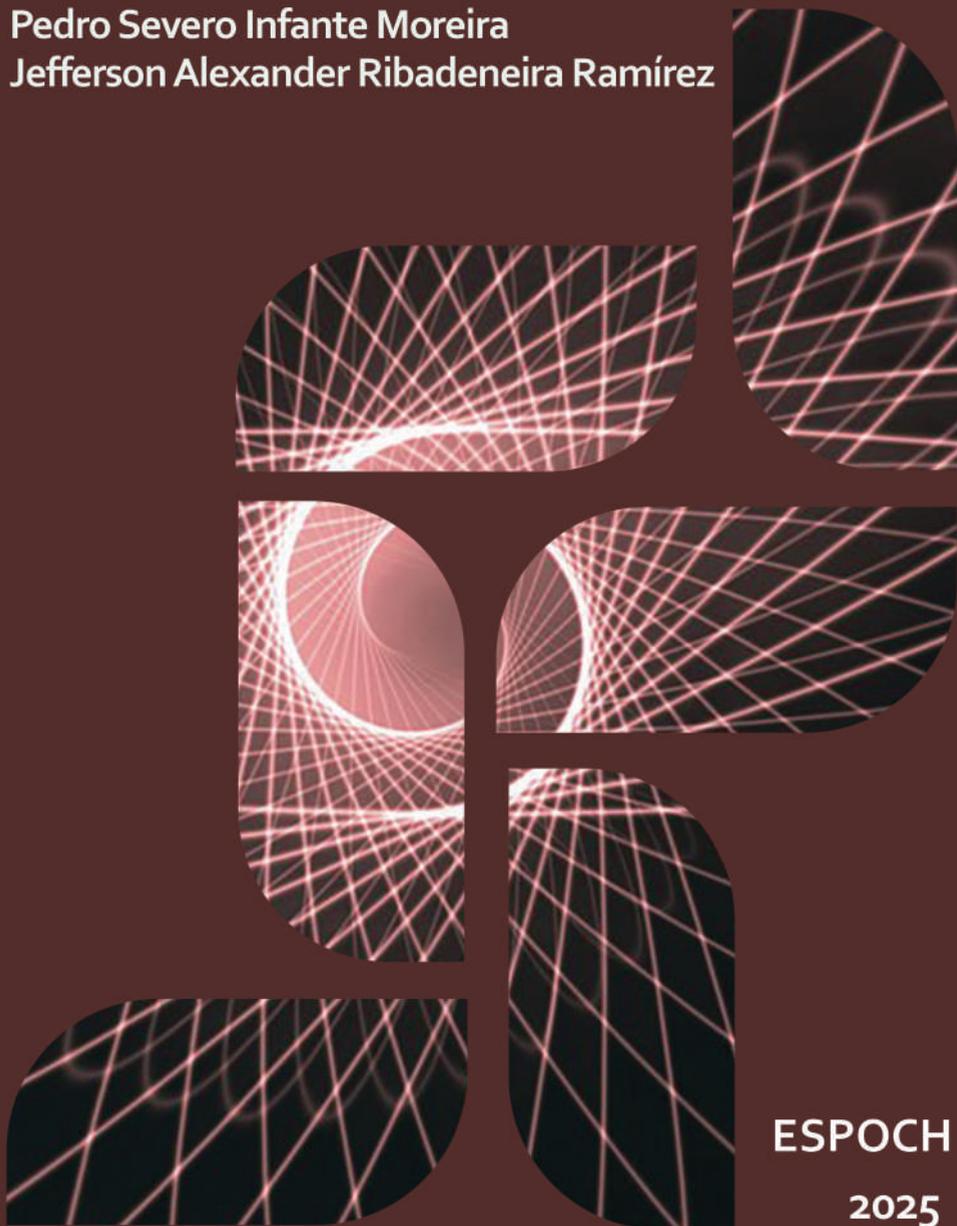


Magnetostática

Pedro Severo Infante Moreira

Jefferson Alexander Ribadeneira Ramírez



ESPOCH

2025

Magnetostática

Magnetostática

Pedro Severo Infante Moreira
Jefferson Alexander Ribadeneira Ramírez



**Decanato
de Publicaciones**



esPOCH

Magnetostática

© 2025 Pedro Severo Infante Moreira

Jefferson Alexander Ribadeneira Ramírez

© 2025 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1½

Decanato de Publicaciones

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*)

Corrección y diseño: La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio,
sin la previa autorización por escrito de los propietarios del
Copyright.

CDU: 537

Magnetostática

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Decanato de Publicaciones, 2025

229 pp. vol: 17,6 x 25 cm

ISBN: 978-9942-51-333-5

1. Electricidad, magnetismo

MAGNETOSTÁTICA

PEDRO SEVERO INFANTE MOREIRA

ING. ELECTRÓNICO

DOCTOR EN CIENCIAS TÉCNICAS

PROFESOR TITULAR PRINCIPAL 1

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

JEFFERSON ALEXANDER RIBADENEIRA RAMÍREZ

ING. EN ELECTRÓNICA Y COMPUTACIÓN

DOCTOR EN TELECOMUNICACIONES

PROFESOR TITULAR AUXILIAR 2

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Riobamba-Ecuador

Abril de 2025



Introducción

El presente libro de Magnetostática, se basa en la experiencia adquirida en las aulas de dos instituciones educativas, esto es, la Universidad Nacional de Chimborazo y, la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, durante una trayectoria de 28 años. La publicación de esta obra, es con la finalidad de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los campos electromagnéticos.

La obra está dirigida a aquellos estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial, integral y vectorial. La parte teórica, presenta los principales aspectos en los que se basa la magnetostática y, posteriormente aplicarlos en el desarrollo de los problemas, en los que paso a paso se va guiando al estudiante, convirtiéndose en una herramienta de trabajo de fácil entendimiento.

Durante el desarrollo de este libro, se hace énfasis a las leyes de Biot-Savart y Ampere; así como también, a los teoremas de la divergencia y de Stokes. Además, se utiliza el teorema y el vector de Poynting en el desarrollo de los problemas. A continuación, se presenta una breve descripción de los contenidos en cada uno de los cinco capítulos.

El capítulo I, trata sobre el campo magnético en ausencia de materiales magnéticos, se realizan cálculos para la obtención de la densidad de flujo magnético utilizando las leyes de Biot-Savart y de Ampere; así como también, se obtiene la densidad de flujo magnético a partir del potencial vectorial magnético. Se obtiene la fuerza magnética de materiales conductores por el que circula una corriente eléctrica, cuyos materiales se encuentran dentro de un campo magnético externo. Por último, al final del capítulo, se encuentran problemas desarrollados.

El capítulo II, trata sobre el campo magnético en presencia de materiales magnéticos. Se determina el dipolo magnético y el vector magnetización. Se aplica la ley generalizada de Ampere para determinar los campos magnéticos. Se analiza las propiedades físicas de los materiales magnéticos, obteniéndose el comportamiento de la curva de histéresis. Se realiza el análisis de los circuitos magnéticos equivalentes. Finalmente, se encuentran problemas desarrollados que son integradores del presente capítulo.

En el capítulo III, trata sobre la inducción electromagnética, especialmente en la obtención de la fuerza electromotriz inducida en conductores moviéndose dentro de un campo magnético, aplicando la Ley de inducción de Faraday y la Ley de Lenz. Se analiza y determina la auto-inductancia e inductancia mutua. Por último, se encuentran problemas resueltos integradores del capítulo.

El capítulo IV, trata sobre la determinación y análisis de las ecuaciones de Maxwell, en formato integral, diferencial y complejo. Se analiza y determina el teorema y vector de Poynting. Concluyendo con problemas resueltos sobre el capítulo.

Finalmente, el capítulo V, trata sobre el análisis y determinación de las ondas electromagnéticas en el espacio libre sin pérdidas y, en medios materiales con pérdidas. Posteriormente, se determinan las ondas planas sinusoidales de campo eléctrico y magnético, analizándose la reflexión y refracción. Por último, existen problemas resueltos sobre el capítulo.

Índice general

CAPÍTULO I

CAMPO MAGNÉTICO DE CORRIENTES ESTACIONARIAS EN AUSENCIA DE MATERIALES MAGNÉTICOS	1
1.1 Fuerza magnética entre dos cargas pequeñas en movimiento	1
1.2 El concepto del campo magnético. densidad de flujo magnético	2
1.3 Ley de Biot-Savart	4
1.4 Flujo magnético y sus propiedades	8
1.4.1 Flujo magnético a través de un contorno cerrado	9
1.5 Ley circuital de Ampere	11
1.6 Forma diferencial de la Ley Circuital de Ampere	14
1.7 Potencial vectorial magnético	15
1.8 Problemas resueltos	22

CAPÍTULO II

MAGNETOSTÁTICA EN PRESENCIA DE MATERIALES MAGNÉTICOS	37
2.1 Torque en un lazo de corriente circular en un campo magnético uniforme . .	37
2.2 Potencial vectorial magnético de un lazo de corriente elemental y de un agregado de lazo. vector de magnetización	43
2.2.1 Caso de un lazo de corriente elemental	43
2.2.2 Caso de agregado de lazo. Vector de densidad de momento magnético, o Vector magnetización	50
2.3 Corriente macroscópica equivalente a una sustancia magnetizada	53
2.3.1 Determinación de la densidad de corriente de magnetización superficial \vec{J}_{ms}	53
2.3.2 Determinación de la densidad de corriente de magnetización \vec{J}_m . .	55

2.4	Forma generalizada de la ley Circuital de Ampere. intensidad de campo magnético	58
2.5	Condiciones de frontera	62
2.5.1	Condiciones de frontera para las componentes normales	62
2.5.2	Condiciones de frontera para las componentes tangenciales	64
2.6	Propiedades físicas de materiales magnéticos. Comportamiento de histéresis	67
2.6.1	Curva de magnetización de los materiales ferromagnéticos	68
2.7	Circuitos magnéticos lineales cuasi-filamentales	76
2.8	Análisis aproximado de circuitos magnéticos lineales no filamentosos	78
2.9	Análisis aproximado de circuitos magnéticos no lineales	80
2.10	Circuito magnético de un imán permanente	80
2.11	Problemas resueltos	82

CAPÍTULO III

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA 99

3.1	Fuerza entre dos cargas pequeñas en un movimiento arbitrario lento	99
3.2	El campo eléctrico de un sistema de corriente cuasi - estacionario	102
3.3	Ley de Inducción electromagnética de Faraday para un lazo estacionario	103
3.4	Fuerza electromotriz inducida en conductores moviéndose en un campo magnético estático	110
3.5	Ley general de inducción electromagnética (Ley de Faraday)	115
3.6	Inductancia mutua y autoinductancia de bucles cerrados cuasi-filamentarios	116
3.7	Problemas resueltos	124

CAPÍTULO IV

ECUACIONES DE MAXWELL 131

4.1	Ley circuital de ampere para corrientes no estacionarias	131
4.2	Ecuaciones generales del campo electromagnético (Ecuaciones de Maxwell)	139
4.2.1	Primera ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial	139
4.2.2	Segunda ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial	141
4.2.3	Tercera ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial	141
4.2.4	Cuarta ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial	145

4.3	Forma compleja de las ecuaciones de Maxwell	146
4.3.1	Primera ecuación de Maxwell en forma compleja	148
4.3.2	Segunda ecuación de Maxwell en forma compleja	148
4.3.3	Tercera ecuación de Maxwell en forma compleja	149
4.3.4	Cuarta ecuación de Maxwell en forma compleja	150
4.4	Condiciones de frontera	151
4.5	Teorema de Poynting	158
4.6	Problemas resueltos	162

CAPÍTULO V

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES 173

5.1	Ondas electromagnéticas	173
5.1.1	Ecuación de onda del campo magnético \vec{H}	174
5.1.2	Ecuación de onda del campo eléctrico \vec{E}	177
5.2	Ecuación de onda en el espacio libre (caso sin pérdidas)	178
5.3	Ecuación de onda en medios materiales (caso con pérdidas)	180
5.4	Ecuación de ondas planas sinusoidales	181
5.5	Naturaleza transversal de las ondas planas	190
5.6	Propagación de ondas planas desfasadas en el plano XY	197
5.7	Reflexión y refracción de ondas planas	202
5.7.1	Índice de refracción	203
5.8	Problemas resueltos	207

BIBLIOGRAFÍA 217

Capítulo I

CAMPO MAGNÉTICO DE CORRIENTES ESTACIONARIAS EN AUSENCIA DE MATERIALES MAGNÉTICOS

1.1. Fuerza magnética entre dos cargas pequeñas en movimiento

Considere dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 moviéndose en el vacío con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , y estas son mucho menores que la velocidad de la luz, tal como se muestra en la Fig. 1.1. La fuerza magnética \vec{F}_{m12} ejercida por la carga Q_1 sobre la carga Q_2 mediante experimentos indirectos, que involucran sistemas de corriente estacionaria, es como se muestra en la Ecuación 1.1.

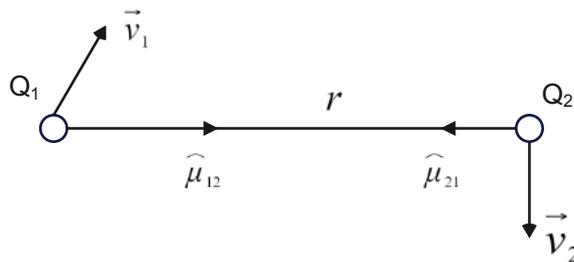


Figura 1.1: Dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 en movimiento.

Fuente: Los autores

$$\vec{F}_{m12} = K_m \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \widehat{\mu}_{12}) \quad (1.1)$$

Donde, la constante K_m , en el sistemas de unidades MKS, es:

$$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (1.2)$$

Donde, μ_0 es la permeabilidad en el vacío con valor $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$. Reemplazando la Ecuación 1.2 en la Ecuación 1.1 se tiene la Ecuación 1.3.

$$\vec{F}_{m12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \widehat{\mu}_{12}) \quad (1.3)$$

Los paréntesis indican que primero se debe determinar el vector igual al producto vectorial $\vec{v}_1 \times \widehat{\mu}_{12}$; y, al resultado obtenido, se debe realizar el producto cruz con el vector \vec{v}_2 .

La fuerza máxima entre las dos cargas, es el módulo de la Ecuación 1.3, representado en la Ecuación 1.4, esto es,

$$\left| \vec{F}_{m12} \right|_{\text{máx}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} v_1 v_2 \quad (1.4)$$

Por otro lado, La fuerza magnética \vec{F}_{m21} ejercida por la carga Q_2 sobre la carga Q_1 , la cual es obtenida simplemente por el intercambio de los subíndices 1 y 2 en la Ecuación 1.3, que se muestra en la Ecuación 1.5.

$$\vec{F}_{m21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_2 Q_1}{r^2} \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \widehat{\mu}_{21}) \quad (1.5)$$

donde,

$$\widehat{\mu}_{21} = -\widehat{\mu}_{12} \quad (1.6)$$

entonces,

$$\vec{F}_{m21} = -\vec{F}_{m12} \quad (1.7)$$

1.2. El concepto del campo magnético. densidad de flujo magnético

Cuando las cargas están en movimiento, se produce un campo magnético en el espacio que le rodea, y este campo magnético, a su vez, genera una fuerza magnética. La Ecuación 1.3

puede ser reescrita en la Ecuación 1.8 (ESPOL 1982, p245).

$$\vec{F}_{m12} = Q_2 \vec{v}_2 \times \left(\frac{\mu_0 Q_1}{4\pi} \frac{\vec{v}_1 \times \widehat{\mu}_{12}}{r^2} \right) \quad (1.8)$$

donde, lo que está entre paréntesis, representa la densidad de flujo magnético \vec{B}_1 producido por la carga Q_1 en movimiento, esto es:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 Q_1}{4\pi} \frac{\vec{v}_1 \times \widehat{\mu}_{12}}{r^2} \quad (1.9)$$

La Ecuación 1.9, representa por definición, el vector densidad de flujo magnético producido por una sola carga en movimiento. Reemplazando la Ecuación 1.9 en Ecuación 1.8, se tiene Ecuación 1.10.

$$\vec{F}_{m12} = Q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 \quad (1.10)$$

Si en vez de la carga Q_2 se considera una carga Q_3 que se desplaza con una velocidad \vec{v}_3 a una distancia r de la carga Q_1 , la fuerza será:

$$\vec{F}_{m13} = Q_3 \vec{v}_3 \times \vec{B}_1 \quad (1.11)$$

Concretamente la Ecuación 1.11, es cuando la carga Q_3 se está moviendo con una velocidad \vec{v}_3 en la región de una densidad de flujo magnético \vec{B}_1 , cuya unidad es el Tesla, como se demuestra a continuación:

$$B = \frac{F_{m13}}{Q_3 v_3} = \frac{N}{\text{Coul} \frac{m}{\text{seg}}} = \text{Tesla} = \frac{\text{Weber}}{m^2} \quad (1.12)$$

En la Fig. 1.2, se muestra una carga Q que se está moviendo con una velocidad \vec{v} y, también existen n cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_n moviéndose con una velocidad $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Aplicando el principio de superposición, la fuerza total \vec{F}_m sobre la carga Q , producidas por las n cargas, es:

$$\vec{F}_m = Q \vec{v} \times \left(\frac{\mu_0 Q_1}{4\pi} \frac{\vec{v}_1 \times \widehat{\mu}_1}{r_1^2} + \frac{\mu_0 Q_2}{4\pi} \frac{\vec{v}_2 \times \widehat{\mu}_2}{r_2^2} + \dots + \frac{\mu_0 Q_n}{4\pi} \frac{\vec{v}_n \times \widehat{\mu}_n}{r_n^2} \right) \quad (1.13)$$

Lo que está entre paréntesis en la Ecuación 1.13, se puede escribir como una sumatoria de las densidades de flujo producidas por las n cargas puntuales, esto es,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\vec{v}_k \times \widehat{\mu}_k}{r_k^2} \quad (1.14)$$

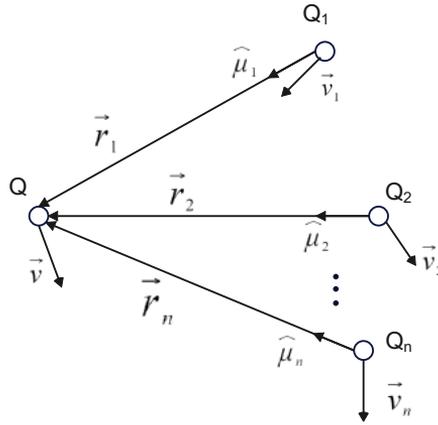


Figura 1.2: Cargas en movimiento, generan un campo magnético.

Fuente: Los autores

Reemplazando en la Ecuación 1.14 en Ecuación 1.13,

$$\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.15}$$

Además de la fuerza magnética \vec{F}_m dada por la Ecuación 1.13, una carga Q en movimiento también está sujeta a una cierta fuerza eléctrica $\vec{F}_e = Q\vec{E}$, donde \vec{E} es la intensidad del campo eléctrico en el punto ocupado por la carga en el instante considerado.

$$\vec{F}_T = \vec{F}_e + \vec{F}_m \tag{1.16}$$

reemplazando,

$$\vec{F}_T = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.17}$$

sacando factor común,

$$\vec{F}_T = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.18}$$

La Ecuación 1.18 se conoce como la *Fuerza de Lorentz*.

1.3. Ley de Biot-Savart

Al circular una corriente estacionaria I en un alambre conductor, en el espacio que le rodea se genera un campo magnético debido a las cargas que se están moviendo en el interior del alambre conductor, como se muestra en la Fig. 1.3. Por simplicidad, se supone que las cargas libres dentro del conductor son positivas y las cargas en reposo negativas.

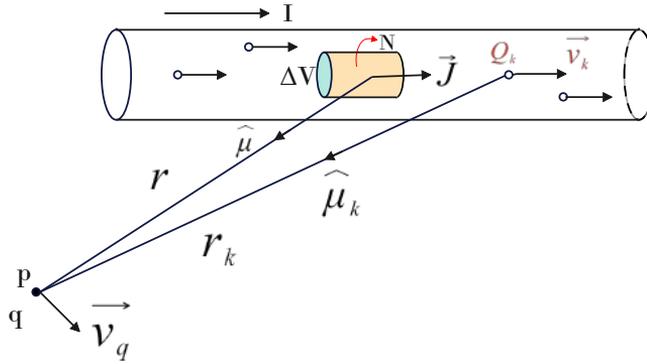


Figura 1.3: Una pequeña carga q en el campo de las cargas que se mueven dentro de un conductor.

Fuente: Los autores

Si una carga de prueba q positiva se mueve con una velocidad \vec{v}_q actuará sobre ella una fuerza magnética \vec{F}_m debido a las n cargas que se mueven dentro del alambre conductor, tomando en cuenta las Ecuaciones 1.13 y 1.14, se tiene:

$$\vec{F}_m = q \vec{v}_q \times \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\vec{v}_k \times \hat{\mu}_k}{r_k^2} \quad (1.19)$$

En la Ecuación 1.19, Q_k representa las cargas libres dentro del conductor, y \vec{v}_k sus velocidades de deriva promedio, que generalmente varían en diferentes puntos, $\hat{\mu}_k$ es el vector unitario de las cargas libres con su respectiva distancia r_k al punto p . La suma se extiende a todas las cargas en movimiento dentro del conductor.

El número de cargas libres Q_k por unidad de volumen de un conductor es enorme, no se necesita considerar macroscópicamente la corriente como un sistema de cargas discretas en movimiento. Suponiendo que el número de cargas libres por unidad de volumen del conductor es N . Entonces, dentro de un pequeño volumen ΔV , hay $N\Delta V$ cargas, esto es, $NQ\Delta V$. Todos se mueven con la misma velocidad \vec{v} , ya que se supone que ΔV es muy pequeño. Q representa la suma de todas las cargas libres Q_k . Por lo tanto, la suma en la Ecuación 1.19 sobre las cargas individuales puede reemplazarse por una suma sobre los elementos de volumen ΔV (ver Fig. 1.3). La densidad de flujo magnético producido por las cargas en el conductor a una distancia r en el punto p viene dada por:

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_v \frac{NQ\vec{v} \times \hat{\mu}}{r^2} \Delta V \quad (1.20)$$

Pero, $NQ\vec{v}$ representa la densidad de corriente \vec{J} en puntos dentro del elemento de vo-

lumen ΔV . Si se supone que ΔV es un volumen *físicamente pequeño*, la suma en la Ecuación 1.20 puede ser reemplazada por la integral de volumen. Por lo tanto, la densidad de flujo magnético en el punto p a una distancia r debido a la corriente estacionaria I , es decir, a las cargas que se mueven dentro de un conductor está dada por la Ecuación 1.21 (ESPOL 1982, P249).

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J} \times \hat{\mu}}{r^2} dv \quad (1.21)$$

La Ecuación 1.21, representa la densidad de flujo magnético producido por corrientes macroscópicas.

En la práctica, la corriente fluye muy a menudo a través de alambres conductores delgados, como el que se muestra en la Fig. 1.4. En estos casos, es práctico usar una fórmula aproximada que se deriva fácilmente de la Ecuación 1.21. Suponga que el área de la sección transversal del alambre es ΔS . Entonces se puede escribir $\Delta S dl$ en la Ecuación 1.21 en lugar del diferencial de volumen dv , así:

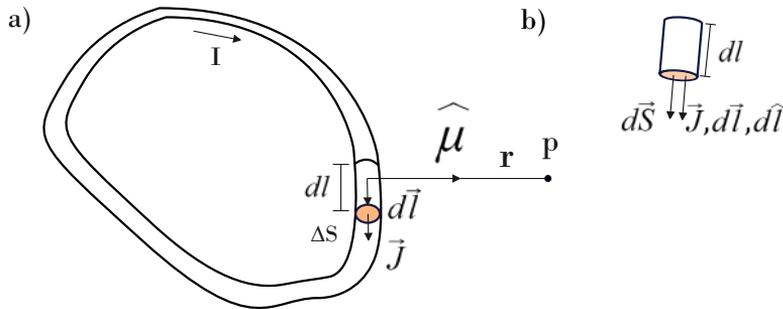


Figura 1.4: Un conductor de corriente cuasi-filamentaria.
Fuente: Los autores

$$dv = \Delta S dl \quad (1.22)$$

reemplazando en la Ecuación 1.21,

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J} \times \hat{\mu}}{r^2} dl \Delta S \quad (1.23)$$

El vector \vec{J} tiene la misma dirección y sentido del vector $d\vec{l}$, utilizando el vector unitario $d\hat{l}$, se tiene

$$\vec{J} = J d\hat{l} \quad (1.24)$$

y

$$d\vec{l} = dl d\hat{l} \quad (1.25)$$

reemplazando en la Ecuación 1.23 se tiene una integral cerrada de línea,

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \hat{\mu}}{r^2} J \Delta S \quad (1.26)$$

pero,

$$I = J \Delta S \quad (1.27)$$

entonces,

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \hat{\mu}}{r^2} \quad (1.28)$$

La Ecuación 1.28 representa la densidad de flujo magnético producida por una corriente que circula por un alambre delgado, conocida como la **Ley de Biot-Savart**.

Si se selecciona un diferencial de longitud en el alambre de la Fig. 1.4 a, por el cual circula una corriente I , este diferencial de longitud dl produce un diferencial de densidad de flujo magnético en el punto p a una distancia r , representado en la Ecuación 1.29,

$$d\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{\mu}}{r^2} \quad (1.29)$$

A bajas frecuencias, la corriente circula por toda el área transversal del alambre conductor, sin embargo, a medida que se va aumentando la frecuencia y, exclusivamente a altas frecuencias, la corriente tiende a circular únicamente por una fina lámina de la superficie del alambre conductor. Este efecto se conoce como *efecto piel*.

Al considerar una lámina muy fina de espesor Δd por la que circula una corriente estacionaria, como se muestra en la Fig. 1.5. A partir de la Ecuación 1.21, el diferencial de volumen dv es igual a:

$$dv = \Delta d dS \quad (1.30)$$

reemplazando valores se tiene la integral de superficie en la Ecuación 1.31,

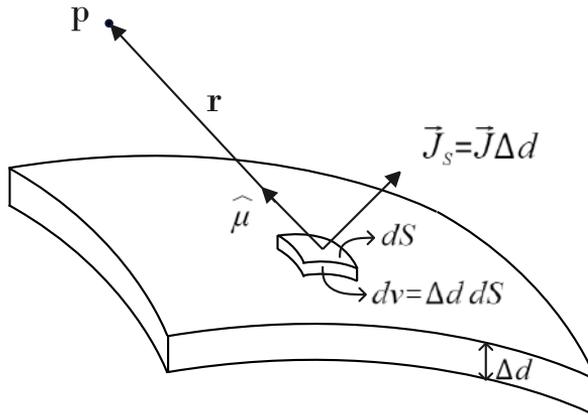


Figura 1.5: Lámina delgada con una \vec{J}_s .
Fuente: Los autores

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J} \Delta d \times \hat{\mu}}{r^2} dS \quad (1.31)$$

pero,

$$\vec{J} \Delta d = \vec{J}_s \quad (1.32)$$

donde, \vec{J}_s es la densidad superficial de corriente, o corriente laminar.

Finalmente, reemplazando valores se obtiene la densidad de flujo magnético en el punto p a una distancia r desde una lámina muy delgada que lleva una densidad de corriente superficial, y se muestra en la Ecuación 1.33.

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s \times \hat{\mu}}{r^2} dS \quad (1.33)$$

1.4. Flujo magnético y sus propiedades

Por definición, el flujo magnético designado por el símbolo φ , es el número de líneas de campo magnético que atraviesan una superficie en forma perpendicular, dicha superficie puede ser abierta (como se muestra en la Fig. 1.6) o cerrada (como se muestra en la Fig. 1.7), y está representada por la Ecuación 1.34.

$$\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.34)$$

La unidad del flujo magnético φ es el weber (Wb) y, la unidad de la densidad de flujo

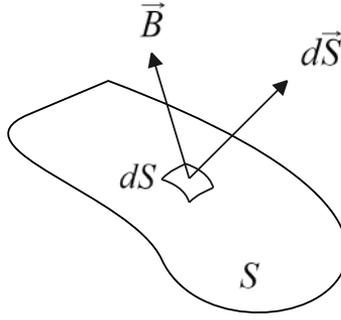


Figura 1.6: Flujo magnético a través de una superficie abierta.

Fuente: Los autores

magnético B es la Tesla, sabiendo que:

$$1 \text{ Tesla} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (1.35)$$

Si el flujo atraviesa una superficie cerrada (Fig. 1.7), el flujo es igual a cero, como se muestra en la Ecuación 1.36.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.36)$$

La Ecuación 1.36 es la forma integral de la Ley de la conservación del flujo magnético. Aplicando el teorema de la divergencia, se tiene:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv \quad (1.37)$$

reemplazando en la Ecuación 1.36,

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv = 0 \quad (1.38)$$

integrando,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.39)$$

La Ecuación 1.39 es la forma diferencial de la Ley de la conservación del flujo magnético.

1.4.1. Flujo magnético a través de un contorno cerrado

Considerar la superficie cerrada de la Fig. 1.7 que está constituida por dos superficies abiertas S_1 y S_2 extendidas sobre un contorno común C . Si las superficies S_1 y S_2 son atravesadas por un campo magnético y, tomando en cuenta que el vector unitario normal $\hat{\mu}_{n1}$ al ser

multiplicado por el diferencial de superficie dS , se tiene el vector $d\vec{S}$, entonces el flujo magnético φ_1 en la superficie S_1 , es:

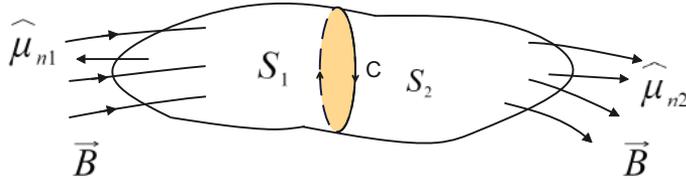


Figura 1.7: Flujo magnético a través de una superficie cerrada.
Fuente: Los autores

$$\varphi_1 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \quad (1.40)$$

pero,

$$d\vec{S}_1 = S_1 \hat{\mu}_{n1} \quad (1.41)$$

entonces,

$$\varphi_1 = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} B dS_1 \cos 180^\circ = - \int_{S_1} B dS_1 \quad (1.42)$$

$$\varphi_1 = - \int_{S_1} B dS_1 \quad (1.43)$$

De igual manera, el flujo magnético φ_2 en la superficie S_2 , es:

$$\varphi_2 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 \quad (1.44)$$

pero,

$$d\vec{S}_2 = S_2 \hat{\mu}_{n2} \quad (1.45)$$

entonces,

$$\varphi_2 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} B dS_2 \cos 0^\circ = \int_{S_2} B dS_2 \quad (1.46)$$

$$\varphi_2 = \int_{S_2} B dS_2 \quad (1.47)$$

La suma de las superficies ($S_1 + S_2$) se obtiene una superficie cerrada, entonces utilizando la Ecuación 1.36 y, las Ecuaciones 1.43 y 1.47, se tiene:

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} B dS_1 + \int_{S_2} B dS_2 = 0 \quad (1.48)$$

$$\int_{S_1} B dS_1 = \int_{S_2} B dS_2 \quad (1.49)$$

La Ecuación 1.49 es válida para dos superficies cualesquiera S_1 y S_2 que se extienden sobre un contorno común C .

1.5. Ley circuital de Ampere

Además de la relación integral en la Ecuación 1.36, el vector de densidad de flujo magnético \vec{B} producido por corrientes estacionarias también satisface otra relación muy simple e importante, conocida como la Ley Circuital de Ampere. De acuerdo con esa ley, la integral de línea del vector de densidad de flujo magnético \vec{B} a lo largo de cualquier contorno cerrado es igual a la corriente total a través del contorno, multiplicada por la permeabilidad en el vacío, μ_0 (ESPOL 1982, P257).

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.50)$$

La Ecuación 1.50 representa la Ley Circuital de Ampere, es válida para el vacío y en ausencia de materiales magnéticos. La aplicación de esta ley, se presenta para dos casos:

Caso 1. Cuando el contorno cerrado (circunferencia de radio r), encierra la totalidad de la corriente i que circula por un alambre conductor de radio a , como se muestra en Fig. 1.8.

Aplicando la Ecuación 1.50 de la Ley circuital de ampere, la trayectoria cerrada (circunferencia de radio r) encierra toda la corriente i , esto es:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad (1.51)$$

La parte izquierda de la integral, Ecuación 1.51, corresponde a la trayectoria circular de radio r (Fig. 1.8). Los dos vectores, densidad de flujo magnético \vec{B} y el vector diferencial de

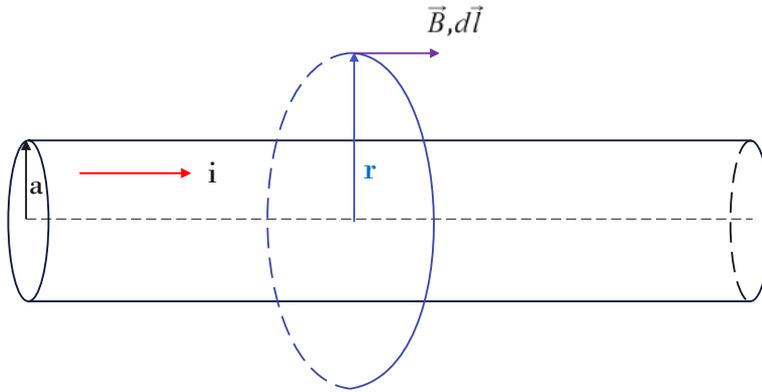


Figura 1.8: Trayectoria circular que encierra la corriente total i .

Fuente: Los autores

longitud $d\vec{l}$, se dibujan en cualquier punto de la trayectoria circular. Para obtener la dirección del vector \vec{B} , se aplica la regla de la mano derecha. El dedo pulgar indica la dirección que circula la corriente i , y los cuatro dedos de la mano abrazando al alambre, indican la dirección de \vec{B} . El vector $d\vec{l}$, indica la dirección de integración en la trayectoria circular, si en el problema no se especifica la dirección de $d\vec{l}$, es preferible utilizar la misma dirección del vector \vec{B} .

La parte derecha de la Ecuación 1.51, corresponde a la corriente total encerrada por la trayectoria circular de radio r , entonces:

$$\int_0^r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad (1.52)$$

$$\int_0^r B dl \cos 0^\circ = \mu_0 i \quad (1.53)$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \quad (1.54)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (1.55)$$

Caso 2. Cuando el contorno cerrado (circunferencia de radio r), encierra una parte de la corriente i que circula por un alambre conductor de radio a , como se muestra en la Fig. 1.9. Aplicando la Ecuación 1.50 de la Ley circuital de Ampere, la trayectoria cerrada (circunferencia de radio r , Fig. 1.9) encierra sólo una parte de la corriente i , esto es i' , entonces,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i' \quad (1.56)$$

La corriente i' corresponde únicamente al área que encierra la circunferencia de radio r , esto

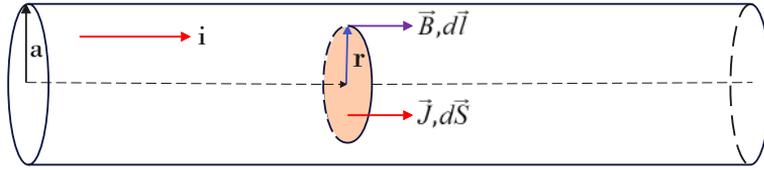


Figura 1.9: Trayectoria circular que encierra una parte de la corriente i .

Fuente: Los autores

es:

$$i' = \int_0^r \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.57)$$

reemplazando en la Ecuación 1.51, se tiene:

$$\int_0^r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_0^r \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.58)$$

destruyendo el producto punto,

$$\int_0^r B dl \cos 0^\circ = \mu_0 \int_0^r J dS \cos 0^\circ \quad (1.59)$$

$$\int_0^r B dl = \mu_0 \int_0^r J dS \quad (1.60)$$

Pero, la densidad de corriente J corresponde a la corriente total i que circula por toda el área (A) del alambre conductor de radio a , así:

$$J = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi a^2} \quad (1.61)$$

reemplazando,

$$\int_0^r B dl = \mu_0 \int_0^r \frac{i}{\pi a^2} dS \quad (1.62)$$

integrando la parte derecha,

$$\int_0^r B dl = \mu_0 \frac{i}{\pi a^2} [S]_0^r \quad (1.63)$$

S es el área que encierra la trayectoria circular de radio r (Fig.1.9), entonces:

$$\int_0^r B dl = \mu_0 \frac{i}{\pi a^2} [S]_0^r = \mu_0 \frac{i}{\pi a^2} (\pi r^2) \quad (1.64)$$

integrando la parte izquierda,

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{i}{\pi a^2} \pi r^2 \quad (1.65)$$

despejando B ,

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2} \quad (1.66)$$

1.6. Forma diferencial de la Ley Circuital de Ampere

Antes de obtener la Ley de Ampere en forma diferencial, en primer lugar, se enunciará el Teorema de Stoke: Considere una superficie S abierta cuyo límite es una curva cerrada C . El Teorema de Stoke establece que, la integral de la componente tangencial de un campo vectorial \vec{F} alrededor de C (Fig. 1.10) es igual a la componente normal del rotacional del vector \vec{F} sobre la superficie S . La Ecuación 1.67, representa el teorema de Stoke.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (1.67)$$

En resumen, el teorema de Stoke convierte una integral cerrada de línea en una integral de superficie (1.67).

