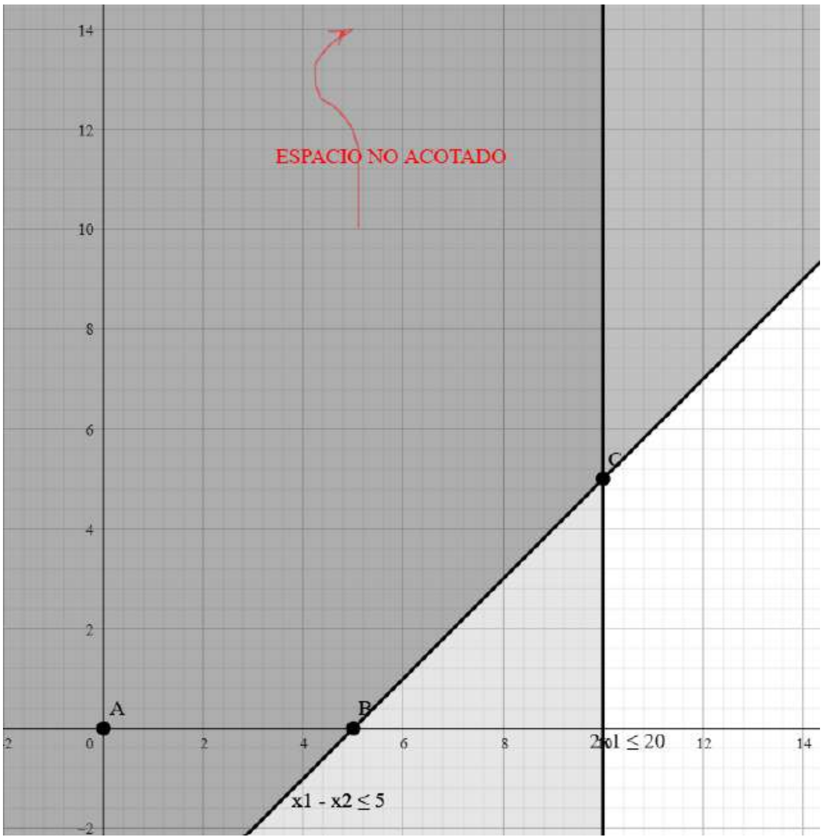


Figura 3-3 Resolución gráfica. Ejemplo No acotado

Elaborado por el autor

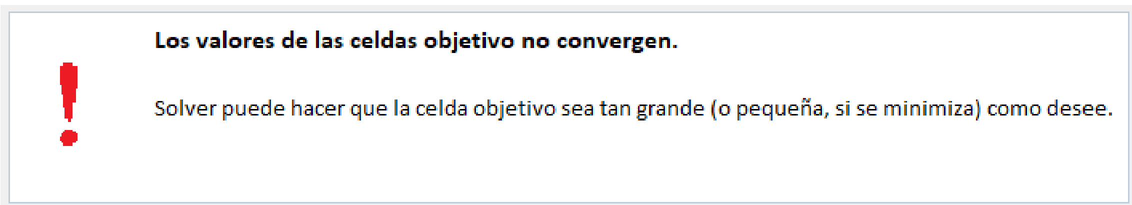
Y en la tabla simplex:

Tabla 3-9 Resolución Tabla Simplex Fase 2

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución	Operación
z	-2	-1	0	0	0	
s_1	1	-1	1	0	5	Pivote inicial (No posible)
s_2	2	0	0	1	20	

Elaborado por el autor

Solo en el pivote inicial observamos que no es posible por su división negativa. Se pudiera tratar cambiando los signos, lo que generaría una variable artificial R, pero aún, así la imposibilidad de resolución seguiría. Cuando esto ocurre, en Solver tendremos el siguiente error:



ISBN: 978-631-6557-43-8

Figura 3-4 Error en Solver. Ejemplo no acotado

Elaborado por el autor

3.1.3.4 No factibilidad

Cuando las restricciones inconsistentes no tienen una solución factible. Se da cuando se utilizan restricciones combinadas de ≤ y ≥. Si al menos una variable artificial es positiva en la iteración entonces no se tiene una solución factible. Desde el punto de vista práctico, normalmente significa que el modelo se formuló de manera incorrecta.

Ejercicio 3-6 Resolución de un problema sin soluciones (no factibles

Tomar el siguiente ejemplo:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$s.t. \quad 2x_1 + \quad x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

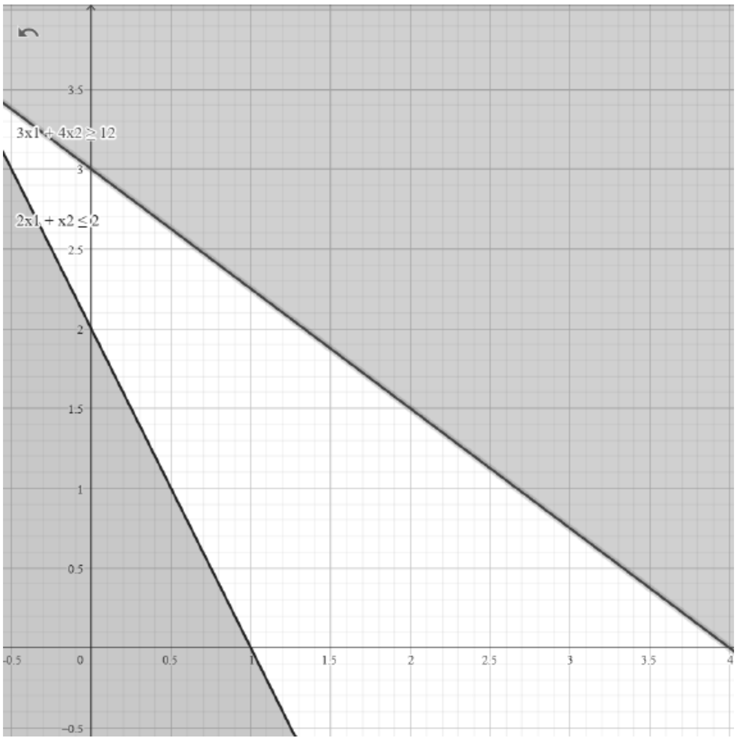


Figura 3-5 Resolución gráfica. Ejemplo Sin Solución

Elaborado por el autor

Si se trata de hacer la tabla Simplex, tenemos:

ISBN: 978-631-6557-43-8

Tabla 3-10 Resolución Tabla Simplex. Ejemplo sin solución

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	Solución	Operación
z	-3	-2	0	0	100	0	Eliminar R
s_1	2	1	1	0	0	2	
R_1	3	4	0	-1	1	12	

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	Solución	Operación
z	-303	-402	0	100	0	-1200	F.z + 402 F.s1
s_1	2	1	1	0	0	2	Pivot inicial
R_1	3	4	0	-1	1	12	F.s2 - 4 F.s1

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	Solución	Observación
z	501	0	402	100	0	-396	
x_1	2	1	1	0	0	2	
R_1	-5	0	-4	-1	1	4	Todos negativos R1 positivo

Elaborado por el autor

Si se trata de resolver usando Solver, se tiene:

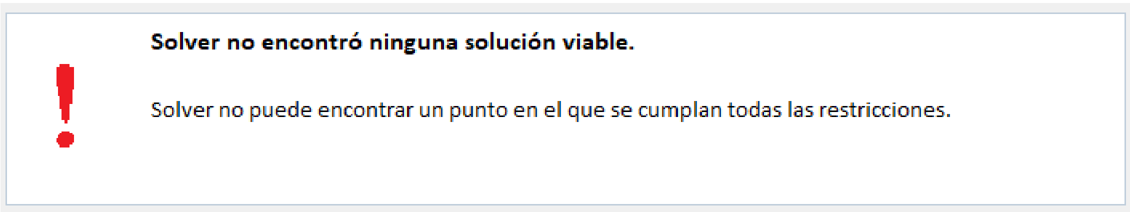


Figura 3-6 Error en Solver. Ejemplo sin solución

Elaborado por el autor

3.2 Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad en programación lineal se define como el método que permite evaluar cómo los cambios en los parámetros del modelo afectan la solución óptima. En las ciencias administrativas, en muchas ocasiones se toman decisiones bajo incertidumbre, ya que en escenarios reales los parámetros no son fijos es allí donde el análisis de sensibilidad permite la evaluación de cómo variaciones en los parámetros del modelo afectan las decisiones óptimas, facilitando la preparación ante escenarios inciertos (Gass & Fu, 2013).

3.2.1 Introducción mediante el método gráfico

Para comprender en qué consiste el análisis de sensibilidad, se tomarán ejemplos de casos simples y generales, los cuales se pueden llevar a cabo de manera gráfica o a

ISBN: 978-631-6557-43-8

través de la tabla simplex. Dos aspectos clave que se suelen analizar son: la sensibilidad de la solución óptima a cambios en la disponibilidad de los recursos (valores del lado derecho de las restricciones) y la sensibilidad a cambios en los coeficientes de la función objetivo, que reflejan variaciones en los costos o beneficios unitarios (Hillier & Lieberman, 2024).

Ejercicio 3-7 Sensibilidad (Cambios en el lado derecho)

Considerar un ejemplo general en que una fábrica manufactura dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto A requiere 2 horas en la máquina 1, y 1 hora en la máquina 2. Una unidad del producto B requiere 1 hora en la máquina 1, y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de cada uno de los productos A y B son de \$30.00 y \$20.00, respectivamente. Cada máquina tiene un tiempo disponible de 8 horas.