Aplicando el teorema de Stoke en la Ecuación 1.50, la parte izquierda de la integral cerrada de línea se sustituye por una integral de superficie, siendo la superficie que encierra el contorno cerrado C , entonces:

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.68)$$

integrando la Ecuación 1.68, al tratarse de la misma superficie, se tiene:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.69)$$

o en palabras,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.70)$$

La Ecuación 1.69 o la Ecuación 1.70 representa la Ley circuital de Ampere en forma diferencial.

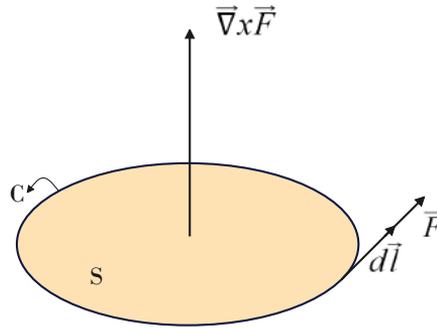


Figura 1.10: Teorema de Stoke.

Fuente: Los autores

1.7. Potencial vectorial magnético

De acuerdo con la ley circuital de Ampere (Ecuación 1.50), la integral de línea del vector de densidad de flujo magnético \vec{B} alrededor de un contorno cerrado no es cero si el contorno rodea alguna corriente. Por lo tanto, no es posible definir una función escalar auxiliar completamente análoga a la función de potencial electrostático V , a partir de la cual podría obtenerse el vector \vec{B} como su gradiente. Pero en este caso, se puede definir una función de vector auxiliar, a partir de la cual el vector \vec{B} siempre se puede obtener por diferenciación. Para entender esto, una breve digresión matemática (ESPOL 1982, p267).

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.71)$$

La Ecuación 1.71 representa el campo eléctrico en una trayectoria cerrada, si a esta ecuación se aplica el teorema de Stoke, representa el vector rotacional del campo eléctrico dentro del área del contorno cerrado, esto es:

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.72)$$

integrando,

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (1.73)$$

utilizando el vector nabra,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.74)$$

Se puede demostrar que, la Ecuación 1.74 es igual a cero, ya que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (1.75)$$

donde, V es el potencial electrostático, reemplazando en la Ecuación 1.74, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} V) = 0 \quad (1.76)$$

sacando el signo menos del paréntesis,

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0 \quad (1.77)$$

cambiando de signo,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0 \quad (1.78)$$

pero, el rotacional del gradiente de un escalar (Ecuación 1.78), utilizando las identidades vectoriales, se sabe que es igual a cero; entonces, se comprueba que el rotacional de la intensidad del campo eléctrico \vec{E} es igual a cero (Ecuación 1.74). Sin embargo, no se puede decir lo mismo con respecto al rotacional de la densidad de flujo magnético \vec{B} , ya que, la ecuación de la forma generalizada de la Ley de Ampere, representada en la Ecuación 1.69, es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.79)$$

entonces,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0 \quad (1.80)$$

por lo que, no se puede relacionar la Ecuación 1.74 con la Ecuación 1.80.

No obstante, la densidad de flujo magnético \vec{B} será diferente al gradiente del potencial escalar magnético V_m , esto es:

$$\vec{B} \neq -\vec{\nabla} V_m \quad (1.81)$$

es decir, no se pueden relacionar las ecuaciones (1.75) y (1.81).

En electrostática, se pudo usar el hecho de que $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ es siempre cero para expresar \vec{E} como el gradiente del potencial escalar electrostático V . Además, de su interpretación física, se encontró que este potencial a menudo simplifica los cálculos electrostáticos (Demarest

1998, p208).

En magnetostática, la Ley de Gauss para magnetostática, ecuación (1.82), proporciona una situación análoga.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.82)$$

Como \vec{B} tiene divergencia cero en todos los puntos, entonces \vec{B} se puede representar como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.83)$$

donde, \vec{A} representa el potencial vectorial magnético, que se mide en unidades de webers por metro (Wb/m).

reemplazando la Ecuación 1.83 en la Ecuación 1.82, se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (1.84)$$

entonces, utilizando las identidades vectoriales, se sabe que la divergencia del rotacional de un vector (1.84), es igual a cero. De esta manera queda demostrada la ecuación.

Si se reemplaza la Ecuación 1.83 en la Ecuación 1.69, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (1.85)$$

pero, utilizando las identidades vectoriales,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \quad (1.86)$$

entonces,

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.87)$$

Ahora se utilizará para el campo \vec{A} , un potencial que tenga la divergencia nula. Suponer que \vec{A}' cumpla con el rotacional de \vec{A}' sea el campo magnético \vec{B} , esto es:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad (1.88)$$

Si se le añade a \vec{A}' el gradiente de una función escalar, considerando una transformación de Gauge, que es una transformación de algún grado de libertad interno, que no modifica ninguna propiedad observable física, de tal forma que (Quintero N. 2009):

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} \Psi \quad (1.89)$$

\vec{A} sigue siendo función potencial vector, porque se le está añadiendo a \vec{A}' un gradiente y el rotacional de un gradiente es cero de acuerdo a las identidades vectoriales. Por lo que, al reemplazar la Ecuación 1.89 en la Ecuación 1.88, se tiene:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}' + \vec{\nabla} \Psi) \quad (1.90)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Psi) \quad (1.91)$$

pero, por la identidad vectorial,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Psi) = 0 \quad (1.92)$$

Por lo que, reemplazando la Ecuación 1.92 en la Ecuación 1.91, se llega a la Ecuación 1.88. Entonces, se puede suponer que siempre se va a encontrar una función cuyo gradiente sumado a \vec{A}' va a dar un campo \vec{A} (Ecuación 1.89) cuya divergencia sea nula, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.93)$$

En la Ecuación 1.89, a cada término se le aplica la divergencia, así:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi) \quad (1.94)$$

Para que la divergencia de \vec{A} sea nula en (1.94), la divergencia de \vec{A}' tiene que ser igual a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi) \quad (1.95)$$

simplificando,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\vec{\nabla}^2 \Psi \quad (1.96)$$

Entonces, reemplazando la Ecuación 1.93 en la Ecuación 1.87, se obtiene:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.97)$$

cambiando de signos,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.98)$$

En coordenada rectangulares, el laplaciano vector de la Ecuación 1.98, es:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{a}_x + \nabla^2 A_y \hat{a}_y + \nabla^2 A_z \hat{a}_z \quad (1.99)$$

reemplazando la Ecuación 1.98 en la Ecuación 1.99, se tiene:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad (1.100)$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad (1.101)$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (1.102)$$

En fórmulas anteriores, se sabe que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (1.103)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (1.104)$$

reemplazando \vec{E} en la divergencia, se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (1.105)$$

simplificando,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (1.106)$$

La solución de la Ecuación 1.106 para determinar el potencial electrostático V en el punto p a una distancia r del diferencial de volumen dv (Fig.1.11) es V_p , entonces,

$$V_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_v \frac{\rho_v dv}{r} \quad (1.107)$$

Considerando la solución de la Ecuación 1.107 en coordenada rectangulares, es similar a la solución del potencial vectorial magnético A_x , A_y y A_z de las ecuaciones 1.100, 1.101 y 1.102, mostradas en las ecuaciones 1.108, 1.109 y 1.110, entonces,

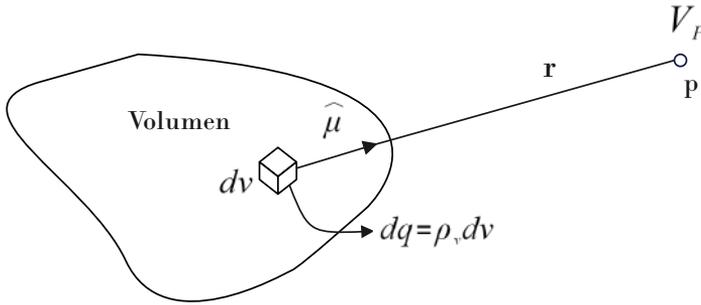


Figura 1.11: Potencial V_p debido a una distribución ρ_v .

Fuente: Los autores

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_x dv}{r} \quad (1.108)$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_y dv}{r} \quad (1.109)$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_z dv}{r} \quad (1.110)$$

En forma general, para una distribución volumétrica de la densidad de corriente \vec{J} , como se muestra en la Fig. 1.12, el vector \vec{A} , tiene la misma dirección y sentido del vector \vec{J} . La solución del potencial vectorial magnético \vec{A} en el punto p a una distancia r desde el diferencial de volumen dv , es la que se muestra en la Ecuación 1.111, esto es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J} dv}{r} \quad (1.111)$$

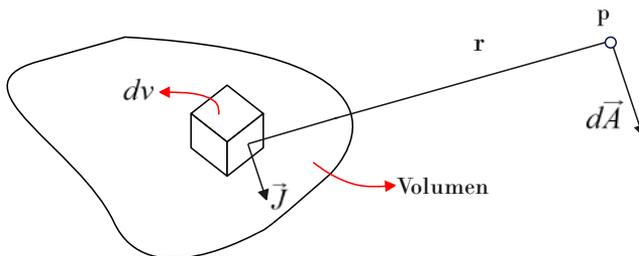


Figura 1.12: Potencial vectorial magnético \vec{A} , para una distribución volumétrica de \vec{J} .

Fuente: Los autores

Para un alambre conductor por el cual circula una intensidad de corriente I , como se muestra en la Fig. 1.13, el vector \vec{A} , tiene la misma dirección y sentido del vector \vec{J} , y este a su

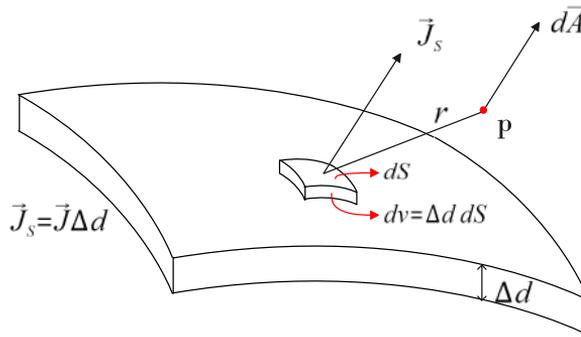


Figura 1.14: Potencial vectorial magnético \vec{A} , para una distribución superficial de \vec{J}_s .

Fuente: Los autores

$$\varphi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{1.116}$$

1.8. Problemas resueltos

Problema 1.1 Un alambre conductor de forma circular de radio a por el cual circula una corriente I , como se muestra en la Fig. 1.15. Calcular la densidad de flujo magnético \vec{B} en el punto p .

Solución:

Para calcular la densidad de flujo magnético en el punto p , debido a la corriente continua I que circula por el alambre de forma circular de radio a , se debe utilizar la ecuación de la Ley de Biot-Savart. En la Fig. 1.15 se selecciona un diferencial de longitud escalar dl sobre el alambre conductor que lleva la corriente I , este diferencial de longitud, produce un diferencial de densidad de flujo magnético $d\vec{B}_p$ en el punto p a una distancia R , como se muestra en la Fig. 1.16.

El punto p está en un plano tridimensional, por lo que, existen tres componentes, con respecto a x , y y z . En primer lugar, con respecto a la componente x y y :

$dB_{px} = 0$ y $dB_{py} = 0$, por simetría, debido a que es un alambre circular de corriente constante y el punto p está localizado en el centro del círculo a una distancia z .

En segundo lugar, con respecto a la componente z , en el triángulo rectángulo bcp de color celeste,

$$dB_{pz} = dB_p \text{ sen } \alpha \tag{1.117}$$

utilizando la ecuación de la Ley de Biot-Savart,

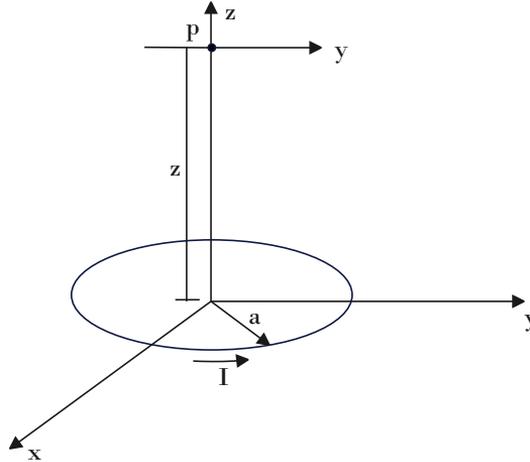


Figura 1.15: Alambre circular de corriente I .

Fuente: Los autores

$$d\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{\mu}}{R^2} \quad (1.118)$$

Sobre el diferencial escalar dl , se dibuja el vector $d\vec{l}$ en la misma dirección que circula la corriente I , en este caso se dibuja en forma tangencial a la circunferencia de radio a , el vector unitario $\hat{\mu}$ va dirigido desde el dl hasta el punto p que se encuentra a una distancia R . Aplicando la regla de la mano derecha al producto cruz entre el vector $d\vec{l}$ y el vector unitario $\hat{\mu}$, se obtiene el vector $d\vec{B}_p$ dibujado en el punto p . Destruyendo el producto cruz en la Ecuación 1.118, se tiene:

$$dB_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sen 90^\circ}{R^2} \quad (1.119)$$

simplificando,

$$dB_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} \quad (1.120)$$

Al reemplazar la Ecuación 1.120 en la Ecuación 1.118, se tiene:

$$dB_{pz} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sen \alpha}{R^2} \quad (1.121)$$

pero, en el triángulo rectángulo poe de color amarillo,

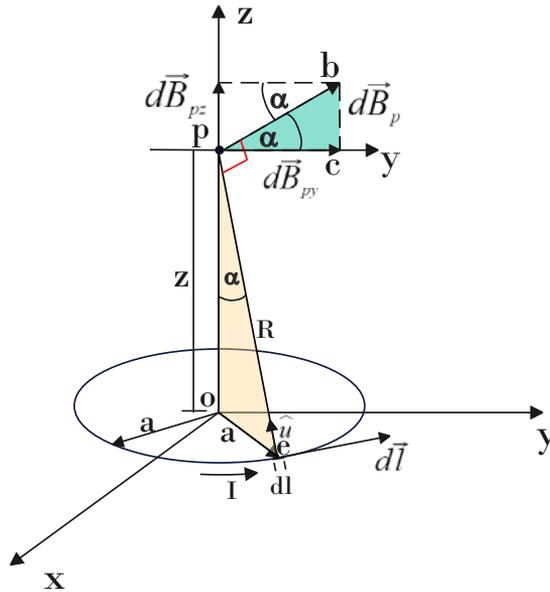


Figura 1.16: El diferencial dl produce un \vec{dB}_p .

Fuente: Los autores

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{R} \quad (1.122)$$

y,

$$R = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (1.123)$$

reemplazando en la Ecuación 1.121,

$$dB_{pz} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl a}{R^3} \quad (1.124)$$

integrando,

$$\int dB_{pz} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl a}{R^3} \quad (1.125)$$

$$B_{pz} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl a}{R^3} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R^3} \oint_C dl = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R^3} 2\pi a \quad (1.126)$$

$$B_{pz} = \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.127)$$

$$B_{pz} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.128)$$

La magnitud de la densidad de flujo magnético total B_T en el punto p , es:

$$B_T = \sqrt{B_{px}^2 + B_{py}^2 + B_{pz}^2} = \sqrt{0 + 0 + B_{pz}^2} = B_{pz} \quad (1.129)$$

$$B_T = B_{pz} \quad (1.130)$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.131)$$

El ángulo θ_T con respecto al plano xy , es:

$$\theta_T = \tan^{-1} \frac{B_z}{B_x} = \tan^{-1} \infty = 90^\circ \quad (1.132)$$

$$\theta_T = \tan^{-1} \frac{B_z}{B_y} = \tan^{-1} \infty = 90^\circ \quad (1.133)$$

Entonces, el vector densidad de flujo magnético \vec{B}_T , está sobre el eje z , tal como se muestra en la Fig. 1.17, esto es:

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{a}_z \quad (1.134)$$

La Ecuación 1.134 representa la densidad de flujo magnético para una espira.

Problema 1.2 Considerando el problema 1.1, en el que se determinó la densidad de flujo magnético B_T para un solo alambre circular o también llamado espira. A partir de este resultado, determinar la densidad de flujo magnético en el punto p para n espiras.

Solución:

Los valores de la densidad de flujo magnético escalar B_T y vectorial \vec{B}_T en el punto p , producido por una sola espira por la cual circula una corriente constante I , se muestra en

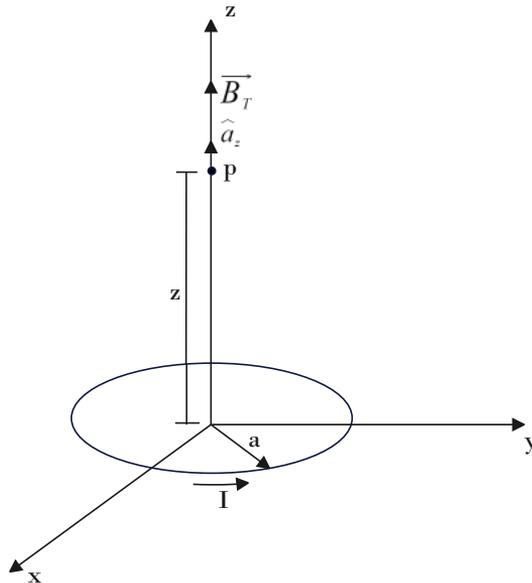


Figura 1.17: Dirección del vector \vec{B}_T .
Fuente: Los autores

las ecuaciones 1.131 y 1.134. Partiendo de estos resultados, el valor de la densidad de flujo magnético para varias espiras, se debe multiplicar por n espiras en la Ecuación 1.131, esto es:

$$B_T = \frac{n\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.135)$$

Para resolver el problema, se parte de la Fig.1.17 en la que se colocan N espiras en una longitud L en forma cilíndrica, convirtiéndose en un solenoide y, realizando un corte transversal. La gráfica se muestra en Fig. 1.18.

El solenoide de la Fig. 1.18 tiene N espiras por unidad de longitud L , representado por n , esto es:

$$n = \frac{N}{L} \quad (1.136)$$

Pero, si se considera un anillo elemental de anchura dz' , se debe aplicar una regla de tres, para determinar las n espiras que existen en el diferencial de longitud dz' , así: en la longitud L existen N espiras y, en una longitud dz' cuántas n espiras existen, entonces,

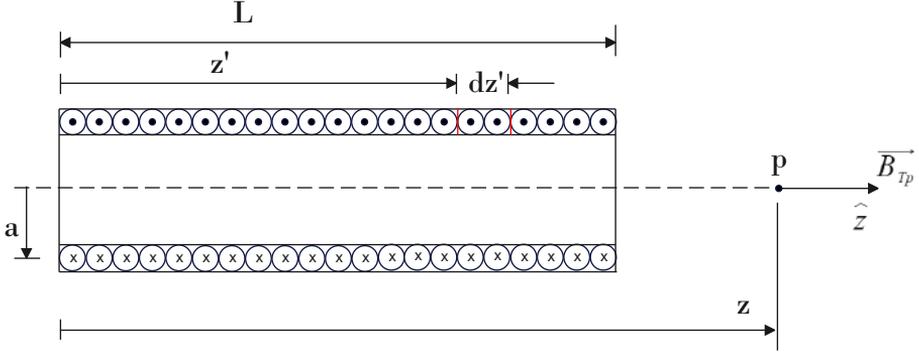


Figura 1.18: El solenoide de N espiras.

Fuente: Los autores

$$n = \frac{N}{L} dz' \quad (1.137)$$

reemplazando en la Ecuación 1.135, y sustituyendo dB_T por dB_{Tp} ya que se trata de la densidad de flujo magnético total del solenoide en el punto p , así:

$$dB_{Tp} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \frac{N}{L} dz' \quad (1.138)$$

Pero, de acuerdo a la Fig.1.18, el dz' está ubicado a una distancia $(z - z')$ del eje del solenoide al punto p , entonces, la distancia z de la Ecuación 1.138, se reemplaza por $z - z'$, así:

$$dB_{Tp} = \frac{\mu_0 I a^2}{2[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \frac{N}{L} dz' \quad (1.139)$$

Integrando la Ecuación 1.139,

$$B_{Tp} = \int_z^{z-L} \frac{\mu_0 I a^2 N}{2L [(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} dz' \quad (1.140)$$

sacando las constantes de integración,

$$B_{Tp} = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \int_z^{z-L} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + a^2]^{3/2}} \quad (1.141)$$

Integrando por partes la Ecuación 1.141,

$$u = z - z' \quad (1.142)$$

$$du = -dz' \quad (1.143)$$

$$B_{Tp} = -\frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \int \frac{du}{[u^2 + a^2]^{3/2}} \quad (1.144)$$

integrando,

$$B_{Tp} = -\frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \left\{ \frac{u}{a^2 [u^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \quad (1.145)$$

reemplazando la variable u por $z - z'$ en la Ecuación 1.145, y modificando los límites de integración desde 0 hasta L , ya que, desde z hasta $z-L$, representa la longitud L del solenoide, entonces:

$$B_{Tp} = -\frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \left\{ \frac{z - z'}{a^2 [(z - z')^2 + a^2]^{1/2}} \right\}_0^L \quad (1.146)$$

reemplazando los límites superior e inferior en la variable de integración z' , se tiene:

$$B_{Tp} = -\frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \left\{ \frac{z - L}{a^2 [(z - L)^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{z - 0}{a^2 [(z - 0)^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \quad (1.147)$$

reduciendo términos,

$$B_{Tp} = -\frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \left\{ \frac{z - L}{a^2 [(z - L)^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{z}{a^2 [z^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \quad (1.148)$$

introduciendo el signo menos (-) dentro de la llave,

$$B_{Tp} = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2L} \left\{ -\frac{z - L}{a^2 [(z - L)^2 + a^2]^{1/2}} + \frac{z}{a^2 [z^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \quad (1.149)$$

sacando factor común,

$$B_{Tp} = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2L a^2} \left\{ \frac{z}{[z^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{z - L}{[(z - L)^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \quad (1.150)$$

simplificando valores,

$$B_{pT} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \left\{ \frac{z}{[z^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{z-L}{[(z-L)^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \quad (1.151)$$

Finalmente, la Ecuación 1.151 representa la magnitud de la densidad de flujo magnético en el punto p , situado a una distancia z en el eje del solenoide, mientras que, la Ecuación 1.152 representa la densidad de flujo magnético en el punto p en forma vectorial, esto es:

$$\vec{B}_{Tp} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \left\{ \frac{z}{[z^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{z-L}{[(z-L)^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \hat{z} \quad (1.152)$$

Problema 1.3 A partir del problema 1.2, determinar la densidad de flujo magnético B_T en el centro del solenoide, como se muestra en la Fig.1.19.

Solución:

Si se considera un anillo elemental de anchura dz en la Fig. 1.19, se debe aplicar una regla de tres, para determinar las n espiras que existen en el diferencial de longitud dz , así: en la longitud L existen N espiras y, en una longitud dz cuántas n espiras existen, entonces,

$$n = \frac{N}{L} dz \quad (1.153)$$

reemplazando en la Ecuación 1.135, se tiene:

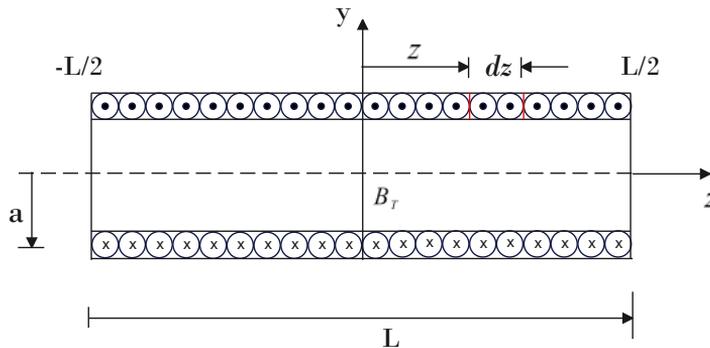


Figura 1.19: Densidad de flujo magnético B_T en el centro del solenoide.

Fuente: Los autores

$$dB_T = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \frac{N}{L} dz \quad (1.154)$$

integrando,

$$B_T = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2 L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2 N}{2 L} \int_0^{L/2} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.155)$$

simplificando términos,

$$B_T = \frac{\mu_0 I a^2 N}{L} \int_0^{L/2} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.156)$$

la integral de la parte derecha de la Ecuación 1.156, es:

$$B_T = \frac{\mu_0 I a^2 N}{L} \left[\frac{1}{a^2} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^{L/2} \quad (1.157)$$

simplificando términos,

$$B_T = \frac{\mu_0 I N}{L} \left[\frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^{L/2} \quad (1.158)$$

Evaluando en los límites superior e inferior, se tiene:

$$B_T = \frac{\mu_0 I N}{L} \left[\frac{L/2}{\left(\frac{L^2}{4} + a^2\right)^{1/2}} \right] = \frac{\mu_0 I N}{2} \left[\frac{1}{\left(\frac{L^2+4a^2}{4}\right)^{1/2}} \right] \quad (1.159)$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I N}{2} \left[\frac{2}{(L^2 + 4a^2)^{1/2}} \right] \quad (1.160)$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I N}{(L^2 + 4a^2)^{1/2}} \quad (1.161)$$

Finalmente, la Ecuación 1.161 representa la densidad de flujo magnético en el centro del solenoide.

Si el solenoide es de longitud infinita, esto es, $L \gg a$, entonces el valor de a es despreciable con respecto al valor L , así, la Ecuación 1.161 quedará reducida a:

$$B_T = \frac{\mu_0 I N}{(L^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I N}{L} \quad (1.162)$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I N}{L} \quad (1.163)$$

pero, $n = \frac{N}{L}$, entonces,

$$B_T = \mu_0 n I \quad (1.164)$$

La Ecuación 1.164 representa la densidad del flujo magnético en el interior del solenoi-

de cuando se considera de longitud infinita y las bobinas unidas, entonces las líneas de la densidad de flujo magnético, solo existen en el interior del solenoide, mientras que, en el exterior del solenoide son cero.

Densidad de flujo magnético B en el interior de un toroide. Si al solenoide de la Fig.1.19 de longitud infinita se le forma un círculo, entonces se convierte en un toroide, tal como se muestra en la Fig.1.20.

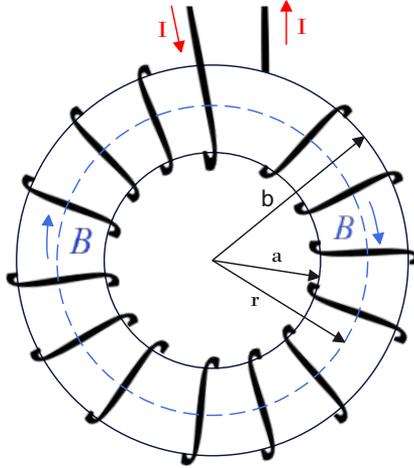


Figura 1.20: Densidad de flujo magnético B en el interior del toroide.

Fuente: Los autores

Al reemplazar en la Ecuación 1.164 el número de espiras por unidad de longitud n , por N/L , se tiene (Barco H. 2001)

$$B_T = \frac{\mu_0 I N}{L} \quad (1.165)$$

Siendo B_T , la densidad de flujo magnético total en el interior del toroide representado en la Fig.1.20 por B , y la longitud L se reemplaza por la longitud de la circunferencia media del radio del toroide de valor $2\pi r$, entonces

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \quad (1.166)$$

Problema 1.4 Considere el cilindro de longitud infinita que tiene una densidad de corriente \vec{j} , como se muestra en la Fig.1.21. Usando el potencial vectorial magnético \vec{A} , determinar la densidad de flujo magnético \vec{B} , dentro y fuera del cilindro.

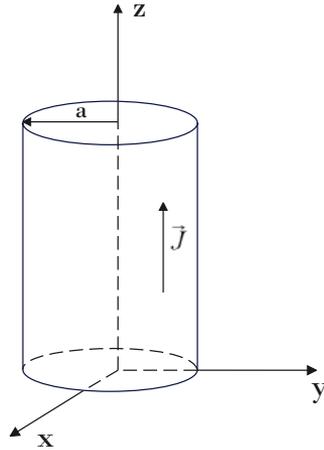


Figura 1.21: Cilindro de radio a con densidad de corriente J .
Fuente: Los autores

Solución:

Para $r < a$

Para determinar el potencial vectorial magnético \vec{A} en el interior del cilindro de la Fig. 1.21, se debe utilizar la Ecuación 1.98, donde, la base del cilindro está ubicada en el plano xy , y la longitud está a lo largo del eje z , entonces, el potencial vectorial magnético está en la dirección del eje z , así:

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{1.167}$$

Además, el potencial vectorial magnético \vec{A}_z , siempre va a estar en la misma dirección del vector densidad de corriente \vec{J} . Para resolver la ecuación diferencial 1.167, el vector \vec{A}_z se debe dibujar a una distancia r del eje del cilindro, y el Laplaciano $\nabla^2 A_z$ en coordenadas cilíndricas de la Fig. 1.22, es:

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \tag{1.168}$$

La densidad de corriente \vec{J} con respecto a la longitud z y al ángulo φ , es constante, entonces, las derivadas parciales con respecto a z y a φ , son iguales a cero, esto es:

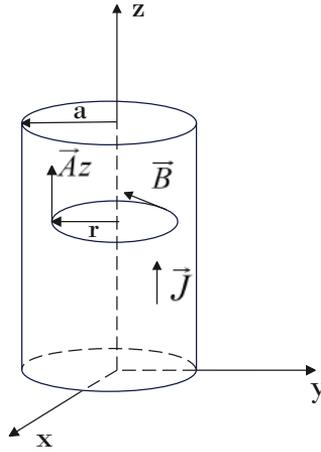


Figura 1.22: Calcular \vec{B} a partir de \vec{A} , para $r < a$.

Fuente: Los autores

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.169)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0 \quad (1.170)$$

entonces, la Ecuación 1.168 queda como se muestra en la Ecuación 1.171, así:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \quad (1.171)$$

Reemplazando la Ecuación 1.171 en la Ecuación 1.167, se tiene,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_0 J_z \quad (1.172)$$

despejando la derivada parcial con respecto a r ,

$$\partial \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_0 r J_z \partial r \quad (1.173)$$

integrando,

$$\int \partial \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \int -\mu_0 r J_z \partial r \quad (1.174)$$

Como se trata de una integral indefinida, se pone una constante de integración C_1 , esto es:

$$r \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{2} \mu_0 r^2 J_z + C_1 \quad (1.175)$$

Nuevamente, despejando e integrando y añadiendo una segunda constante de integración C_2 , se obtiene el potencial vectorial magnético A_z en la Ecuación 1.177, así:

$$\int \partial A_z = \int \left(-\frac{1}{2} \mu_0 r J_z + \frac{C_1}{r} \right) \partial r \quad (1.176)$$

$$A_z = -\frac{1}{4} \mu_0 r^2 J_z + C_1 \ln r + C_2 \quad (1.177)$$

Para determinar la densidad de flujo magnético \vec{B} a partir del potencial vectorial magnético \vec{A} , se utiliza la Ecuación 1.83, esto es::

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.178)$$

El rotacional de \vec{A} , en coordenadas cilíndricas, es:

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] + \hat{\varphi} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{z} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \quad (1.179)$$

Como ya se dijo anteriormente que, la densidad de corriente \vec{J} con respecto a la longitud z y al ángulo φ , es constante. Además, A_z está en la dirección z , entonces las derivadas parciales con respecto a z y a φ , son iguales a cero, así:

$$\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial A_r}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.180)$$

De tal forma que, la Ecuación 1.179 se reduce a:

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\varphi} \left(-\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \quad (1.181)$$

Reemplazando la Ecuación 1.181 en la Ecuación 1.83, se tiene:

$$\vec{B} = \hat{\varphi} \left(-\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \quad (1.182)$$

Al reemplazar la ecuación (1-86) en la Ecuación 1.182, se obtiene:

$$\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{4} \mu_0 r^2 J_z + C_1 \ln r + C_2 \right) \hat{\varphi} \quad (1.183)$$

Finalmente, derivando con respecto a r , se obtiene la densidad de flujo magnético \vec{B} en la

dirección del ángulo $\widehat{\varphi}$, tal como se muestra en la Fig. 1.22, esto es:

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 r J_z}{2} - \frac{C_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \widehat{\varphi} \quad (1.184)$$

Para $r > a$

Considerando la Fig. 1.23, se dibuja el vector \vec{A}_z en el exterior del cilindro a una distancia r del eje, como se muestra en la Fig. 1.23.

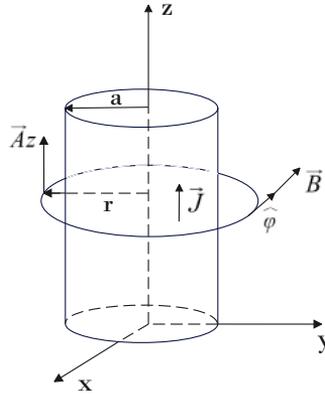


Figura 1.23: Calcular \vec{B} a partir de \vec{A}_z , para $r > a$.

Fuente: Los autores

Para determinar el potencial vectorial magnético \vec{A}_z fuera del cilindro (Fig. 1.23), se debe utilizar la Ecuación 1.167 igualado a cero, ya que fuera del cilindro no existe densidad de corriente, esto es:

$$\nabla^2 A_z = 0 \quad (1.185)$$

De tal manera que, siguiendo el mismo procedimiento anterior para $r < a$, la Ecuación 1.185 queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.186)$$

despejando,

$$\partial \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.187)$$

integrando y añadiendo la constante de integración indefinida C_3 , se tiene:

$$\int \partial \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.188)$$

$$r \frac{\partial A_z}{\partial r} = C_3 \quad (1.189)$$

Volviendo a integrar, y escribiendo la nueva constante de integración indefinida C_4 , se tiene como resultado el potencial vectorial magnético A_z , tal como se muestra en la Ecuación 1.191, así:

$$\int \partial A_z = \int \frac{C_1}{r} \partial r \quad (1.190)$$

$$A_z = C_3 \ln r + C_4 \quad (1.191)$$

Para determinar la densidad de flujo magnético \vec{B} a partir del potencial vectorial magnético \vec{A} , se utiliza la Ecuación 1.83, esto es,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.192)$$

Para el rotacional de \vec{A} , en coordenadas cilíndricas, se utiliza la Ecuación 1.179 y, siguiendo el mismo procedimiento para $r < a$, se obtiene la Ecuación 1.193, así:

$$\vec{B} = \widehat{\varphi} \left(-\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \quad (1.193)$$

Al reemplazar la Ecuación 1.191 en la Ecuación 1.193, se tiene:

$$\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial r} (C_3 \ln r + C_4) \widehat{\varphi} \quad (1.194)$$

derivando con respecto al radio, se obtiene la densidad de flujo magnético \vec{B} en la dirección del ángulo $\widehat{\varphi}$, como se muestra en la Ecuación 1.195, así:

$$\vec{B} = -\frac{C_3}{r} \widehat{\varphi} \quad (1.195)$$

Capítulo II

MAGNETOSTÁTICA EN PRESENCIA DE MATERIALES MAGNÉTICOS

2.1. Torque en un lazo de corriente circular en un campo magnético uniforme

Por el alambre circular de radio a , circula una corriente constante I , que se encuentra dentro de una densidad de flujo magnético externo \vec{B} . Por conveniencia, si se descompone el vector \vec{B} en la componente \vec{B}_n normal a la superficie de la espira (ver Fig. 2.1) y la componente \vec{B}_p paralela a ella (ver Fig. 2.2). La componente normal de la densidad de flujo magnético externo uniforme \vec{B}_n , está entrando en forma perpendicular al plano que contiene al alambre, tal como se muestra en la Fig. 2.1. En el alambre se selecciona un diferencial de longitud dl , donde el número de cargas móviles por unidad de volumen sea N , y su velocidad promedio \vec{v} (ESPOL 1982, P298).