Las variables de decisión en este caso son $x_1 = unidades\ de\ producto\ A$, y $x_s = unidades\ de\ producto\ B$, cuya función objetivo se plantea como:

$$\max z = 30x_1 + 20x_2$$

Y las restricciones son por el uso de cada máquina:

$$2x_1 + \ \ x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 8$$

Se considerarán la restricción implícita de no negatividad, y se permitirá que los productos puedan ser fraccionales. Graficando y resolviendo:

ISBN: 978-631-6557-43-8

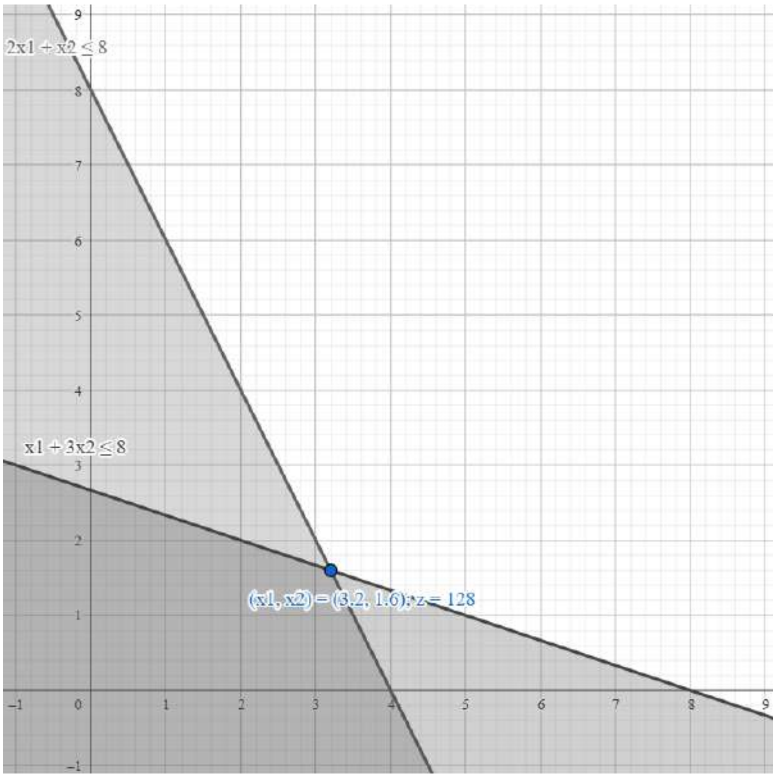


Figura 3-7 Resolución gráfica. Ejemplo Análisis de Sensibilidad

Elaborado por el autor

Con esto se concluye que para tener la máxima utilidad de 128.00 USD, se requieren fabricar 3.2 productos A, y 1.6 productos B

Ahora, qué pasaría si la máquina 2, pue aumentar su tiempo de uso de 8 a 10 horas. En este caso, la segunda restricción cambia a: $x_1 + 3x_2 \leq 8$, y de igual manera la gráfica. Para observar la diferencia entre las respuestas, se muestran las dos respuestas:

ISBN: 978-631-6557-43-8

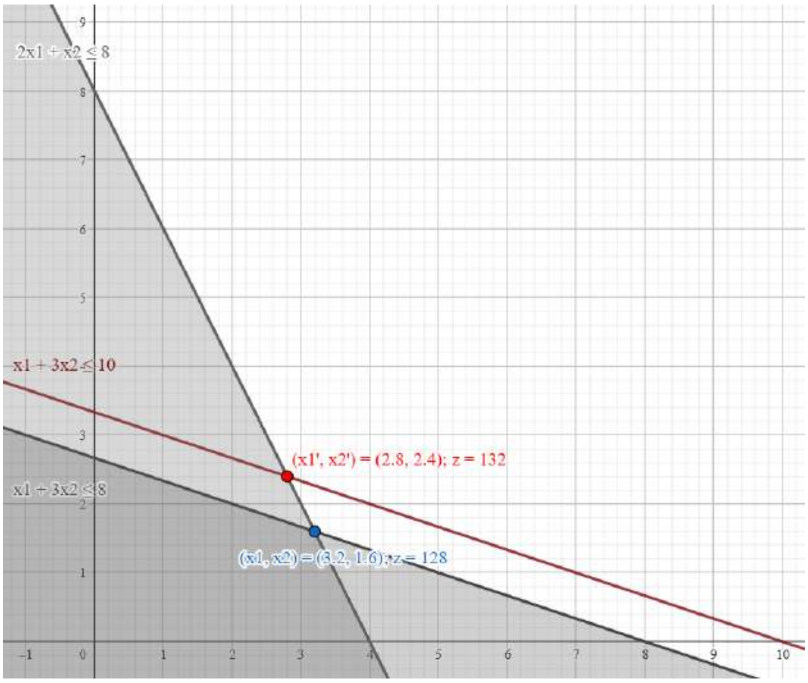


Figura 3-8 Resolución gráfica. Ejemplo Análisis de Sensibilidad – Cambio en el lado derecho

Elaborado por el autor

Se observa que se tiene un nuevo óptimo, con 132 USD, y el número de unidades de cada producto cambia. Adicionalmente, se puede considerar la tasa de cambio, que es:

$$\frac{z' - z}{b' - b} = \frac{132 - 128}{10 - 8} = 2USD/h$$

** Fin del ejercicio **

La tasa calculada proporciona un vínculo directo entre los datos de entrada al modelo y sus resultados, a este dato también se le conoce como valor unitario de un recurso, precio dual, o precio sombra.

Ejercicio 3-8 Sensibilidad (Cambios en los coeficientes objetivo)

Bajo el ejercicio anterior, determinar cuáles son las tasas de cambio en donde la respuesta sigue siendo óptima.

Consideremos la fórmula de la función objetivo:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Las relaciones $\frac{x_1}{x_2}$ de las restricciones están dadas entre 0.333 y 2. Y estos son los valores de cambio que se permiten y se denominan intervalo de optimalidad.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Por ejemplo, si la función cambia a:

$$\max z = 40x_1 + 24x_2$$

Como la tasa de cambio es $\frac{40}{24} = 1.67$ y se encuentra dentro del intervalo de optimalidad, la respuesta de x_1 y x_2 seguirán siendo 3.2 y 1.6, solo cambiará el valor de z a 166.4

3.2.2 Análisis algebraico.

A partir de los conocimientos de operaciones matriciales y del algoritmo simplex, se puede conducir un análisis de sensibilidad tanto para los precios duales como para los cambios en los coeficientes de la función objetivo. Para lo cual se usará el siguiente Ejemplo:

Ejercicio 3-9 Sensibilidad. Resolución matricial / algoritmo simplex

Ejemplo tomado y adaptado de (Taha, 2022): Una compañía busca producir 3 productos: A, B, y C. Para lo cual requiere de 3 operaciones diarias: I, II, III. La disponibilidad en minutos para cada operación es de 430, 460 y 420; mientras que la utilidad por cada producto es de $ 3.00, $2.00, y $5.00. Por cada producto se demoran lo siguiente en cada operación, para el producto A, 1, 3, y 1 minutos; para el B, 2, 0 y 4 minutos, y para el C, 1, 2, y 0 minutos. Determinar la producción óptima:

Teniendo en consideración que x_1 representará las unidades del producto A a realizar, x_2 el producto B, y x_3 el producto C. La función objetivo y sus respectivas restricciones se plantean como sigue:

$$\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
&s.t \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\
&\quad 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\
&\quad x_1 + 4x_2 \leq 420 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Introduciendo las variables de holgura, y resolviendo mediante el algoritmo simplex, tenemos la siguiente tabla:

Tabla 3-11 Resolución Tabla Simplex. Ejercicio Producción

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Solución

ISBN: 978-631-6557-43-8

z	-3	-2	-5	0	0	0	0
s_1	1	2	1	1	0	0	430
s_2	3	0	2	0	1	0	460
s_3	1	4	0	0	0	1	420

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Solución
z	4.5	-2	0	0	2.5	0	1150
s_1	-0.5	2	0	1	-0.5	0	200
x_3	1.5	0	1	0	0.5	0	230
s_3	1	4	0	0	0	1	420

Base	x_1	x_2	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	-0.25	1	0	0.5	-0.25	0	100
x_3	1.5	0	1	0	0.5	0	230
s_3	2	0	0	-2	1	1	20

Base	x_1	x_2	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
No óptima	0	0	0	5	0	**-2**	1310
x_2	0	1	0	0.25	-0.125	0.125	102.5
x_3	0	0	1	1.5	-0.25	-0.75	215
x_1	1	0	0	-1	0.5	0.5	10

Elaborado por el autor

A partir de la tabla simplex superior, las respuestas se obtienen en la tercera iteración con: $x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = 1350$

3.2.2.1 Cambios en el lado derecho

Continuando con el ejercicio, a partir de la tabla simplex óptima se pueden obtener los intervalos de factibilidad y precios sombra. Para lo cual colocaremos en el lado derecho de la restricción una nueva variable asociada $d_1, d_2, y\ d_3$ (por el nombre de precio dual y ya que la variable *s* ya la hemos usado, sin embargo, la selección del nombre a la final es arbitraria) que representarán los cambios ya sean positivos o negativos que han sido realizados en las restricciones, a saber, el tiempo de disponibilidad de las operaciones I, II, e III, y se resuelve de manera a la tabla anterior.

Tabla 3-12 Resolución Tabla Simplex. Modificación para análisis de simplex

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Sol.	d_1	d_2	d_3
z	-3	-2	-5	0	0	0	0	0	0	0

ISBN: 978-631-6557-43-8

s_1	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
s_2	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
s_3	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	**Sol.**	d_1	d_2	d_3
z	4	0	0	1	2	0	1350	1	2	0
x_2	-0.25	1	0	0.5	-0.25	0	100	0.5	-0.25	0
x_3	1.5	0	1	0	0.5	0	230	0	0.5	0
s_3	2	0	0	-2	1	1	20	-2	1	1

Elaborado por el autor

Nótese que los valores de $s_1, s_2, y\ s_3$ son idénticos, en este caso a $d_1, d_2 y\ d_3$

Por tanto, la solución óptima ahora toma la siguiente forma:

$$z = 1350 + 1d_1 + 2d_2 + 0d_3$$

Lo cual se interpreta como que el cambio en la capacidad de la operación I en un minuto, cambiará al valor objetivo en $1.00, aumentar un minuto en la operación II implica un cambio de $2.00 en el valor final, y no existirán cambios por aumentar o disminuir el tiempo de la operación III, ya que es un recurso no limitante.

La interpretación anterior, sin embargo, solo es aplicable en un rango, para determinar el mismo, se utilizan los coeficientes de las bases en el algoritmo simplex:

$$x_2 \to 100 + 0.5d_1 - 0.25d_2 \geq 0$$

$$x_3 \to 230 + 0.5d_2 \geq 0$$

$$s_3 \to 20 - 2d_1 + d_2 + d_3 \geq 0$$

Consideremos un ejemplo factible donde $d_1 = -10, d_2 = -12, d_3 = 5$ reemplazando:

$$x_2 \to 100 - 5 + 3 \geq 0, \qquad cumple$$

$$x_3 \to 230 - 6 \geq 0, \qquad cumple$$

$$s_3 \to 20 + 20 - 12 + 5 \geq 0, \qquad cumple$$

Es decir, es posible disminuir el tiempo de la operación I en 10 minutos, reducir la operación II en 12 minutos, y la operación III aumentar en 5 minutos. Con los datos anteriores, conocemos también que el cambio en el valor objetivo es

$$z = 1350 - 10 - 24 + 0 = 1316$$

Así también un ejemplo no factible, se tendía si $d_1 = 20, d_2 = -20, d_3 = 2$, ya que:

$$x_2 \to 100 + 10 + 4 \geq 0, \qquad cumple$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_3 \to 230 - 10 \geq 0, \qquad cumple$$

$$s_3 \to 20 - 20 - 20 + 2 \geq 0, \qquad no\ cumple$$

Esto no significa que no se pueda dar esos cambios, si no que se requerirá volver a plantear el ejercicio y la tabla simplex para tener una nueva solución.

Algebraicamente para determinar entre que valores se puede cambiar los lados derechos de las restricciones, es cambiar cada valor asociado uno a la vez. Empezando con d_1, es decir $d_2 = d_3 = 0$ tenemos:

$$\begin{cases} x_2 \to 100 + 0.5d_1 - 0.25d_2 \geq 0 \\ x_3 \to 230 + 0.5d_2 \geq 0 \\ s_3 \to 20 - 2d_1 + d_2 + d_3 \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} d_1 \geq -200 \\ - \\ d_1 \leq 10 \end{cases} \to -200 \leq d_1 \leq 10$$

De manera similar con d_2, es decir $d_1 = d_3 = 0$, d_3, es decir $d_1 = d_2 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 \to 100 - 0.25d_2 \geq 0 \\ x_3 \to 230 + 0.5d_2 \geq 0 \\ s_3 \to 20 + d_2 \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} d_2 \leq 400 \\ d_2 \geq 460 \\ d_2 \geq -20 \end{cases} \to -20 \leq d_3 \leq 400$$

$$\begin{cases} x_2 \to 100 \geq 0 \\ x_3 \to 230 \geq 0 \\ s_3 \to 20 + d_3 \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} - \\ - \\ d_3 \geq -20 \end{cases} \to -20 \leq d_3$$

Resumiendo, se presenta en una sola tabla la información del ejercicio:

Tabla 3-13 Análisis de sensibilidad. Resumen de precio sombra y factibilidad

Recurso	Precio sombra ($)	Intervalo de factibilidad	Actual (minutos)	Mínimo	Máxima
Operación I	1	$-200 \leq d_1 \leq 10$	430	230	440
Operación II	2	$-20 \leq d_2 \leq 400$	460	440	860
Operación III	0	$-20 \leq d_3 \leq \infty$	420	400	∞

Elaborado por el autor.

3.2.2.2 Cambios en los coeficientes de la función objetivo

Continuando con el ejercicio, en la tabla simplex óptima se podía describir la función z como:

$$z = 1350 - 4x_1 - s_1 - 2s_2$$

Esto implica que la solución óptima no puede producir productos A, ya que por cada uno que produzca el valor objetivo se reducirá en 4. Este costo extra proviene de los recursos que consume, ya que utiliza diferentes tiempos en cada operación. A pesar que

ISBN: 978-631-6557-43-8

el ingreso de productos A es de 3, y el de productos B es de 2, si es factible manufacturar productos B, ya que los costos asociados a los tiempos en las operaciones I, II y III son menores que ingreso.

En la aplicación práctica, esto se puede hacer rentable de dos maneras, incrementando el ingreso unitario o reduciendo el costo unitario de los recursos consumidos. Incrementar los precios por cada unidad suele tener un límite dictado por el mercado, y desde el punto de vista de gestión por procesos es más factible mejorar los tiempos de producción reduciendo así el costo y aumentando la eficiencia.

Utilizando la tabla simplex, se pueden determinar las inecuaciones en las que el costo reducido puede determinar, para ello las entradas se calculan tomando en cuenta la multiplicación de los elementos columna por su elemento correspondiente sumados, y restados de la fila superior relacionados con las variables u_i que son los cambios unitarios de los coeficientes de la función objetivo. Teniendo para la tabla óptima anterior:

Tabla 3-14 Análisis de sensibilidad. Tabla para determinar los rangos de coeficientes de la función objetivo

		u_1	u_2	u_3	**0**	**0**	**0**	
	Base	x_1	x_2	x_2	s_1	s_2	s_3	**Solución**
1	z	4	0	0	1	2	0	1350
u_2	x_2	-0.25	1	0	0.5	-0.25	0	100
u_3	x_3	1.5	0	1	0	0.5	0	230
0	s_3	2	0	0	-2	1	1	20

Elaborado por el autor.

El costo reducido de x_1 es:

$$CR.x_1 = [4 \times 1 + (-0.25) \times u_2 + 1.5 \times u_3 + 2 \times 0] - u_1$$

$$CR.x_1 = 4 - u_1 - 0.25u_2 + 1.5u_3$$

De manera similar con s_1 y s_2 que es donde tenemos valores de z

$$CR.s_1 = 1 + 0.5\,u_2$$

$$CR.s_2 = 2 - 0.25u_2 + 0.5u_3$$

Y es en estos valores donde la solución óptima se mantiene sin que se tenga que generar una nueva resolución del modelo. De manera similar, haciendo cumplir las condiciones de las u_i una a la vez (para $u_1, u_2 = u_3 = 0$), se tiene:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$\begin{cases} 4 - u_1 - 0.25u_2 + 1.5u_3 \geq 0 \\ 1 + 0.5u_2 \geq 0 \\ 2 - 0.25u_2 + 0.5u_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 \leq 4 \\ - \\ - \end{cases} \rightarrow u_1 \leq 4$$

De manera similar con u_2, es decir $u_1 = u_3 = 0$, u_3, es decir $u_1 = u_2 = 0$:

$$\begin{cases} 4 - u_1 - 0.25u_2 + 1.5u_3 \geq 0 \\ 1 + 0.5u_2 \geq 0 \\ 2 - 0.25u_2 + 0.5u_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_2 \leq 16 \\ u_2 \geq -2 \\ u_2 \leq 8 \end{cases} \rightarrow -2 \leq u_2 \leq 8$$

$$\begin{cases} 4 - u_1 - 0.25u_2 + 1.5u_3 \geq 0 \\ 1 + 0.5u_2 \geq 0 \\ 2 - 0.25u_2 + 0.5u_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_3 \geq 2.67 \\ - \\ u_3 \geq -4 \end{cases} \rightarrow u_3 \geq 2.67$$

Entonces, mientras los cambios individuales se mantengan en ese rango, la solución $x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230$ se seguirá manteniendo como la óptima.

3.2.2.3 Añadir una nueva variable

En varias situaciones se da la oportunidad de emprender nuevas actividades. Por ejemplo, añadir un nuevo producto, el cual puede ser evaluado aplicando el método para determinar si la base actual sigue siendo óptima después de un cambio de una variable no básica.

Es decir, para un nuevo x_j la base actual sigue siendo óptima si $\overline{c_j} \leq 0$, si no se cumple la base actual deja de ser óptima y la nueva x_j será una variable que si afectará y beneficiará a la función objetivo (Winston, 2022).

Ejercicio 3-10 Añadir una nueva variable. Ejemplo Carpintería

Tomar el siguiente ejemplo, para el cual una carpintería plantea producir escritorios, mesas y sillas; las utilidades esperadas por cada producto son de \$60.00, \$30.00 y \$20.00 respectivamente. Ante esto se tienen 3 procesos importante, la parte de procesamiento de la madera en la que se cuentan con 48 horas, la construcción y armado con 8 horas disponibles, y la fase de acabados con 20 horas como máximo. Un escritorio utiliza 8, 2 y 4 horas respectivamente, una mesa 6, 1.5 y 2; mientras que las sillas 1, 0.5 y 1.5

El planteamiento es el siguiente:

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

Donde x_i son el número de cada producto elaborado.

Las restricciones son las siguientes:

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$

Y la de no negatividad: $x_i \geq 0$

Tabla 3-15 Resolución Tabla Simplex. Ejercicio Carpintería

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Solución
z	-60	-30	-20	0	0	0	0
s_1	8	6	1	1	0	0	48
s_2	4	2	1.5	0	1	0	20
s_3	2	1.5	0.5	0	0	1	8

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Solución
z	0	15	-5	0	0	30	240
s_1	0	0	-1	1	0	-4	16
s_2	0	-1	0.5	0	1	-2	4
x_1	1	0.75	0.25	0	0	0.5	4

Base	x_1	x_2	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
z	0	5	0	0	10	10	280
s_1	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2

Elaborado por el autor

La tabla simplex, termina allí ya que no se pueden encontrar óptimos para x_2, con esto la respuesta es: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8, z = 280$. A saber, se deben producir 2 escritorios y 8 sillas para maximizar la ganancia a $280.00

Suponer ahora que se desea añadir un nuevo producto: banquillos, con una utilidad de $15.00, y va a tomar una hora en cada uno de los tres procesos. Esto cambiará nuestra tabla simplex inicial a:

Tabla 3-16 Resolución Tabla Simplex. Ejercicio Carpintería

Base	x_1	x_2	x_3	x_3	s_1	s_2	s_3	Solución
z	-60	-30	-20	-15	0	0	0	0
s_1	8	6	1	1	1	0	0	48
s_2	4	2	1.5	1	0	1	0	20
s_3	2	1.5	0.5	1	0	0	1	8

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

Para no resolver nuevamente la tabla simplex y gastar los recursos que esto implica, se determina la actividad mediante el cálculo de la multiplicación de los coeficientes de s_1, s_2, s_3 de la tabla simplex óptima, por los valores de a_4 es decir los coeficientes de las restricciones, menos el coeficiente planeado:

$$\bar{c_4} = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 5$$

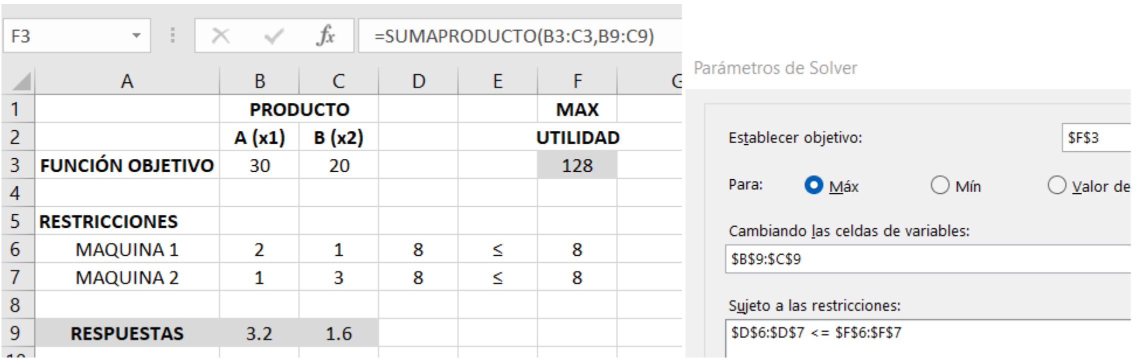
Como es mayor que cero, entonces se decide que la respuesta anterior era la óptima y que decidir construir banquillos resulta en pérdida de \$5.00, por lo que no se modificaría la producción anterior.