La fuerza magnética sobre todas las cargas que se mueven dentro de un volumen elemental dV es,

$$d\vec{F} = NQ \vec{v} \times \vec{B}_n dV \quad (2.1)$$

En el caso de un conductor delgado de sección transversal de área ΔS , la Ecuación 2.1 se modifica, de tal forma que, el diferencial de volumen dV , se expresa como el volumen del cilindro (conductor delgado) $dV = \Delta S dl$, entonces,

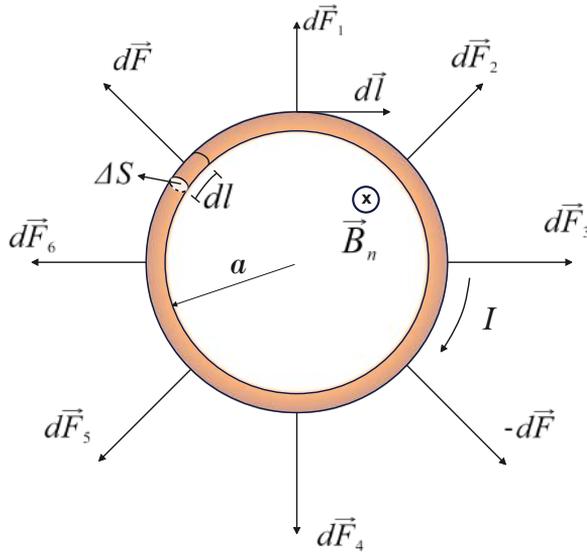


Figura 2.1: Fuerza total igual a cero sobre el alambre circular de corriente I .

Fuente: Los autores

$$d\vec{F} = NQ \vec{v} dl \Delta S \times \vec{B}_n \quad (2.2)$$

pero, el vector $d\vec{l}$ tiene la misma dirección que circula la corriente I , además, como el alambre es de forma circular, el vector $d\vec{l}$ es tangente a la trayectoria circular del alambre, y el vector velocidad \vec{v} , tiene la misma dirección del $d\vec{l}$, entonces, de la Ecuación 2.2 se puede escribir como se muestra en la Ecuación 2.3, así:

$$d\vec{F} = NQv d\vec{l} \Delta S \times \vec{B}_n \quad (2.3)$$

pero, NQv representa la densidad de corriente J , reemplazando en la Ecuación 2.3, se tiene la Ecuación 2.4, esto,

$$d\vec{F} = J\Delta S d\vec{l} \times \vec{B}_n \quad (2.4)$$

pero,

$$I = J\Delta S \quad (2.5)$$

reemplazando en la Ecuación 2.4, se obtiene el diferencial de fuerza $d\vec{F}$ en función de la corriente I , como se muestra en la Ecuación 2.6, así:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}_n \quad (2.6)$$

El vector diferencial de fuerza magnética $d\vec{F}$ de la Ecuación 2.6 se obtiene aplicando la regla de la mano derecha entre el vector $d\vec{l}$ y el vector \vec{B}_n , como se muestra en la Fig. 2.1, integrando todo el alambre circular, se obtiene una integral cerrada de línea, esto es,

$$\vec{F} = \oint_C d\vec{F} \quad (2.7)$$

reemplazando, finalmente se obtiene la fuerza total \vec{F} que produce la densidad de flujo magnético uniforme \vec{B}_n sobre el alambre circular por el que circula una corriente constante I , como se muestra en la Ecuación 2.8, así:

$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B}_n \quad (2.8)$$

La fuerza total que actúa sobre el alambre es igual a cero ($F = 0$), que se demuestra a continuación, si se toma como ejemplo cuatro pares de diferenciales de fuerza magnética: $d\vec{F}_1$ es igual en magnitud y dirección al vector $d\vec{F}_4$, pero sentidos opuestos, entonces, se anulan. $d\vec{F}_2$ es igual en magnitud y dirección al vector $d\vec{F}_5$, pero sentidos opuestos, entonces, se anulan. $d\vec{F}_3$ es igual en magnitud y dirección al vector $d\vec{F}_6$, pero sentidos opuestos, entonces, se anulan. $d\vec{F}$ es igual en magnitud y dirección al vector $-d\vec{F}$, pero sentidos opuestos, entonces, se anulan.

En conclusión, la componente normal \vec{B}_n solo tiende a deformar el contorno (es decir, a aumentar su radio). Por otro lado, la componente \vec{B}_p es evidente que tiende a rotar el contorno alrededor del eje OO' en la dirección indicada de la Fig. 2.2; esto es, si la componente paralela del vector densidad de flujo magnético \vec{B}_p atraviesa la espira en forma vertical, en el diferencial de longitud dl se va a producir un diferencial de fuerza $d\vec{F}$ en forma perpendicular de la superficie del contorno del alambre hacia afuera, debido al producto cruz entre los vectores $d\vec{l}$ y \vec{B}_p en la Ecuación 2.9, esto es:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}_p \quad (2.9)$$

El diferencial de fuerza $d\vec{F}$ de la Ecuación 2.9, produce un diferencial de torque $d\vec{\tau}_1$, como se muestra en la Ecuación 2.10, así :

$$d\vec{\tau}_1 = d\vec{F} a \text{ sen } \alpha \quad (2.10)$$

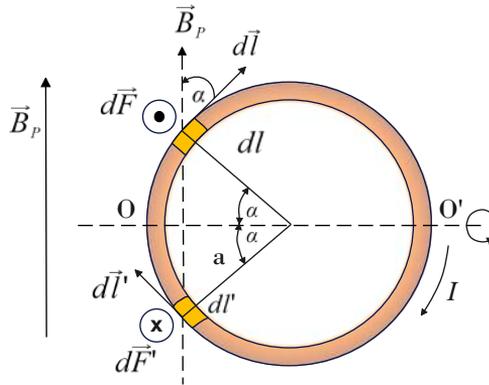


Figura 2.2: Torque magnético alrededor del eje OO'
Fuente: (ESPOL 1982, P299)

De igual manera, si la componente paralela del vector densidad de flujo magnético \vec{B}_p atraviesa la espira en forma vertical, en el diferencial de longitud dl' se va a producir un diferencial de fuerza $d\vec{F}'$ en forma perpendicular de la superficie del contorno del alambre hacia adentro, debido al producto cruz entre los vectores $d\vec{l}'$ y \vec{B}_p en la Ecuación 2.11, esto es:

$$d\vec{F}' = I d\vec{l}' \times \vec{B}_p \tag{2.11}$$

El diferencial de fuerza $d\vec{F}'$ de la Ecuación 2.11, produce un diferencial de torque $d\vec{\tau}_2$, como se muestra en la Ecuación 2.12, así:

$$d\vec{\tau}_2 = d\vec{F}' a \text{sen } \alpha \tag{2.12}$$

Entonces, el torque total $d\vec{\tau}$ producido sobre el eje OO' de la espira, es igual a la suma de los torques $d\vec{\tau}_1$ y $d\vec{\tau}_2$, esto es:

$$d\vec{\tau} = d\vec{\tau}_1 + d\vec{\tau}_2 \tag{2.13}$$

reemplazando la Ecuación 2.10 y 2.12 en la Ecuación 2.13, se tiene:

$$d\vec{\tau} = d\vec{F} a \text{sen } \alpha + d\vec{F}' a \text{sen } \alpha \tag{2.14}$$

pero, al reemplazar el $d\vec{F}$ de la Ecuación 2.9, y el $d\vec{F}'$ de la Ecuación 2.11, en la Ecuación 2.14, se tiene:

$$d\vec{\tau} = \left(I d\vec{l} \times \vec{B}_p \right) a \operatorname{sen} \alpha + \left(I d\vec{l}' \times \vec{B}_p \right) a \operatorname{sen} \alpha \quad (2.15)$$

destruyendo el producto cruz,

$$d\tau = \left(I dl B_p \right) a \operatorname{sen} \alpha + \left(I dl' B_p \right) a \operatorname{sen} \alpha \quad (2.16)$$

destruyendo paréntesis,

$$d\tau = aI dl B_p \operatorname{sen}^2 \alpha + aI dl' B_p \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (2.17)$$

antes que nada, en la figura 2.3 el diferencial de arco dl , es:

$$dl = a d\alpha \quad (2.18)$$

de igual manera, en la Fig.2.3 el diferencial de arco dl' , es:

$$dl' = a d\alpha \quad (2.19)$$

reemplazando en la Ecuación 2.17, se tiene

$$d\tau = aI a d\alpha B_p \operatorname{sen}^2 \alpha + aI a d\alpha B_p \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (2.20)$$

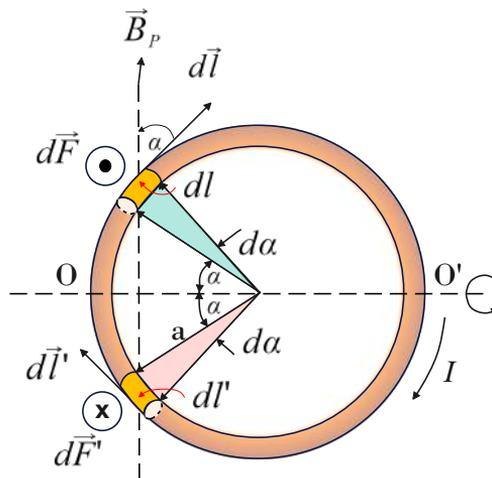


Figura 2.3: Segmentos de arco dl y dl'

Fuente: Los autores

simplificando,

$$d\tau = 2 I a^2 B_p \text{sen}^2 \alpha \, d\alpha \quad (2.21)$$

integrando,

$$\tau = \int_0^\pi 2I a^2 B_p \text{sen}^2 \alpha \, d\alpha = 2I a^2 B_p \int_0^\pi \text{sen}^2 \alpha \, d\alpha = 2I a^2 B_p \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) d\alpha \quad (2.22)$$

$$\tau = 2I a^2 B_p \int_0^\pi \frac{1}{2} d\alpha - 2I a^2 B_p \int_0^\pi \frac{1}{2} \cos 2\alpha \, d\alpha \quad (2.23)$$

$$\tau = I a^2 B_p \int_0^\pi d\alpha - I a^2 B_p \int_0^\pi \cos 2\alpha \, d\alpha \quad (2.24)$$

$$\tau = I a^2 B_p [\alpha]_0^\pi - I a^2 B_p \left[\frac{1}{2} \text{sen } 2\alpha \right]_0^\pi \quad (2.25)$$

$$\tau = I a^2 B_p \pi - I a^2 B_p \frac{1}{2} (\text{sen } 2\pi - \text{sen } 0) \quad (2.26)$$

$$\tau = I \pi a^2 B_p \quad (2.27)$$

En el triángulo rectángulo de la Fig. 2.4, la densidad de flujo magnético B_p en forma escalar, es:

$$B_p = B \text{sen } \theta \quad (2.28)$$

reemplazando en la Ecuación 2.27,

$$\tau = I \pi a^2 B \text{sen } \theta \quad (2.29)$$

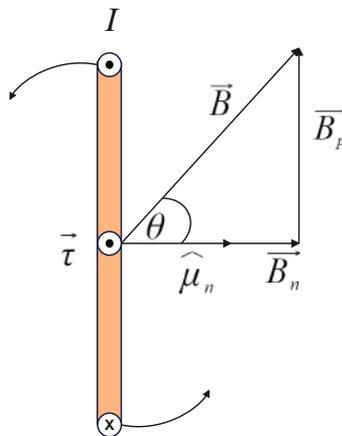


Figura 2.4: Torque de la fuerza magnética que tiende a alinear \vec{B} y $\hat{\mu}_n$

Fuente: Los autores

Sin embargo, la Ecuación 2.29 representa la magnitud del torque de la Fig. 2.4, donde, $\widehat{\mu}_n$ es el vector unitario normal sobre la superficie del área S que encierra el alambre circular, entonces, escribiendo en forma vectorial, se tiene:

$$\vec{\tau} = I\pi a^2 \widehat{\mu}_n \times \vec{B} \quad (2.30)$$

pero, πa^2 es el área S que describe la espira circular, así:

$$S = \pi a^2 \quad (2.31)$$

Al multiplicar la superficie escalar S por el vector unitario normal $\widehat{\mu}_n$, se tiene entonces, el vector superficie \vec{S} , esto es:

$$\vec{S} = S\widehat{\mu}_n \quad (2.32)$$

reemplazando en la Ecuación 2.30,

$$\vec{\tau} = I\vec{S} \times \vec{B} \quad (2.33)$$

pero, la corriente I multiplicado por el área \vec{S} , representa el vector momento dipolar magnético \vec{m} , esto es:

$$\vec{m} = I\vec{S} \quad (2.34)$$

de tal modo que, el torque es:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (2.35)$$

La Ecuación 2.35 representa el torque que experimenta el lazo en presencia de un campo magnético (específicamente, densidad de flujo magnético \vec{B}); mientras que, \vec{m} representa el momento de dipolo magnético de un contorno de corriente.

2.2. Potencial vectorial magnético de un lazo de corriente elemental y de un agregado de lazo. vector de magnetización

2.2.1. Caso de un lazo de corriente elemental

Se considera una espira de forma circular de radio a por la que circula una corriente de intensidad I , tal como se muestra en la Fig.2.5. Para determinar el potencial vectorial magnético \vec{A} en el punto p , se utiliza la Ecuación 2.36, esto es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_I \frac{d\vec{l}}{R} \quad (2.36)$$

En la espira circular, se selecciona un diferencial de longitud escalar dl , este segmento de corriente circular, produce un diferencial de potencial vectorial magnético $d\vec{A}$ en el punto p a una distancia r del centro de la espira, donde r es mucho mayor que el radio a , R es la distancia que existe desde el diferencial escalar dl hasta el punto p , el vector $d\vec{l}$ es tangente a la trayectoria circular y está en la misma dirección que circula la corriente I , el vector momento de dipolo magnético \vec{m} , es perpendicular de la superficie que describe el lazo circular de radio a hacia afuera. Finalmente, el vector diferencial de potencial vectorial magnético $d\vec{A}$ en el punto p a una distancia R desde el segmento de longitud dl , tiene la misma dirección y sentido que el vector $d\vec{l}$ (ESPOL 1982, P301).

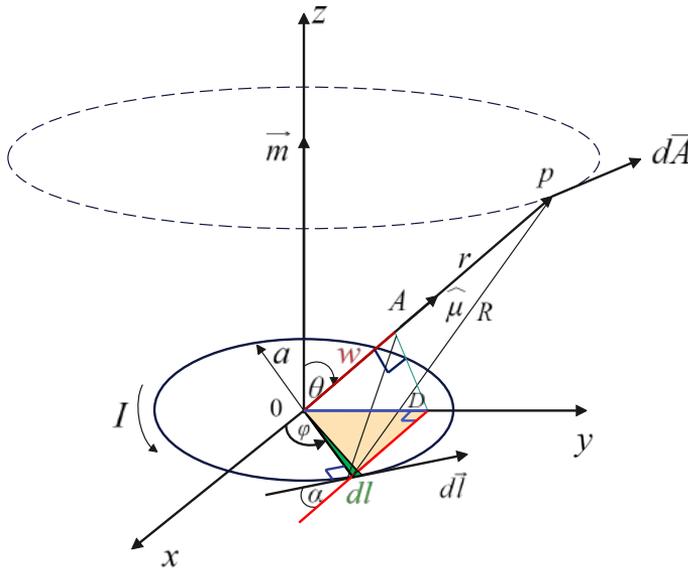


Figura 2.5: Filamento de corriente circular de radio a , produce un $d\vec{A}$ en el punto p .
Fuente: Los autores

De acuerdo a la Ecuación 2.36, las líneas del vector potencial vectorial magnético $d\vec{A}$ son círculos centrados en el eje del bucle. La magnitud de $d\vec{A}$ a lo largo de dicho círculo es constante ($d\vec{A}_\varphi$), y que varía con respecto a r y θ , de tal manera que, es un sistema de coordenadas esféricas.

Si el punto p se traslada al punto p' , es decir, en el plano yz cuando $x = 0$ y que $r \gg a$, como se muestra en la Fig. 2.6. De acuerdo a la Ecuación 2.36, la componente $d\vec{A}_\varphi$, debida al elemento dl mostrado, es:

$$dA_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos \alpha}{R'} \quad (2.37)$$

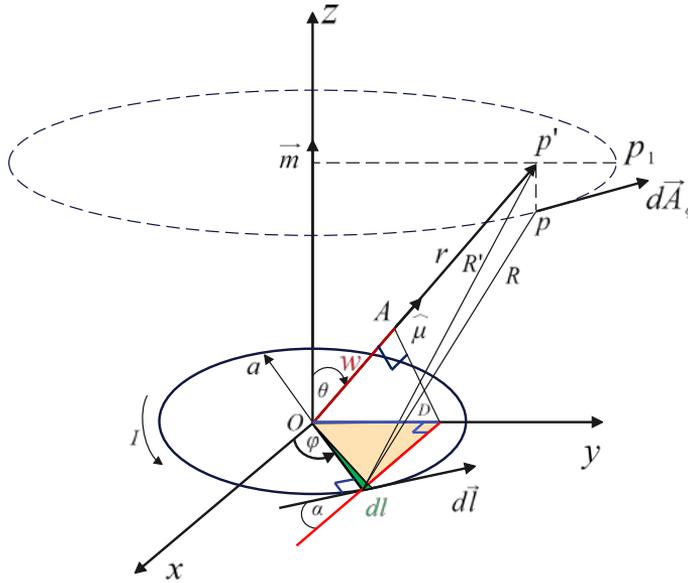


Figura 2.6: Filamento de corriente circular de radio a en el punto p' en $x = 0$.
Fuente: Los autores

En la Ecuación 2.37, el término $dl \cos \alpha$, se obtiene de la componente tangencial en el punto p' . Para una mayor comprensión, de la Fig.2.6 se obtiene una vista superior, que se muestra en la Fig.2.7, en esta figura, la componente tangencial del vector $d\vec{l}$ escrita en forma escalar es, $dl \cos \alpha$, donde:

$$\alpha = 90^\circ - \varphi \quad (2.38)$$

entonces,

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \varphi) \quad (2.39)$$

utilizando identidades trigonométricas, se tiene que:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos 90^\circ \cos \varphi + \sin 90^\circ \sin \varphi \quad (2.40)$$

simplificando,

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi \quad (2.41)$$

De tal forma que,

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \varphi \quad (2.42)$$

Reemplazando la Ecuación 2.42 en la Ecuación 2.37, se tiene:

$$dA_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \operatorname{sen} \varphi}{R'} \quad (2.43)$$

Como el punto p' está en el plano yz en $x = 0$, y además, $r \gg a$, entonces,

$$R' = r - w \quad (2.44)$$

Para determinar el valor de w igual al segmento \overline{OA} , en el triángulo rectángulo OAD , aplicando la función trigonométrica $\cos(90^\circ - \theta)$, se tiene que:

$$w = \overline{OD} \cos(90^\circ - \theta) \quad (2.45)$$

entonces, utilizando identidades trigonométricas, se tiene:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \cos 90^\circ \cos \theta + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} \theta \quad (2.46)$$

Simplificando,

$$\cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta \quad (2.47)$$

Reemplazando la Ecuación 2.47 en la Ecuación 2.45, es:

$$w = \overline{OD} \operatorname{sen} \theta \quad (2.48)$$

En el triángulo rectángulo $ODdl$, aplicando la función trigonométrica $\cos(90^\circ - \varphi)$, se tiene el segmento \overline{OD} que es igual a:

$$\overline{OD} = a \cos(90^\circ - \varphi) \quad (2.49)$$

Reemplazando la Ecuación 2.41 en la Ecuación 2.49, se tiene:

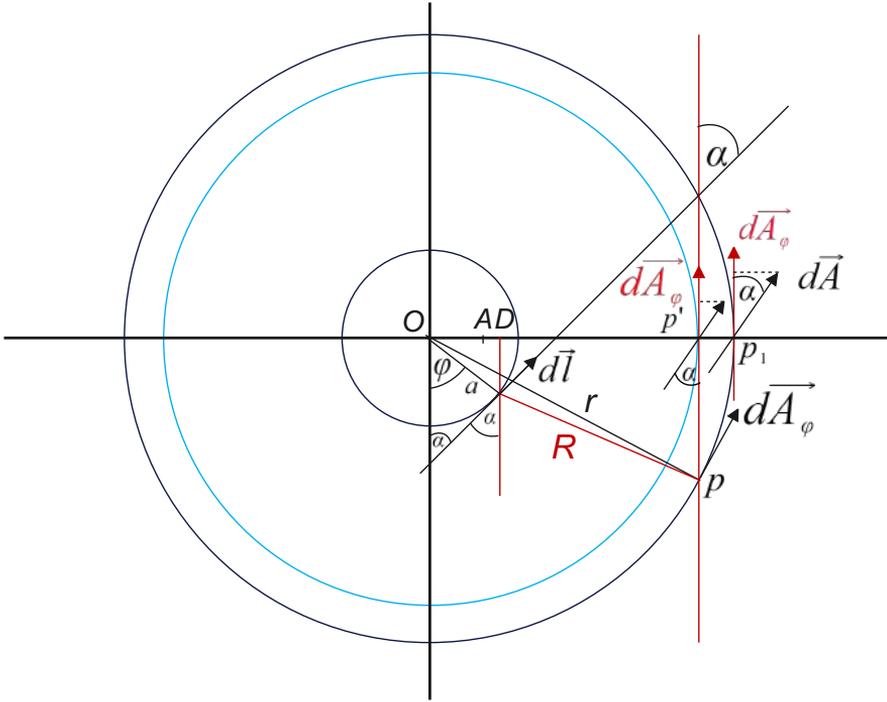


Figura 2.7: Vista superior de la Fig. 2.6.

Fuente: Los autores

$$\overline{OD} = a \operatorname{sen} \varphi \quad (2.50)$$

Seguidamente se reemplaza la Ecuación 2.50 en la Ecuación 2.48, así:

$$w = a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \quad (2.51)$$

Finalmente, se reemplaza la Ecuación 2.51 en la Ecuación 2.44, así:

$$R' = r - a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \quad (2.52)$$

En la Fig. 2.5, el diferencial de arco dl , es:

$$dl = a d\varphi \quad (2.53)$$

Se procede a reemplazar la Ecuación 2.52 y la Ecuación 2.53 en la Ecuación 2.43, se tiene:

$$dA_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a d\varphi \operatorname{sen} \varphi}{r - a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta} \quad (2.54)$$

sacando factor común r ,

$$dA_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{d\varphi \operatorname{sen} \varphi}{r} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{r} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta\right)} \quad (2.55)$$

haciendo,

$$t = \frac{a}{r} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \quad (2.56)$$

entonces,

$$dA_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{d\varphi \operatorname{sen} \varphi}{r} \frac{1}{(1-t)} \quad (2.57)$$

Debido a que t tiende a cero, ya que, $r \gg a$, lo que está entre paréntesis en la Ecuación 2.57, se puede escribir como una función de t , esto es:

$$f(t) = \frac{1}{1-t} \quad (2.58)$$

De tal manera que, la Ecuación 2.58 se puede aproximar utilizando series de Taylor, así:

$$f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n \quad (2.59)$$

Se debe obtener la primera derivada de la Ecuación 2.58, así:

$$f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \quad (2.60)$$

Entonces, evaluando la función de las ecuaciones 2.58 y 2.60 en $t = t_0 = 0$, se tiene:

$$f(0) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad , \quad f'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \quad (2.61)$$

Considerando los dos primeros términos de la serie de Taylor de la Ecuación 2.59, se tiene:

$$f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) \quad (2.62)$$

Con $t_0 = 0$, en la Ecuación 2.62,

$$f(t) \approx f(0) + f'(0)(t-0) \quad (2.63)$$

reemplazando valores en la Ecuación 2.63, se obtiene:

$$f(t) \approx 1 + 1(t) \quad (2.64)$$

Se reemplaza la Ecuación 2.56 en 2.64.

$$f(t) \approx 1 + \frac{a}{r} \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta \quad (2.65)$$

Finalmente, la Ecuación 2.65 se reemplaza en la Ecuación 2.57.

$$dA_\varphi = \frac{\mu_0 I a \, d\varphi \text{ sen } \varphi}{4\pi r} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta \right) \quad (2.66)$$

Se procede a integrar la Ecuación 2.66, así:

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{r} \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta \right) \text{sen } \varphi \, d\varphi \quad (2.67)$$

separando la integral,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \text{sen } \varphi \, d\varphi + \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen } \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi \quad (2.68)$$

pero,

$$\text{sen}^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \quad (2.69)$$

entonces,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \text{sen } \varphi \, d\varphi + \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen } \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi \quad (2.70)$$

nuevamente, separando la integral,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \text{sen } \varphi \, d\varphi + \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen } \theta}{8\pi r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen } \theta}{8\pi r^2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi \quad (2.71)$$

integrando,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r} [-\cos \varphi]_0^{2\pi} + \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen } \theta}{8\pi r^2} [\varphi]_0^{2\pi} - \frac{\mu_0 I a^2 \text{sen } \theta}{8\pi r^2} \left[\frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi \right]_0^{2\pi} \quad (2.72)$$

reemplazando los límites y simplificando términos, se tiene:

$$A_{\varphi} = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi r} (\cos 2\pi - \cos 0) + \frac{\mu_0 I a^2 \sen \theta}{8\pi r^2} (2\pi) - \frac{\mu_0 I a^2 \sen \theta}{16\pi r^2} (\sen 4\pi - \sen 0) \quad (2.73)$$

$$A_{\varphi} = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi r} (1 - 1) + \frac{\mu_0 I a^2 \sen \theta}{8\pi r^2} (2\pi) - \frac{\mu_0 I a^2 \sen \theta}{16\pi r^2} (0) \quad (2.74)$$

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I a^2 \sen \theta}{8\pi r^2} (2\pi) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sen \theta}{4\pi r^2} \quad (2.75)$$

Entonces, el potencial vectorial magnético, es:

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sen \theta}{4\pi r^2} \quad (2.76)$$

Pero, πa^2 es el área S que describe la espira circular, y la magnitud del vector magnetización es $m = IS$, entonces, reemplazando valores en la Ecuación 2.76, se tiene:

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 m \sen \theta}{4\pi r^2} \quad (2.77)$$

La Ecuación 2.77, es la magnitud del producto cruz entre el vector momento dipolar magnético \vec{m} y el vector unitario $\hat{\mu}$, dando como resultado el vector potencial vectorial magnético \vec{A} , como se indica en la Fig. 2.6 y Fig. 2.7 en los puntos p' y p_1 , al integrar el $d\vec{A}$, entonces:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{\mu}}{r^2} \quad (2.78)$$

El vector densidad de flujo magnético \vec{B} , ahora se puede obtener utilizando la Ecuación 2.78, esto es:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (2.79)$$

y

$$\vec{B} = \text{rot } \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{\mu}}{r^2} \quad (2.80)$$

2.2.2. Caso de agregado de lazo. Vector de densidad de momento magnético, o Vector magnetización

Considere una pieza de materia magnetizada (Fig. 2.8) y suponga que se conocen los momentos dipolar magnéticos \vec{m} de todos los bucles de corriente elemental equivalentes a las corrientes atómicas. El potencial vectorial resultante en cualquier punto P se obtiene como una suma vectorial de los términos de la Ecuación 2.78 (ESPOL 1982, P302), representado

en la Ecuación 2.81.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_v \frac{\vec{m}_k x \hat{u}_k}{r_k^2} \quad (2.81)$$

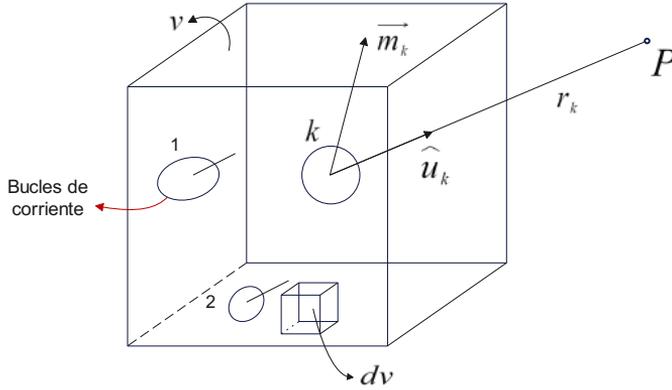


Figura 2.8: Pedazo de materia magnetizada.

Fuente: Los autores

donde, v representa el volumen de una pieza magnetizada.

La suma total de todos los momentos de dipolo magnético \vec{m} dentro de cualquier volumen v (Fig.2.8), está representado por el vector magnetización \vec{M} ; además, suponga que se puede determinar la suma vectorial de los momentos magnéticos elementales dentro de cualquier volumen dv "físicamente pequeño", entonces la densidad de los momentos magnéticos está definido en la Ecuación 2.82, esto es:

$$\vec{M} = \frac{\text{Suma de todos los } \vec{m} \text{ dentro de } dv}{dv} \quad (2.82)$$

donde,

$$\vec{M} = \text{Vector de magnetización} \quad (2.83)$$

6

$$\vec{M} = \text{Densidad de momento dipolar magnético} \quad (2.84)$$

Si se conoce el vector \vec{M} en todos los puntos, se puede determinar el vector potencial creado por pequeños bucles dentro de un volumen v como una integral, y no como la suma en la Ecuación 2.81 sobre todos los bucles individuales. De acuerdo con la Ecuación 2.82, un pequeño volumen dv tiene un momento magnético.

$$\sum_{dv} \vec{m} = \vec{M} dv \quad (2.85)$$

Reemplazando la Ecuación 2.85 en la Ecuación 2.81, se tiene:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_v \frac{\vec{M} \times \hat{\mu}}{r^2} \Delta v \quad (2.86)$$

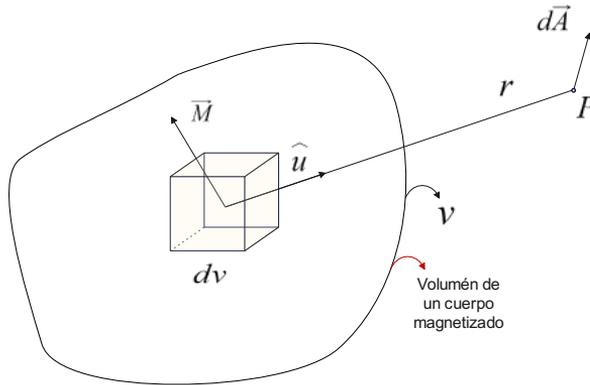


Figura 2.9: Potencial vectorial magnético creado por un cuerpo magnetizado.

Fuente: Los autores

tomando el límite cuando \$\Delta v\$ tiende a cero, se obtiene la Ecuación 2.87.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{M} \times \hat{\mu}}{r^2} dv \quad (2.87)$$

En conclusión, de acuerdo a la Ecuación 2.87, el potencial vectorial magnético total \$\vec{A}\$, creado por un cuerpo magnetizado, se obtiene a partir de un diferencial de volumen \$dv\$ a una distancia \$r\$ en el punto \$P\$, tal como se muestra en la Fig. 2.9.

El campo magnético total en un punto dentro de una pieza de materia magnetizada es función de la magnetización en todo el volumen considerado, y la magnetización en un punto dado es función del campo magnético total. Por lo tanto, el análisis del proceso transitorio es extremadamente complicado. Sin embargo, el equilibrio siempre se alcanza finalmente, la tarea es determinar este equilibrio. Para ello, debe conocerse la dependencia del vector de magnetización \$\vec{M}\$ con el vector de densidad de flujo magnético total \$\vec{B}\$ (ESPOL 1982, p303).

Para la mayoría de las sustancias, la magnetización en un punto dado es una función lineal de la densidad de flujo magnético total en ese punto. Esta relación lineal generalmente se escribe en la forma como se muestra en la Ecuación 2.88, así:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{X_m}{1 + X_m} \vec{B} \quad (2.88)$$

donde, la constante X_m se conoce como la susceptibilidad magnética; y que, para la mayoría de los materiales lineales $X_m \ll 1$.

2.3. Corriente macroscópica equivalente a una sustancia magnetizada

2.3.1. Determinación de la densidad de corriente de magnetización superficial

$$\vec{j}_{ms}$$

El campo magnético creado por una sustancia magnetizada se debe a bucles de corriente elementales que representan las propiedades magnéticas de los átomos individuales. Sin embargo, se puede considerar que estas corrientes elementales dan como resultado ciertas corrientes macroscópicas equivalentes. Entonces se puede suponer que el campo magnético debido a la materia magnetizada se debe a estas resultantes macroscópicas de corrientes atómicas microscópicas. Se verá que la densidad de la resultante macroscópica de corrientes microscópicas se puede expresar en términos del vector de magnetización \vec{M} (ESPOL 1982, p304).

Considerar una parte de la superficie de una pieza de materia magnetizada y dejar que las corrientes elementales sean perpendiculares a la superficie, como se muestra en la Fig. 2.10. Se puede ver fácilmente a partir de esto que, si la magnetización es uniforme, la resultante macroscópica de las corrientes elementales dentro de la pieza de materia es cero. Sin embargo, en una capa delgada cerca de la superficie, existen corrientes no compensadas, lo que da como resultado una lámina de corriente delgada. El grosor de esta lámina de corriente es del mismo orden que el diámetro de los bucles de corriente elemental, por lo que puede considerarse como una corriente superficial (ESPOL 1982, p304).

Se debe recordar que la densidad de una corriente superficial \vec{j}_{ms} se define como la intensidad de corriente a través de una delgada franja de longitud unitaria, perpendicular tanto a la superficie como al flujo de corriente. La Fig. 2.11 es una sección ampliada de la Fig. 2.10. Ahora, supóngase que el radio de las corrientes atómicas es a , y su intensidad I . Para determinar la densidad de la corriente superficial es necesario determinar la corriente total a través de una franja de longitud unitaria, cuya sección transversal se muestra en la línea doble. Solo aquellas espiras cruzan esta superficie una vez en su dirección positiva que están centradas en un cilindro de radio a y de longitud unitaria. La sección transversal de este cilindro se muestra sombreada en la Fig. 2.11. Las corrientes elementales centradas

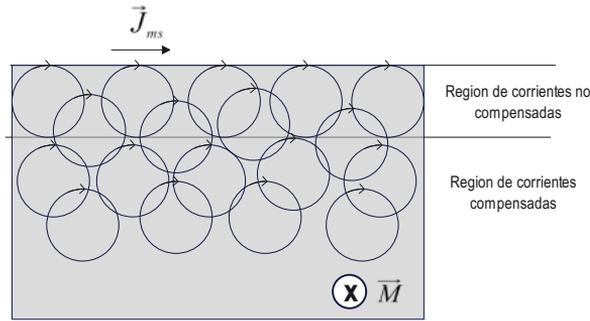


Figura 2.10: Una región cerca de la superficie de un cuerpo uniformemente magnetizado.

Fuente: Los autores

fuera de este cilindro pueden cruzar la tira, pero dos veces, una en dirección positiva y otra en dirección negativa. Entonces su contribución total es cero (ESPOL 1982, p304).

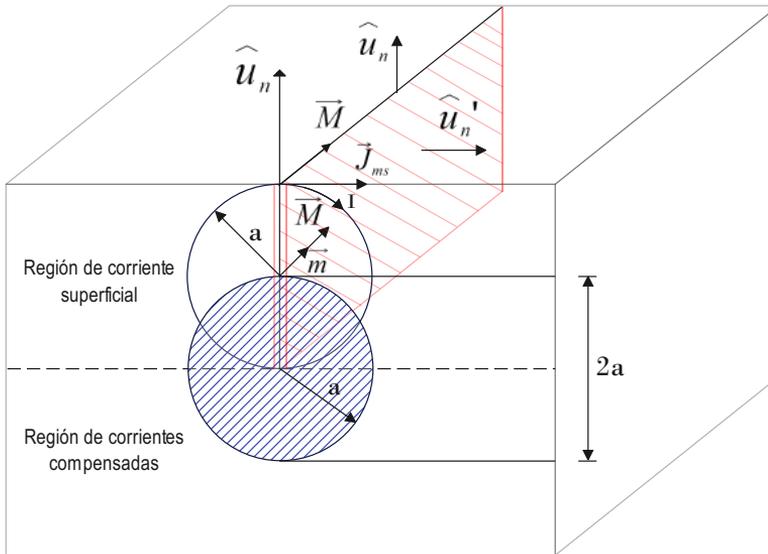


Figura 2.11: Construcción para determinar la corriente superficial macroscópica resultante de corrientes microscópicas.

Fuente: Los autores

Suponga que hay N bucles (lazos) elementales por unidad de volumen. Luego, dentro del cilindro circular que se muestra en la Fig. 2.11, los bucles $Na^2\pi$ están centrados. La intensidad de la corriente a través de la tira, es igual a la densidad de la corriente superficial de magnetización \vec{J}_{ms} , por lo tanto: la superficie del lazo o bucle es $S = a^2\pi$, el momento dipolar magnético $m = Ia^2\pi$, y el vector magnetización es $M = Nm$, entonces, la densidad de corriente de magnetización superficial escalar es,

$$J_{ms} = NIa^2\pi = Nm = M \quad (2.89)$$

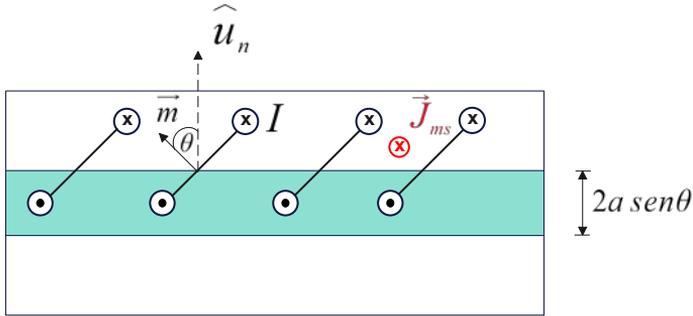


Figura 2.12: Corriente superficial macroscópica resultante en el caso general.