3.2.3 Análisis computacional

Como se demostró en el caso del método Big M, las soluciones algebraicas son ineficientes desde el punto de vista computacional. Es por eso que si bien el análisis de sensibilidad también puede ser tratado desde el punto de vista de algebra, se omiten estas demostraciones para utilizar las herramientas computacionales.

Ejercicio 3-11 Sensibilidad. Resolución mediante Solver (1)

Resolviendo el Ejercicio 3-8 anterior se tiene:


F3 =SUMAPRODUCTO(B3:C3,B9:C9)

	A	B	C	D	E	F
1		PRODUCTO				MAX
2		A (x1)	B (x2)			UTILIDAD
3	FUNCIÓN OBJETIVO	30	20			128
4						
5	RESTRICCIONES					
6	MAQUINA 1	2	1	8	≤	8
7	MAQUINA 2	1	3	8	≤	8
8						
9	RESPUESTAS	3.2	1.6			

Figura 3-9 Resolución por Solver. Ejemplo Análisis de Sensibilidad

Elaborado por el autor

Cuando procedemos a hacer clic en resolver, tenemos la siguiente pantalla, en la cual podemos añadir que se incluya un análisis de sensibilidad:

ISBN: 978-631-6557-43-8

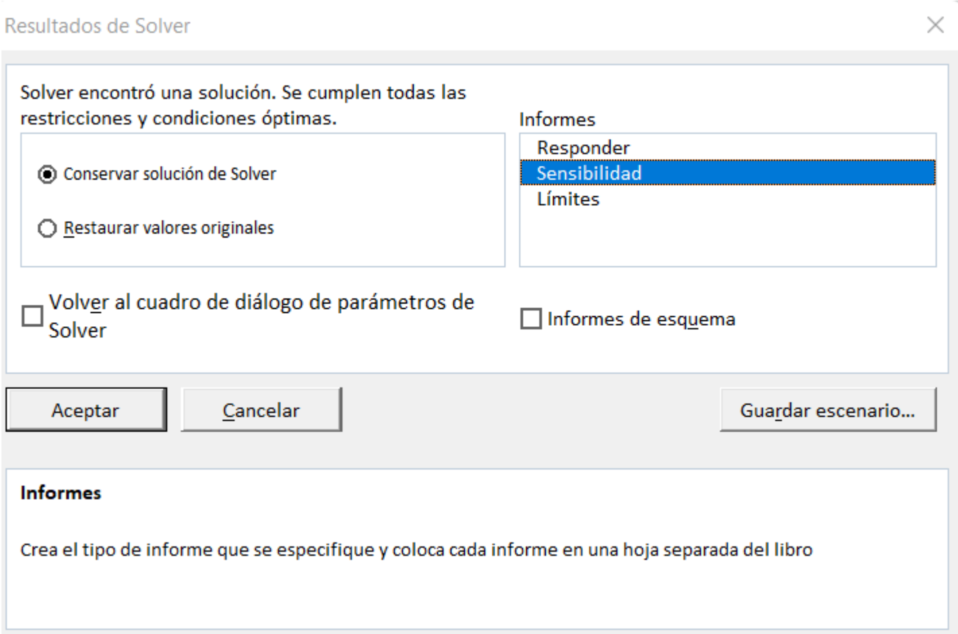


Figura 3-10 Resolución por Solver. Selección del informe de sensibilidad

Elaborado por el autor

Lo que nos muestra:

Tabla 3-17 Tablas de sensibilidad obtenidas por medio de solver

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$9	RESPUESTAS A (x1)	3.2	0	30	10	23.33333333
$C$9	RESPUESTAS B (x2)	1.6	0	20	70	5

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$6	MAQUINA 1	8	14	8	8	5.333333333
$D$7	MAQUINA 2	8	2	8	16	4

Elaborado por el autor

Ahora, las primeras columnas nos muestran la ubicación de las respuestas y de los valores del lado derecho de las restricciones. La columna Final Valor, nos da las respuestas, que fueron 3.2 y 1.6, y las restricciones que fueron 8 horas para las dos.

Centrándonos en la primera parte de la tabla, la columna objetivo coeficiente son los valores que acompañaban a las variables de decisión en la función objetivo, y los valores de permisible aumentar y permisible reducir indica las relaciones $\frac{c_1}{c_2}$ en los que es

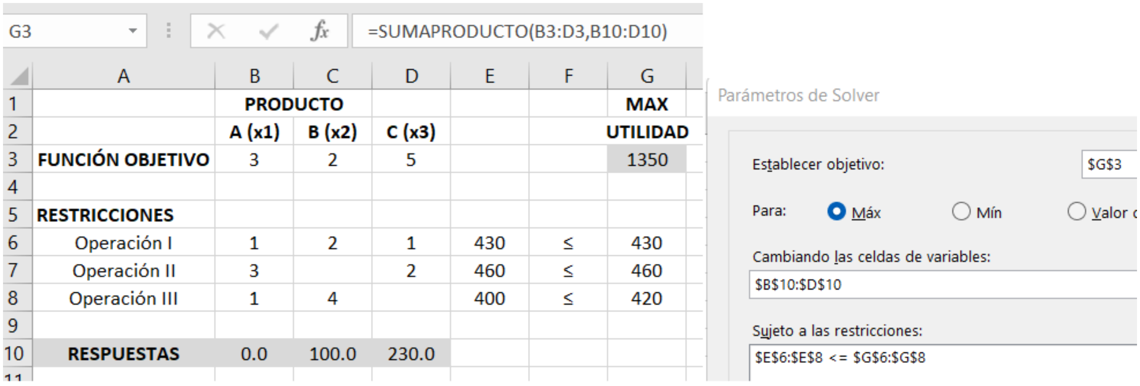
ISBN: 978-631-6557-43-8

posible cambiar los valores sin que las respuestas sean diferentes y sea necesario volver a resolver el problema

De la segunda tabla nos da el valor del precio sombra, es decir en cuánto aumentará o se reducirá el valor *z* de la función objetivo si aumentamos en 1 el valor de la restricción del lado derecho. Si recordamos el ejercicio anterior cuando cambiamos de 8 a 10 el tiempo de la máquina 2, obtuvimos que el valor máximo aumento en 4, es decir en 2 por cada hora aumentada; para evitar volver a plantear el ejercicio únicamente podríamos haberlo determinando usando el valor de la tabla. De manera similar que la tabla superior los valores permisibles de aumentar y disminuir nos indica hasta que punto se puede hacer el cálculo sin volver a correr un nuevo modelo.

Ejercicio 3-12 Sensibilidad. Resolución mediante Solver (2)

Tomar en consideración el Ejercicio 3-9. Para el cual tendremos:



	A	B	C	D	E	F	G
1		PRODUCTO					MAX
2		A (x1)	B (x2)	C (x3)			UTILIDAD
3	FUNCIÓN OBJETIVO	3	2	5			1350
4							
5	RESTRICCIONES						
6	Operación I	1	2	1	430	≤	430
7	Operación II	3		2	460	≤	460
8	Operación III	1	4		400	≤	420
9							
10	RESPUESTAS	0.0	100.0	230.0			

Figura 3-11 Resolución por Solver. Ejemplo Análisis de Sensibilidad (2)

Elaborado por el autor

La respuesta es que se tienen que manufacturar 100 productos B, y 230 productos C, para tener la máxima utilidad de $ 1350.00. Considerando el análisis de sensibilidad en solver, se obtienen las siguientes tablas:

Tabla 3-18 Tablas de sensibilidad obtenidas por medio de solver

ISBN: 978-631-6557-43-8

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$10	RESPUESTAS A (x1)	0	-4	3	4	1E+30
$C$10	RESPUESTAS B (x2)	100	0	2	8	2
$D$10	RESPUESTAS C (x3)	230	0	5	1E+30	2.666666667

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$E$6	Operación I	430	1	430	10	200
$E$7	Operación II	460	2	460	400	20
$E$8	Operación III	400	0	420	1E+30	20

Elaborado por el autor

Y como se puede apreciar los valores son exactamente los mismos que la solución algebraica, que en resumen implica:

Se tiene un precio sombra de $ 1.00 para la operación I, por lo que aumentar la capacidad en 1 minuto resultará en el aumento del valor objetivo originalmente de $ 1350.00 en 1 dólar adicional, esto se puede realizar hasta un máximo de 10 minutos, en el caso de la reducción los mismos valores aplican hasta una reducción de 200.

Para la operación II, el precio sombra es de $ 2.00 con lo que la tasa de cambio por minuto es de 2 USD/min. En el caso de solicitar una comparación si pudiera aumentar en un minuto la operación I o la II cual preferiría sería la II.

El precio sombra de la operación III es de 0, que significa que es un recurso abundante.

En referencia a la función objetivo, la solución sigue siendo la misma siempre que se respete el aumento, por ejemplo, el producto A tenía un valor por ingreso de $3.00, si se aumenta hasta $7.00 sin que esto haga que sea factible su producción.

3.2.4 Ejercicios de aplicación

Ejercicio 3-13 Análisis de sensibilidad en Fabricación de productos

Considerar una empresa en la que se producen 3 productos A, B, C, a partir de 2 materias primas MP1, y MP2. A partir de los siguientes datos:

Tabla 3-19 Datos base del Ejercicio 3-10

ISBN: 978-631-6557-43-8

	Requerimiento por cada producto			
Materia Prima	**A**	**B**	**C**	**Disponible**
MP1	2	3	5	4000
MP2	4	2	7	6000
Demanda mínima	200	200	150	
Utilidad por unidad	30	20	50	

Elaborado por el autor. Basados en (Taha, 2022)

Las horas de trabajo por unidad del producto A son dos veces las del B y tres veces las del C. La fábrica puede producir el equivalente a 1500 unidades del modelo A. Los requerimientos del mercado especifican las proporciones 3:2:5 para la producción de los tres modelos respectivos.

Formular el modelo de programación lineal y hallar la solución óptima. Adicionalmente, la empresa debe tomar 2 decisiones: ¿es conveniente adquirir más unidades de materia prima MP1 a $12.00 cada unidad? Y ¿es conveniente adquirir más unidades de materia prima MP2 a $5.00 por unidad?

Consideramos primero las variables de decisión, dónde $x_1, x_2, y\ x_3$ serían las unidades del producto A, B y C respectivamente. Teniendo la utilidad por unidad la función objetivo es:

$$\max z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$$

La restricción por la cantidad de materia prima disponible, da a lugar a:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4000$$

$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 6000$$

Respecto a la capacidad máxima de producción, nos menciona que es de 1500 por el producto A o su equivalente, hacer un producto B equivale a hacer 2 A, es decir un coeficiente de 0.5, y para hacer un producto C equivale a hacer 3 de A, por lo que el coeficiente es de 0.333, teniendo así:

$$x_1 + 0.5x_2 + 0.333x_3 \leq 1500$$

Las siguientes restricciones se refieren a los ratios de la demanda, a saber 2 productos A respecto a 3 productos B, y 5 productos B a razón de 2 productos C. Quedando:

$$2x_1 = 3x_2;\ \ 2x_1 - 3x_2 = 0$$

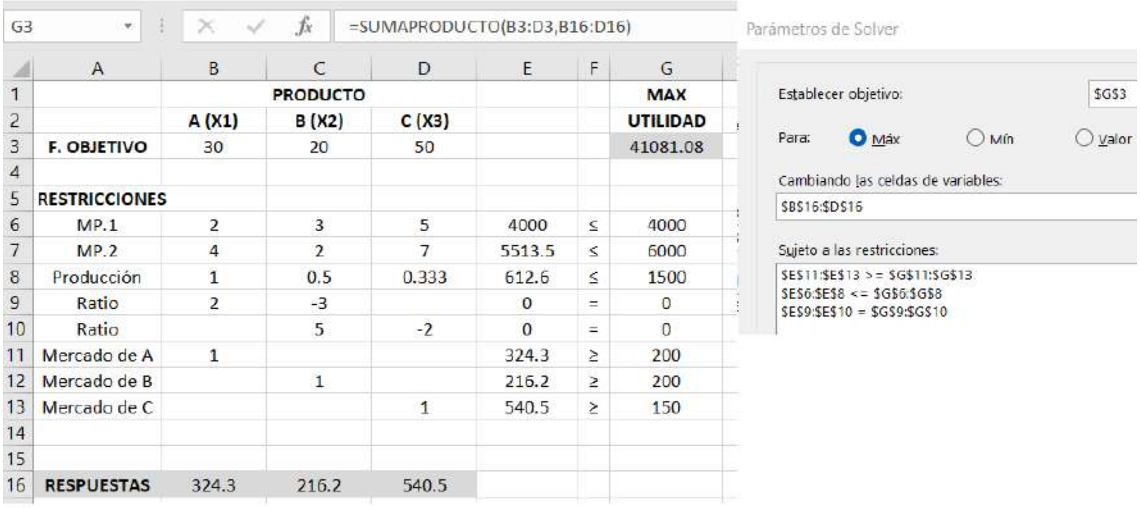
$$5x_2 = 2x_3;\ \ 5x_2 - 2x_3 = 0$$

Para la restricción de cumplimiento de la demanda mínima:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_1 \geq 200, x_2 \geq 200, x_3 \geq 150$$

Finalmente, consideramos la no negatividad, y no se aplicará que los productos sean enteros.



G3 =SUMAPRODUCTO(B3:D3,B16:D16)

	A	B	C	D	E	F	G
1			PRODUCTO				MAX
2		A (X1)	B (X2)	C (X3)			UTILIDAD
3	F. OBJETIVO	30	20	50			41081.08
4							
5	RESTRICCIONES						
6	MP.1	2	3	5	4000	≤	4000
7	MP.2	4	2	7	5513.5	≤	6000
8	Producción	1	0.5	0.333	612.6	≤	1500
9	Ratio	2	-3		0	=	0
10	Ratio		5	-2	0	=	0
11	Mercado de A	1			324.3	≥	200
12	Mercado de B		1		216.2	≥	200
13	Mercado de C			1	540.5	≥	150
14							
15							
16	RESPUESTAS	324.3	216.2	540.5			

Figura 3-12 Resolución por Solver. Análisis de sensibilidad en productos

Elaborado por el autor

Con el siguiente informe de sensibilidad:

Tabla 3-20 Tablas de sensibilidad obtenidas por medio de solver

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$16	RESPUESTAS A (X1)	324.3	0	30	1E+30	126.7
$C$16	RESPUESTAS B (X2)	216.2	0	20	1E+30	190
$D$16	RESPUESTAS C (X3)	540.5	0	50	1E+30	76

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derechc	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$E$11	Mercado de A	324.3	0	200	124.3	1E+30
$E$12	Mercado de B	216.2	0	200	16.2	1E+30
$E$13	Mercado de C	540.5	0	150	390.5	1E+30
$E$6	MP.1	4000	10.3	4000	352.9	300
$E$7	MP.2	5513.5	0	6000	1E+30	486.5
$E$8	Producción	612.6	0	1500	1E+30	887.4
$E$9	Ratio	0	4.7	0	300	296.8
$E$10	Ratio	0	0.7	0	2408.3	120

Elaborado por el autor

ISBN: 978-631-6557-43-8

Respondiendo a la mejor forma de producir, para obtener una utilidad máxima de $ 41081.08 dólares se deben producir 324.3 unidades del producto A, 216.2 del B y 540.5 del C.

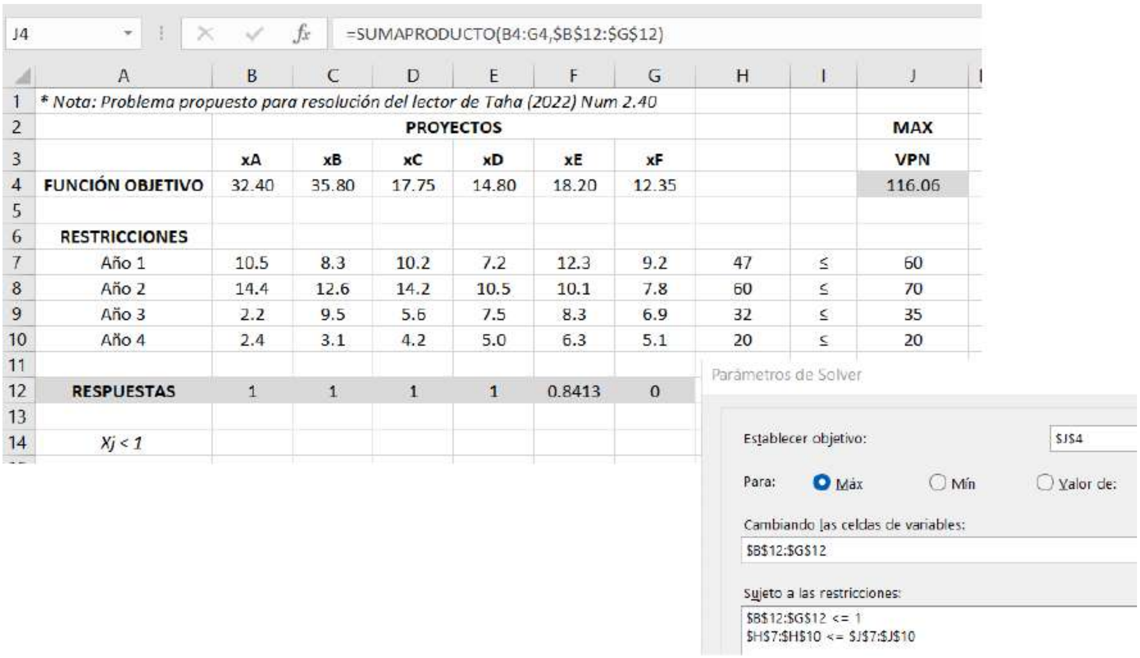
Ahora bien, NO es aceptable comprar más materia prima A a un precio de $12 ya que el precio sombra es de $10.30 que quiere decir que por cada aumento de 1 en la MP.1 voy a ganar ese valor, es decir no se compensa con lo que cuesta.

Respecto a la MP.2 la situación es aún más notable, con un precio sombra de $0.0 esto significa que es un recurso abundante, y si observamos en las partes izquierda y derecha de la respuesta, se tiene que se usa 5513.5 pero en realidad ya tengo disponible 6000. Por lo tanto, no hace falta comprar más, sea cual sea el precio.

Ejercicio 3-14 Análisis de sensibilidad en Inversiones

Considerar el Ejercicio 2-16 Inversiones en proyectos de la sección 2.3.2, y contestar si vale la pena incrementar los fondos para el año 4.

La resolución en solver, daba como resultado:



J4 =SUMAPRODUCTO(B4:G4,$B$12:$G$12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	* Nota: Problema propuesto para resolución del lector de Taha (2022) Num 2.40									
2				PROYECTOS						MAX
3		xA	xB	xC	xD	xE	xF			VPN
4	FUNCIÓN OBJETIVO	32.40	35.80	17.75	14.80	18.20	12.35			116.06
5										
6	RESTRICCIONES									
7	Año 1	10.5	8.3	10.2	7.2	12.3	9.2	47	≤	60
8	Año 2	14.4	12.6	14.2	10.5	10.1	7.8	60	≤	70
9	Año 3	2.2	9.5	5.6	7.5	8.3	6.9	32	≤	35
10	Año 4	2.4	3.1	4.2	5.0	6.3	5.1	20	≤	20
11										
12	RESPUESTAS	1	1	1	1	0.8413	0			
13										
14	*Xj < 1*									

Figura 3-13 Idem a la Figura 2-20: Resolución con Solver. Ejercicio Inversiones

Elaborado por el autor

A partir de allí se interpretó que lo más convenientes es invertir en la totalidad de los proyectos A, B, C y D, con el 84.13% en el proyecto E, y no era conveniente invertir en el proyecto F.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Para ver si vale la pena aumentar los fondos en el año 4, a priori observamos que la restricción del lado derecho (20) es igual a la del izquierdo, por lo que es un recurso limitante. Sin embargo, es necesario correr el análisis de sensibilidad para observar la tasa de cambio, si es que existe, por aumento en el recurso.

Tabla 3-21 Tablas de sensibilidad de restricciones. Problema de Inversiones:

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Derecha	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$H$7	**Año 1**	46.54	0	60	1E+30	13.45
$H$8	**Año 2**	60.19	0	70	1E+30	9.80
$H$9	**Año 3**	31.78	0	35	1E+30	3.21
$H$10	**Año 4**	20	2.89	20	1	5.3

Elaborado por el autor

Por lo tanto, sin tener cambiar el programa de inversiones se puede aumentar en 1 (equivalente a $1000.00) para de esa manera aumentar las utilidades de la inversión en 2.89 (con un total de $ 118,950 USD), lo que si es conveniente.

Un aumento mayor requerirá un nuevo planteamiento y solución, por lo que cambiaría el esquema de inversión propuesto originalmente.

Ejercicio 3-15 Análisis de sensibilidad en Producción: Minerales

Considerar el Ejercicio 2-10 Problema de aleaciones: Minerales y contestar las siguientes preguntas: ¿Cuál de las restricciones especificadas es la que tiene un impacto adverso en el valor óptimo?, y ¿Cuánto es lo máximo que la compañía debe pagar por tonelada de cada mineral?