Fuente: Los autores

Suponga ahora que el ángulo entre los momentos magnéticos \vec{m} de las espiras elementales y la normal a la superficie $\hat{\mu}_n$ es θ , como se muestra en la Fig. 2.12. En ese caso, las espiras no compensadas están centradas dentro del cilindro elíptico, que se muestra sombreado, de volumen $a^2\pi \text{ sen } \alpha$ por unidad de longitud (ESPOL 1982, p305). Por lo tanto, en lugar de la Ecuación 2.89, se tiene:

$$J_{ms} = M \text{ sen } \theta \quad (2.90)$$

La Ecuación 2.90 representa la magnitud del producto cruz entre los vectores magnetización \vec{M} y el unitario normal $\hat{\mu}_n$. Por lo tanto, el vector densidad de corriente superficial de magnetización \vec{J}_{ms} , es:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{\mu}_n \quad (2.91)$$

2.3.2. Determinación de la densidad de corriente de magnetización \vec{J}_m

Las corrientes elementales en todo el volumen son compensadas por las corrientes adyacentes. Pero si la magnetización no es uniforme, las resultantes macroscópicas de las corrientes microscópicas pueden aparecer por todo el cuerpo magnetizado (ESPOL 1982, p306).

Para determinar la densidad de corriente de la resultante macroscópica, considere un contorno rectangular dentro de un cuerpo magnetizado, como se muestra en la Fig. 2.13. La corriente no compensada a través de la superficie del rectángulo 12341 se debe nuevamente a los bucles de corriente centrados dentro de una determinada región solamente. No es difícil concluir que esta región ahora consta de los dos cilindros que se muestran. El volu-

men v_1 del cilindro centrado en el segmento del rectángulo $\overline{12}$, representa el área de la base circular $S_1 = \pi a^2 \cos \theta_1$ de los bucles de corrientes I por la altura l , esto es:

$$v_1 = \pi a^2 l \cos \theta_1 \quad (2.92)$$

El volumen v_2 del cilindro centrado en el segmento del rectángulo $\overline{34}$, representa el área de la base circular $S_2 = \pi a^2 \cos \theta_2$ de los bucles de corrientes I por la altura l , esto es:

$$v_2 = \pi a^2 l \cos \theta_2 \quad (2.93)$$

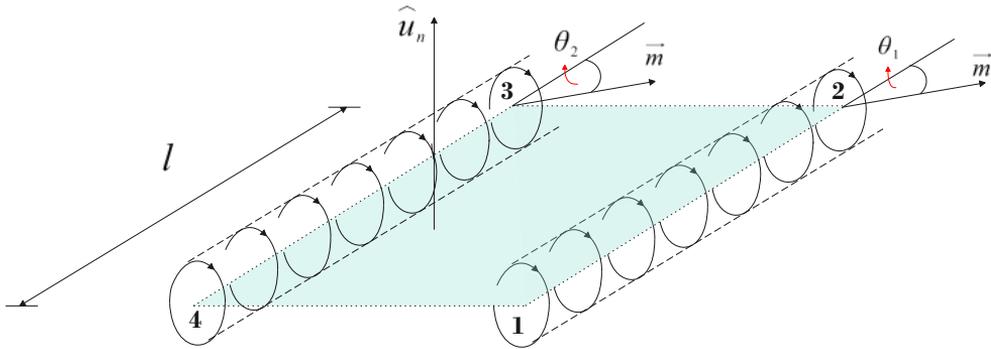


Figura 2.13: Construcción para determinar la densidad de corriente macroscópica equivalente a corrientes microscópicas dentro de un cuerpo magnetizado no uniformemente.

Fuente: (ESPOL 1982, p306)

Por tanto, la intensidad de corriente a través del rectángulo sombreado (trayectoria 1234) debido a las corrientes de todos los lazos, considerando como referencia positiva la trayectoria de 1 a 2, entonces la trayectoria de 3 a 4 es negativa, así:

$$I_{m \text{ total}} = N_1 I v_1 - N_2 I v_2 \quad (2.94)$$

donde, N_1 y N_2 representan el número de lazos por unidad de volumen a lo largo de los lados $\overline{12}$ y $\overline{34}$ del rectángulo.

Reemplazando las ecuaciones 2.92 y 2.93 en la Ecuación 2.94, se tiene:

$$I_{m \text{ total}} = N_1 I a^2 \pi l \cos \theta_1 - N_2 I a^2 \pi l \cos \theta_2 \quad (2.95)$$

pero, el momento dipolar magnético m , es:

$$m = I a^2 \pi \quad (2.96)$$

Por otro lado, M_1 y M_2 representan las magnitudes de los vectores de magnetización, esto es:

$$M_1 = mN_1 \quad (2.97)$$

y,

$$M_2 = mN_2 \quad (2.98)$$

De tal manera que, reemplazando valores en la Ecuación 2.95, se tiene:

$$I_{m \text{ total}} = M_1 l \cos \theta_1 - M_2 l \cos \theta_2 \quad (2.99)$$

Los dos términos de la Ecuación 2.99 representan la magnitud del producto punto, entonces escribiendo en forma vectorial, se tiene:

$$I_{m \text{ total}} = \vec{M}_1 \cdot \vec{l} - \vec{M}_2 \cdot \vec{l} \quad (2.100)$$

Considerando la trayectoria cerrada 12341 del rectángulo, la Ecuación 2.100 se puede escribir como:

$$I_{m \text{ total}} = \oint_{12341} \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (2.101)$$

Si el área del rectángulo se representa por ΔS , entonces la corriente total es:

$$I_{m \text{ total}} = \Delta S \widehat{\mu}_n \cdot \vec{J}_m \quad (2.102)$$

Igualando las ecuaciones 2.101 y 2.102, se tiene:

$$\Delta S \widehat{\mu}_n \cdot \vec{J}_m = \oint_{12341} \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (2.103)$$

Despejando el producto punto de $\widehat{\mu}_n \cdot \vec{J}_m$, se tiene:

$$\widehat{\mu}_n \cdot \vec{J}_m = \frac{1}{\Delta S} \oint_{12341} \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (2.104)$$

De acuerdo con la definición del rotacional en la Ecuación 2.105 (ESPOL 1982, p306), esto es:

$$\text{Componente del rotacional } \vec{M} \text{ en la dirección } \widehat{\mu}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta C} \vec{M} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (2.105)$$

para un ΔS lo suficientemente pequeño (pero lo suficientemente grande como para encerrar un gran número de corrientes atómicas), el lado derecho de la Ecuación 2.104 representa con precisión la componente del rotacional \vec{M} en la dirección de $\hat{\mu}_n$, entonces, en 2.104,

$$\vec{J}_m \cdot \hat{\mu}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{12341} \vec{M} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \text{rot } \vec{M} \cdot \hat{\mu}_n \quad (2.106)$$

así

$$\vec{J}_m \cdot \hat{\mu}_n = \text{rot } \vec{M} \cdot \hat{\mu}_n \quad (2.107)$$

Finalmente, la densidad de corriente de magnetización requerida \vec{J}_m de la resultante macroscópica de las corrientes elementales es:

$$\vec{J}_m = \text{rot } \vec{M} \quad (2.108)$$

o, con el vector naba,

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (2.109)$$

donde, el vector \vec{J}_m se puede llamar de dos maneras:

$$\vec{J}_m = \text{Densidad de corriente de magnetización} \quad (2.110)$$

$$\vec{J}_m = \text{Densidad resultante macroscópica debido a las corrientes microscópicas} \quad (2.111)$$

2.4. Forma generalizada de la ley Circuital de Ampere. intensidad de campo magnético

Las fuentes secundarias del campo magnético en el interior de la materia magnetizada, pueden reducirse a un sistema de corrientes macroscópicas \vec{J}_m . Estas corrientes representan las resultantes macroscópicas de las corrientes microscópicas elementales, que en el modelo de la sección 2.3, se consideran como las fuentes reales del campo magnético secundario. Se considera entonces que las corrientes reales y estas corrientes equivalentes existen en el vacío (ESPOL 1982, p307).

Suponer que en cierto punto existen tanto la corriente real \vec{J} como la resultante macroscópica de las corrientes microscópicas \vec{J}_m . La densidad de la corriente total \vec{J}_{total} que crea el campo magnético es por lo tanto su suma, así:

$$\vec{J}_{total} = \vec{J} + \vec{J}_m \quad (2.112)$$

Entonces, reemplazando la Ecuación 2.109 en la Ecuación 2.112, se tiene:

$$\vec{J}_{total} = \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (2.113)$$

Por consiguiente, en la Ley circuital de Ampere mostrado en la Ecuación 2.114, solo se debe modificar \vec{J}_{total} en lugar de \vec{J} , así:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.114)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} \quad (2.115)$$

Se separa el lado derecho en dos integrales,

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} \quad (2.116)$$

se aplica el Teorema de Stoke al segundo término de la derecha en la Ecuación 2.116, para convertir una integral de superficie en una integral cerrada de línea, esto es:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (2.117)$$

Entonces,

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (2.118)$$

organizando términos,

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} - \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.119)$$

las dos integrales cerradas de línea del lado izquierdo de la Ecuación 2.119, se escribe en una sola integral, así:

$$\oint_C \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.120)$$

Pero,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (2.121)$$

donde, \vec{H} es la “intensidad de campo magnético”, reemplazando la Ecuación 2.121 en la Ecuación 2.120, se tiene la Ecuación 2.122, que representa la “Forma generalizada de la Ley circuital de Ampere”, y es válida únicamente para un campo magnético estático, esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.122)$$

La parte derecha de la Ecuación 2.122, se puede escribir como la corriente total I encerrada por la trayectoria cerrada C , entonces:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I \quad (2.123)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2.124)$$

Las unidades de H viene expresado en amperios/metros. Así, despejando H de 2.124, se tiene:

$$H = \frac{I}{l} \left[\frac{Amp}{m} \right] \quad (2.125)$$

Aplicando el Teorema de Stoke a la ecuación generalizada de Ampere,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.126)$$

integrando,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.127)$$

La Ecuación 2.127, se denomina “Forma diferencial de la Ley circuital de Ampere generalizada” y es válida únicamente para campos magnéticos estáticos.

En el caso de materiales magnéticos lineales, el vector de magnetización \vec{M} es proporcional al vector de densidad de flujo magnético \vec{B} . Por lo tanto, de acuerdo con la Ecuación 2.121, también es proporcional al vector de intensidad del campo magnético \vec{H} . Esta relación lineal se suele escribir en la forma (ESPOL 1982, p309):

$$\vec{M} = X_m \vec{H} \quad (2.128)$$

Se reemplaza la Ecuación 2.128 en la Ecuación 2.121, entonces:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - X_m \vec{H} \quad (2.129)$$

Se despeja el vector de densidad de flujo magnético \vec{B} , esto es:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + X_m \vec{H}) \quad (2.130)$$

Sacando factor común \vec{H} ,

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + X_m) \vec{H} \quad (2.131)$$

pero,

$$1 + X_m = \mu_r \quad (2.132)$$

donde,

$$\mu_r = \text{permeabilidad relativa} \quad (2.133)$$

Reemplazando valores en la Ecuación 2.131, se tiene:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (2.134)$$

Por otro lado,

$$\mu_0 \mu_r = \mu \quad (2.135)$$

donde,

$$\mu = \text{permeabilidad del material} \quad (2.136)$$

Finalmente, reemplazando μ en la Ecuación 2.134, se tiene la Ecuación 2.137, que es válido solamente para materiales lineales.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.137)$$

Además, la permeabilidad relativa μ_r , se puede escribir como:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2.138)$$

Cuando la permeabilidad relativa $\mu_r < 1$ se conoce como materiales diamagnéticos y son lineales. Cuando $\mu_r \geq 1$ se conoce como materiales paramagnéticos y son lineales. Cuando $\mu_r \gg 1$ se conoce como materiales ferromagnéticos y no son lineales. Resumiendo, en la Tabla 2.1:

Tabla 2.1: Permeabilidad relativa de los materiales

Rango de la permeabilidad relativa	Tipo de material	Tipo de señal
$\mu_r < 1$	Diamagnéticos	Lineales
$\mu_r \geq 1$	Paramagnéticos	Lineales
$\mu_r \gg 1$	Ferromagnéticos	No lineales

Fuente: Los Autores.

De acuerdo con la Ecuación 2.121 al despejar el vector de magnetización \vec{M} , se tiene:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \tag{2.139}$$

A continuación, se reemplaza la Ecuación 2.137 en la Ecuación 2.139, esto es:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} \tag{2.140}$$

Por consiguiente, el vector magnetización \vec{M} tiene la misma dirección y sentido del vector intensidad de campo magnético \vec{H} .

2.5. Condiciones de frontera

Para determinar las componentes normales B_n y tangenciales B_t de la densidad de flujo magnético; y, las componentes normales H_n y tangenciales H_t de la intensidad de campo magnético, en la frontera de dos medios, se procede como sigue:

2.5.1. Condiciones de frontera para las componentes normales

En primer lugar, para determinar la componente normal de la densidad de flujo magnético B_n , en la frontera de un medio 1 y medio 2, se utiliza la ecuación del flujo magnético igual a cero (Ecuación 2.141), entonces, se selecciona una superficie gaussiana en la frontera de los dos medios, como se muestra en la Fig. 2.14.

$$\varphi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{2.141}$$

se aplica el límite cuando h tiende a cero para que el análisis sea en la frontera de los dos medios 1 y 2, entonces:

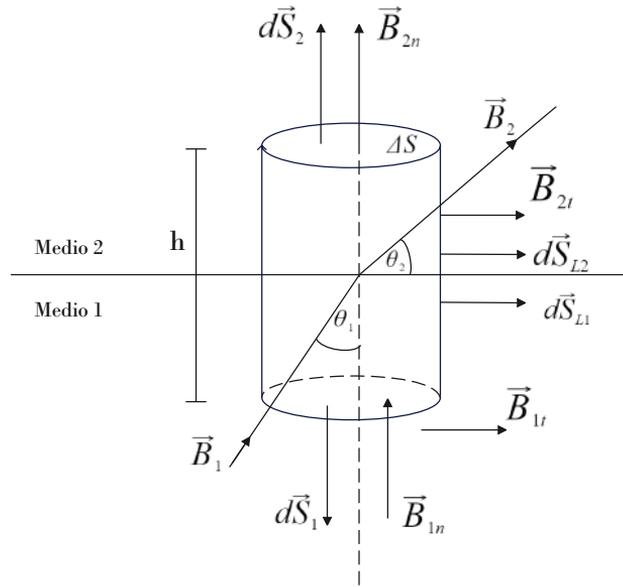


Figura 2.14: Obtención de la componente normal de B_n .
Fuente: Los autores

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.142)$$

La integral cerrada de superficie se reemplaza por cuatro integrales abiertas de superficies, así:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{\Delta S_1} \vec{B}_{1n} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_2} \vec{B}_{2n} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{\Delta S_{L1}} \vec{B}_{1t} \cdot d\vec{S}_{L1} + \int_{\Delta S_{L2}} \vec{B}_{2t} \cdot d\vec{S}_{L2} \right] = 0 \quad (2.143)$$

destruyendo los productos punto, se tiene,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{\Delta S_1} B_{1n} dS_1 \cos 180^\circ + \int_{\Delta S_2} B_{2n} dS_2 \cos 0^\circ + \dots + \int_{\Delta S_{L1}} B_{1t} dS_{L1} \cos 90^\circ + \int_{\Delta S_{L2}} B_{2t} dS_{L2} \cos 90^\circ \right] = 0 \quad (2.144)$$

integrando,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [-B_{1n} \Delta S_1 + B_{2n} \Delta S_2 + 0 + 0] = 0 \quad (2.145)$$

$$-B_{1n} \Delta S_1 + B_{2n} \Delta S_2 = 0 \quad (2.146)$$

pero, $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$, entonces,

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (2.147)$$

para materiales lineales,

$$B = \mu H \quad (2.148)$$

entonces,

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (2.149)$$

2.5.2. Condiciones de frontera para las componentes tangenciales

En segundo lugar, para obtener la componente tangencial B_t de la densidad de flujo magnético, en la frontera de los dos medios 1 y 2, se utiliza la Ley generalizada de Ampere (Ecuación 2.150), entonces, se selecciona una trayectoria cerrada 12341 de forma rectangular de dimensiones Δl por h , tal como se muestra en la Fig. 2.15,

$$\oint_l \vec{H} \cdot \Delta \vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.150)$$

la integral cerrada de línea se reemplaza por la trayectoria 12341, así:

$$\oint_{12341} \vec{H} \cdot \Delta \vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.151)$$

y se aplica el límite cuando h tiende a cero para que el análisis sea en la frontera de los dos medios, entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{12341} \vec{H} \cdot \Delta \vec{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.152)$$

la trayectoria cerrada 12341 se reemplaza por seis integrales abiertas, esto es: de 1-2, de 2-a, de a-3, de 3-4, de 4-b y de b-1, así:

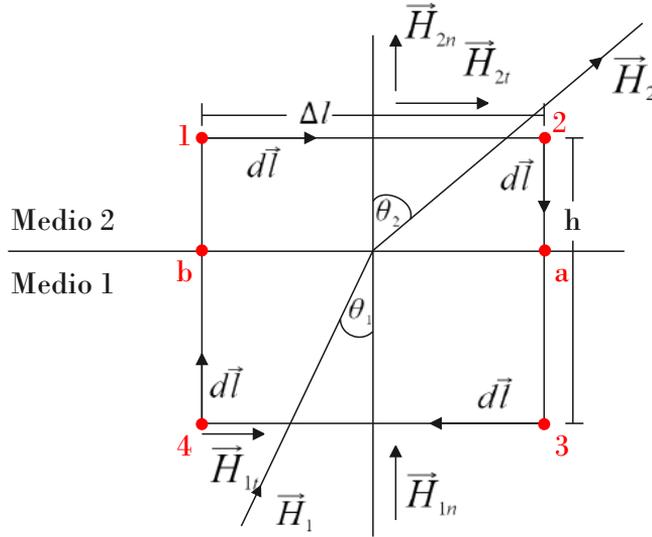


Figura 2.15: Obtención de la componente tangencial de H_t .
Fuente: Los autores

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_1^2 \vec{H}_{2t} \cdot \Delta \vec{l} + \int_2^a \vec{H}_{2n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_a^3 \vec{H}_{1n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_3^4 \vec{H}_{1t} \cdot \Delta \vec{l} + \dots \right. \\ \left. \int_4^b \vec{H}_{1n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_b^1 \vec{H}_{2n} \cdot \Delta \vec{l} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.153)$$

pero,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \lim_{h \rightarrow 0} (Jh \Delta l) = \lim_{h \rightarrow 0} (J_s \Delta l) \quad (2.154)$$

donde,

$$J_s = Jh = \text{densidad superficial de corriente} \quad (2.155)$$

al destruir el producto punto e integrando, se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[H_{2t} \Delta l - H_{2n} \frac{h}{2} - H_{1n} \frac{h}{2} - H_{1t} \Delta l + H_{1n} \frac{h}{2} + H_{2n} \frac{h}{2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} (J_s \Delta l) \quad (2.156)$$

aplicando el límite,

$$H_{2t} \Delta l - H_{1t} \Delta l = J_s \Delta l \quad (2.157)$$

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s \quad (2.158)$$

Si, $J_s = 0$, entonces:

$$H_{2t} - H_{1t} = 0 \quad (2.159)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (2.160)$$

Para materiales lineales,

$$B = \mu H \quad (2.161)$$

entonces,

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \quad (2.162)$$

en la Fig. 2.14,

$$\tan \theta_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \quad (2.163)$$

y,

$$\tan \theta_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}} \quad (2.164)$$

Dividiendo la Ecuación 2.163 para la Ecuación 2.164, se tiene:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{B_{1t} B_{2n}}{B_{1n} B_{2t}} \quad (2.165)$$

Despejando B_{2t} de la Ecuación 2.162 y reemplazando en la Ecuación 2.165, se tiene:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{B_{1t} B_{2n}}{B_{1n} B_{1t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{B_{2n}}{B_{1n}} \quad (2.166)$$

Pero, reemplazando la Ecuación 2.147 en la Ecuación 2.166 y simplificando, se tiene:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (2.167)$$

La Ecuación 2.167 representa la “*Ley de refracción para las líneas del campo magnético*”.

Como un ejemplo, si el medio 1 es un material ferromagnético y el medio 2 es el aire, como

se muestra en la Fig. 2.19, entonces, en la Ecuación 2.167, será,

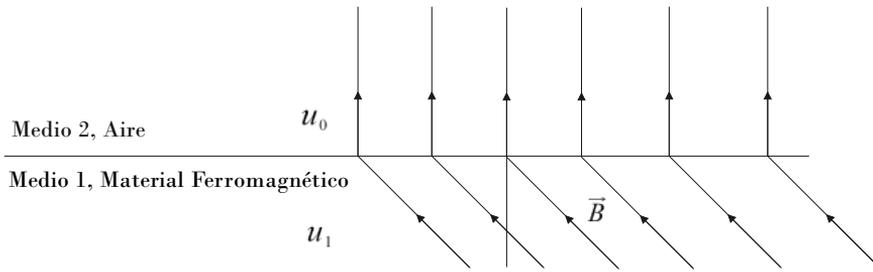


Figura 2.16: Gráfico de la señal de \vec{B} al pasar del medio 1 al medio 2.

Fuente: Los autores

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \quad (2.168)$$

esto es,

$$\mu_1 \gg \mu_0 \quad (2.169)$$

entonces,

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \gg 1 \quad (2.170)$$

por lo que:

$$\theta_2 \cong 0^\circ \quad (2.171)$$

Entonces, el gráfico de las líneas de la densidad de flujo magnético \vec{B} , se representa en la Fig. 2.19.

2.6. Propiedades físicas de materiales magnéticos. Comportamiento de histéresis

Los materiales magnéticos son divididos en tres grupos principales: Los materiales del primer grupo se caracterizan por pequeños valores negativos de la susceptibilidad magnética, y se denominan sustancias *diamagnéticas* y son lineales. Los materiales del segundo grupo se caracterizan por pequeños valores positivos de la susceptibilidad magnética, son conocidos como materiales *paramagnéticos* y son lineales. Los materiales del tercer grupo son conocidos como materiales *ferromagnéticos* y no son lineales, su principal característica es que ellos tienen una muy alta permeabilidad relativa (Arrayás 2007, p145).

Materiales diamagnéticos (lineal). $\mu_r < 1$ Son aquellos que se magnetizan muy ligeramente en la dirección contraria del campo aplicado (). Ejemplos: agua, hidrógeno, helio, plomo, plata, bismuto metálico, cobre, oro, silicio, germanio, bronce.

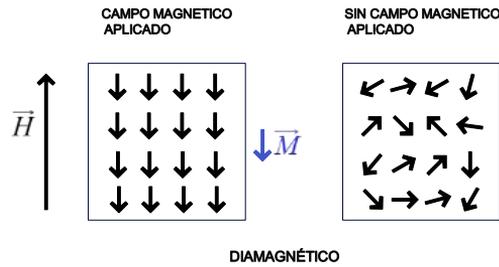


Figura 2.17: Magnetización de un material Diamagnético.
Fuente: Los autores

Materiales paramagnéticos (lineal). $\mu_r \geq 1$ Son aquellos que se magnetizan muy ligeramente en la dirección del campo aplicado. Ejemplos: aire, aluminio, magnesio, platino, titanio, litio, wolframio.

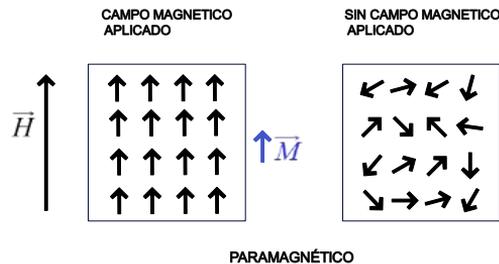


Figura 2.18: Magnetización de un material Paramagnético.
Fuente: Los autores

Materiales ferromagnéticos (no lineal). $\mu_r \gg 1$ Son aquellos que se magnetizan fuertemente en la dirección del campo aplicado. Sus propiedades magnéticas, depende de la magnetización previa del material. Ejemplos: hierro, cobalto, níquel, aleaciones de acero, gadolinio, disprosio.

2.6.1. Curva de magnetización de los materiales ferromagnéticos

Comportamiento de histéresis

Las propiedades magnéticas de un material ferromagnético son funciones de su historia magnética, es decir, de cómo la muestra logró su magnetización. Esto se conoce como el comportamiento de histéresis (ESPOL 1982, p317).

integrando, se tiene la magnitud de la intensidad del campo magnético H ,

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (2.174)$$

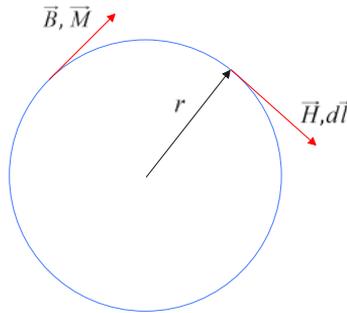


Figura 2.21: Trayectoria circular de radio r en el interior del toroide de la Fig. 2.20.

Fuente: Los autores

y, la magnitud de la densidad de flujo magnético B , es:

$$B = \mu H = \mu \frac{NI}{2\pi r} \quad (2.175)$$

Además, la magnitud del vector magnetización \vec{M} es,

$$M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) H \quad (2.176)$$

Reemplazando el valor de H ,

$$M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{NI}{2\pi r} \quad (2.177)$$

Sin embargo, puede medirse el flujo magnético total φ a través de la sección transversal S del núcleo, en lugar del vector de densidad de flujo magnético \vec{B} , entonces:

$$B = \frac{\varphi}{S} \quad (2.178)$$

Por lo tanto, la dependencia de la densidad de flujo magnético B de la intensidad del campo magnético H puede determinarse punto por punto y representarse en un diagrama conveniente.

El proceso de magnetización del material ferromagnético de la Fig. 2.20, tiene varias etapas; y, los resultados de esta magnetización se muestran en la curva de histéresis de la Fig. 2.22.

1. Se hace circular una corriente I sinusoidal por el alambre que abraza al núcleo ferro-

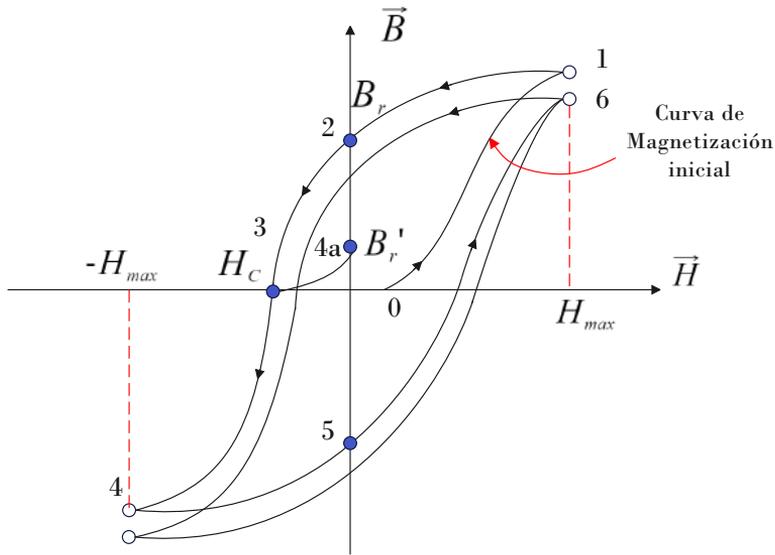


Figura 2.22: Proceso de magnetización de un material ferromagnético.

Fuente: Los autores

magnético del toroide.

2. Suponer que al principio la muestra no está magnetizada. Si la intensidad del campo magnético aumenta, debido al aumento de la corriente I , de cero a un valor H_{max} , el punto en el plano $B-H$ trazará la curva 0-1 que se muestra. Esta curva se conoce como la curva de magnetización inicial.
3. Del punto 1 al 2, se disminuye la corriente I , hasta que en el punto 2, la corriente I es igual a cero ($I = 0$) y la intensidad de campo magnético H también es igual a cero. Sin embargo, en el punto 2, la densidad de flujo magnético B no es cero, y se obtiene una densidad de flujo remanente o residual B_r . El significado físico de la densidad de flujo residual es debido a ciertos efectos similares a la fricción, las corrientes elementales seguirán estando orientadas, aunque no haya un campo externo, y producirán un cierto campo magnético dentro del núcleo. La densidad de flujo remanente explica la existencia de imanes permanentes (ESPOL 1982, p319).
4. En el punto 2, se invierte la corriente I , H estará en sentido contrario con respecto a su sentido anterior, y está representado en la figura por los valores negativos de H .
5. Del punto 2 al 3, la corriente I va aumentando en sentido inverso.
6. En el punto 3, se obtiene la fuerza coercitiva o intensidad de campo coercitivo H_c ,

no habrá flujo a través del núcleo. Físicamente, esto significa que la densidad de flujo magnético debida a la corriente macroscópica en la bobina es exactamente igual, pero opuesta, a la densidad de flujo magnético de los bucles elementales, que todavía están orientados para crear B en la dirección positiva. Si la fuerza coercitiva H_c es grande, el material magnético es duro. Si la fuerza coercitiva H_c es pequeña, el material magnético es blando.

- Si en el punto 3, se quita la corriente I , entonces el punto en el plano B - H se mueve al punto 4a, y se obtiene el flujo residual o remanente B'_r , debido a que, todavía hay algún vector de densidad de flujo en la supuesta dirección positiva creada por los bucles elementales orientados.

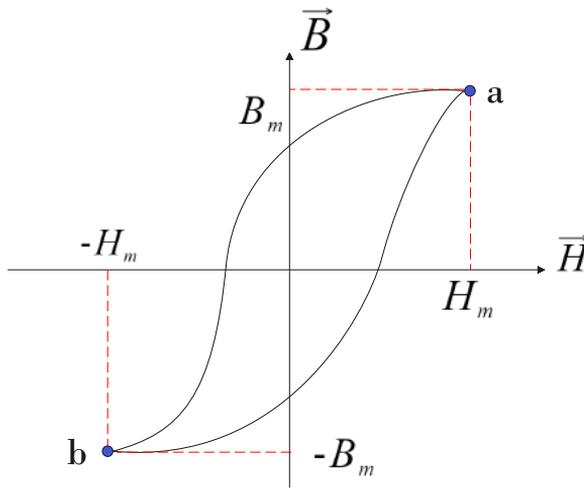


Figura 2.23: Proceso de magnetización final de un material ferromagnético.

Fuente: Los autores

- Del punto 3, se sigue aumentando la corriente I en sentido negativo hasta llegar al punto 4.
- A partir del punto 4, se sigue disminuyendo la corriente I hasta llegar al punto 5.
- En el punto 5, se invierte la corriente I y se sigue aumentando hasta el punto 6. Pero el punto 6, correspondiente a $+H_m$ no coincidirá con el punto 1 de la curva de magnetización inicial. Solo si se repite tal ciclo diez o más veces se cerrará la curva trazada por el punto en el plano B - H . La curva cerrada así obtenida se conoce como ciclo de histéresis, cuyo ejemplo típico se muestra en la Fig. 2.23.

En la Fig. 2.23 se muestra el proceso final de magnetización, de la curva de histéresis. Los

puntos *a* y *b*, son de saturación, es decir, por más que se aumente la corriente *I*, no aumenta la densidad de flujo magnético *B*.

De forma general, suele clasificarse a los materiales magnéticos en dos grandes grupos: materiales magnéticos blandos y materiales magnéticos duros (Shackelford 2005). En la Fig. 2.24 se presentan las curvas de histéresis características de dos materiales magnéticos, uno blando y otro duro. Nótese las diferentes escalas de la intensidad de campo magnético *H*.

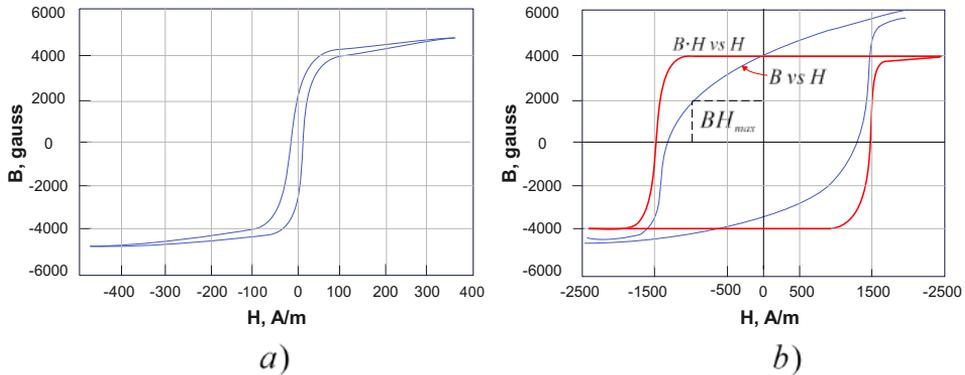


Figura 2.24: Curvas de histéresis características. a) Imán blando para núcleos. b) Imán duro permanente.

Fuente: Los autores

MATERIALES MAGNÉTICOS BLANDOS. Un material magnético blando es aquel que una vez magnetizado hasta la saturación B_s , si se elimina el campo aplicado H se desmagnetiza con facilidad, es decir, presenta de forma espontánea un valor B_r bajo, que desaparece completamente con valores de H de signo contrario también bajos. Como consecuencia, presentan curvas de histéresis magnética muy estrechas, con bajas pérdidas de energía por ciclo.

Un material magnético blando es por tanto aquel cuya imantación y desimantación resulta fácil, es decir, aquellos en los que el movimiento de las paredes de los dominios y su rotación resulta fácil. Estas características de fácil imantación y desimantación permiten su utilización para construir circuitos magnéticos en aplicaciones con corriente alterna: transformadores, generadores, motores, etc. y también en otras aplicaciones donde el material debe desmagnetizarse con facilidad, como relés, electroimanes, accionamiento de servoválvulas, etc. Entre los materiales blandos puros que se emplean como núcleos de bobinados destacan los hierros de alta pureza.

MATERIALES MAGNÉTICOS DUROS. Una definición simple de material magnético duro es aquel, que una vez magnetizado, se comporta como un imán permanente. Es decir, presenta un alto valor de B_r y resulta difícil de desmagnetar aún en presencia de campos H de sentido contrario grandes, lo que significa que también deben presentar una alta fuerza coercitiva H_c . Este comportamiento se debe a que una vez orientados los dominios tienen grandes dificultades para volver al estado original, con direcciones de sus momentos magnéticos al azar.

Un imán permanente proporciona un campo magnético al exterior, al igual que una bobina por la que circula corriente. Gracias a ello, se emplean en la construcción de motores eléctricos y generadores de corriente continua. Las aplicaciones electrónicas incluyen imanes para auriculares, altavoces, timbres de teléfonos, etc. Entre los materiales duros, los de más amplia utilización son las ferritas de bario, de estructura hexagonal.

TEORÍA DE LOS DOMINIOS MAGNÉTICOS. Son agrupaciones de imanes permanentes elementales (dipolos magnéticos) que se forman en los elementos metálicos. Cuando están alineados en la misma dirección y sentido magnéticos forman un metal magnético.

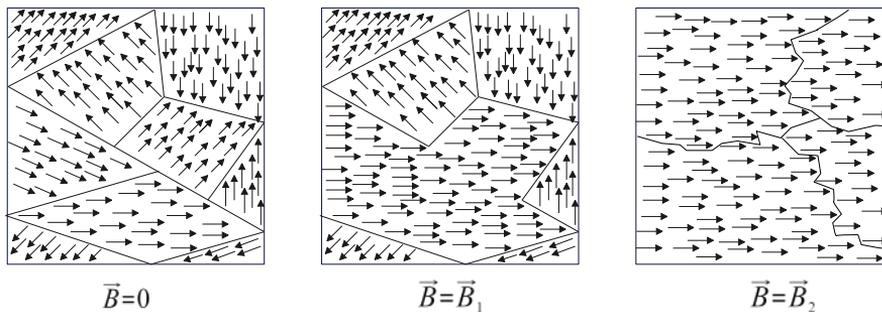


Figura 2.25: Alineación de los dominios magnéticos con el vector \vec{B} .

Fuente: Los autores

Los momentos magnéticos de todos los átomos de regiones casi macroscópicas se alinean formando micro imanes perfectos que se denominan *dominios* (Rodríguez 2014), como se muestra en la Fig. 2.25, a medida que aumenta \vec{B} los dominios con orientación preferencial crecen a expensas de sus vecinos. Las orientaciones de estas regiones son aleatorias y es por eso que generalmente aparecen desmagnetizados, Fig. 2.25 (izquierda) cuando ($\vec{B} = 0$). En otras palabras, cuando la sustancia se somete a un campo magnético externo, los dominios tienden a rotar alineándose con el campo externo, Fig. 2.25 (centro) cuando ($\vec{B} = \vec{B}_1$). Con un campo suficientemente grande todos los dominios se alinean y se alcanza una magnetización máxima que se denomina *magnetización de saturación*, Fig. 2.25 (derecha) cuando

$$(\vec{B} = \vec{B}_2).$$

De igual manera, en la Fig. 2.26 muestra un esquema de dominios magnéticos de un material ferromagnético alineándose con un campo creciente \vec{H} .