Recordando la respuesta en Solver, se tenía:

ISBN: 978-631-6557-43-8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		ALEACIONES										
2		i 1 = MINERAL 1		i 2 = MINERAL 2		i 3 = MINERAL 3		PRODUCTO TOTAL				
3		j1 = I	j2 = II	j1 = I	j2 = II	j1 = I	j2 = II	j1 = I	j2 = II			MAX
4		x11	x12	x21	x22	x31	x32	x31	x32			UTILIDAD
5	FUNCIÓN OBJETIVO	-30	-30	-40	-40	-50	-50	200	300			400000
6												
7	RESTRICCIONES											
8	Aleación I											
9	Consituyente 1.A	0.2		0.1		0.05		-0.8		-1090.0	≤	0
10	Consituyente 1.B	0.1		0.2		0.05		-0.3		-290.0	≤	0
11	Consituyente 1.D	0.3		0.3		0.2		-0.5		0.0	≥	0
12	Aleación II											
13	Consituyente 2.B		0.1		0.2		0.05		-0.4	0.0	≥	0
14	Consituyente 2.B		0.1		0.2		0.05		-0.6	-200.0	≤	0
15	Consituyente 2.C		0.3		0.3		0.7		-0.3	300.0	≥	0
16	Consituyente 2.D		0.3		0.3		0.2		-0.7	-100.0	≤	0
17	Disponibilidad											
18	Mineral 1	1	1							1000.0	≤	1000
19	Mineral 2			1	1					2000.0	≤	2000
20	Mineral 3					1	1			3000.0	≤	3000
21	Cumplimiento Aleación I	1		1		1		-1		2200.0	≥	0
22	Cumplimiento Aleación II		1		1		1		-1	1000.0	≥	0
23												
24												
25	RESPUESTAS	1000	0	0	2000	3000	0	1800	1000			

Figura 3-14 Ídem al ejercicio 2-9: Resolución con Solver. Ejercicio Aleaciones

Elaborado por el autor

Tabla 3-22 Tablas de sensibilidad obtenidas por medio de solver

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$25	RESPUESTAS x11	1000	0	-30	1E+30	45
$C$25	RESPUESTAS x12	0	-45	-30	45	1E+30
$D$25	RESPUESTAS x21	0	-30	-40	30	1E+30
$E$25	RESPUESTAS x22	2000	0	-40	1E+30	30
$F$25	RESPUESTAS x31	3000	0	-50	1E+30	30
$G$25	RESPUESTAS x32	0	-42.5	-50	42.5	1E+30
$H$25	RESPUESTAS x31	1800	0	200	50	75
$I$25	RESPUESTAS x32	1000	0	300	180	60

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$J$10	Constituyente 1.B	-290	0	0	1E+30	290
$J$11	Constituyente 1.D	0	-400	0	483.33	1100
$J$13	Constituyente 2.B	0	-750	0	57.14	400
$J$14	Constituyente 2.B	-200	0	0	1E+30	200
$J$15	Constituyente 2.C	300	0	0	300	1E+30
$J$16	Constituyente 2.D	-100	0	0	1E+30	100

ISBN: 978-631-6557-43-8

$J$18	Mineral 1	1000	90	1000	1E+30	1000
$J$19	Mineral 2	2000	110	2000	1E+30	2000
$J$20	Mineral 3	3000	30	3000	1E+30	3000
$J$21	Cump. Aleación I	2200	0	0	2200	1E+30
$J$22	Cump. Aleación II	1000	0	0	1000	1E+30
$J$9	Constituyente 1.A	-1090	0	0	1E+30	1090

Elaborado por el autor

A partir de ello procedemos con la interpretación, de las restricciones el constituyente del mineral 2 en la aleación II es la que tiene el precio sombra negativo mayor por lo tanto solo aumentar el porcentaje en 1% implica un impacto de pérdida de $ 750.00.

Respecto, a los precios, se observa que es posible aumentar los precios de $x_1 = 75, x_2 = 70, x_3 = 80$ sin que se exista cambios en la forma de producción.

Ejercicio 3-16 Análisis de sensibilidad en problemas de minimización

Basado en (Winston, 2022): Considerar una empresa ensambladora de automóviles que procesa 1000 vehículos, en 4 plantas considerando materia prima y mano de obra, acorde a la siguiente tabla:

Tabla 3-23 Producción de vehículos.

Planta	Costo (en miles de dólares)	Mano de obra (horas)	Materia prima (unidades)
Manta	15	2	3
Cuenca	10	3	4
Quito	9	4	5
Guayaquil	7	5	6

Elaborado por el autor

Por cuestiones de logística, al menos 400 vehículos deben ser ensamblados en Quito, en total se requieren 3300 horas de labor, y 4000 unidades de materia prima para su distribución en las 4 plantas. Formular el modelo de programación lineal para minimizar el costo de la manufactura de 1000 vehículos.

Para la función objetivo, primero se definen las variables de decisión:

$$x_i = número\ de\ vehículos\ ensamblados\ en\ la\ planta\ i = \{1,2,3,4\}$$
$$= \{Manta, Cuenca, Quito, Guayaquil\}$$

La función objetivo es:

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$\min z = 15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4$$

Las restricciones están ligados al número requerido:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$$

A la producción exigida en Quito:

$$x_3 \geq 400$$

Y las restricciones de mano de obra y materia prima:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 3000$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 4000$$

Considerando la restricción de no negatividad $x_i \geq 0$, y para el procesamiento correcto en Solver se omitirá la restricción de programación entera.

Resolviendo:

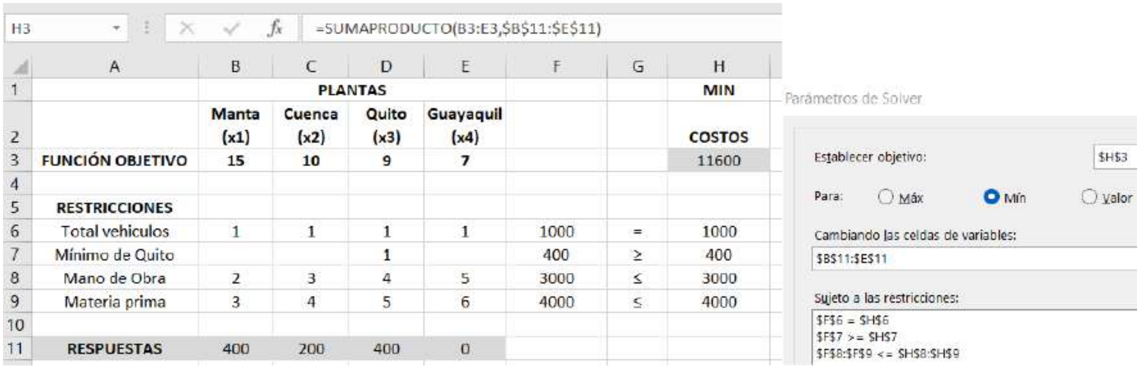


Figura 3-15 Resolución con Solver. Ejercicio Vehículos

Elaborado por el autor

Por tanto, $x_1 = 400, x_2 = 200, x_3 = 400, x_4 = 0, z = 11600$, que significa que se producirán 400 vehículos en Manta, 400 en Quito, 200 en Cuenca, y no se producirán en Guayaquil, el costo mínimo será de $ 11,600,000.00.

Procediendo al análisis de sensibilidad, se tienen las siguientes tablas:

Tabla 3-24 Tablas de sensibilidad obtenidas por medio de solver. Automóviles

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$11	Manta (x1)	400	0	15	1E+30	3.5
$C$11	Cuenca (x2)	200	0	10	2	1E+30
$D$11	Quito (x3)	400	0	9	1E+30	4
$E$11	Guayaquil (x4)	0	7	7	1E+30	7

ISBN: 978-631-6557-43-8

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción derecha	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$F$6	Total vehículos	1000	30	1000	66.67	0
$F$7	Mínimo de Quito	400	4	400	100	400
$F$8	Mano de Obra	3000	0	3000	1E+30	0
$F$9	Materia prima	4000	-5	4000	0	200

Elaborado por el autor

Interpretando, nos otorga la siguiente información: Dado que el precio sombra de la mano de obra es 0, significa que no es adecuado aumentar la fuerza de trabajo, ya que contratar una hora extra no reducirá los costos ($0.00), en el caso de la restricción de la materia prima, esta es de $ 5000.00, es decir, una unidad de materia prima adicional reduce los costos en ese valor, y no se debería pagar más de ese valor si se desea aumentar la capacidad respectivo. El aumento permitido en la producción total de vehículos es de 66.6 adicionales.

Se debe tener cuidado en sacar conclusiones rápidas, por ejemplo, considerando el promedio de producción se puede decir que ensamblar un vehículo tendrá un costo de $15,000 pero según el precio sombra se establece de $30,000 esto se debe a que este es el costo de aumentar la producción no de lo que cuesta actualmente.

3.3 Dualidad

El problema "Dual" se define sistemáticamente a partir del modelo de Programación Lineal inicial, que se denomina "Primal". Los dos problemas están estrechamente relacionados en el sentido de que la solución óptima de uno proporciona automáticamente la solución óptima al otro (Bazaraa et al., 2011).

El dual generalmente se define para varias formas del primal según el sentido de la optimización (maximización o minimización), los tipos de restricciones$(\leq, \geq, =)$, y el signo de las variables (no negativas o irrestrictas).

De forma consistente con el formato de la tabla simplex la definición del primal se da matemáticamente como:

$$\max z = c^T x$$

$$s.t. \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

En el cual z es la función objetivo a maximizar, c^T es un vector de coeficientes, x es el vector de variables de decisión, A es la matriz de coeficientes de las restricciones, y b el vector en términos constantes.

Con ello el dual se define matemáticamente con una nueva función objetivo y nuevas restricciones, que sin embargo se basan en los datos del primal:

$$\min w = b^T y$$
$$s.t. \quad A^T y \geq c$$
$$y \geq 0$$

Donde w es la función objetivo a minimizar, y es el vector de variables duales, y los otros son vectores o matrices transpuestas de las originales del primal.

El planteamiento del dual es de aplicación para la estimación de los precios sombra, ya que proporcionan información de cómo cambiaría el valor óptimo de la función objetivo si se relajan las restricciones del problema primal; el análisis de sensibilidad, y la verificación de la solución.