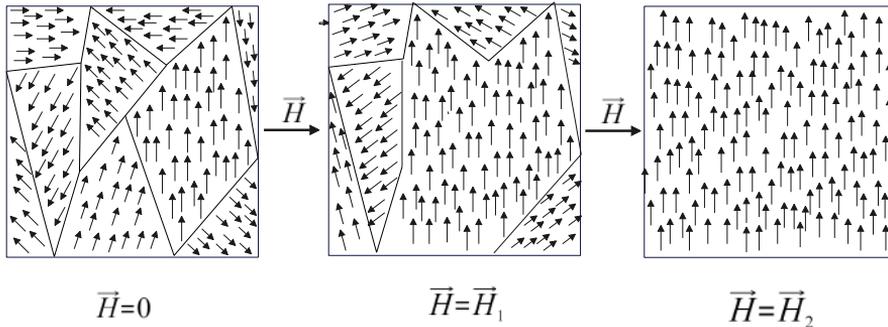


Figura 2.26: Alineación de los dominios magnéticos con el vector \vec{H} .

Fuente: Los autores

DESMAGNETIZACIÓN DE UN MATERIAL FERROMAGNÉTICO. Para desmagnetizar un núcleo ferromagnético magnetizado, existen tres alternativas principales, que son:

1. Se sigue el proceso inverso de la Fig. 2.22. La amplitud de la corriente cada vez se va disminuyendo. Ahora se puede entender un procedimiento de uso frecuente para desmagnetizar piezas magnetizadas de materiales ferromagnéticos. Con el campo magnético variando sinusoidalmente con el tiempo, el cuerpo primero se magnetiza alternativamente hasta la saturación. A continuación, la intensidad del campo externo se reduce lentamente hasta cero. Los bucles de histéresis se vuelven cada vez más pequeños y el cuerpo se desmagnetiza.
2. Si el material magnetizado es calentado sobre la temperatura Curie, este pierde su magnetización. La temperatura Curie, es la temperatura a la cual el material pierde su magnetización. Debajo de la temperatura de Curie los dipolos atómicos se alinean de manera paralela en dominios magnéticos. Superada la temperatura de Curie, los dominios magnéticos cambian de alineamiento de forma aleatoria debido a un enfriamiento lento anulando el momento magnético neto. Por consiguiente, los materiales magnéticos pierden magnetismo cuando se calientan, pero recuperan el magnetismo cuando se enfrían siempre que la temperatura máxima sea inferior a su temperatura de Curie. Por encima de la temperatura de Curie, un imán pierde permanentemente todo o parte de su magnetismo.

- Finalmente, los materiales magnéticos pueden perder su magnetización cuando es sometido a un golpe fuerte.

2.7. Circuitos magnéticos lineales cuasi-filamentales

Considere que una bobina con N vueltas por el que circula una corriente I , está envuelta alrededor de un material ferromagnético de forma de un tubo circular, como se muestra en la Fig. 2.27. Por la pequeña sección transversal ΔS , fluye un flujo magnético $\Delta\varphi$. Para determinar la intensidad de campo magnético H en el interior del material ferromagnético, producido por la corriente I que circula por la bobina de N vueltas, se utiliza la ecuación generalizada de la Ley de Ampere en la trayectoria circular C de radio r ; entonces, a partir de la Fig. 2.27, se cumple el siguiente set de ecuaciones: 2.179, 2.180, 2.181 y 2.182 (ESPOL 1982, p322).

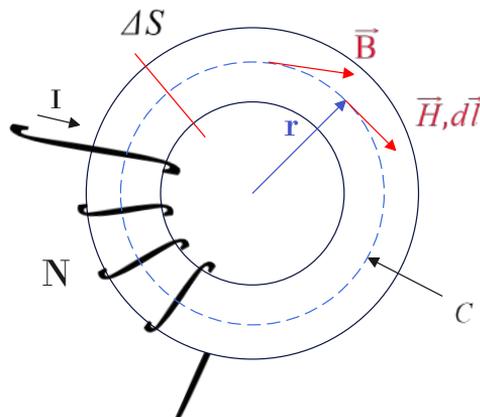


Figura 2.27: Circuito magnético.

Fuente: Los autores

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (2.179)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.180)$$

$$\Delta\varphi = B\Delta S \quad (2.181)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.182)$$

La Fig. 2.27 representa un circuito magnético que es completamente análogo a un circuito eléctrico que se muestra en la Fig. 2.28, con un conjunto de ecuaciones que son válidas para

corriente constante I en un tubo de corriente filamentososo, con el siguiente set de ecuaciones: 2.183, 2.184, 2.185 y 2.186.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \quad (2.183)$$

$$\Delta I = J \Delta S \quad (2.184)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.185)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.186)$$

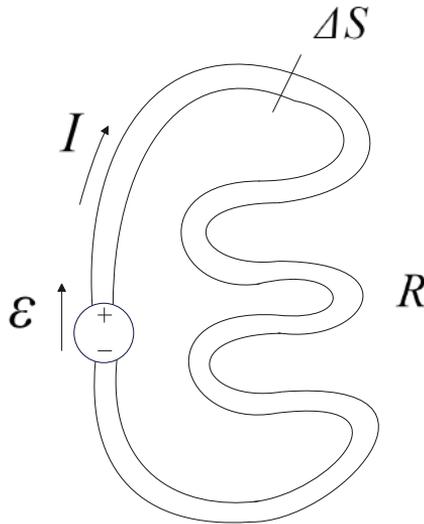


Figura 2.28: Circuito eléctrico.

Fuente: Los autores

Los dos sets de ecuaciones, por un lado las ecuaciones del circuito magnético 2.179, 2.180, 2.181 y 2.182; y por otro lado, las ecuaciones del circuito eléctrico, son completamente análogos. La solución debe ser de la misma forma, esto es:

Ecuaciones para el circuito eléctrico.

$$\sum \mathcal{E} - \sum RI = 0 \text{ (para cualquier circuito cerrado)} \quad (2.187)$$

$$R = \int_C \frac{dl}{\sigma \Delta S} \quad ; \quad R = \frac{l}{\sigma S} \quad (2.188)$$

$$\sum I = 0 \text{ (para cualquier nodo)} \quad (2.189)$$

Donde,

\mathcal{E} = fuerza electromotriz, R = Resistencia, I = Corriente, σ = conductividad, l = longitud, S = área.

Ecuaciones para el circuito magnético.

$$\sum NI - \sum R_m \Phi = 0 \quad (\text{para cualquier circuito magnético cerrado}) \quad (2.190)$$

$$R_m = \int_C \frac{dl}{\mu \Delta S} \quad ; \quad R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (2.191)$$

$$\sum \Phi = 0 \quad (\text{para cualquier nodo de un circuito magnético}) \quad (2.192)$$

donde,

NI = fuerza magnetomotriz, R_m = resistencia o reluctancia del material ferromagnético, φ = flujo magnético, μ = permeabilidad del material ferromagnético, l = longitud media del material ferromagnético, S = área transversal del material ferromagnético.

En la Fig. 2.29 se encuentra el circuito magnético equivalente de la Fig. 2.27. La reluctancia R_m representa la resistencia del material ferromagnético y es la oposición que presenta el material magnético al paso del flujo magnético. La fuente de fuerza magnetomotriz está dada por NI , y Φ representa el flujo magnético que circula por el material ferromagnético.

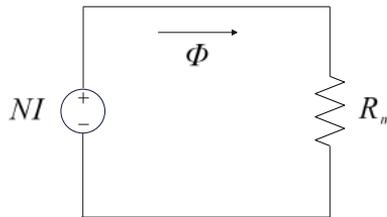


Figura 2.29: Circuito magnético equivalente.

Fuente: Los autores

2.8. Análisis aproximado de circuitos magnéticos lineales no filamentosales

Se considera ahora un núcleo grueso en forma de U de permeabilidad $\mu_1 \gg \mu_0$, cerrado por una barra gruesa de permeabilidad μ_2 , también $\mu_2 \gg \mu_0$, como se muestra en la Fig. 2.30. Si $\mu \gg \mu_0$ las sustancias no pueden ser lineales, pero suponer que pueden tratarse como aproximadamente lineales. Suponer que N vueltas, por las que circula una corriente de intensidad I , se enrollan en el núcleo. La determinación exacta del campo magnético en tal caso es imposible, a pesar de la supuesta linealidad. Sin embargo, se pueden demostrar

fácilmente dos características bastante generales del campo magnético dentro del núcleo (ESPOL 1982, p324).

En primer lugar, dado que $\mu_1 \gg \mu_0$ y $\mu_2 \gg \mu_0$, de la Ecuación 2.162 se puede concluir que la componente tangencial de la densidad de flujo magnético es mucho mayor en el núcleo que fuera de él. Siendo iguales las componentes normales de \vec{B} , la densidad de flujo magnético dentro del núcleo es generalmente mucho mayor que en cualquier punto exterior. Por lo tanto, se puede considerar que el flujo magnético está aproximadamente restringido al núcleo, aunque este nunca puede ser exactamente el caso. Esto representa la primera suposición al analizar el circuito magnético no filamentoso real (ESPOL 1982, p324).

En segundo lugar, asumir que las ecuaciones de 2.190 a 2.192 también son razonablemente precisas en este caso, si se usa una longitud promedio $(l_1 + l_2)$ en lugar de la longitud del circuito filamentoso.

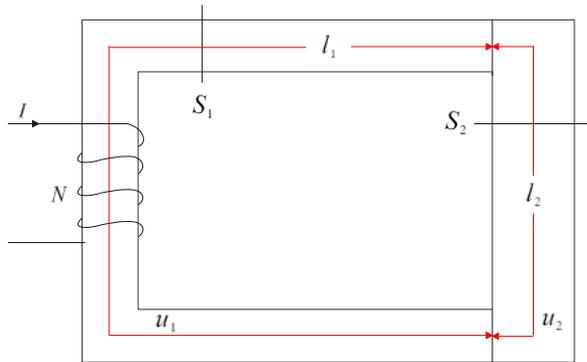


Figura 2.30: Circuito magnético real.

Fuente: Los autores

A continuación se muestran las ecuaciones de la densidad de flujo magnético B y de la intensidad de campo magnético H en la frontera de los medios 1, 2 y en el vacío, tanto de las componentes tangenciales así como de las componentes normales.

$$\mu_1 \gg \mu_0 \tag{2.193}$$

$$\mu_2 \gg \mu_0 \tag{2.194}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \rightarrow \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \tag{2.195}$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{0t}}{\mu_0} \quad \rightarrow \quad B_{1t} = \frac{\mu_1}{\mu_0} B_{0t} \quad ; \quad B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_0} B_{0t} \tag{2.196}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \rightarrow \quad B_{1n} = B_{0n} \quad ; \quad B_{2n} = B_{0n} \tag{2.197}$$

2.9. Análisis aproximado de circuitos magnéticos no lineales

Los circuitos magnéticos reales están siempre hechos de materiales ferromagnéticos, así que ellos son siempre no lineales. Por lo tanto, en lugar de la simple relación $\vec{B} = \mu\vec{H}$, se tiene que tratar con una curva de magnetización determinada experimentalmente (Alcázar 2016), tal como se muestra en la Fig.2.31. Si se está tratando con corrientes periódicas, la curva de magnetización normal es obviamente una mejor opción. Pero cualquiera que sea el problema considerado, solo se puede usar las siguientes tres ecuaciones (ESPOL 1982, p326).

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad \text{ó aproximadamente} \quad \sum H_k l_k = NI \quad (2.198)$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{ó aproximadamente} \quad \sum \Phi_k = 0 \quad (2.199)$$

$$B = B(H) \quad (\text{curva de magnetización experimental adecuada}) \quad (2.200)$$

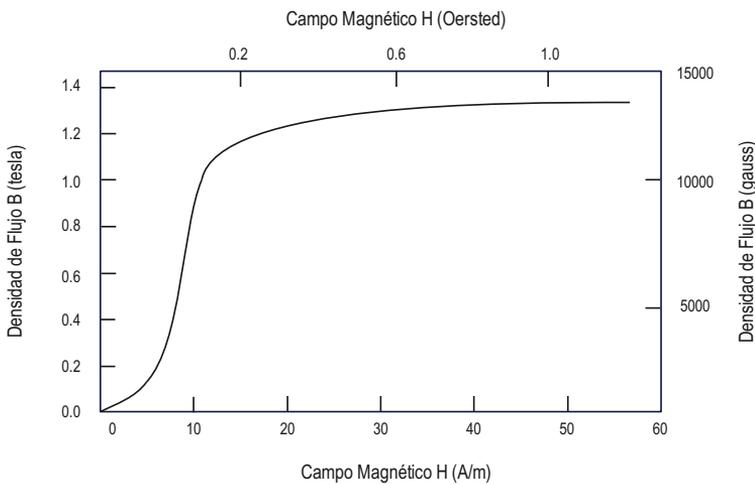


Figura 2.31: Curva de magnetización de B vs H.

Fuente: Los autores

2.10. Circuito magnético de un imán permanente

Considere un toroide ferromagnético delgado y suponga que dentro de él existe una densidad de flujo remanente B_r como resultado de una magnetización previa, como se muestra en la Fig. 2.32. La parte inferior del toroide tiene una abertura muy delgada de longitud l_0 denominado entrehierro, que se encuentra amplificado a la derecha de la figura (ESPOL 1982, p327).

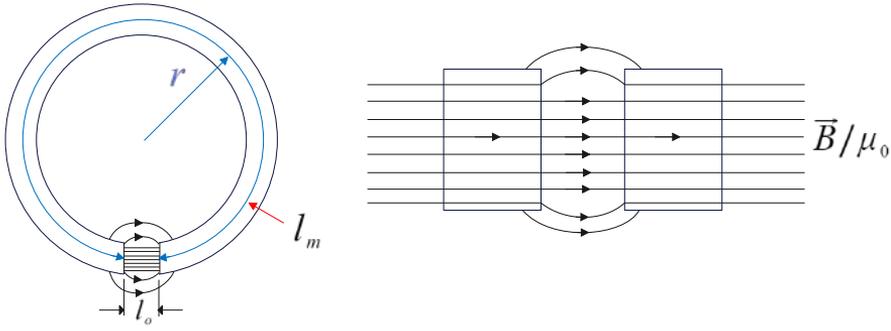


Figura 2.32: Imán permanente toroidal delgado.

Fuente: Los autores

Para calcular la densidad de flujo magnético B_0 en el entrehierro del toroide, primeramente se utiliza la Ley circuital de Ampere para determinar la intensidad de campo magnético H , posteriormente utilizando la ecuación que relaciona B con H , se determina B_0 ; se plantea la ecuación de ampere, así:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (2.201)$$

Dado que no hay corrientes macroscópicas en el toroide, entonces $I = 0$, esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.202)$$

La trayectoria cerrada se convierte en dos trayectos abiertos, uno por el toroide y la otra por el entrehierro, o sea,

$$\int_{\text{toroide}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{entrehierro}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.203)$$

resolviendo la integral del entrehierro, se tiene:

$$\int_{l_m} \vec{H}_m \cdot d\vec{l}_m = H_0 l_0 \quad (2.204)$$

Escribiendo la ecuación que relaciona la densidad de flujo magnético B con la intensidad de campo magnético H , en el entrehierro, así:

$$B_0 = \mu_0 H_0 \quad (2.205)$$

pero,

$$B_m \cong B_0 \quad (2.206)$$

2.11. Problemas resueltos

Problema 2.1. Un conductor muy largo de radio a y permeabilidad μ , transporta una corriente estacionaria de intensidad I , coaxialmente con el conductor es colocado un tubo de la misma permeabilidad de radio interior b y exterior d , como se muestra en la Fig. 2.33. Determine los vectores \vec{H} , \vec{B} , \vec{M} , \vec{J}_m y \vec{J}_{ms} para todos los puntos, asuma que la permeabilidad μ es constante.

Desarrollo:

Para $r < a$

En la Fig. 2.33, se toma una vista superior del eje z y se aplica la Ley generalizada de Ampere para determinar la intensidad de campo magnético \vec{H} , tal como se muestra en la Fig. 2.34.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_n \quad (2.207)$$

La corriente neta i_n encerrada por la trayectoria circular de radio r es I' , entonces:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I' \quad (2.208)$$

esto es,

$$\int_0^r \vec{H} \cdot d\vec{l} = I' \quad (2.209)$$

pero, reemplazando la corriente I' en la superficie que encierra la trayectoria circular de radio r , se tiene:

$$\int_0^r \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^r \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.210)$$

destruyendo el producto punto, se tiene,

$$\int_0^r H dl \cos 0^\circ = \int_0^r J dS \cos 0^\circ \quad (2.211)$$

pero, la densidad de corriente J es igual a la corriente total que circula por el área del cilindro de radio a , entonces,

$$J = \frac{I}{\pi a^2} \quad (2.212)$$

reemplazando en la Ecuación 2.211 e integrando, se tiene:

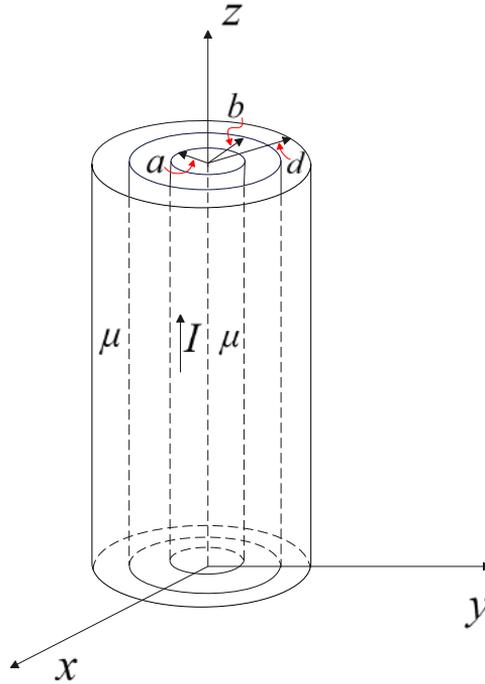


Figura 2.33: Cilindro coaxial de radios a , b y d , con corriente I y permeabilidad μ .
Fuente: Los autores

$$\int_0^r H dl = \int_0^r J dS \int_0^r H dl = \int_0^r J dSH(2\pi r) = \frac{I}{\pi a^2} (\pi r^2) H = \frac{I r}{2\pi a^2} \quad (2.213)$$

Considerando el sistema de coordenadas cilíndricas, la intensidad de campo magnético está en la dirección del ángulo θ , entonces:

$$H_\theta = \frac{I r}{2\pi a^2} \quad (2.214)$$

Escribiendo en forma vectorial, el vector intensidad de campo magnético \vec{H} se encuentra en la dirección del vector unitario $\hat{\theta}$, entonces,

$$\vec{H} = \frac{I r}{2\pi a^2} \hat{\theta} \quad (2.215)$$

pero, la densidad de flujo magnético \vec{B} es:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.216)$$

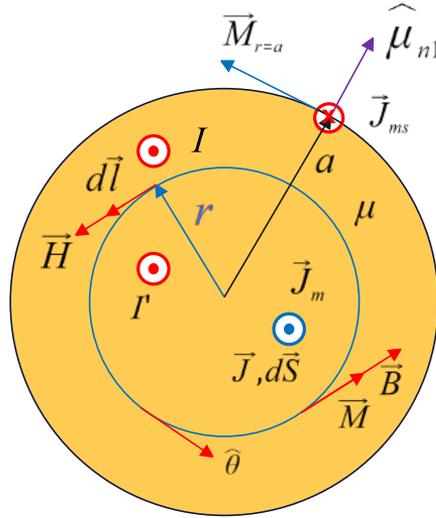


Figura 2.34: Vista superior del cilindro coaxial de la Fig. 2.33, para $r < a$.
Fuente: Los autores

entonces,

$$\vec{B} = \mu \frac{I r}{2\pi a^2} \hat{\theta} \quad (2.217)$$

El vector de magnetización \vec{M} viene dado por:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} \quad (2.218)$$

Reemplazando el valor de \vec{H} , se tiene:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I r}{2\pi a^2} \hat{\theta} \quad (2.219)$$

o, escalarmente,

$$M_{\theta} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I r}{2\pi a^2} \quad (2.220)$$

Para determinar la densidad de corriente de magnetización \vec{J}_m , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (2.221)$$

En coordenadas cilíndricas, el $\vec{\nabla}_x \vec{M}$ es:

$$\vec{\nabla}_x \vec{M} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial M_z}{\partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial z} \right] \hat{r} + \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r M_\theta - \frac{\partial M_r}{\partial \theta} \right) \right] \hat{z} \quad (2.222)$$

Reemplazando,

$$\vec{J}_m = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial M_z}{\partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial z} \right] \hat{r} + \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r M_\theta - \frac{\partial M_r}{\partial \theta} \right) \right] \hat{z} \quad (2.223)$$

Debido a que la permeabilidad μ del cilindro de radio a , es constante, entonces el vector de magnetización es constante alrededor del ángulo θ y a lo largo de z , únicamente varía con respecto al radio r ; además, el vector magnetización solo tiene la componente del ángulo θ , esto es, M_θ , entonces:

$$M_z = 0, \quad M_r = 0 \quad (2.224)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial M_\theta}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial M_r}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial M_z}{\partial r} = 0 \quad (2.225)$$

Por lo tanto, en la Ecuación 2.223 se tiene:

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r M_\theta) \right] \hat{z} \quad (2.226)$$

Reemplazando la Ecuación 2.220 en la Ecuación 2.226, se tiene:

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I r}{2\pi a^2} \right) \right] \hat{z} \quad (2.227)$$

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I r^2}{2\pi a^2} \right) \right] \hat{z} \quad (2.228)$$

Derivando con respecto al radio r , se tiene:

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I 2r}{2\pi a^2} \right] \hat{z} \quad (2.229)$$

y simplificando la ecuación, se tiene la densidad de corriente de magnetización \vec{J}_m en la dirección de z

$$\vec{J}_m = \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{\pi a^2} \right] \hat{z} \quad (2.230)$$

Para determinar la densidad de corriente de magnetización superficial \vec{J}_{ms} en la superficie del cilindro de radio a , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M}_{r=a} \times \hat{\mu}_{n1} \quad (2.231)$$

Donde, $\hat{\mu}_{n1}$ es el vector unitario normal

Destruyendo el producto cruz, la dirección del vector \vec{J}_{ms} tiene sentido negativo de la componente z , es decir, en la Fig. 2.34 el vector \vec{J}_{ms} está entrando en forma perpendicular, esto es:

$$\vec{J}_{ms} = M_{r=a} \mu_{n1} \text{ sen } 90^\circ (-\hat{z}) \quad (2.232)$$

$$\vec{J}_{ms} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I a}{2\pi a^2} \hat{z} \quad (2.233)$$

Simplificando,

$$\vec{J}_{ms} = - \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi a} \hat{z} \quad (2.234)$$

Para $a < r < b$

En la Fig. 2.33, se toma una vista superior del eje z , tal como se muestra en la Fig. 2.35, y se aplica la Ley generalizada de Ampere para determinar la intensidad de campo magnético \vec{H} , en este caso la trayectoria circular imaginaria de radio r encierra toda la corriente I , entonces:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_n \quad (2.235)$$

$$\int_0^r \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2.236)$$

Destruyendo el producto punto e integrando, se tiene:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (2.237)$$

Escribiendo en forma vectorial

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.238)$$

Debido a que el análisis se está desarrollando en el vacío, la permeabilidad es μ_0 , entonces,

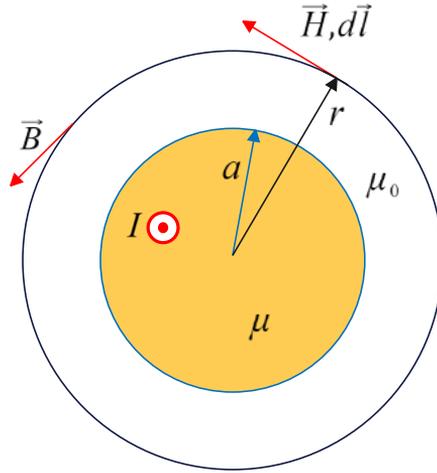


Figura 2.35: Análisis para, $a < r < b$.
Fuente: Los autores

el vector de densidad de flujo magnético es:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.239)$$

El vector magnetización es:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1 \right) \frac{I r}{2\pi a^2} \hat{\theta} \vec{M} = 0 \quad (2.240)$$

El vector densidad de corriente de magnetización es:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (2.241)$$

Utilizando los criterios anteriores, se tiene:

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rM_\theta) \right] \hat{z} \quad (2.242)$$

Reemplazando $\vec{M} = 0$,

$$\vec{J}_m = 0 \quad (2.243)$$

Finalmente, el vector de densidad de corriente de magnetización \vec{J}_{ms} es:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{\mu}_{n1} \quad (2.244)$$

Reemplazando para $\vec{M} = 0$, se tiene

$$\vec{J}_{ms} = 0 \quad (2.245)$$

Para $b < r < d$

En la Fig. 2.33, se toma una vista superior del eje z , tal como se muestra en la Fig. 2.36, y se aplica la Ley generalizada de Ampere para determinar la intensidad de campo magnético \vec{H} , en este caso la trayectoria circular imaginaria de radio r encierra toda la corriente I , entonces:

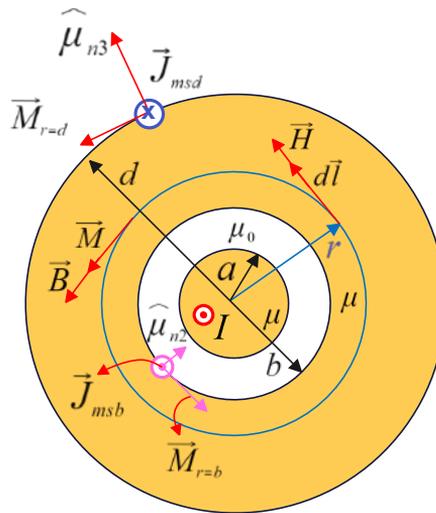


Figura 2.36: Análisis para $b < r < d$.

Fuente: Los autores

$$\int_0^r \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2.246)$$

Destruyendo el producto punto e integrando, se tiene:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (2.247)$$

Escribiendo en forma vectorial:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.248)$$

Debido a que el análisis se está desarrollando en el tubo de radios b y d , la permeabilidad es μ , entonces, el vector de densidad de flujo magnético es:

$$\vec{B} = \mu \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.249)$$

El vector magnetización es:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.250)$$

o, escalarmente:

$$M_{\theta} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi r} \quad (2.251)$$

Para determinar la densidad de corriente de magnetización \vec{J}_m , se utiliza los mismo criterios para el rango de $a < r < b$, por consiguiente:

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rM_{\theta}) \right] \hat{z} \quad (2.252)$$

Reemplazando la Ecuación 2.251 en la Ecuación 2.252, se tiene

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi r} \right) \right] \hat{z} \quad (2.253)$$

simplificando

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi} \right) \right] \hat{z} \quad (2.254)$$

Derivando con respecto al radio r , se tiene:

$$\vec{J}_m = 0 \quad (2.255)$$

Para determinar la densidad de corriente de magnetización superficial \vec{J}_{msb} en la superficie del cilindro de radio b , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{msb} = \vec{M}_{r=b} \times \hat{\mu}_{n2} \quad (2.256)$$

Donde, $\hat{\mu}_{n2}$ es el vector unitario normal.

Destruyendo el producto cruz, la dirección del vector \vec{J}_{msb} tiene sentido positivo de la componente z , es decir, en la Fig. 2.36 el vector \vec{J}_{msb} está saliendo en forma perpendicular, esto

es:

$$\vec{J}_{msb} = M_{r=b} \mu_{n2} \text{sen } 90^\circ \hat{Z} \quad (2.257)$$

Pero, $\mu_{n2} = 1$; y $\text{sen } 90^\circ = 1$, entonces:

$$\vec{J}_{msb} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi b} \hat{Z} \quad (2.258)$$

Para determinar la densidad de corriente de magnetización superficial \vec{J}_{msd} en la superficie del cilindro de radio d , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{msd} = \vec{M}_{r=d} \times \hat{\mu}_{n3} \quad (2.259)$$

Donde, $\hat{\mu}_{n3}$ es el vector unitario normal.

Destruyendo el producto cruz, la dirección del vector \vec{J}_{msd} tiene sentido negativo de la componente z , es decir, en la figura 2.32 el vector \vec{J}_{msd} está entrando en forma perpendicular, esto es:

$$\vec{J}_{msd} = M_{r=d} \mu_{n3} \text{sen } 90^\circ (-\hat{Z}) \quad (2.260)$$

$$\vec{J}_{msd} = -\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi d} \hat{Z} \quad (2.261)$$

Para $r > d$

En la Fig. 2.33, se toma una vista superior del eje z , tal como se muestra en la Fig. 2.37, y se aplica la Ley generalizada de Ampere para determinar la intensidad de campo magnético \vec{H} , en este caso la trayectoria circular imaginaria de radio r encierra toda la corriente I , entonces:

$$\int_0^r \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (2.262)$$

Destruyendo el producto punto e integrando, se tiene:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (2.263)$$

Escribiendo en forma vectorial,

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.264)$$

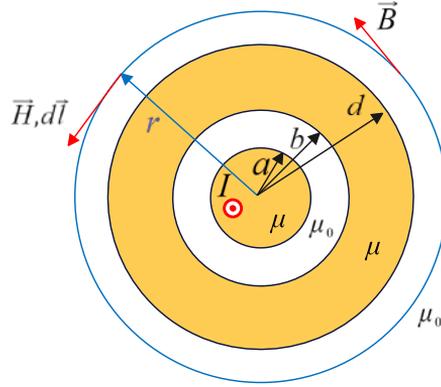


Figura 2.37: Análisis para $r > d$.

Fuente: Los autores

Debido a que el análisis se está desarrollando en el exterior del cilindro de radios d , la permeabilidad es en el vacío μ_0 , entonces, el vector de densidad de flujo magnético es:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.265)$$

El vector magnetización es:

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu_0}{\mu} - 1 \right) \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (2.266)$$

$$\vec{M} = 0 \quad (2.267)$$

El vector densidad de corriente de magnetización es:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (2.268)$$

Utilizando los criterios anteriores, se tiene:

$$\vec{J}_m = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rM_\theta) \right] \hat{z} \quad (2.269)$$

Reemplazando $\vec{M} = 0$

$$\vec{J}_m = 0 \quad (2.270)$$

Finalmente, el vector de densidad de corriente de magnetización \vec{J}_{ms} es:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{\mu}_{n1} \quad (2.271)$$

Reemplazando para $\vec{M} = 0$, se tiene:

$$\vec{J}_{ms} = 0 \quad (2.272)$$

Problema 2.2. El circuito magnético mostrado en la Fig. 2.38, tiene una permeabilidad uniforme del material ferromagnético μ , está compuesto por siete secciones de material ferromagnético y con secciones transversales S iguales. Posee tres fuentes de fuerza magnetomotriz, $N_1 I_1$, $N_2 I_2$ y $N_3 I_3$. Determinar los flujos Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 .

Solución:

En primer lugar, se debe transformar el circuito magnético de la Fig. 2.38 en un circuito eléctrico equivalente el cual se muestra en la Fig. 2.39. Con los siete segmentos del material ferromagnético, se determinan las siete reluctancias utilizando las ecuaciones respectivas, que se muestran a continuación:

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu S} \quad ; \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu S} \quad ; \quad R_{m3} = \frac{l_3}{\mu S} \quad (2.273)$$

$$R_{m4} = \frac{l_4}{\mu S} \quad ; \quad R_{m5} = \frac{l_5}{\mu S} \quad ; \quad R_{m6} = \frac{l_6}{\mu S} \quad ; \quad R_{m7} = \frac{l_7}{\mu S} \quad (2.274)$$

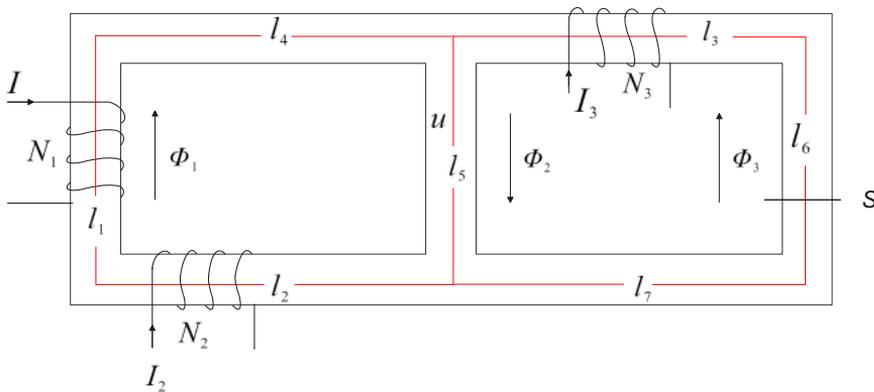


Figura 2.38: Circuito magnético.

Fuente: Los autores

Para determinar los tres flujos Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 , se utiliza el análisis de mallas en el circuito de la Fig. 2.39 y se obtienen dos mallas con flujos Φ_a y Φ_b , tal como se muestra en la Fig. 2.40.

MALLA a, LVK.

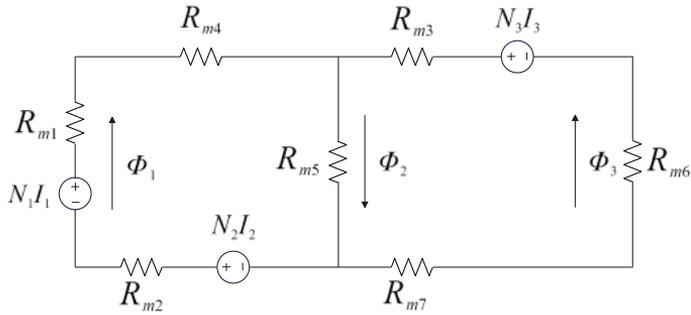


Figura 2.39: Circuito eléctrico equivalente al circuito magnético de la Fig. 2.38.

Fuente: Los autores

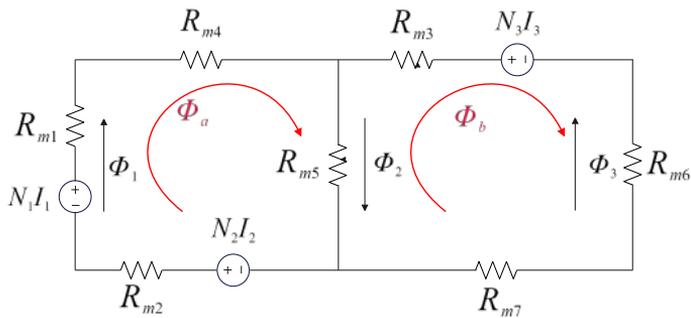


Figura 2.40: Obtención de Φ_a y Φ_b por análisis de mallas.

Fuente: Los autores

$$-N_1 I_1 + R_{m1} \Phi_a + R_{m4} \Phi_a + R_{m5} (\Phi_a - \Phi_b) - N_2 I_2 + R_{m2} \Phi_a = 0 \quad (2.275)$$

$$-N_1 I_1 + R_{m1} \Phi_a + R_{m4} \Phi_a + R_{m5} \Phi_a - R_{m5} \Phi_b - N_2 I_2 + R_{m2} \Phi_a = 0 \quad (2.276)$$

$$-N_1 I_1 - N_2 I_2 + (R_{m1} + R_{m2} + R_{m4} + R_{m5}) \Phi_a - R_{m5} \Phi_b = 0 \quad (2.277)$$

$$(R_{m1} + R_{m2} + R_{m4} + R_{m5}) \Phi_a - R_{m5} \Phi_b = N_1 I_1 + N_2 I_2 \quad (2.278)$$

MALLA b, LVK.

$$N_3 I_3 + R_{m6} \Phi_b + R_{m7} \Phi_b + R_{m5} (\Phi_b - \Phi_a) + R_{m3} \Phi_b = 0 \quad (2.279)$$

$$N_3 I_3 + R_{m6} \Phi_b + R_{m7} \Phi_b + R_{m5} \Phi_b - R_{m5} \Phi_a + R_{m3} \Phi_b = 0 \quad (2.280)$$

$$-R_{m5} \Phi_a + (R_{m3} + R_{m5} + R_{m6} + R_{m7}) \Phi_b = -N_3 I_3 \quad (2.281)$$

Con las ecuaciones 2.278 y 2.281 se determinan los valores de flujo Φ_a y Φ_b utilizando el

método de determinantes, así:

$$\Phi_a = \frac{\begin{vmatrix} N_1 I_1 + N_2 I_2 & -R_{m5} \\ -N_3 I_3 & (R_{m3} + R_{m5} + R_{m6} + R_{m7}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m2} + R_{m4} + R_{m5}) & -R_{m5} \\ -R_{m5} & (R_{m3} + R_{m5} + R_{m6} + R_{m7}) \end{vmatrix}} \quad (2.282)$$

$$\Phi_b = \frac{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m2} + R_{m4} + R_{m5}) & N_1 I_1 + N_2 I_2 \\ -R_{m5} & -N_3 I_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m2} + R_{m4} + R_{m5}) & -R_{m5} \\ -R_{m5} & (R_{m3} + R_{m5} + R_{m6} + R_{m7}) \end{vmatrix}} \quad (2.283)$$

Entonces,

$$\Phi_1 = \Phi_a \quad (2.284)$$

$$\Phi_2 = \Phi_a - \Phi_b \quad (2.285)$$

$$\Phi_3 = -\Phi_b \quad (2.286)$$

Problema 2.3. El circuito magnético mostrado en la Fig. 2.41, tiene una permeabilidad uniforme del material ferromagnético μ , está compuesto por siete secciones de material ferromagnético y con secciones transversales S iguales. Posee dos fuentes de fuerza magnetomotriz, $N_1 I_1$ y $N_2 I_2$. Determinar el flujo del entrehierro Φ_0 .

Solución:

Primeramente, se debe transformar el circuito magnético de la Fig. 2.41 en un circuito eléctrico equivalente el cual se muestra en la Fig. 2.42. Con los siete segmentos del material ferromagnético, se determinan las siete reluctancias y la del entrehierro, utilizando las ecuaciones respectivas, que se muestran a continuación:

$$\mu \gg \mu_0 \quad (2.287)$$

$$R_{m0} \gg (R_{m1}, R_{m2}, R_{m3}, R_{m4}, R_{m5}, R_{m6}, R_{m7}) \quad (2.288)$$

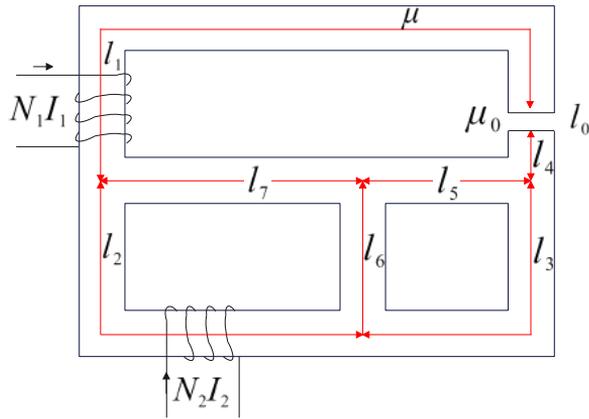


Figura 2.41: Circuito magnético con entrehierro l_0 .

Fuente: Los autores

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu S} \quad ; \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu S} \quad ; \quad R_{m3} = \frac{l_3}{\mu S} \quad ; \quad R_{m4} = \frac{l_4}{\mu S} \quad (2.289)$$

$$R_{m5} = \frac{l_5}{\mu S} \quad ; \quad R_{m6} = \frac{l_6}{\mu S} \quad ; \quad R_{m7} = \frac{l_7}{\mu S} \quad ; \quad R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 S} \quad (2.290)$$

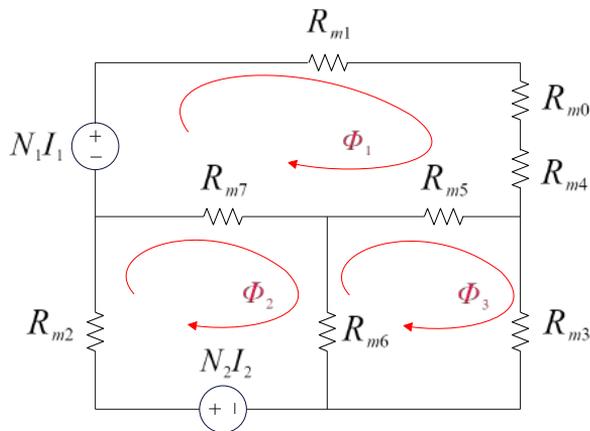


Figura 2.42: Circuito eléctrico equivalente al circuito magnético de la Fig. 2.41.

Fuente: Los autores

Para determinar el flujo del entrehierro Φ_0 , se utiliza el análisis de mallas, tal como se muestra en el circuito de la Fig. 2.42 y se obtienen tres mallas con flujos Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 .

MALLA 1, LVK

$$-N_1 I_1 + R_{m1} \Phi_1 + R_{m0} \Phi_1 + R_{m4} \Phi_1 + R_{m5} (\Phi_1 - \Phi_3) + R_{m7} (\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \quad (2.291)$$

$$-N_1 I_1 + R_{m1} \Phi_1 + R_{m0} \Phi_1 + R_{m4} \Phi_1 + R_{m5} \Phi_1 - R_{m5} \Phi_3 + R_{m7} \Phi_1 - R_{m7} \Phi_2 = 0 \quad (2.292)$$

$$(R_{m1} + R_{m0} + R_{m4} + R_{m5} + R_{m7}) \Phi_1 - R_{m7} \Phi_2 - R_{m5} \Phi_3 = N_1 I_1 \quad (2.293)$$

MALLA 2, LVK

$$N_2 I_2 + R_{m2} \Phi_2 + R_{m7} (\Phi_2 - \Phi_1) + R_{m6} (\Phi_2 - \Phi_3) = 0 \quad (2.294)$$

$$N_2 I_2 + R_{m2} \Phi_2 + R_{m7} \Phi_2 - R_{m7} \Phi_1 + R_{m6} \Phi_2 - R_{m6} \Phi_3 = 0 \quad (2.295)$$

$$-R_{m7} \Phi_1 + (R_{m2} + R_{m7} + R_{m6}) \Phi_2 - R_{m6} \Phi_3 = -N_2 I_2 \quad (2.296)$$

MALLA 3, LVK

$$R_{m3} \Phi_3 + R_{m6} (\Phi_3 - \Phi_2) + R_{m5} (\Phi_3 - \Phi_1) = 0 \quad (2.297)$$

$$R_{m3} \Phi_3 + R_{m6} \Phi_3 - R_{m6} \Phi_2 + R_{m5} \Phi_3 - R_{m5} \Phi_1 = 0 \quad (2.298)$$

$$-R_{m5} \Phi_1 - R_{m6} \Phi_2 + (R_{m3} + R_{m6} + R_{m5}) \Phi_3 = 0 \quad (2.299)$$

Con las ecuaciones 2.293, 2.296 y 2.299 se determinan los valores de flujo Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 utilizando el método de determinantes, así:

$$\Phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} N_1 I_1 & -R_{m7} & -R_{m5} \\ -N_2 I_2 & (R_{m2} + R_{m7} + R_{m6}) & -R_{m6} \\ 0 & -R_{m6} & (R_{m3} + R_{m6} + R_{m5}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m0} + R_{m4} + R_{m5} + R_{m7}) & -R_{m7} & -R_{m5} \\ -R_{m7} & (R_{m2} + R_{m7} + R_{m6}) & -R_{m6} \\ -R_{m5} & -R_{m6} & (R_{m3} + R_{m6} + R_{m5}) \end{vmatrix}} \quad (2.300)$$

$$\Phi_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m0} + R_{m4} + R_{m5} + R_{m7}) & N_1 I_1 & -R_{m5} \\ -R_{m7} & -N_2 I_2 & -R_{m6} \\ -R_{m5} & 0 & (R_{m3} + R_{m6} + R_{m5}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m0} + R_{m4} + R_{m5} + R_{m7}) & -R_{m7} & -R_{m5} \\ -R_{m7} & (R_{m2} + R_{m7} + R_{m6}) & -R_{m6} \\ -R_{m5} & -R_{m6} & (R_{m3} + R_{m6} + R_{m5}) \end{vmatrix}} \quad (2.301)$$

$$\Phi_3 = \frac{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m0} + R_{m4} + R_{m5} + R_{m7}) & -R_{m7} & N_1 I_1 \\ -R_{m7} & (R_{m2} + R_{m7} + R_{m6}) & -N_2 I_2 \\ -R_{m5} & -R_{m6} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_{m1} + R_{m0} + R_{m4} + R_{m5} + R_{m7}) & -R_{m7} & -R_{m5} \\ -R_{m7} & (R_{m2} + R_{m7} + R_{m6}) & -R_{m6} \\ -R_{m5} & -R_{m6} & (R_{m3} + R_{m6} + R_{m5}) \end{vmatrix}} \quad (2.302)$$

Finalmente, de la Fig. 2.42, se ve que, el flujo del entrehierro Φ_0 es igual al flujo de malla Φ_1 , entonces:

$$\Phi_0 = \Phi_1 \quad (2.303)$$

Capítulo III

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

3.1. Fuerza entre dos cargas pequeñas en un movimiento arbitrario lento

Cuando las cargas se encuentran estáticas, en reposo, en equilibrio, o en general sin moverse, estas producen una fuerza de tipo eléctrica en el espacio que las rodea; y, para calcular la magnitud, dirección y sentido de estas fuerzas, se utiliza la Ecuación 3.1 de la Ley de Coulomb aplicables a pares de cargas (Ferrero Botero 2020, p15), que se muestra en la Fig. 3.1, siendo \vec{F}_{12} la fuerza que ejerce la carga Q_1 sobre la carga Q_2 , $\hat{\mu}_{12}$ es el vector unitario dirigido desde la carga 1 hacia la carga 2, r la distancia entre las dos cargas, K es la constante de Coulomb $K = 8,9875517923 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ y las velocidades de las cargas \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son iguales a cero, ya que se encuentran estáticas.

$$\vec{F}_{12} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{\mu}_{12} \quad (3.1)$$

Sin embargo, la fuerza total entre dos pequeñas cargas eléctricas en movimiento, no viene dada únicamente por la Ley de Coulomb. Se deben agregar ciertos términos correctivos para tener en cuenta la fuerza adicional. También se nota que, para velocidades razonables de las cargas, los términos correctivos son muy pequeños en comparación con la fuerza de Coulomb, y en consecuencia, que no es posible determinarlos experimentalmente de manera directa (ESPOL 1982, p369).

Entonces, al tratar con estas fuerzas adicionales en el caso de sistemas de corriente constante, se determinó un término adicional no mediante mediciones directas en las dos cargas

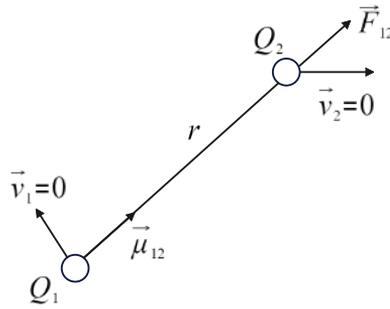


Figura 3.1: Las cargas Q_1 y Q_2 están estáticas sin movimiento.

Fuente: Los autores

en movimiento, sino de manera indirecta. Se midió la fuerza total sobre un gran número de cargas en un estado conocido de movimiento constante y se redujo matemáticamente a las contribuciones de pares de cargas individuales en movimiento. El término adicional a la fuerza de Coulomb, se conoce como la fuerza magnética mostrada en la Ecuación 3.2 (ESPOL 1982, p369).

$$\vec{F}_{m12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \hat{\mu}_{12}) \quad (3.2)$$

Donde, \vec{F}_{m12} es la fuerza magnética que ejerce la carga 1 sobre la carga 2; siempre y cuando, la carga Q_1 se mueva con una velocidad \vec{v}_1 y la carga Q_2 se mueva con una velocidad \vec{v}_2 , tal como se muestra en la Fig. 3.2; además, $\hat{\mu}_{12}$ es el vector unitario dirigido desde la carga 1 hacia la carga 2.

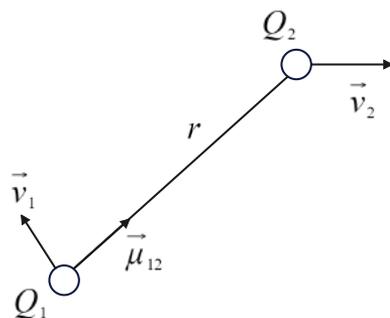


Figura 3.2: Las cargas Q_1 y Q_2 en movimiento.

Fuente: Los autores

Cuando la carga Q_1 se mueve con una velocidad \vec{v}_1 y la carga Q_2 permanece estática con velocidad $\vec{v}_2 = 0$, tal como se muestra en la Fig. 3.3; entonces, la carga Q_2 ejerce una fuerza eléctrica \vec{F}'_{e12} sobre la carga Q_1 . Debido a que el vector unitario $\hat{\mu}_{12}$ está dirigido de la carga

1 hacia la carga 2, y el vector \vec{F}'_{e12} representa la fuerza eléctrica producida por la carga 1 sobre la carga 2, la Ecuación 3.3 lleva el signo negativo (ESPOL 1982, p370), esto es:

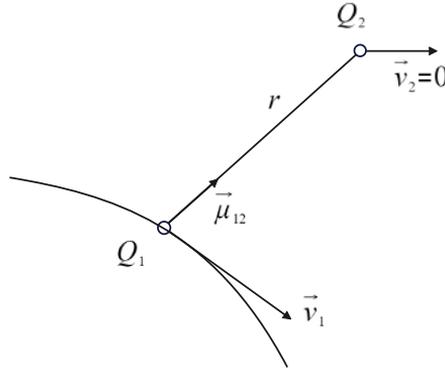


Figura 3.3: La carga Q_1 en movimiento y la carga Q_2 estática.

Fuente: Los autores

$$\vec{F}'_{e12} = -\mu_0 \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}_1}{r} \right)_{\vec{v}_2=0} \quad (3.3)$$

Las fuerzas que actúan entre todos los sistemas de corrientes y cargas eléctricas macroscópicas casi-estacionarias pueden explicarse si se agrega un solo término a la fuerza de Coulomb y la fuerza magnética entre dos cargas eléctricas, por lo tanto, a partir de experimentos macroscópicos con corrientes casi estacionarias y grupos de cargas elementales, se deduce que la fuerza total ejercida por una pequeña carga Q_1 sobre una carga Q_2 es:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{\mu}_{12} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \hat{\mu}_{12}) - \mu_0 \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}_1}{r} \right)_{\vec{v}_2=0} \quad (3.4)$$

El primero y tercer término de la Ecuación 3.4, corresponde a la fuerza de tipo eléctrica, reagrupando se tiene la Ecuación 3.5,

$$\vec{F}_{12} = Q_2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{\mu}_{12} - \mu_0 \frac{Q_1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}_1}{r} \right)_{\vec{v}_2=0} \right] + Q_2 \vec{v}_2 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1}{r^2} (\vec{v}_1 \times \hat{\mu}_{12}) \right] \quad (3.5)$$

Por lo tanto, el primer término de la Ecuación 3.5 representa la fuerza eléctrica $Q_2 \vec{E}$, entonces el campo eléctrico \vec{E} , es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{\mu}_{12} - \mu_0 \frac{Q_1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}_1}{r} \right)_{\vec{v}_2=0} \quad (3.6)$$

y el segundo término de la Ecuación 3.5 representa la fuerza magnética, puntualizando que, lo que está entre corchetes, representa la densidad de flujo magnético \vec{B}_1 producido por la

carga Q_1 , esto es:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 Q_1}{4\pi r^2} (\vec{v}_1 \times \hat{\mu}_{12}) \quad (3.7)$$

Volviendo a reescribir la Ecuación 3.5, se tiene:

$$\vec{F}_{12} = Q_2 \vec{E} + Q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 \quad (3.8)$$

La Ecuación 3.8 se conoce como la ecuación de la fuerza de Lorenz.

3.2. El campo eléctrico de un sistema de corriente cuasi - estacionario

En un sistema de corriente cuasi-estacionario, por definición, las corrientes varían tan lentamente, que el campo magnético debido a ellas es prácticamente igual al producido por corrientes constantes. Las cuales en ese preciso instante, tienen la misma distribución que las corrientes variables. Esto puede incluir conductores portadores de corriente que se mueven lentamente, o conductores estacionarios con corrientes que varían lentamente, o ambos. En casos de estado estacionario sinusoidal, los circuitos de dimensiones de laboratorio generalmente pueden considerarse cuasi estacionarios hasta frecuencias de varios millones de ciclos por segundo (ESPOL 1982, p373).

La Ecuación 3.6 se obtuvo para cargas pequeñas con movimiento arbitrario lento, o en este caso, para un sistema de corriente cuasi-estacionario, por lo tanto, el campo eléctrico \vec{E} producida por estas cargas Q , se muestra en la Ecuación 3.9.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mu} - \mu_0 \frac{Q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}}{r} \right) \quad (3.9)$$

El primer término de la Ecuación 3.9, se debe estrictamente a cargas estáticas que se pueden representar como un posible término de Coulomb (PTC), y el segundo término es cuando la carga Q obedece a pequeñas cargas con movimiento arbitrario lento o a un sistema de corriente cuasi-estacionario, entonces reescribiendo la Ecuación 3.9, se tiene:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_V Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}}{r} \right) + \text{un posible término de Coulomb} \quad (3.10)$$

La sumatoria de la Ecuación 3.10 se refiere al volumen V ocupado por las corrientes variables. Macroscópicamente, esta suma se puede representar como una integral, que se muestra en la Ecuación 3.11, así:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{NQ\vec{v}}{r} \right) dV + PTC \quad (3.11)$$

Donde, N es el número de cargas libres por unidad de volumen. Pero, el término $NQ\vec{v}$ es igual a la densidad de corriente \vec{J} que es una función del tiempo en cada punto de tal sistema de corriente, entonces:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dV + PTC \quad (3.12)$$

Reorganizando la Ecuación 3.12, se tiene

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} dV \right] + PTC \quad (3.13)$$

pero, el término que está entre paréntesis en la Ecuación 3.13 es exactamente el vector potencial vectorial magnético \vec{A} , creado por toda la corriente del sistema, esto es:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} dV \quad (3.14)$$

Reemplazando la Ecuación 3.14 en la Ecuación 3.13, se tiene finalmente la Ecuación 3.15 del campo eléctrico, así:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + PTC \quad (3.15)$$

3.3. Ley de Inducción electromagnética de Faraday para un lazo estacionario

Considere ahora un bucle conductor cerrado situado en este campo eléctrico. Cada carga libre dentro del bucle recibe la acción del campo eléctrico definido por la Ecuación 3.15. La integral de línea del posible término de Coulomb (PTC) alrededor de un circuito cerrado siempre es cero, como se demostró en la sección de electrostática, a partir de la ecuación del potencial eléctrico entre dos puntos. El primer término; sin embargo, no es del tipo de Coulomb y actúa como un campo impreso a lo largo del conductor. La fuerza electromotriz inducida en todo el circuito estacionario cerrado está dada por la Ecuación 3.16 (López Rodríguez V. y Montoya Lirola 2021, p87), así:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.16)$$

Reemplazando la Ecuación 3.15 en la Ecuación 3.16, se tiene:

$$\mathcal{E} = \oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + PTC \right) \cdot d\vec{l} \quad (3.17)$$

Separando los términos de integración,

$$\mathcal{E} = \oint_C -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_C (PTC) \cdot d\vec{l} \quad (3.18)$$

El segundo término de la Ecuación 3.18 es igual a cero, debido a que el PTC es el campo eléctrico E , entonces, la integral cerrada de línea es cero, esto es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3.19)$$

El primer término de la Ecuación 3.18, sin embargo, no es del tipo de Coulomb y actúa como un campo impreso a lo largo del conductor. La fuerza electromotriz inducida en todo el circuito estacionario cerrado está dada por:

$$\mathcal{E} = \oint_C -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \quad (3.20)$$

Organizando de mejor manera,

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3.21)$$

Aplicando el Teorema de Stoke en la Ecuación 3.21, se tiene:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (3.22)$$

Entonces,

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (3.23)$$

Pero, la densidad de flujo magnético es igual al rotacional del potencial vectorial magnético, esto es:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.24)$$

Reemplazando la Ecuación 3.24 en la Ecuación 3.23, se tiene:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.25)$$

Además, el flujo magnético φ , es igual a:

$$\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.26)$$

Reemplazando la Ecuación 3.26 en la Ecuación 3.25, se tiene:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (3.27)$$

La Ecuación 3.27 es la Ley de Inducción de Faraday para lazo estacionario, es decir,

$$\mathcal{E} = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{Lazo estacionario} \quad (3.28)$$

Ejemplo 1. El imán de la Fig. 3.4, se está acercando con una velocidad \vec{v} a la espira que encierra una superficie S . Determinar la dirección de la corriente inducida en la espira.

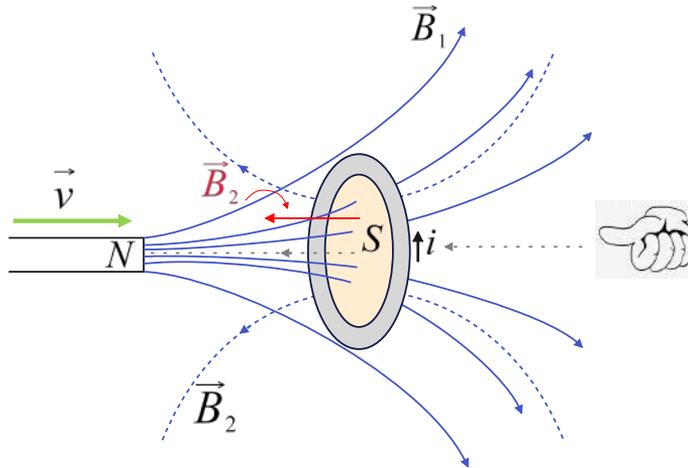


Figura 3.4: Imán permanente acercándose a una espira.

Fuente: Los autores

Solución:

Al atravesar las líneas de inducción magnética \vec{B}_1 en el interior de la espira que describe un área S , se induce una corriente i en dicha espira. Para determinar la dirección que circula la corriente inducida se aplica la Ley de Lenz. Como el flujo que genera el imán permanente está aumentando, la corriente inducida debe generar un flujo que se oponga a este aumento. Utilizando la regla de la mano derecha, el dedo pulgar indica la dirección de la densidad de flujo magnético \vec{B}_2 y girando la mano en contra de las manecillas del reloj indica la dirección de la corriente i inducida alrededor de la espira, tal como se muestra en la Fig. 3.4.

Ejemplo 2. Un solenoide de radio a muy largo de N espiras lleva una corriente $i = I_m \cos \omega t$. Determinar el campo eléctrico \vec{E} inducido en la espira de radio b , como se muestra en la Fig.3.5.

Solución:

La densidad de flujo magnético B en el interior de un solenoide viene dado por la siguiente ecuación:

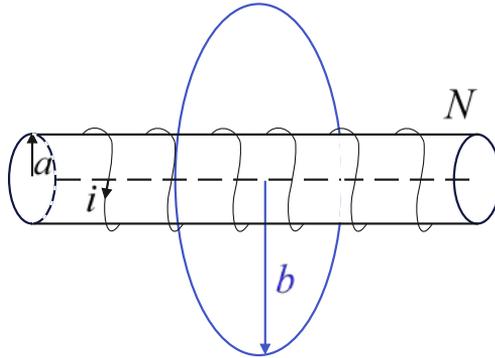


Figura 3.5: Solenoide de corriente i con una espira concéntrica de radio b .

Fuente: Los autores

$$B = \mu_0 i N \tag{3.29}$$

Donde, N es el número de espiras por unidad de longitud, i es la corriente sinusoidal que circula por las espiras del solenoide y, μ_0 es la permeabilidad en el vacío.

Para calcular el campo eléctrico E en la espira de radio b , producida por la corriente que circula por el solenoide de radio a , se procede de la siguiente manera:

Para $a < r < b$

Primero se dibuja una vista frontal del lado izquierdo del solenoide de la Fig. 3.5, y utilizando la Ecuación 3.28, se traza una trayectoria circular de radio r y se dibujan los vectores, potencial vectorial magnético \vec{A} y de desplazamiento $d\vec{l}$, tal como se muestra en la Fig.3.6.

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{3.30}$$

Destruyendo el producto punto,

$$\int_0^a B dS \cos 180^\circ = \int_0^r A dl \cos 0^\circ \tag{3.31}$$

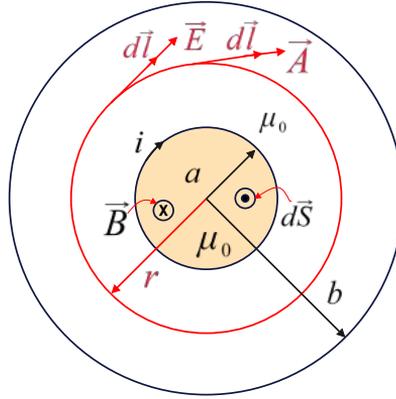


Figura 3.6: Vista frontal del lado izquierdo del solenoide de la Fig.3.5.

Fuente: Los autores

resolviendo la integral,

$$-B(\pi a^2) = A(2\pi r) \quad (3.32)$$

despejando A y reemplazando B , se tiene:

$$A = -\frac{B(\pi a^2)}{2\pi r} = -\frac{\mu_0 i N a^2}{2r} \quad (3.33)$$

$$A = -\frac{\mu_0 i N a^2}{2r} \quad (3.34)$$

Reemplazando la ecuación de la corriente i , se tiene la magnitud del potencial vectorial magnético A , esto es:

$$A = -\frac{\mu_0 N a^2}{2r} I_m \cos \omega t \quad (3.35)$$

En forma vectorial, las líneas del vector \vec{A} son círculos centrados en el eje del solenoide, por lo que el vector está en la dirección del ángulo θ , entonces $\hat{\theta}$ es el vector unitario, así:

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 N a^2 I_m}{2r} (\cos \omega t) \hat{\theta} \quad (3.36)$$

Utilizando la Ecuación 3.15, se calcula la intensidad de campo eléctrico \vec{E} , no obstante, para este problema, el término PTC no existe, entonces es igual a cero, esto es:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.37)$$

Reemplazando la Ecuación 3.36 en la Ecuación 3.37, se tiene:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\mu_0 N a^2 I_m}{2r} \cos \omega t \right) \hat{\theta} \quad (3.38)$$

Aplicando las propiedades de los signos,

$$\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 N a^2 I_m}{2r} \cos \omega t \right) \hat{\theta} \quad (3.39)$$

derivando la ecuación,

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 N a^2 \omega I_m}{2r} (\text{sen } \omega t) \hat{\theta} \quad (3.40)$$

el campo eléctrico está en función del radio y ángulo, entonces,

$$\vec{E}(r, \theta) = -\frac{\mu_0 N a^2 \omega I_m}{2r} (\text{sen } \omega t) \hat{\theta} \quad (3.41)$$

evaluando el campo eléctrico para un radio $r = b$, se tiene:

$$\vec{E}(r = b) = -\frac{\mu_0 N a^2 \omega I_m}{2b} (\text{sen } \omega t) \hat{\theta} \quad (3.42)$$

Finalmente, el valor instantáneo en forma vectorial de la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}(t)$ es mostrado en la Ecuación 3.43, así:

$$\vec{E}(t) = -\frac{\mu_0 N a^2 \omega I_m}{2b} (\text{sen } \omega t) \hat{\theta} \quad (3.43)$$

y, en forma escalar:

$$E(t) = -\frac{\mu_0 N a^2 \omega I_m}{2b} (\text{sen } \omega t) \quad (3.44)$$

Las líneas del vector campo eléctrico \vec{E} son también círculos centrados en el eje del solenoide. La fuerza electromotriz inducida en el lazo circular de radio b mostrado en la Fig. 3.7, y de acuerdo a la Ecuación 3.28, se tiene:

$$\mathcal{E} = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.45)$$

Destruyendo el producto punto en la Ecuación 3.45, se tiene:

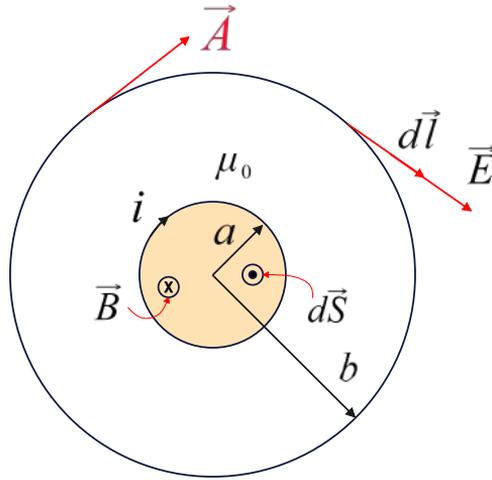


Figura 3.7: Campo eléctrico E para un radio b .

Fuente: Los autores

$$\mathcal{E} = - \int_0^b E dl \cos 0^\circ = - \int_0^b E dl \quad (3.46)$$

$$\mathcal{E} = - \int_0^b E dl \quad (3.47)$$

Reemplazando el valor del campo eléctrico de la Ecuación 3.44 en la Ecuación 3.47, se tiene:

$$\mathcal{E} = - \int_0^b -\frac{\mu_0 N a^2 \omega I_m}{2b} (\text{sen } \omega t) dl \quad (3.48)$$

Integrando con respecto al círculo de radio b , se tiene:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 N a^2 \omega I_m}{2b} (\text{sen } \omega t) (2\pi b) \quad (3.49)$$

Simplificando, se obtiene la fuerza electromotriz inducida en la espira de radio b , esto es:

$$\mathcal{E} = \mu_0 N a^2 \pi \omega I_m \text{sen } \omega t \quad (3.50)$$

LEY GENERALIZADA DE MAXWELL-FARADAY

De la Ecuación 3.28, se tiene la forma integral de la Ley de Maxwell-Faraday, mostrado en la Ecuación 3.51,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.51)$$

Aplicando el Teorema de Stoke en el lado izquierdo de la Ecuación 3.51, se tiene:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3.52)$$

Integrando se obtiene la forma diferencial de la Ley Maxwell-Faraday en la Ecuación 3.53, así:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Forma diferencial de la Ley Maxwell - Faraday} \quad (3.53)$$

3.4. Fuerza electromotriz inducida en conductores moviéndose en un campo magnético estático

Considérese un trozo de alambre conductor que se mueve con una velocidad \vec{v} en un campo magnético estático \vec{B} (densidad de flujo magnético). Sobre todas las cargas elementales dentro del alambre actúa una fuerza electromagnética \vec{F} mostrada en la Ecuación 3.54, ya que ellas, junto con el alambre, se mueven en el campo magnético. Los electrones que se mueven libremente dentro del alambre metálico serán empujados hacia un extremo del alambre, haciendo que el otro extremo se cargue positivamente, como se indica en la Fig. 3.8. En el caso estático y cuasi-estático, las fuerzas sobre las cargas libres no pueden existir dentro de un conductor) (ESPOL 1982, p377).

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.54)$$

La distribución de las cargas a lo largo del conductor será exactamente tal que el campo eléctrico creado por estas cargas sea de igual magnitud, pero de dirección opuesta al producto $\vec{v} \times \vec{B}$. Se puede decir que un campo eléctrico externo actúa a lo largo del conductor produciendo una fuerza electromotriz total \mathcal{E} , mostrada en la Ecuación 3.55, para un pedazo de alambre en movimiento (ESPOL 1982, p377).

$$\mathcal{E} = \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (3.55)$$

es decir, la fuerza eléctrica \vec{F} es igual al producto de la carga Q por el campo eléctrico \vec{E} , esto es:

$$\vec{F} = Q \vec{E} \quad (3.56)$$

Entonces, el campo eléctrico es igual a:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.57)$$

Por lo tanto, la fuerza electromotriz es igual a la Ecuación 3.58, así:

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.58)$$

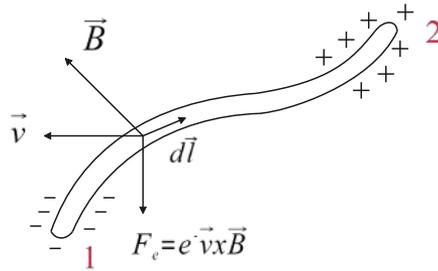


Figura 3.8: Un pedazo de alambre moviéndose en un campo magnético.

Fuente: Los autores

Dado que el camino conductor en este caso no está cerrado, no se producirá corriente a través del cable.

Ahora se considera un filamento conductor cerrado que se mueve en un campo magnético estático, como se muestra en la Fig. 3.9. En este caso, la fuerza electromotriz alrededor del contorno está dada por la Ecuación 3.59, así:

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_C (d\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} \quad (3.59)$$

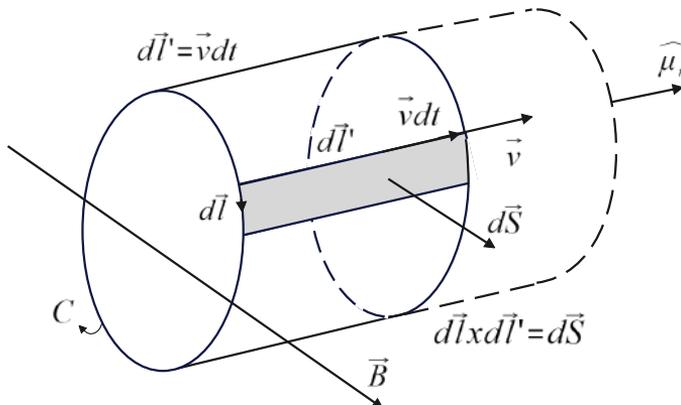


Figura 3.9: Filamento conductor cerrado C que se mueve en un campo magnético estático.

Fuente: Los autores

La Ecuación 3.59 se puede transformar de la siguiente manera: Primero, si se denota por $d\vec{l}'$ la distancia recorrida por un elemento $d\vec{l}$ en un intervalo de tiempo dt , se tiene que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}'}{dt} \quad (3.60)$$

Reemplazando la Ecuación 3.60 en la Ecuación 3.59,

$$\mathcal{E} = \oint_C d\vec{l} \times \frac{d\vec{l}'}{dt} \cdot \vec{B} \quad (3.61)$$

ahora dt es una constante y puede tomarse fuera de la integral,

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \oint_C (d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{B} \quad (3.62)$$

pero, el producto punto es conmutativo, entonces:

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times d\vec{l}') \quad (3.63)$$

Pero,

$$d\vec{S} = d\vec{l} \times d\vec{l}' \quad (3.64)$$

entonces,

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.65)$$

La integral del lado derecho de la Ecuación 3.63 y 3.65 representa el flujo magnético a través de la superficie de la tira que es barrida por el contorno C en el intervalo de tiempo dt . Pero la Fig.3.9 dice que se puede considerar esta superficie de franja como parte de una superficie limitada por el contorno C en el instante de tiempo inicial. Después del intervalo de tiempo dt , el flujo magnético a través de C será menor que antes, exactamente por la cantidad de flujo a través de la tira barrida. Si se denota por φ el flujo magnético en el instante inicial, entonces el aumento del flujo magnético a través del contorno C en el intervalo dt es como se muestra en la Ecuación 3.66 (ESPOL 1982, p378):

$$d\varphi = -\vec{B} \cdot d\vec{S} = -\vec{B} \cdot (d\vec{l} \times d\vec{l}') \quad (3.66)$$

Integrando,

$$\varphi = - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_S \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times d\vec{l}') \quad (3.67)$$

esto es,

$$\text{Para } t = 0, \varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

y, a medida que pasa el tiempo, el flujo disminuye, entonces:

$$\text{Para } t = t, \varphi = - \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Finalmente, la ecuación 3.63 y 3.65, se muestran en la Ecuación 3.68 para un contorno cerrado en movimiento.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.68)$$

La expresión en la Ecuación 3.68 para la fuerza electromotriz inducida en un contorno cerrado debido al movimiento del contorno en un campo magnético estático es equivalente a la Ecuación 3.59. Sin embargo, si se trata con una pieza de alambre en movimiento que no está cerrada, la Ecuación 3.68 no se puede usar directamente, y es mejor y más natural usar la Ecuación 3.55.

Generador simple de fuerza electromotriz alterna (Ley de Faraday) Considere una espira rectangular con lados e y h , girando en un campo magnético uniforme de densidad de flujo magnético \vec{B} paralelo al eje horizontal, como se muestra en la Fig. 3.10. Los dos extremos de la espira están conectados a dos anillos X e Y provistos de contactos deslizantes.

Para calcular la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} en la espira rectangular de lados e y h , en primer lugar se calcula el flujo magnético que atraviesa el interior del área que describe la espira con la siguiente ecuación:

$$\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.69)$$

Destruyendo el producto punto,

$$\varphi = \int_S B dS \cos \theta \quad (3.70)$$

Integrando,

$$\varphi = BS \cos \theta \quad (3.71)$$

Pero, el área S de la espira rectangular, es:

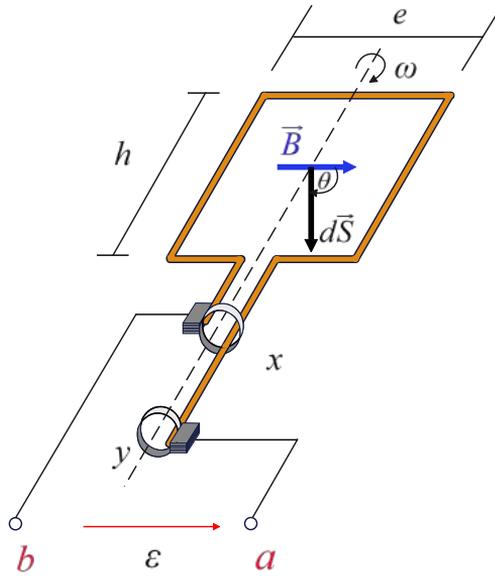


Figura 3.10: Generador de fuerza electromotriz de corriente alterna.