3.3.1 Planteamiento del dual

Para construir el dual a partir del primal se resume como sigue: 1) Construir el modelo en la forma de ecuaciones (igualdades) asignando variables auxiliares, no es necesario añadir variables artificiales 2) Asignar una variable dual por cada restricción primal, 3) Por cada variable del primal se construye una restricción del dual, 4) Los coeficientes de la función objetivo del primal definen el lado derecho de las restricciones del dual, 5) los coeficientes de las restricciones corresponden a la transpuesta respectiva, 6) Finalmente se aplican las reglas de optimización, si el original es maximización el dual es minimización y viceversa, en el caso del signo es de mayor igual en el primer caso y menor igual en el segundo, considerando que las variables se vuelven irrestrictas. (Granizo Espinoza, 2021)

Ejercicio 3-17 Planteamiento de dual. Maximización

Tómese como ejemplo el siguiente modelo primal:

$$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$
$$s.t \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

En la forma estándar pasa a ser:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ s.t \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Tendremos dos variables duales y_1, y_2 porque existen dos restricciones. Y colocando en la transpuesta se tiene:

$$\begin{aligned} \min w &= 10y_1 + 8y_2 \\ s.t. \quad & y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ & 2y_1 - y_2 \geq 12 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 4 \end{aligned}$$

Ahora respecto a las variables implícitas se toma en cuenta las variables no básicas añadidas, es decir el s_1

$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \ irrestricta$$

Ejercicio 3-18 Planteamiento de dual. Minimización

Tómese ahora el siguiente ejemplo de minimización:

$$\begin{aligned} \min z &= 15x_1 + 12x_2 \\ s.t. \quad & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando en forma de igualdades:

$$\begin{aligned} \min z &= 15x_1 + 12x_2 \\ s.t. \quad & x_1 + 2x_2 - s_1 = 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 + s_2 = 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como se tienen 2 restricciones, entonces se formulan 2 variables duales, obteniendo:

$$\begin{aligned} \max w &= 3y_1 + 5y_2 \\ s.t \quad & y_1 + 2y_2 \leq 15 \end{aligned}$$

ISBN: 978-631-6557-43-8

$$2y_1 - 4y_2 \leq 12$$

Y respecto a las restricciones implícitas, a partir de las variables de holgura:

$$-y_1 \leq 0, \qquad y_1 \geq 0$$
$$y_2 \leq 0$$

3.3.2 Cálculos con la tabla simplex

Con la tabla simplex óptima del primal se puede determinar los valores duales, para lo que existen dos métodos algebraicos, el primero consiste en que el valor óptimo de y_i viene dado por el coeficiente z óptimo de la variable inicial x_i más el coeficiente objetivo original de x_i, o los valores se calculan a partir del vector fila de los coeficientes objetivo originales de las variables básicas primales óptima por la inversa primal óptima.

Ejercicio 3-19 Cálculo del dual a partir del Simplex. Maximización

Tómese el Ejercicio 3-17 anterior; para plantear la tabla tendríamos el siguiente modelo incorporando las variables de holgura y artificiales:

$$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0s_1 - MR$$
$$s.t \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, R \geq 0$$

Planteando el dual siguiendo el procedimiento anterior se tiene:

$$\min w = 10y_1 + 8y_2$$
$$s.t. \qquad y_1 + 2y_2 \geq 5$$
$$2y_1 - y_2 \geq 12$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq -M \ (es\ decir\ es\ irrestricta)$$

Calculando la tabla simplex óptima, y recordando para simplificar el cálculo que M es un número suficientemente grande se tiene:

Tabla 3-25 Resolución Tabla Simplex. Determinación del dual

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	R	Solución
z	-5	-12	-4	0	-100	0
s_1	1	2	1	1	0	10
R	2	-1	3	0	1	8

ISBN: 978-631-6557-43-8

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	R	Solución
z	195	-112	296	0	0	800
s_1	1	2	1	1	0	10
R	2	-1	3	0	1	8

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	R	Solución
z	251	0	352	56	0	1360
x_2	0.5	1	0.5	0.5	0	5
R	2.5	0	3.5	0.5	1	13

Base	x_1	x_2	x_3	s_1	R	Solución
z	0	0	0.6	5.8	-100.4	54.8
x_2	0	1	-0.2	0.4	-0.2	2.4
x_1	1	0	1.4	0.2	0.4	5.2

Elaborado por el autor

Por lo que $x_1 = 5.2, x_2 = 2.4, z = 54.8$

Para el método 1, consideramos las variables primales iniciales de $s_1 y\ R$, que corresponden a $y_1\ y\ y_2$ respectivamente. Siendo la solución óptima:

Tabla 3-26 Cálculo del valor dual óptimo a partir de la tabla simplex

Variables básicas	$s_1 \rightarrow y_1$	$R \rightarrow y_2$
Coeficientes de la ecuación z	5.8	$-0.4 + M$
Coeficiente objetivo original	0	$-M$
Valor dual óptimo	$5.8 + 0 = 5.8$	-0.4

Elaborado por el autor

Para el método 2, consideramos la matriz inversa óptima (la que se encuentra entre $s_1, R\ y\ x_2, x_1$) con los coeficientes originales de los x_2, x_1, quedando:

$$(12 \quad 5) \times \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} =$$

$$(5.8 \quad ; \quad -0.4)$$

3.3.3 Interpretación económica de la dualidad

Las variables duales en un problema de programación lineal representan los precios sombra, los cuales ya se trataron en el análisis de sensibilidad. En términos económicos, un precio sombra mide la tasa de cambio en el valor óptimo de la función

ISBN: 978-631-6557-43-8

objetivo primal por unidad adicional de recurso disponible. Estas variables ofrecen una valoración del impacto de los recursos escasos en la función objetivo. En un problema de maximización, como la maximización de ganancias, los precios sombra de las restricciones reflejan cuánto aumentaría la ganancia si se incrementa en una unidad la disponibilidad de un recurso limitado. (Hillier & Lieberman, 2024)

Las empresas pueden utilizar los precios sombra para tomar decisiones informadas sobre la asignación de recursos. Si el precio sombra de un recurso es alto, la empresa podría considerar aumentar la disponibilidad de ese recurso, ya que cada unidad adicional incrementa significativamente las ganancias. Por el contrario, si el precio sombra es bajo o cero, significa que el recurso no es un factor limitante en la maximización de las ganancias, y no hay necesidad de invertir en aumentar su disponibilidad.

Si una restricción dual está activa, es decir, se cumple como una igualdad, indica que el recurso asociado está siendo utilizado en su totalidad, y su precio sombra refleja su valor económico marginal. Si un recurso no está completamente agotado, su precio sombra será cero, indicando que no tiene un valor adicional en la producción actual. Esta condición es crucial para la toma de decisiones eficientes (Winston, 2022).

Algunos casos prácticos en el contexto real son los que se presentan a continuación:

Tabla 3-27 Casos de aplicación del análisis de sensibilidad

CASO / REFERENCIA	CONTEXTO
Producción de Automóviles (Chopra & Meindl, 2015)	Ford Motor Company utilizó la producción de diferentes modelos de automóviles en sus plantas.
Gestión de Inventarios (Simchi-Levi et al., 2021)	Revisa como Walmart gestiona inventarios en miles de tiendas, minimizando costos de almacenamiento y distribución.
Asignación de Recursos en la Industria Aeroespacial (Hillier & Lieberman, 2024)	Menciona el ejemplo de Boeing, y cómo enfrenta desafíos en la asignación de recursos para la producción de diferentes modelos de aviones.
Planificación de la Producción en la Industria Alimentaria (Taha, 2022)	Menciona el ejemplo de Nestlé en la planificación de la producción de productos alimenticios, optimizando el uso de ingredientes y capacidad de producción.

ISBN: 978-631-6557-43-8

Distribución de Energía (Bazaraa et al., 2011)	Cómo Duke Energy optimiza la distribución de electricidad en su red, minimizando costos de generación y distribución.

Elaborado por el autor, en base a las citas respectivas

ISBN: 978-631-6557-43-8

BIBLIOGRAFÍA

Al-Mutaz, I., & Al-Fariss, T. F. (1997). Optimum gasoline production in oil refineries by linear programming. *Oil Gas European Magazine*, *23*, 43-45.

Attra, H. D., Wise, W. B., & Black, W. M. (1961). Application of Optimizing Techniques for Studying Field Producing Operations. *Journal of Petroleum Technology*, *13*(01), 82–86. https://doi.org/10.2118/1338-G-PA

Ávalos Reyes, J. A., & Cepeda Silva, P. M. (2024). *Investigación Operativa. Ámbito Empresarial* (1a ed.). Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Baker, K. R. (1974). Scheduling a Full-Time Workforce to Meet Cyclic Staffing Requirements. *Management Science*. https://doi.org/10.1287/mnsc.20.12.1561

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2011). *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons.

Ben-Tal, A., El Ghaooui, L., & Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization* (1a ed.). Princeton University Press. https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691143682/robust-optimization

Boaden, B. G. (1977). Choosing the Optimal Land Use Mix: A LP/DCF Model. *Urban Studies*, *14*(2), 207–210. https://doi.org/10.1080/00420987720080361

Booth, C., & Rowlinson, M. (2006). Management and organizational history: Prospects. *Management & Organizational History*, *1*(1), 5–30. https://doi.org/10.1177/1744935906060627

Caballero, J. A., & Grossmann, I. E. (2007). Una revisión del estado del arte en optimización. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, *4*(1), 5–23. https://doi.org/10.1016/S1697-7912(07)70188-7

Carter, M., Price, C. C., & Rabadi, G. (2017). *Operations Research: A Practical Introduction* (2a ed.). Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9781315153223

ISBN: 978-631-6557-43-8

Chopra, S., & Meindl, P. (2015). *Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation, eBook, Global Edition*. Pearson Education.

Dantzig, G. B. (2002). Linear Programming. *Operations Research*, *50*(1), 42–47. https://doi.org/10.1287/opre.50.1.42.17798

David, R. (2001). Principles Of Modelling. *Safety and Reliability*, *21*(1), 4–15. https://doi.org/10.1080/09617353.2001.11690705

De la Cruz, V., Hernández, M., Rodríguez, C., & Vigueras, D. (2024). *Optimización I: Métodos de programación lineal*. Optimización I. https://sites.google.com/view/opti-mpl/p%C3%A1gina-principal

Devi, S., Nayak, M. M., & Patnaik, S. (2020). Decision-making models and tools: A critical study. *International Journal of Management and Decision Making*, *19*(2), 176. https://doi.org/10.1504/IJMDM.2020.108204

Drury, C. (1992). Joint product and by-product costing. En C. Drury (Ed.), *Management and Cost Accounting* (pp. 161–181). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-6828-9_7

Espinoza Carrión, D., Narváez Zurita, C., Erazo Álvarez, J., & Machuca Contreras, M. (2019). La estrategia financiera como herramienta funcional para la gestión de liquidez en las organizaciones. *CIENCIAMATRIA*, *5*(1), Article 1. https://doi.org/10.35381/cm.v5i1.278

Ford, P. E. B. (1973). An Application of Linear Programming to Loan Plans and Bonus Funding. *Journal of the Staple Inn Actuarial Society*, *20*(3), 186–201. https://doi.org/10.1017/S0020269X00008665

García-Nieves, J. D., Ponz-Tienda, J. L., Ospina-Alvarado, A., & Bonilla-Palacios, M. (2019). Multipurpose linear programming optimization model for repetitive activities scheduling in construction projects. *Automation in Construction*, *105*, 102799. https://doi.org/10.1016/j.autcon.2019.03.020

Gass, S. I., & Fu, M. C. (Eds.). (2013). *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1153-7_200001

González Ariza, Á., & García Llinás, G. (2015). *Manual Práctico de Investigación de Operaciones I* (4a ed.). Universidad del Norte.