Fuente: Los autores

$$S = eh \quad (3.72)$$

Y el ángulo θ es igual a la frecuencia angular por el tiempo, así:

$$\theta = \omega t \quad (3.73)$$

Reemplazando en la Ecuación 3.71, se tiene:

$$\varphi = ehB \cos \omega t \quad (3.74)$$

Una vez determinado el flujo magnético, se calcula la fuerza electromotriz inducida utilizando la Ecuación 3.68, entonces, en la Ecuación 3.74 se reemplaza la Ecuación 3.68, así:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt} ehB \cos \omega t \quad (3.75)$$

reorganizando,

$$\mathcal{E} = -ehB \frac{d}{dt} \cos \omega t \quad (3.76)$$

derivando con respecto al tiempo, se tiene:

$$\mathcal{E} = -ehB(-\omega \text{sen } \omega t) \quad (3.77)$$

Finalmente, destruyendo el paréntesis, se tiene la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} de corriente alterna en los terminales a y b , esto es:

$$\mathcal{E} = eh\omega B \text{sen } \omega t \quad (3.78)$$

La Ecuación 3.78, se muestra en la Fig. 3.11.

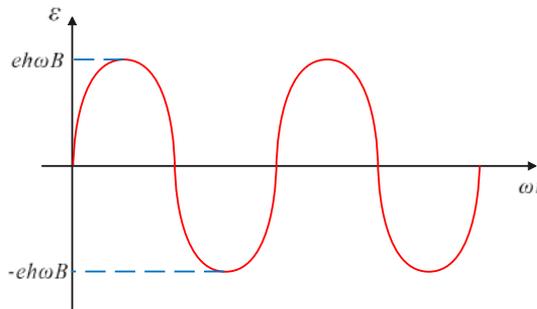


Figura 3.11: Fuerza electromotriz \mathcal{E} de corriente alterna en los terminales ab .

Fuente: Los autores

3.5. Ley general de inducción electromagnética (Ley de Faraday)

Considerar ahora un contorno filamentario cerrado movido y deformado de manera arbitraria en un campo magnético variable en el tiempo. Este campo magnético variable en el tiempo va acompañado de un campo eléctrico variable en el tiempo en todos los puntos y, por lo tanto, también a lo largo del contorno. Además, partes del contorno se mueven en el campo magnético y también está presente una fuerza electromagnética sobre las cargas. Esto se puede representar mediante la intensidad de campo eléctrico \vec{E} equivalente a $\vec{v} \times \vec{B}$. La fuerza electromotriz total inducida en el contorno en este caso viene dada por la suma de las ecuaciones 3.16, 3.20, 3.21 y 3.59, a saber, Ecuación 3.68 (ESPOL 1982, p380):

$$\mathcal{E} = -\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (3.79)$$

Ahora, se ve que ambos términos en el lado derecho se pueden escribir en la misma forma matemática, como tasas negativas de cambio del flujo magnético a través del contorno. El primero se debe a un cambio de flujo a través del contorno como resultado del campo magnético variable en el tiempo; la segunda es consecuencia del cambio de flujo debido al movimiento y deformación del contorno en el campo magnético considerado estático. Así

que la Ecuación 3.79 se puede escribir como (ESPOL 1982, p380):

$$\mathcal{E} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\text{campo variable}} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\text{movimiento en el campo}} \quad (3.80)$$

o,

$$\mathcal{E} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{B \text{ varía, Lazo estacionario}} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{B=\text{cte, Lazo no estacionario}} \quad (3.81)$$

o en una forma más compacta:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{Ley de inducción electromagnética de Faraday} \quad (3.82)$$

3.6. Inductancia mutua y autoinductancia de bucles cerrados cuasi-filamentarios

La presente parte del texto trata de campos electromagnéticos cuasi-estacionarios, es decir, de campos en los que se supone que todas las corrientes varían tan lentamente que el campo magnético creado por ellas es, a todos los efectos, igual al producido por corrientes constantes, que tienen magnitudes iguales a las de las corrientes variables en un momento dado. La determinación del campo magnético de la corriente cuasi-estacionaria en C_1 por lo tanto se reduce a determinar el campo magnético de una corriente constante en C_1 , y luego multiplicar este campo por el factor de tiempo implícito en $i_1(t)$. Entonces, el flujo magnético producido a través de un contorno por una corriente constante en otro contorno es suficiente para determinar la fuerza electromotriz inducida en el contorno cuando la corriente es cuasi-estacionaria (ESPOL 1982, p383).

En forma general, para determinar la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} en un alambre conductor de contorno cerrado C_2 (bobina secundaria), producida por una corriente $i(t)$ que circula en un contorno C_1 (bobina primaria), se utiliza la Ley de Inducción de Faraday, esto es:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (3.83)$$

Utilizando la regla de la cadena, en la Ecuación 3.83, el flujo magnético se puede derivar con respecto a la variación de la corriente $i(t)$, y esta corriente se puede derivar con respecto al tiempo,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{di} \frac{di}{dt} \quad (3.84)$$

Donde, la inductancia viene dada por:

$$L = \frac{d\varphi}{di} \quad (3.85)$$

Reemplazando la Ecuación 3.85 en la Ecuación 3.84, se tiene:

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} \quad (3.86)$$

Ahora, para determinar la inductancia mutua y la auto inductancia, considerar tres contornos estacionarios cerrados C_1 , C_2 y C_3 , hechos de un alambre conductor muy delgado (bucles cuasi-filamentarios), por los que circulan las corrientes I_1 , I_2 e I_3 , respectivamente, como se muestra en la Fig.3.12. El análisis se realiza en tres partes:

Primera parte. La magnitud de una corriente constante en un contorno estacionario cerrado C_1 es I_1 . De acuerdo con la Ley de Biot-Savart dada en la Ecuación 3.95 la magnitud del vector de densidad de flujo magnético \vec{B} en todos los puntos es proporcional a I_1 . Por lo tanto, el flujo magnético φ_{12} creado por la corriente I_1 a través del contorno C_2 también es proporcional a I_1 , esto es:

$$\varphi_{12} = L_{12}I_1 \quad (3.87)$$

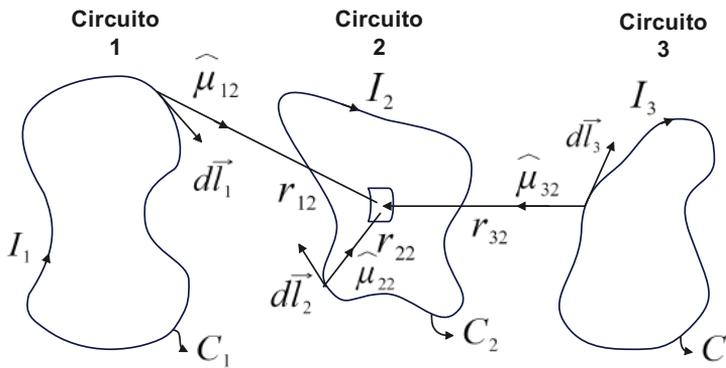


Figura 3.12: Tres circuitos acoplados magnéticamente cuasi-filamentarios.
Fuente: Los autores

Donde, el símbolo L_{12} designa una constante que depende de la geometría del sistema y de las propiedades magnéticas del medio circundante (que debe ser lineal), pero no de I_1 , y se denomina inductancia mutua entre los bucles C_1 y C_2 . A partir del razonamiento anterior y la definición en la Ecuación 3.87 de la inductancia mutua, se sigue que, si la inductancia mutua L_{12} se determina de manera adecuada, la fuerza electromotriz inducida en el bucle C_2

es simplemente *la definición dinámica de la inductancia mutua* mostrada en la Ecuación 3.88, así:

$$\mathcal{E} = -L_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (3.88)$$

Y, la unidad de la inductancia mutua L_{12} viene expresada en weber/amperio, (Wb/A).

Segunda parte. La magnitud de una corriente constante en un contorno estacionario cerrado C_2 es I_2 . De acuerdo con la Ley de Biot-Savart dada en la Ecuación 3.95 la magnitud del vector de densidad de flujo magnético \vec{B} en todos los puntos es proporcional a I_2 . Por lo tanto, el flujo magnético φ_{22} creado por la corriente I_2 a través del contorno C_2 también es proporcional a I_2 , esto es:

$$\varphi_{22} = L_{22}I_2 \quad (3.89)$$

Donde, el símbolo L_{22} designa una constante que depende de la geometría del sistema y de las propiedades magnéticas del medio circundante (que debe ser lineal), pero no de I_2 , y se denomina auto inductancia producido por el bucle C_2 sobre el mismo bucle C_2 , es decir, las líneas de inducción magnética que salen del bucle C_2 vuelven a ingresar al bucle C_2 sin enlazarse con los demás bucles. A partir del razonamiento anterior y la definición en la Ecuación 3.89 de la auto inductancia, se sigue que, si la auto inductancia L_{22} se determina de manera adecuada, la fuerza electromotriz inducida en el bucle C_2 es simplemente *la definición dinámica de la auto inductancia* mostrada en la Ecuación 3.90, así:

$$\mathcal{E} = -L_{22} \frac{di_2}{dt} \quad (3.90)$$

Tercera parte. La magnitud de una corriente constante en un contorno estacionario cerrado C_3 es I_3 . De acuerdo con la Ley de Biot-Savart dada en la Ecuación 3.95 la magnitud del vector de densidad de flujo magnético \vec{B} en todos los puntos es proporcional a I_3 . Por lo tanto, el flujo magnético φ_{32} creado por la corriente I_3 a través del contorno C_3 también es proporcional a I_3 , esto es:

$$\varphi_{32} = L_{32}I_3 \quad (3.91)$$

Donde, el símbolo L_{32} designa una constante que depende de la geometría del sistema y de las propiedades magnéticas del medio circundante (que debe ser lineal), pero no de I_3 , y se denomina inductancia mutua entre los bucles C_3 y C_2 . A partir del razonamiento anterior

y la definición en la Ecuación 3.91 de la inductancia mutua, se sigue que, si la inductancia mutua L_{32} se determina de manera adecuada, la fuerza electromotriz inducida en el bucle C_2 es simplemente *la definición dinámica de la inductancia mutua* mostrada en la Ecuación 3.92, así:

$$\mathcal{E} = -L_{32} \frac{di_3}{dt} \quad (3.92)$$

Por consiguiente, para calcular el flujo magnético total φ_2 que atraviesa en el interior del contorno cerrado C_2 producidos por las corrientes I_1, I_2 e I_3 , es:

$$\varphi_2 = \varphi_{12} + \varphi_{22} + \varphi_{32} \quad (3.93)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.87, 3.89 y 3.91 en la Ecuación 3.93, se tiene:

$$\varphi_2 = L_{12}I_1 + L_{22}I_2 + L_{32}I_3 \quad (3.94)$$

Para obtener los valores de L_{12} , L_{22} y L_{32} , se empieza utilizando la Ecuación 3.95 (Catalá 2017, p114), así:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \hat{\mu}}{r^2} \quad (3.95)$$

Utilizando la Ecuación 3.95, se calcula la densidad de flujo magnético \vec{B}_{12} producido por la corriente I_1 que circula por el circuito 1 (contorno C_1) a una distancia r_{12} hasta el circuito 2, esto es:

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{\mu}_{12}}{r_{12}^2} \quad (3.96)$$

Posteriormente, se calcula la densidad de flujo magnético \vec{B}_{22} producido por la corriente I_2 que circula por el circuito 2 (contorno C_2) a una distancia r_{22} hasta el circuito 2, esto es:

$$\vec{B}_{22} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \hat{\mu}_{22}}{r_{22}^2} \quad (3.97)$$

Finalmente, se calcula la densidad de flujo magnético \vec{B}_{32} producido por la corriente I_3 que circula por el circuito 3 (contorno C_3) a una distancia r_{32} hasta el circuito 2, esto es:

$$\vec{B}_{32} = \frac{\mu_0 I_3}{4\pi} \oint_{C_3} \frac{d\vec{l}_3 \times \hat{\mu}_{32}}{r_{32}^2} \quad (3.98)$$

La densidad de flujo magnético total \vec{B}_2 en el circuito 2, es igual a la suma de las ecuaciones 3.96, 3.97 y 3.98, así:

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{12} + \vec{B}_{22} + \vec{B}_{32} \quad (3.99)$$

Y, el flujo magnético total φ_2 viene dado por la Ecuación 3.100, esto es:

$$\varphi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.100)$$

Reemplazando la Ecuación 3.99 en la Ecuación 3.100, se tiene:

$$\varphi_2 = \int_{S_2} (\vec{B}_{12} + \vec{B}_{22} + \vec{B}_{32}) \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.101)$$

$$\varphi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_{12} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_2} \vec{B}_{22} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_2} \vec{B}_{32} \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.102)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.96, 3.97 y 3.98 en la Ecuación 3.102, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \int_{S_2} \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \widehat{\mu}_{12}}{r_{12}^2} \right) \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_2} \left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \widehat{\mu}_{22}}{r_{22}^2} \right) \cdot d\vec{S}_2 + \dots \\ & \dots + \int_{S_2} \left(\frac{\mu_0 I_3}{4\pi} \oint_{C_3} \frac{d\vec{l}_3 \times \widehat{\mu}_{32}}{r_{32}^2} \right) \cdot d\vec{S}_2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

Sacando factor común,

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{\mu_0}{4\pi} \left[I_1 \oint_{C_1} \int_{S_2} \frac{d\vec{l}_1 \times \widehat{\mu}_{12}}{r_{12}^2} \cdot d\vec{S}_2 + I_2 \oint_{C_2} \int_{S_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \widehat{\mu}_{22}}{r_{22}^2} \cdot d\vec{S}_2 + \dots \right. \\ & \left. + I_3 \oint_{C_3} \int_{S_2} \frac{d\vec{l}_3 \times \widehat{\mu}_{32}}{r_{32}^2} \cdot d\vec{S}_2 \right] \end{aligned} \quad (3.104)$$

Pero, en la Ecuación 3.104 los valores de L_{12} , L_{22} y L_{32} están representados por:

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \int_{S_2} \frac{d\vec{l}_1 \times \widehat{\mu}_{12}}{r_{12}^2} \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.105)$$

$$L_{22} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \int_{S_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \widehat{\mu}_{22}}{r_{22}^2} \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.106)$$

$$L_{32} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_3} \int_{S_2} \frac{d\vec{l}_3 \times \widehat{\mu}_{32}}{r_{32}^2} \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.107)$$

Entonces, reemplazando las ecuaciones 3.105, 3.106 y 3.107 en la Ecuación 3.104; y, tomando en cuenta que el flujo es directamente proporcional a la corriente ($\varphi \propto I$), se tiene:

$$\varphi_2 = L_{12}I_1 + L_{22}I_2 + L_{32}I_3 \quad (3.108)$$

La ecuación Ecuación 3.108 es igual a la Ecuación 3.94, con lo que queda demostrado.

Donde,

L_{12} = Inductancia mutua entre el circuito 1 y el circuito 2

L_{22} = Autoinductancia del circuito 2 o inductancia propia

L_{32} = Inductancia mutua entre el circuito 2 y el circuito 3

De la Ecuación 3.108, en forma general, el flujo magnético creado por n lazos sobre el lazo k , es:

$$\varphi_k = L_{1k} I_1 + L_{2k} I_2 + L_{3k} I_3 + \dots + L_{nk} I_n \quad (3.109)$$

De la Ecuación 3.108, el flujo φ_{12} , φ_{22} y φ_{13} , son iguales a:

$$\varphi_{12} = L_{12}I_1 \quad (3.110)$$

$$\varphi_{22} = L_{22}I_2 \quad (3.111)$$

$$\varphi_{13} = L_{32}I_3 \quad (3.112)$$

Otra forma de obtener la inductancia mutua

Para determinar la inductancia mutua del flujo enlazante φ_{12} entre el circuito 1 y 2 que se muestra en la Fig. 3.13, se parte de la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E}_2 en el circuito 2 producida por la corriente I_1 que circula por el contorno C_1 en el circuito 1, esto es:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} \quad (3.113)$$

El flujo φ_{12} que genera el circuito 1 (corriente I_1) y atraviesa el área que describe el contorno

C_2 , viene dado por la Ecuación 3.114, así:

$$\varphi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_{12} \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.114)$$

Reemplazando la Ecuación 3.114 en la Ecuación 3.113, se tiene:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \vec{B}_{12} \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.115)$$

Pero, la ecuación que relaciona la densidad de flujo magnético \vec{B}_{12} (que se encuentra a una distancia r'_{12} desde el dl_1 hasta el dS_2) y el potencial vectorial magnético \vec{A}_{12} , es,

$$\vec{B}_{12} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{12} \quad (3.116)$$

reemplazando la Ecuación 3.116 en la Ecuación 3.115, se tiene:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_{12}) \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.117)$$

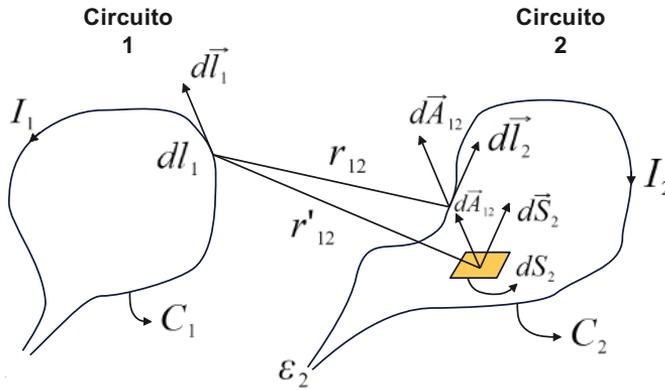


Figura 3.13: Flujo enlazante entre el circuito 1 y 2.

Fuente: Los autores

Ingresando la derivada parcial con respecto al tiempo dentro de la integral, se tiene:

$$\mathcal{E}_2 = - \int_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}_{12}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_2 \quad (3.118)$$

Aplicando el Teorema de Stoke en la Ecuación 3.118, en la que convierte una integral cerrada de línea del contorno C_2 en una integral de superficie (la superficie que describe el contorno C_2), esto es:

$$\mathcal{E}_2 = - \oint_{C_2} \frac{\partial \vec{A}_{12}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_2 \quad (3.119)$$

Pero, recordando que el potencial vectorial magnético total \vec{A}_{12} producido por la corriente I_1 que circula por el alambre conductor filamental del contorno C_1 que se encuentra a una distancia r_{12} , es igual a:

$$\vec{A}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I_1 \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} \quad (3.120)$$

Reemplazando la Ecuación 3.120 en la Ecuación 3.119, se tiene:

$$\mathcal{E}_2 = - \oint_{C_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I_1 \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{l}_2 \quad (3.121)$$

Reorganizando la Ecuación 3.121, así:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial I_1}{\partial t} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \quad (3.122)$$

Pero, de acuerdo a la Ecuación 3.88, la inductancia mutua L_{12} obtenido en la Ecuación 3.122, viene a ser:

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \quad (3.123)$$

Donde, la Ecuación 3.123 se conoce como la **Fórmula de Neumann** para la inductancia mutua entre dos bucles cuasi-filamentarios, y de esta manera se ha obtenido la inductancia mutua a partir del potencial vectorial magnético.

Finalmente, la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E}_2 en el circuito 2, es:

$$\mathcal{E}_2 = -L_{12} \frac{\partial I_1}{\partial t} \quad (3.124)$$

Se debe aclarar que, en la Ecuación 3.124, para que exista la fuerza electromotriz en el circuito 2 producida por la corriente I_1 , ésta corriente debe ser variable, o como se dijo anteriormente en todo el análisis, la corriente I_1 es cuasi-estacionario.

Se puede ver que al intercambiar los subíndices 1 y 2 no cambia el valor de la integral, lo que significa que la inductancia mutua L_{21} entre los bucles 2 y 1 es exactamente igual a la inductancia mutua L_{12} entre los bucles 1 y 2, así:

$$L_{12} = L_{21} \quad (3.125)$$

Despejando L_{12} de la Ecuación 3.110, se tiene:

$$L_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I_1} \quad (3.126)$$

De igual manera, a partir de la Fig. 3.13, si el análisis se lo desarrollara para determinar el flujo que produce el circuito 2 sobre el circuito 1, la inductancia mutua sería L_{21} , esto es:

$$L_{21} = \frac{\varphi_{21}}{I_2} \quad (3.127)$$

Reemplazando la Ecuación 3.126 y 3.127, se tiene:

$$\frac{\varphi_{12}}{I_1} = \frac{\varphi_{21}}{I_2} \quad (3.128)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones 3.125 y Ecuación 3.128,

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\varphi_{12}}{I_1} = \frac{\varphi_{21}}{I_2} \quad (3.129)$$

Donde, la Ecuación 3.129 representa la definición del flujo de la inductancia mutua.

3.7. Problemas resueltos

Problema 3.1. Considerar una bobina toroidal estrechamente enrollada con N_1 vueltas de alambre delgado, que tiene una sección transversal de forma rectangular (b menos a por h) que se muestra en la Fig. 3.14, rodeada por una vuelta N_2 de alambre delgado de forma circular. Calcular la inductancia mutua entre las bobinas N_1 y N_2 .

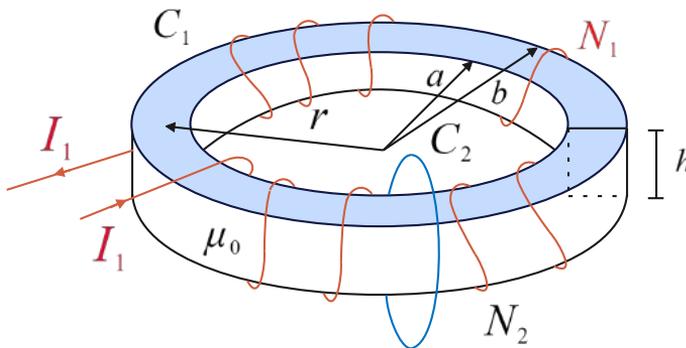


Figura 3.14: Toroide de sección transversal rectangular.

Fuente: Los autores

Desarrollo:

Para $a < r < b$

El análisis se realiza únicamente para un radio r mayor que a y menor que b , debido a que el campo magnético sólo existe en el interior del toroide. En la Fig. 3.14, se realiza un corte transversal (con un plano paralelo a la página) y se selecciona la tapa inferior, visto de la parte superior, tal como se muestra en la Fig. 3.15; a continuación, para determinar la dirección y sentido del vector intensidad de campo magnético \vec{H}_1 se aplica la regla de la mano derecha en las bobinas de contorno circular C_1 del toroide, por la que circula la corriente I_1 . Utilizando la Ley circuital generalizada de Ampere, en la Fig. 3.15 se procede a calcular la intensidad de campo magnético H_1 , esto es:

$$\oint_{C_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 = N_1 I_1 \quad (3.130)$$

Destruyendo el producto punto en la Ecuación 3.130 y fijando los límites de integración de la trayectoria circular de radio r , se tiene:

$$\int_0^r H_1 dl_1 \cos 0^\circ = N_1 I_1 \quad (3.131)$$

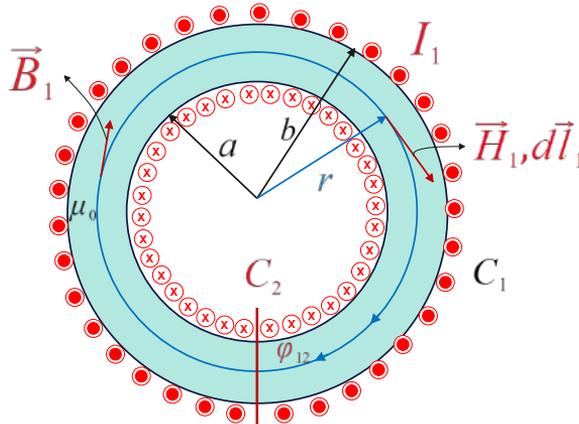


Figura 3.15: corte transversal del toroide de la Fig. 3.14.

Fuente: Los autores

Integrando la Ecuación 3.131,

$$H_1 (2\pi r) = N_1 I_1 \quad (3.132)$$

y, despejando H_1 , se obtiene:

$$H_1 = \frac{N_1 I_1}{2\pi r} \quad (3.133)$$

Pero, la densidad de flujo magnético B_1 en el vacío, se calcula con la Ecuación 3.134,

$$B_1 = \mu_0 H_1 \quad (3.134)$$

entonces, reemplazando el valor de H_1 de la Ecuación 3.133 en la Ecuación 3.134, resulta:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{2\pi r} \quad (3.135)$$

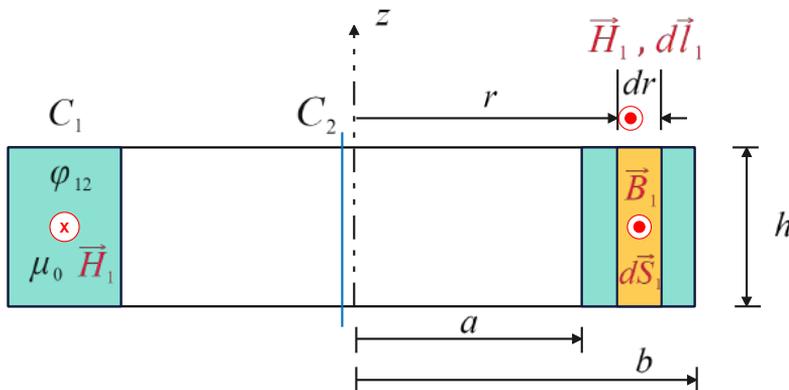


Figura 3.16: Corte transversal, parte inferior, vista superior, de la Fig. 3.14.
Fuente: Los autores

Para determinar el flujo magnético en el interior del toroide, en la Fig. 3.14, se realiza un corte diametral (con un plano perpendicular a la página) en el eje del toroide en forma vertical, y se dibuja la parte inferior con una vista superior, tal como se muestra en la Fig. 3.16; entonces, el flujo magnético φ_{12} producido por el contorno C_1 (toroide de N_1 vueltas) y que atraviesa el contorno C_2 (N_2 vueltas), viene dado por:

$$\varphi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \quad (3.136)$$

El campo magnético existe solo dentro del toroide, es uniforme, y las líneas del vector de densidad de flujo magnético \vec{B}_1 producido por la corriente I_1 que circula en la bobina toroidal son círculos de radio r centrados en el eje del toroide, como se muestra en la Fig. 3.16.

El flujo magnético φ_{12} que circula en el interior del toroide, viene dado por:

$$\varphi_{12} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \quad (3.137)$$

Destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración, se tiene:

$$\varphi_{12} = \int_a^b B_1 dS_1 \cos 0^\circ \quad (3.138)$$

Pero, el área transversal del toroide de la Fig. 3.16 es un rectángulo, y el diferencial de superficie dS_1 , es:

$$dS_1 = h dr \quad (3.139)$$

Entonces, se reemplaza la Ecuación 3.135 y 3.139 en la Ecuación 3.138, así:

$$\varphi_{12} = \int_a^b \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N_1 I_1 h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \quad (3.140)$$

Integrando,

$$\varphi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (3.141)$$

La inductancia mutua $L_{12} = L_{21}$ entre el contorno C_1 (toroide) y el contorno C_2 ; así, el resultado final de la inductancia mutua entre estos dos contornos C_1 y C_2 , se muestra en la Ecuación 3.12.

$$L_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (3.142)$$

Problema 3.2. Si una espira conductora rectangular de lados e y h se aleja con una velocidad constante \vec{v} de un conductor rectilíneo por el que circula una corriente constante I que se encuentra a una distancia x , como se muestra en la Fig. 3.17. Determinar la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo en los puntos a y b de la espira, con sus respectivos signos.

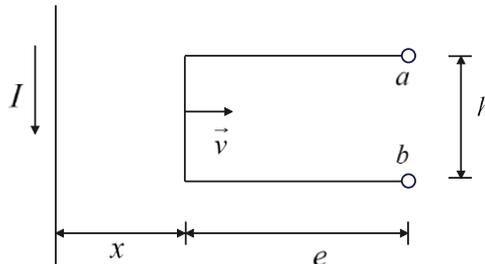


Figura 3.17: Espira rectangular desplazándose con una velocidad constante \vec{v} .

Fuente: Los autores

Desarrollo:

Para determinar la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} en los puntos a y b de la espira rectangular, se aplica la Ley generalizada de Ampere para calcular la intensidad de campo magnético H , esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_n \quad (3.143)$$

En la Fig. 3.17, se aplica la regla de la mano derecha para determinar la dirección y sentido del vector \vec{H} . El vector $d\vec{l}$ indica la trayectoria de integración de la integral cerrada de línea de la Ecuación 3.143, se prefiere poner en la misma dirección y sentido del vector \vec{H} , tal como se muestra en la Fig. 3.18. La corriente neta i_n encerrada por la trayectoria circular C es igual a I , por lo tanto,

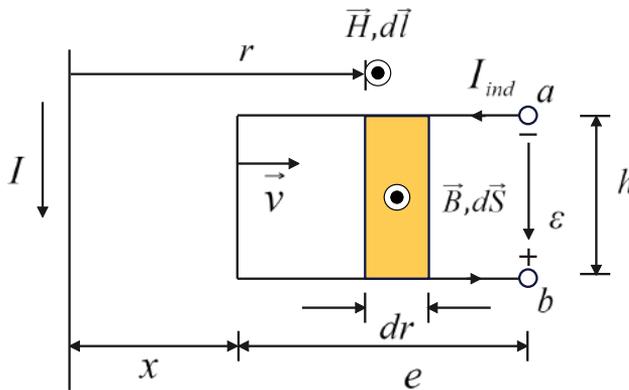


Figura 3.18: Fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} en los puntos a y b .
Fuente: Los autores

$$\int_0^r \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (3.144)$$

destruyendo el producto punto e integrando en la Ecuación 3.144, se tiene el valor de H .

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.145)$$

Pero, la ecuación que relaciona la densidad de flujo magnético B con la intensidad de campo magnético H en el vacío, es:

$$B = \mu_0 H \quad (3.146)$$

Reemplazando la Ecuación 3.145 en la Ecuación 3.146, se tiene:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.147)$$

Para determinar el flujo magnético φ que atraviesa el interior del área que describe la espira rectangular, se utiliza la Ecuación 3.18.

$$\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.148)$$

Se ubican los dos vectores, \vec{B} y $d\vec{S}$ en el diferencial de superficie ($dS = h dr$); sabiendo que, el vector $d\vec{S}$ debe ser perpendicular de la superficie hacia afuera, tal como se muestra en la Fig. 3.18, por lo que, al destruir el producto punto, y reemplazando los respectivos límites de integración, se tiene,

$$\varphi = \int_x^{x+e} B dS \cos 0^\circ \quad (3.149)$$

reemplazando la Ecuación 3.147 y el diferencial de superficie dS en la Ecuación 3.20, es decir:

$$\varphi = \int_x^{x+e} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \int_x^{x+e} \frac{dr}{r} \quad (3.150)$$

Integrando la Ecuación 3.150.

$$\varphi = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \frac{x+e}{x} \quad (3.151)$$

Para determinar la fuerza electromotriz inducida \mathcal{E} en los puntos a y b , se utiliza la Ecuación 3.82 de la Ley de Inducción de Faraday, pero debido al flujo obtenido en la Ecuación 3.151 que no varía con respecto al tiempo, entonces, en esta ecuación se utiliza la regla de la cadena, es decir:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} v \quad (3.152)$$

Reemplazando la Ecuación 3.151 en la Ecuación 3.152, se tiene:

$$\mathcal{E} = -v \frac{d}{dx} (\varphi) = -v \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \frac{x+e}{x} \right) \quad (3.153)$$

Derivando la Ecuación 3.152, se obtiene:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 v h I}{2\pi} \frac{x - e}{x + e x^2} = \frac{\mu_0 v h I}{2\pi} \frac{e}{x(x+e)} \quad (3.154)$$

Entonces, la fuerza electromotriz inducida en los puntos a y b , es:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 v h I}{2\pi} \frac{e}{x(x+e)} \quad (3.155)$$

Para determinar la dirección que circula la corriente inducida I_{ind} en la espira rectangular, se aplica la Ley de Lenz. Como la espira se está desplazando hacia la derecha del alambre por el cual circula la corriente I que genera el flujo magnético φ , entonces, este flujo que atraviesa la espira está disminuyendo, por lo que, la corriente inducida I_{ind} genera un flujo a favor de φ para evitar que siga disminuyendo. Por lo tanto, el flujo inducido está saliendo en forma perpendicular de la espira; al aplicar la regla de la mano derecha en el segmento superior de la espira, los cuatro dedos de la mano saliendo en el interior del área que describe la espira, abrazan al segmento, se ve que el dedo pulgar apunta hacia la izquierda del segmento, tal como se muestra en la Fig. 3.18.

Finalmente, en el interior de una fuente la corriente circula de menos(-) a más(+), entonces, como la espira es una fuente, el signo menos está en el punto a y el signo más está en el punto b , como lo indica la Fig. 3.18.

De esta manera se obtuvo la fuerza electromotriz inducida en los puntos a y b con sus respectivos signos.

Capítulo IV

ECUACIONES DE MAXWELL

4.1. Ley circuital de ampere para corrientes no estacionarias

Considere un sistema de **corriente no estacionario** en un determinado instante de tiempo, como se muestra en la Fig. 4.1. Se divide el campo de corriente en tubos muy delgados, casi filamentosos, a las superficies de las cuales el vector de densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ que depende del espacio r y el tiempo t , es tangencial en todos los puntos. La densidad de corriente producida por las cargas negativas es igual a la densidad de corriente producida por las cargas positivas.

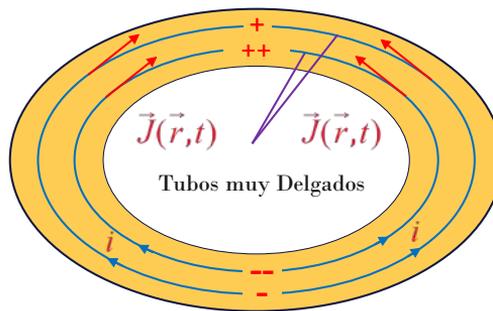


Figura 4.1: Conductor con corriente no estacionaria.

Fuente: Los autores

En el caso de **corriente estacionaria**, tales tubos se cierran sobre sí mismos, y la intensidad de corriente a través de cualquier sección transversal de un tubo es la misma, es decir, la corriente estacionaria se define cuando la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ que depende únicamente del espacio r , permanece constante y uniforme en todos los puntos del espacio, es

decir, $\vec{J}(\vec{r}, t) \equiv \vec{J}(\vec{r})$, no depende del tiempo.

Si se considera la Ecuación 4.1, la integral cerrada de superficie S , significa la rapidez con que las cargas salen o entran de la superficie S .

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.1)$$

Cuando la corriente $I > 0$, quiere decir que los portadores de carga están saliendo de la superficie S . Si siguen saliendo de manera estacionaria, en algún momento en el interior de la superficie (volumen) se quedaría sin cargas, ya que por el principio de conservación de la carga, esta no se crea de la nada; entonces, para que \vec{J} sea efectivamente estacionaria, la integral cerrada de superficie, debe ser igual a cero, así:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.2)$$

Aplicando el Teorema de la divergencia a la Ecuación 4.2, se tiene:

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = 0 \quad (4.3)$$

Resolviendo la Ecuación 4.3, se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.4)$$

Finalmente, de la Ecuación 4.4, para corrientes estacionarias la divergencia de la densidad de corriente es igual a cero.

Cuando la corriente $I < 0$, esto quiere decir que los portadores de carga están entrando a S , y en algún momento en el interior de la superficie (volumen) habría una acumulación de cargas que va a modificar los campos, y ya no se tendría una corriente estacionaria.

En general, esto no es así en el caso **no estacionario**, porque la distribución de carga variable en el tiempo puede existir a lo largo de los tubos. Dado que el vector \vec{J} es tangencial a dicho tubo, ninguna carga puede salir o entrar en él, lo que significa que siempre se puede imaginar que la distribución de carga a lo largo del tubo se divide en pares de cargas iguales y opuestas que varían con el tiempo, entre las cuales existe corriente variable.

La **corriente no estacionaria** total en una sección transversal del tubo está dada por la suma de las corrientes parciales entre todos los pares de carga asociados variables en el tiempo situados en lados opuestos de la sección transversal que se está considerando. Estas corrientes parciales están conectadas con las cargas en las que terminan por la *ecuación de continuidad*.