Granizo Espinoza, X. (2021). *Investigación operativa. Programación lineal en las Ciencias Administrativas* (1a ed.). Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Herrera-Sánchez, G., Silva-Juárez, A., Gallardo-Navarro, J. L., & Ríos-Reyes, J. H. (2020). Propuesta de optimización de metas del área de mantenimiento mediante programación lineal por metas. *Revista de Computo Aplicado*, 1–7. https://doi.org/10.35429/JCA.2020.14.4.1.7

Hilal, S. S., & Erikson, W. (1981). Matching Supplies to Save Lives: Linear Programming the Production of Heart Valves. *Interfaces*, *11*(6), 48–56. https://doi.org/10.1287/inte.11.6.48

Hillier, F., & Lieberman, G. (2024). *Introduction to Operations Research* (2024 Release). Mc Graw Hill. https://www.mheducation.com/highered/product/introduction-operations-research-2024-release-hillier-lieberman/M9781264856961.html

Izar Landeta, J. M. (2012). *Investigación de Operaciones* (1a ed.). Trillas.

Jia, Z., & Ierapetritou, M. (2003). Mixed-Integer Linear Programming Model for Gasoline Blending and Distribution Scheduling. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, *42*(4), 825–835. https://doi.org/10.1021/ie0204843

Joyce, K. E., & Cartwright, N. (2020). Bridging the Gap Between Research and Practice: Predicting What Will Work Locally. *American Educational Research Journal*, *57*(3), 1045–1082. https://doi.org/10.3102/0002831219866687

Kallrath, J. (2021). *Business Optimization Using Mathematical Programming: An Introduction with Case Studies and Solutions in Various Algebraic Modeling Languages* (2a ed., Vol. 307). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-73237-0

Krajewski, L. J., Ritzman, L. P., & McKenzie, P. (1980). Shift Scheduling in Banking Operations: A Case Application. *Interfaces*, *10*(2), 1–8. https://doi.org/10.1287/inte.10.2.1

ISBN: 978-631-6557-43-8

Love, R. R., & Hoey, J. M. (1990). Management Science Improves Fast-Food Operations. *Interfaces*, *20*(2), 21–29. https://doi.org/10.1287/inte.20.2.21

Maroto Álvarez, M. C., Alcaraz Soria, J., Ginestar Peiro, C. de M., & Segura Maroto, M. (2012). *Investigación Operativa en Administración y Dirección de Empresas* (1a ed.). Editorial Universitat Politècnica de València. https://riunet.upv.es/handle/10251/72454

Microsoft. (2024). *Carga del complemento Solver en Excel 2016—Soporte técnico de Microsoft*. https://support.microsoft.com/es-es/office/carga-del-complemento-solver-en-excel-2016-612926fc-d53b-46b4-872c-e24772f078ca

Nabli, H. (2009). An overview on the simplex algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, *210*(2), 479–489. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.01.013

Neave, E. H., & Wiginton, J. C. (1981). *Financial management, theory and strategies* (1a ed.). Prentice-Hall.

Powell, S., & Baker, K. (2003). *The Art of Modeling with Spreadsheets: Management Science, Spreadsheet Engineering, and Modeling Craft* (2a ed.). https://www.semanticscholar.org/paper/The-Art-of-Modeling-with-Spreadsheets:-Management-Baker-Powell/c27af8d416c44512ed3e2504a71995cb0db4b711

Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., & Flannery, B. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3a ed.).

Rao, S. S. (2009). *Engineering Optimization: Theory and Practice* (4a ed.). John Wiley & Sons, Ltd. https://doi.org/10.1002/9780470549124

Rardin, R. L. (2017). *Optimization in Operations Research* (2a ed.). Pearson.

Riddle, E. J. (2010). An Active Learning Exercise for Introducing the Formulation of Linear Programming Models. | Decision Sciences Journal of Innovative Education | EBSCOhost. *Decision Sciences Journal of Innovative Education*, *8*(2). https://doi.org/10.1111/j.1540-4609.2010.00263.x

ISBN: 978-631-6557-43-8

Robichek, A. A., & Weingartner, M. H. (1965). Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems. *Journal of the American Statistical Association*, *60*(310), 675. https://doi.org/10.2307/2282700

Romero Medina, M. V. (2019). *Determinación de eutrofización a partir de la salubridad de sus nutrientes, en la laguna urbana Valle Hermoso del cantón Guano.* [bachelorThesis, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo]. http://dspace.espoch.edu.ec/handle/123456789/10597

Russell, R. S., & Taylor, B. W. (2011). *Operations Management*. Wiley.

Sekhon, R., & Bloom, R. (2024). *Applied Finite Mathematics* (1a ed.). Anza College. https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Applied_Finite_Mathematics_(Sekhon_and_Bloom)

Simchi-Levi, D., Kaminsky, P., & Simchi-Levi, E. (2021). *Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies and Case Studies*. McGraw-Hill Education.

Taha, H. A. (2022). *Operations Research an Introduction* (11a ed.). Pearson Education Ind.

Wagner, H. M. (1975). *Principles of Operations Research: With Applications to Managerial Decisions* (1a ed.). Prentice-Hall.

Wakefield, M. (2014). *Introduction to Linear Programming* [Class Notes]. https://www.usna.edu/Users/math/wakefiel/sa305.php

Willemain, T. R. (1994). Insights on Modeling from a Dozen Experts. *Operations Research*, *42*(2), 213–222. https://doi.org/10.1287/opre.42.2.213

Winston, W. L. (2022). *Operations Research: Applications and Algorithms* (4a ed.). Brooks/Cole - Thomson Learning.

Wollmann, D., & Steiner, M. T. A. (2017). The Strategic Decision-Making as a Complex Adaptive System: A Conceptual Scientific Model. *Complexity*, *2017*(1), 7954289. https://doi.org/10.1155/2017/7954289

ISBN: 978-631-6557-43-8

ANEXOS

PROBLEMA DE APLICACIÓN FINAL

Considere el siguiente planteamiento: Una empresa de muebles plantea producir dos tipos de sillas para oficina al por mayor, que se fabrican por lotes: silla múltiple para visitas y silla de gerencia, las mismas que requieren 3 operaciones: 1) la construcción del armazón metálico, 2) la tapicería de los asientos, y 3) la colocación de piezas plásticas. A lo máximo para el armazón se pueden usar 430 horas al mes, para la tapicería 460 y para la parte plástica 420 horas. Las sillas de visitas toman 20 horas en la armazón metálica y 40 horas en las piezas plásticas, y no necesita de tapicería, la silla de gerencia necesita de 10 horas en la construcción del armazón y 20 horas en la tapicería, sin que tenga ninguna pieza plástica que colocar.

La ganancia promedio por las sillas múltiples de visitas es de $ 200.00 USD, y de las de gerencia $ 500.00

PARTE A

Formule el modelo de programación lineal, y resuélvalo usando el método gráfico, el método simplex y Solver de Excel.

PARTE B

Ahora la gerencia ha decidido producir un nuevo tipo de silla simple para visita, la construcción toma 10 horas en armazón metálico, 30 de tapicería y 10 en colocación de piezas plásticas. La ganancia esperada es de $ 300.00 USD. ¿Es recomendable seguir ese plan de acción? (Resolver únicamente en Solver)

PARTE C

Como desean expandir el mercado, se les ofrece otra alternativa de silla de gamer que va a tomar 5 horas en armazón metálico, 15 en tapicería y 5 en colocación de piezas plásticas, con una ganancia esperada de $ 400.00. ¿Es recomendable este segundo curso de acción? (Resolver únicamente en Solver)

PARTE D

Tomar en consideración la respuesta de la parte C, plantee el dual, y realice el análisis de sensibilidad y conteste las preguntas:

Se da la oportunidad de aumentar la capacidad de la máquina para la colocación de piezas plásticas con un consto de $ 100.00. ¿Lo recomendaría?

ISBN: 978-631-6557-43-8

Al costo de $ 500.00 se puede aumentar la capacidad de la máquina de tapicería de las 460 horas actuales a 500 horas. ¿Lo recomendaría?

Después de aplicar las 5 S, se hace una reagrupación de maquinaria y ahora el máximo de tiempo que se puede usar cada máquina cambia, las de armazones y de colocación de piezas plásticas ahora pueden ocuparse 10 y 5 horas adicionales respectivamente, pero la de tapizado disminuirá 5 horas. ¿Habrá problemas con la producción en este caso?

PARTE E

A partir del planteamiento que hizo en la parte C, ahora existe un requerimiento del departamento de salud y seguridad ocupacional que se realice una operación de inspección que ocupará para los productos silla de visitas, de gerencia y gamer, 1, 3 y 3 horas respectivamente, y se tiene disponible al personal 400 horas. ¿Habrá algún inconveniente con esa nueva operación? (Resolver con solver).

ISBN: 978-631-6557-43-8

DEL AUTOR

FREDDY MARCO ARMIJOS ARCOS

Ingeniero Ambiental por la Universidad Politécnica Salesiana sede Cuenca, Máster Universitario en Sistemas Integrados de Gestión de la Prevención de Riesgos Laborales, la Calidad, el Medio Ambiente y la Responsabilidad Social Corporativa por la Universidad Internacional de la Rioja, Magíster en Métodos Matemáticos y Simulación Numérica en Ingeniería por la Universidad Politécnica Salesiana sede Quito; candidato a Doctor en Dirección de Proyectos por la Universidad de Investigación e Innovación de México.

Docente de la Facultad de Administración de Empresas en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo ESPOCH, Investigador en el Grupo de Investigación para la Sostenibilidad de Cuencas Hidrográficas, Consultor ambiental especializado en modelamiento matemático.

PUERTO MADERO
EDITORIAL

ISBN 978-631-6557-43-8
9 786316 557438