Siempre se puede representar un sistema de corriente no estacionario como un grupo de tubos de filamentos abiertos, superpuestos, de corrientes parciales. Por lo tanto, un filamento de corriente abierto, con cargas de igual magnitud y de signos opuestos en sus extremos, puede considerarse como un componente básico de cualquier sistema de corriente no estacionario (ESPOL 1982, p450).

A continuación, **se explica la ecuación de la continuidad**, que tiene que ver con la Ley de la conservación de la carga. En la Fig. 4.2, las cargas positivas están saliendo del volumen v y atraviesan la superficie cerrada S que contiene el volumen v , como lo muestra la parte derecha de la Ecuación 4.1, esto quiere decir que, en el interior del volumen, las cargas positivas están disminuyendo; para compensar, en el interior del volumen del material, quedan las cargas negativas (con una distribución volumétrica de cargas), esto es,

$$I = \frac{\partial(-Q_n)}{\partial t} \quad (4.5)$$

pero,

$$Q_n = \int_v \rho_v dv \quad (4.6)$$

reemplazando la Ecuación 4.6 en la Ecuación 4.5; y, esta en la Ecuación 4.1, se tiene:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (4.7)$$

Posteriormente, aplicando el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la Ecuación 4.7, la integral cerrada de superficie del producto punto entre el vector de densidad de corriente \vec{J} y el vector diferencial de superficie $d\vec{S}$ se convierte en una integral de volumen de la divergencia del vector \vec{J} multiplicado par el diferencial de volumen dv , que se encuentra representado en la Ecuación 4.8, esto es:

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (4.8)$$

Luego, integrando la Ecuación 4.8, se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.9)$$

Finalmente, la Ecuación 4.9, representa la *ecuación de la continuidad* o la ley de la conservación de la carga, que será utilizada para demostrar la ecuación de la ley circuital de Ampere en forma generalizada, que se parte de la Ecuación 4.10, esto es:

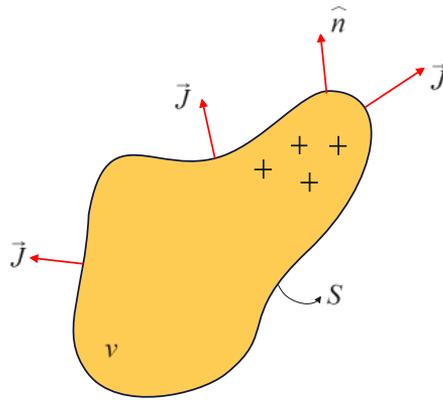


Figura 4.2: Material conductor con superficie cerrada S .
Fuente: Los autores

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.10)$$

Aplicando el teorema de Stoke en el lado izquierdo de la Ecuación 4.10, en la que, la integral cerrada de línea del producto punto entre el vector intensidad de campo magnético \vec{H} y el vector diferencial de longitud $d\vec{l}$ de la trayectoria cerrada C , es igual a la integral de superficie que contiene la trayectoria cerrada C , del producto punto entre, el rotacional del vector \vec{H} y el vector diferencial de superficie $d\vec{S}$, esto es:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.11)$$

Resolviendo la Ecuación 4.11, donde las integrales de superficie son iguales, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.12)$$

Matemáticamente, en una ecuación, si multiplicamos o dividimos un valor en todos los términos de la ecuación, entonces, dicha ecuación no se altera. Considerando este criterio, en la Ecuación 4.12, le aplicamos la divergencia en los dos lados de la ecuación, se obtiene la Ecuación 4.13, así:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (4.13)$$

Pero, matemáticamente la divergencia del rotacional de un vector es igual a cero, entonces en la Ecuación 4.13, la divergencia del vector \vec{J} es igual a cero, como se muestra en la Ecuación 4.14, lo cual contradice a la ecuación de la continuidad representado en la Ecuación 4.9.

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (4.14)$$

Esto significa que la Ecuación 4.11 está incompleta. De modo que, considerando la corriente no estacionaria explicado anteriormente, y que ahora se va a explicar con mayor detalle utilizando un capacitor de placas circulares, tal como se muestra en la Fig. 4.3.

El capacitor de la Fig. 4.3 muestra dos superficies S_1 y S_2 que comparten la misma delimitación de contorno ∂S (la frontera entre la superficie S_1 y S_2). Sin embargo, S_1 es atravesado por una corriente de conducción I_C que genera una densidad de flujo magnético \vec{B} , mientras que S_2 es atravesada por una **corriente de desplazamiento** I_D , que es una cantidad que está relacionada con un campo eléctrico \vec{E} que cambia o varía en el tiempo. Esto puede ocurrir en el vacío o en un dieléctrico donde existe el campo eléctrico. No es una corriente en un sentido estricto, que ocurre cuando una carga se encuentra en movimiento o cuando la carga se transporta de un sitio a otro. Sin embargo, tiene las unidades de corriente eléctrica y tiene asociado un campo magnético. Matemáticamente, I_D se define como la variación temporal del flujo de campo eléctrico a través de una superficie, esto es:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\varphi_E}{dt} \quad (4.15)$$

A continuación, se procede a demostrar la Ecuación 4.15. La corriente de conducción I_C es la que circula en los alambres que conecta a las placas circulares del capacitor de la Fig. 4.3, que es igual a la Ecuación 4.16, esto es:

$$I_C = \frac{dq}{dt} \quad (4.16)$$

Además, la densidad de corriente de conducción J_C es igual a la corriente de conducción dividido para la superficie S_1 , así:

$$J_C = \frac{I_C}{S_1} \quad (4.17)$$

reemplazando la Ecuación 4.16 en la Ecuación 4.17, se tiene

$$J_C = \frac{dq}{dt S_1} \quad (4.18)$$

Por otro lado, la variación de cargas con respecto a la superficie S_1 es igual a la variación de cargas superficiales $d\sigma$, esto es:

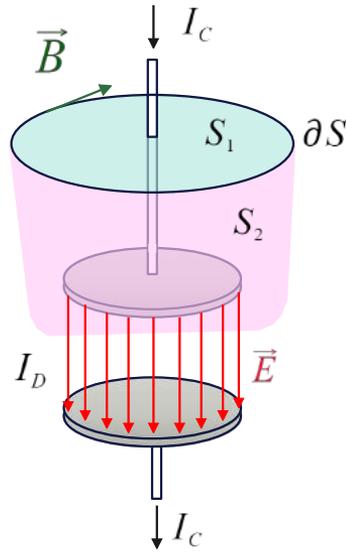


Figura 4.3: Capacitor de placas circulares con un campo eléctrico \vec{E} .
Fuente: Los autores

$$J_C = \frac{d\sigma}{dt} \tag{4.19}$$

También, se puede decir que, el campo eléctrico E producido por una distribución superficial de cargas σ sobre la superficie de la placa circular superior del capacitor, es igual a:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{4.20}$$

por lo que, despejando σ de la Ecuación 4.20, se tiene

$$\sigma = \epsilon_0 E \tag{4.21}$$

y, reemplazando la Ecuación 4.21 en la Ecuación 4.19, resulta:

$$J_C = \frac{d\epsilon_0 E}{dt} \tag{4.22}$$

ordenando,

$$J_C = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \tag{4.23}$$

No obstante, en la superficie de la frontera de la placa conductora superior del capacitor y el aire interno del capacitor, las cargas son iguales, entonces, la corriente de conducción I_C

(en el conductor) debe ser igual a la corriente de desplazamiento I_D (en el dieléctrico o aire), por lo tanto, la densidad de corriente de desplazamiento J_D debe ser igual a la corriente de desplazamiento I_D dividido para la superficie S_2 que se encuentra en el aire, así:

$$J_D = \frac{I_D}{S_2} \quad (4.24)$$

Entonces, como la corriente de conducción I_C es igual a la corriente de desplazamiento I_D en la frontera del capacitor, de la Ecuación 4.17 se despeja la corriente I_C y se reemplaza por la corriente I_D en la Ecuación 4.24, esto es:

$$J_D = \frac{J_C S_1}{S_2} \quad (4.25)$$

Como, debido a que, en la frontera entre la placa del capacitor y el aire, la superficie $S_1 = S_2$ y esta es igual a la superficie S del capacitor, entonces en la Ecuación 4.25, la densidad de corriente de conducción J_C es igual a la densidad de corriente de desplazamiento J_D , y se puede reemplazar en la Ecuación 4.23.

$$J_D = J_C = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \quad (4.26)$$

Seguidamente, la corriente de desplazamiento es:

$$I_D = J_D S \quad (4.27)$$

Reemplazando la Ecuación 4.26 en la Ecuación 4.27, se tiene:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} S = \epsilon_0 \frac{dES}{dt} \quad (4.28)$$

pero, el flujo eléctrico total φ_E en el interior del capacitor, es:

$$\varphi_E = ES \quad (4.29)$$

Finalmente, al reemplazar la Ecuación 4.29 en la Ecuación 4.28, se llega a demostrar la Ecuación 4.15, esto es:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\varphi_E}{dt} \quad (4.30)$$

Por otro lado, se puede decir que, un campo eléctrico \vec{E} que varía en el tiempo genera una **corriente de desplazamiento** i_D , que actúa como la fuente de un campo magnético

(densidad de flujo magnético \vec{B}) exactamente de la misma manera que una corriente de conducción. Además, un capacitor que se carga con una corriente de conducción i_C tiene una corriente de desplazamiento igual a i_D entre las placas, con una densidad de corriente de desplazamiento $j_D = \epsilon_0 dE/dt$, o una corriente de desplazamiento $i_D = \epsilon_0 d\varphi_E/dt$. Esta se puede considerar como la fuente del campo magnético entre las placas, como se muestra en la Fig. 4.4. Las placas circulares tienen un radio R , con una distribución de cargas positivas $+q$ y negativas $-q$, que generan las líneas de campo eléctrico \vec{E} ; y, debido a la corriente de conducción, se generan las líneas de densidad de flujo magnético \vec{B} a una distancia circular r . Debido a que en el interior de las placas circulares del capacitor, se encuentra en el vacío, entonces para calcular B se utiliza la ecuación de la ley de Ampere en el vacío con las dos corrientes, de conducción i_C y de desplazamiento i_D , esto es:

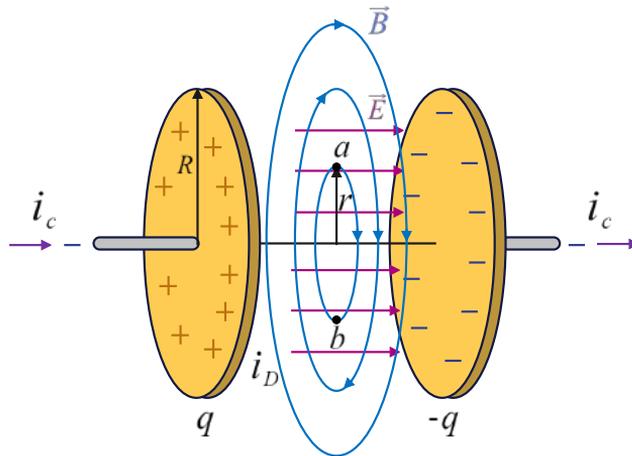


Figura 4.4: Capacitor de placas circulares con un campo \vec{E} y \vec{B} entre las placas.
Fuente: Los autores

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D) \tag{4.31}$$

Destruyendo el paréntesis en la Ecuación 4.31 y reemplazando el valor de la corriente de desplazamiento, se tiene:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_C + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\varphi_E}{dt} \tag{4.32}$$

Pero, el flujo eléctrico es igual a la integral de superficie del producto punto entre el vector campo eléctrico \vec{E} y el vector diferencial de superficie $d\vec{S}$, esto es:

$$\varphi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.33)$$

Finalmente, reemplazando la Ecuación 4.33 en la Ecuación 4.32, se tiene la interacción entre el campo eléctrico y el magnético, así:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_C + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.34)$$

Se debe puntualizar que, la Ecuación 4.34 es válida únicamente cuando entre las placas del capacitor existe el vacío.

4.2. Ecuaciones generales del campo electromagnético (Ecuaciones de Maxwell)

Se demostrará que las relaciones matemáticas que satisfacen las partes eléctricas y magnéticas del campo electromagnético único en casos especiales representan un sistema consistente de ecuaciones en todos los casos. Hasta ahora, se han estudiado las relaciones fundamentales de la electrostática y los campos magnéticos estables, por lo que, se está en condiciones de analizar los campos que varían con el tiempo.

A continuación, se presentan dos conceptos nuevos: 1) a partir del campo eléctrico se produce un campo magnético cambiante, que es el resultado del trabajo experimental de Faraday; y, 2) a partir de un campo magnético se genera un campo eléctrico cambiante, que es el resultado del trabajo de Maxwell, inspirado en el trabajo experimental de Faraday y en la imagen mental de las líneas de fuerza que éste introdujo en el desarrollo de su teoría eléctrica y magnética (Hayt W 2012, p236).

Las ecuaciones de Maxwell corresponden a las cuatro ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética (García Abad 2020, p113), donde, el orden de escritura es irrelevante, que a continuación se las describe:

4.2.1. Primera ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial

De acuerdo a la Ley de Inducción de Faraday, un campo magnético que varía con el tiempo, es decir, un flujo φ variante en el tiempo que atraviese el interior del área que describe una espira conductora, produce una fuerza electromotriz \mathcal{E} , capaz de generar una corriente eléctrica en un circuito cerrado, en este caso, en la espira, esto es:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (4.35)$$

El signo menos de la Ecuación 4.35 se justifica aplicando la Ley de Lenz que dice, la corrien-

te inducida genera un flujo que se opone a la causa que la produce, esto es: si el flujo que atraviesa la espira está aumentando, entonces, la corriente inducida genera un flujo en dirección opuesta que se opone a ese aumento; mientras que, si el flujo que atraviesa la espira está disminuyendo, entonces, la corriente inducida genera un flujo en la misma dirección para evitar que siga disminuyendo (Hayt W 2012, p237).

Para campos eléctricos producidos por una distribución de cargas estáticas, la integral cerrada de línea da lugar a una diferencia de potencial igual a cero, como se muestra en la Ecuación 4.36, esto es,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.36)$$

mientras que, con campos variantes con el tiempo, el resultado es una generación de una fuerza electromotriz, así:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.37)$$

Por otro lado, el flujo magnético es igual a la integral de superficie del producto punto entre el vector densidad de flujo magnético \vec{B} y el vector de desplazamiento $d\vec{S}$, esto es:

$$\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.38)$$

entonces, reemplazando la Ecuación 4.38 en la Ecuación 4.35, e igualando con la Ecuación 4.37, se tiene:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.39)$$

Ahora bien, en una trayectoria estacionaria, si el flujo magnético es la única cantidad que varía con el tiempo, en la Ecuación 4.39 la derivada parcial se puede introducir dentro de la integral, esto es:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.40)$$

Por consiguiente, la primera ecuación de maxwell en forma integral, es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.41)$$

Para obtener la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial, en la parte izquierda de la Ecuación 4.41 se aplica el teorema de Stokes, la integral cerrada de línea se convierte en

una integral de superficie, esto es:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.42)$$

Considerando que las superficies de la Ecuación 4.42 son iguales, se tiene:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.43)$$

Finalmente, la Ecuación 4.43 representa la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial o puntual.

4.2.2. Segunda ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial

La ecuación general de Gauss para medios dieléctricos, es

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_n \quad (4.44)$$

La Ecuación 4.44, representa la segunda ecuación de Maxwell en forma integral.

Si la carga neta Q_n se reemplaza por una distribución volumétrica de cargas, se obtiene:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_n = \int_V \rho_v dv \quad (4.45)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la Ecuación 4.45, donde la integral cerrada de superficie se convierte en una integral de volumen, esto es:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{D}) dv = \int_V \rho_v dv \quad (4.46)$$

Considerando que los volúmenes de la Ecuación 4.46 son iguales, se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (4.47)$$

Finalmente, la Ecuación 4.47 representa la segunda ecuación de Maxwell en forma diferencial o puntual.

4.2.3. Tercera ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial

Para la obtención de la tercera ecuación de Maxwell, se parte de la integral cerrada de línea del producto punto entre el vector intensidad de campo magnético \vec{H} y el vector desplazamiento $d\vec{l}$ es igual a la corriente neta i_n encerrada por la trayectoria cerrada C , esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_n \quad (4.48)$$

Reemplazando la corriente neta de la Ecuación 4.48 por la integral de superficie del producto punto entre el vector densidad de corriente \vec{J} y el vector superficie $d\vec{S}$, se tiene:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.49)$$

Aplicando el teorema de Stokes en la parte izquierda de la Ecuación 4.49, la integral cerrada de línea se convierte en una integral de superficie, esto es:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.50)$$

Considerando que las superficies de la Ecuación 4.50 son iguales, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.51)$$

A continuación, si se aplica la divergencia en ambos lados de la Ecuación 4.51, la ecuación no se altera, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (4.52)$$

pero, la parte izquierda de la Ecuación 4.52 es igual a cero, así:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 \quad (4.53)$$

Igualando las ecuaciones 4.52 y 4.53, se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.54)$$

De modo que, la Ecuación 4.54 contradice a la ecuación de la continuidad que es igual a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (4.55)$$

Esto demuestra que la Ecuación 4.51 solo es válida si $\partial \rho_v / \partial t = 0$.

Por consiguiente, para campos variantes con el tiempo, en la Ecuación 4.48, la corriente neta i_n se reemplaza por una corriente de conducción I y por una corriente de desplazamiento I_D , como se muestra en la Fig. 4.5, donde se muestra un capacitor, donde la corriente de conducción circula por el alambre que conecta al capacitor; mientras que, la corriente de desplazamiento se genera entre las placas del capacitor debido al campo eléctrico, tal como se demostró a partir de las fig. 4.3 y 4.5. Entonces, la Ecuación 4.48 quedaría como se

muestra en la Ecuación 4.56, así:

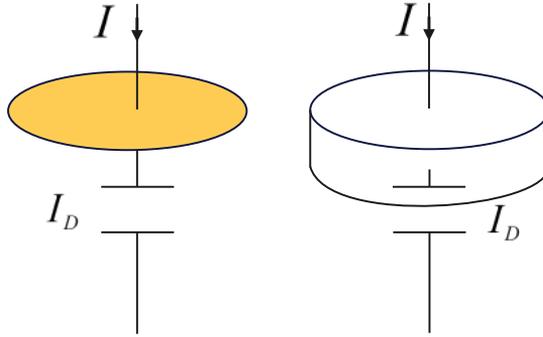


Figura 4.5: Corrientes de conducción I y de desplazamiento I_D .

Fuente: Los autores

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_D \quad (4.56)$$

Reemplazando las corrientes de conducción y de desplazamiento por la integral de superficie, se tiene:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}_D \cdot d\vec{S} \quad (4.57)$$

Aplicando el teorema de Stokes en la parte izquierda de la Ecuación 4.57, la integral cerrada de línea se convierte en una integral de superficie, esto es:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J}_D \cdot d\vec{S} \quad (4.58)$$

Considerando que las superficies de la Ecuación 4.58 son iguales, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D \quad (4.59)$$

Matemáticamente, aplicando la divergencia a todos los términos de la Ecuación 4.59, la ecuación no varía, entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D \quad (4.60)$$

Pero, de acuerdo a las identidades vectoriales, la parte izquierda de la Ecuación 4.60 es igual a cero, por consiguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = 0 \quad (4.61)$$

de ahí que,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (4.62)$$

Pero, la divergencia del vector de la densidad de corriente es igual a $\partial\rho_v/\partial t$, de esta manera, reemplazando valores en la Ecuación 4.62 la divergencia del vector de densidad de corriente de desplazamiento, es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = -\left(-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}\right) = \frac{\partial\rho_v}{\partial t} \quad (4.63)$$

destruyendo paréntesis,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = \frac{\partial\rho_v}{\partial t} \quad (4.64)$$

Finalmente, de la Ecuación 4.47 se reemplaza el valor de ρ_v en la Ecuación 4.64, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}{\partial t} \quad (4.65)$$

lo que es lo mismo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (4.66)$$

Simplificando la Ecuación 4.66, es decir, si se aplica la divergencia en ambos términos de la ecuación, esta no se altera, así:

$$\vec{J}_D = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (4.67)$$

Por consiguiente, la Ecuación 4.67 representa la densidad de corriente de desplazamiento; y, al reemplazar en la Ecuación 4.59, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (4.68)$$

De modo que, la Ecuación 4.68 representa la tercera ecuación de Maxwell en forma diferencial o puntual.

4.2.4. Cuarta ecuación de Maxwell en forma integral y diferencial

El flujo magnético que atraviesa una superficie cerrada es igual a cero, lo que constituye la cuarta ecuación de Maxwell en forma integral, esto es

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.69)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el lado izquierdo de la Ecuación 4.69, donde la integral cerrada de superficie se convierte en una integral de volumen, esto es:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0 \quad (4.70)$$

Resolviendo la Ecuación 4.70, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.71)$$

De modo que, la Ecuación 4.71 representa la cuarta ecuación de Maxwell en forma diferencial o puntual.

Por último, en la Tabla 4.1 se encuentran resumidas las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma integral y diferencial, que son la base de toda la teoría electromagnética. Son ecuaciones diferenciales parciales que relacionan el campo eléctrico y magnético entre sí, esto es:

Tabla 4.1: Ecuaciones de Maxwell en forma integral y diferencial.

Número	Forma Integral	Forma Diferencial
1	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_n = \int_V \rho_v dv$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$
3	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
4	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Realizado por: Los Autores

Además, las ecuaciones de la Tabla 4.1, son válidas para campos magnéticos y eléctricos variables o no con el tiempo. Para completar el set de las ecuaciones de Maxwell, se adicionan otras ecuaciones, a saber:

Para un medio lineal:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4.72)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.73)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.74)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (4.75)$$

$$\vec{P} = X_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.76)$$

$$(4.77)$$

Válido en general:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (4.78)$$

4.3. Forma compleja de las ecuaciones de Maxwell

Las fuentes primarias de cualquier campo electromagnético son las corrientes y las cargas libres. En la práctica, estos varían con mayor frecuencia en el tiempo siguiendo una ley armónica (sinusoidal) muy simple. Siempre que el medio sea lineal, todos los vectores de campo también variarán según la ley sinusoidal. Supóngase que la frecuencia de la corriente que produce un campo electromagnético es f , los vectores de campo variarán en todos los puntos con la misma frecuencia (ESPOL 1982, p457). Así se puede escribir, por ejemplo:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) \cos(\omega t + \theta_E) \quad (4.79)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y, z) \cos(\omega t + \theta_B) \quad (4.80)$$

Los vectores intensidad de campo eléctrico \vec{E} y densidad de flujo magnético \vec{B} , son funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo. Las fases θ_E y θ_B de los dos vectores también son funciones de las coordenadas, esto es: $\theta_E(x, y, z)$ y $\theta_B(x, y, z)$.

Ahora bien, escribiendo en forma exponencial las ecuaciones 4.79 y 4.80, se tiene:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) e^{j[\omega t + \theta_E(x, y, z)]} \quad (4.81)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y, z) e^{j[\omega t + \theta_B(x, y, z)]} \quad (4.82)$$

Escribiendo de otra manera, se tiene:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) e^{j\theta_E(x, y, z)} e^{j\omega t} \quad (4.83)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y, z) e^{j\theta_B(x, y, z)} e^{j\omega t} \quad (4.84)$$

pero,

$$\vec{E}_C = \vec{E}(x, y, z) e^{j\theta_E(x, y, z)} \quad (4.85)$$

$$\vec{B}_C = \vec{B}(x, y, z) e^{j\theta_B(x, y, z)} \quad (4.86)$$

donde, \vec{E}_C y \vec{B}_C representan la intensidad de campo eléctrico y densidad de flujo magnético complejo, respectivamente.

Reemplazando las ecuaciones 4.85 y 4.86, en las ecuaciones 4.83 y 4.84, se tiene:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_C e^{j\omega t} \quad (4.87)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_C e^{j\omega t} \quad (4.88)$$

Por otro lado, la función exponencial se escribe como sigue:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t \quad (4.89)$$

tomando la parte real, queda:

$$\operatorname{Re} [e^{j\omega t}] = \cos \omega t \quad (4.90)$$

Entonces, las ecuaciones 4.87 y 4.88, se escriben así,

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} [\vec{E}_C e^{j\omega t}] \quad (4.91)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[\vec{B}_C e^{j\omega t} \right] \quad (4.92)$$

A continuación, se desarrollan las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma compleja:

4.3.1. Primera ecuación de Maxwell en forma compleja

Considerando la Tabla 4.1, para obtener la ecuación de Maxwell en forma compleja, se parte de la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial, así:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.93)$$

Seguidamente, se reemplaza la parte derecha de las ecuaciones 4.91 y 4.92, esto es:

$$\vec{\nabla} \times \text{Re} \left[\vec{E}_C e^{j\omega t} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{Re} \left[\vec{B}_C e^{j\omega t} \right] \right\} \quad (4.94)$$

derivando la parte derecha de la Ecuación 4.94, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \text{Re} \left[\vec{E}_C e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left\{ -\vec{B}_C j\omega e^{j\omega t} \right\} \quad (4.95)$$

reorganizando la Ecuación 4.95, se obtiene:

$$\text{Re} \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}_C e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left\{ -\vec{B}_C j\omega e^{j\omega t} \right\} \quad (4.96)$$

Finalmente, simplificando la Ecuación 4.96 se obtiene la primera ecuación de Maxwell en forma compleja 4.97, esto es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_C = -j\omega \vec{B}_C \quad (4.97)$$

4.3.2. Segunda ecuación de Maxwell en forma compleja

De la Tabla 4.1, se selecciona la segunda ecuación de Maxwell en forma diferencial, así:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (4.98)$$

y, escribiendo en el formato de la Ecuación 4.91 y reemplazando el vector campo eléctrico \vec{E} por el vector desplazamiento \vec{D} , se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \text{Re} \left[\vec{D}_C e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\rho_C e^{j\omega t} \right] \quad (4.99)$$

donde,

$$\rho_C = \rho_v(x, y, z) e^{j\theta_\rho(x, y, z)} \quad (4.100)$$

$$\vec{D}_C = \vec{D}(x, y, z) e^{j\theta_D(x, y, z)} \quad (4.101)$$

Considerando en función del tiempo, se tiene:

$$\vec{D}(x, y, z, t) = \vec{D}_C e^{j\omega t} \quad (4.102)$$

Finalmente, simplificando la Ecuación 4.99 se obtiene la segunda ecuación de Maxwell en forma compleja (4.103), esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_C = \rho_C \quad (4.103)$$

4.3.3. Tercera ecuación de Maxwell en forma compleja

De la Tabla 4.1, se selecciona la tercera ecuación de Maxwell en forma diferencial, así

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.104)$$

y, escribiendo en el formato de la Ecuación 4.91 y reemplazando el \vec{E} por el \vec{D} , \vec{H} y \vec{J} , se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \text{Re} \left[\vec{H}_C e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\vec{J}_C e^{j\omega t} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{Re} \left[\vec{D}_C e^{j\omega t} \right] \right\} \quad (4.105)$$

donde,

$$\vec{H}_C = \vec{H}(x, y, z) e^{j\theta_H(x, y, z)} \quad (4.106)$$

$$\vec{J}_C = \vec{J}(x, y, z) e^{j\theta_J(x, y, z)} \quad (4.107)$$

Considerando en función del tiempo, se tiene

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_C e^{j\omega t} \quad (4.108)$$

$$\vec{J}(x, y, z, t) = \vec{J}_C e^{j\omega t} \quad (4.109)$$

derivando la parte derecha del segundo término de la Ecuación 4.105, se tiene:

$$\vec{\nabla} \times \text{Re} \left[\vec{H}_C e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\vec{J}_C e^{j\omega t} \right] + \text{Re} \left\{ \vec{D}_C j\omega e^{j\omega t} \right\} \quad (4.110)$$

reorganizando la Ecuación 4.110, se tiene:

$$\text{Re} \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_C e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\vec{J}_C e^{j\omega t} \right] + \text{Re} \left\{ \vec{D}_C j\omega e^{j\omega t} \right\} \quad (4.111)$$

Finalmente, simplificando la Ecuación 4.111 se obtiene la tercera ecuación de Maxwell en forma compleja 4.112, esto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_C = \vec{J}_C + j\omega \vec{D}_C \quad (4.112)$$

4.3.4. Cuarta ecuación de Maxwell en forma compleja

De la Tabla 4.1, se selecciona la cuarta ecuación de Maxwell en forma diferencial, así:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.113)$$

Seguidamente, se reemplaza la parte derecha de la Ecuación 4.92, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \text{Re} \left[\vec{B}_C e^{j\omega t} \right] = 0 \quad (4.114)$$

reorganizando la Ecuación 4.114, se tiene:

$$\text{Re} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_C e^{j\omega t} \right] = 0 \quad (4.115)$$

Finalmente, simplificando la Ecuación 4.115 se obtiene la cuarta ecuación de Maxwell en forma compleja 4.116, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_C = 0 \quad (4.116)$$

Por último, en la Tabla 4.2 se encuentran resumidas las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma integral y compleja, esto es:

Tabla 4.2: Ecuaciones de Maxwell en forma integral y compleja.

Número	Forma Integral	Forma Compleja
1	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E}_C = -j\omega \vec{B}_C$
2	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_n = \int_V \rho_v dv$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_C = \rho_C$
3	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H}_C = \vec{J}_C + j\omega \vec{D}_C$
4	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_C = 0$

Realizado por: Los Autores

4.4. Condiciones de frontera

Para determinar las componentes normales D_n y tangenciales D_t del desplazamiento eléctrico; en la frontera de dos medios 1 y 2, con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 , se procede como sigue:

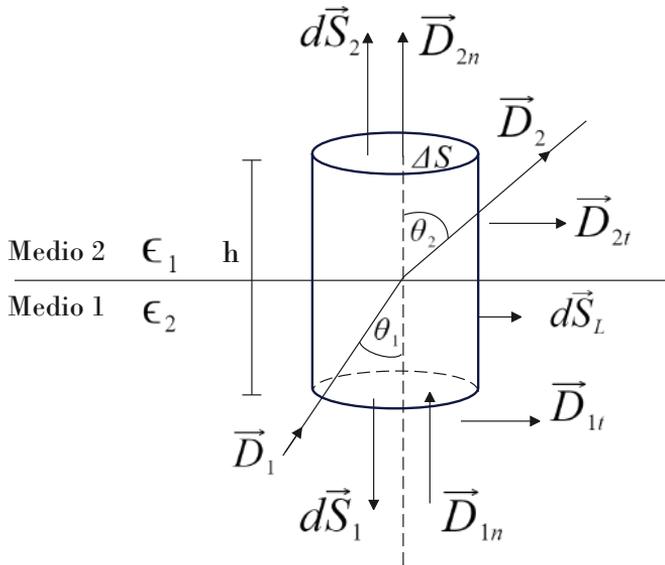


Figura 4.6: Condiciones de frontera para el vector desplazamiento \vec{D} .

Fuente: Los autores

Condiciones de frontera para las componentes normales de D_n . En primer lugar, para determinar la componente normal de la magnitud del vector de desplazamiento eléctrico D_n , en la frontera de dos medios, 1 y 2, se utiliza la Ecuación 4.117 de la ley generalizada de Gauss para una distribución de cargas superficiales, esto es:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_n = \int_S \rho_s dS \tag{4.117}$$

Luego, se selecciona una superficie Gaussiana en la frontera de los dos medios, como se

muestra en la Fig. 4.6.

A continuación, en la Ecuación 4.117 se aplica el límite cuando h tiende a cero para que el análisis sea en la frontera de los dos medios 1 y 2, esto es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS \quad (4.118)$$

La integral cerrada de superficie del cilindro es igual a tres integrales abiertas; pero, los vectores normales \vec{D}_{1n} y \vec{D}_{2n} en la superficie lateral se hacen cero debido a que estos vectores forman un ángulo de 90° con el vector superficie lateral $d\vec{S}_L$; mientras que, los vectores tangenciales \vec{D}_{1t} y \vec{D}_{2t} se anulan. De modo que, únicamente quedan las integrales de las dos tapas, superior e inferior, esto es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Delta S_1} \vec{D}_{1n} \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{D}_{2n} \cdot d\vec{S} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS \quad (4.119)$$

integrando,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S\} = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_s \Delta S \quad (4.120)$$

Aplicando el límite cuando h tiende a cero, se tiene:

$$-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = \rho_s \Delta S \quad (4.121)$$

Simplificando ΔS , se obtiene:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (4.122)$$

Si en la frontera de los dos medios no existen cargas, esto es, $\rho_s = 0$, entonces la Ecuación 4.122 queda como se muestra en la Ecuación 4.123, es decir, las componentes normales del medio 1 y 2 son iguales, esto es:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (4.123)$$

Condiciones de frontera para las componentes normales de B_n . Seguidamente, se obtiene las condiciones de frontera para las componentes normales del vector de densidad de flujo magnético \vec{B} , para lo cual se parte de la cuarta ecuación de Maxwell en forma integral de acuerdo a las Tablas 4.1 y 4.2, esto es:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.124)$$

Se sigue un procedimiento similar al vector de desplazamiento \vec{D} para determinar las componentes normales como se muestra en la Fig. 4.6, en la que se reemplaza el vector \vec{D} por el vector \vec{B} ; además, en los medios 1 y 2 se reemplazan las permitividades ϵ_1 y ϵ_2 por las permeabilidades μ_1 y μ_2 , entonces debido a que el flujo magnético atraviesa una superficie cerrada es igual a cero, las componentes normales del medio 1 y 2 de la densidad de flujo magnético son iguales, así:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (4.125)$$

Condiciones de frontera para las componentes normales de J_n . De igual manera, se obtiene las condiciones de frontera para las componentes normales del vector de densidad de corriente \vec{J} como se muestra en la Fig. 4.6, en la que se reemplaza el vector \vec{D} por el vector \vec{J} , para lo cual se parte de la ecuación de la continuidad, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (4.126)$$

A esta ecuación de la continuidad se aplica el límite cuando h tiende a cero, se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho_s dS \quad (4.127)$$

resolviendo, se obtiene las componentes normales de la densidad de corriente en la frontera de los medios 1 y 2 que se muestra en la Ecuación 4.128, así:

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_s \quad (4.128)$$

Condiciones de frontera de la primera ecuación de Maxwell. A continuación, se obtienen las componentes tangenciales de la intensidad de campo eléctrico \vec{E} y del vector de desplazamiento eléctrico \vec{D} a partir de la primera ecuación de Maxwell en forma integral de acuerdo a las Tablas 4.1 y 4.2, esto es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.129)$$

Para obtener las condiciones de frontera entre el medio 1 y 2 se utiliza la primera ecuación de Maxwell que relaciona el campo eléctrico y magnético, donde para la parte izquierda de la

ecuación se selecciona una trayectoria cerrada 12341 de forma rectangular de dimensiones Δl por h , tal como se muestra en la Fig. 4.7; y, para la parte derecha de la ecuación, se selecciona la superficie que describe la trayectoria rectangular cerrada.

La integral cerrada de línea C se reemplaza por la trayectoria 12341, así:

$$\oint_{12341} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

y se aplica el límite cuando h tiende a cero para que el análisis que se realiza sea en la frontera de los dos medios, entonces,

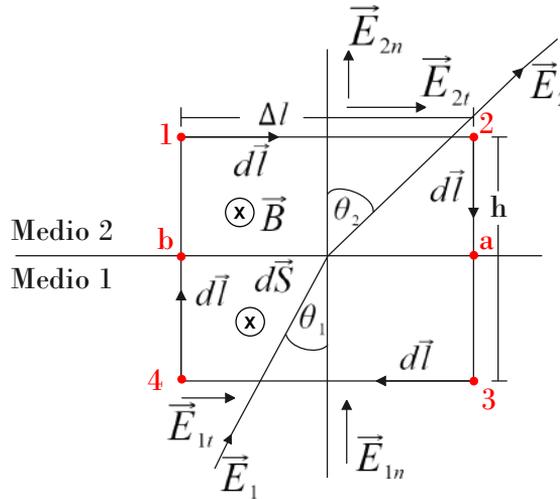


Figura 4.7: Condiciones de frontera de la primera ecuación de Maxwell, Tabla 4.1.

Fuente: Los autores

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{12341} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{4.130}$$

la trayectoria cerrada 12341 se reemplaza por seis integrales abiertas, esto es: de 1-2, de 2-a, de a-3, de 3-4, de 4-b y de b-1, así

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_1^2 \vec{E}_{2t} \cdot \Delta \vec{l} + \int_2^a \vec{E}_{2n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_a^3 \vec{E}_{1n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_{1t} \cdot \Delta \vec{l} + \dots \right. \\ \left. + \int_4^b \vec{E}_{1n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_b^1 \vec{E}_{2n} \cdot \Delta \vec{l} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \tag{4.131}$$

pero, al aplicar el límite cuando h tiende a cero, la integral de superficie tiende a cero, esto es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.132)$$

Entonces, destruyendo el producto punto e integrando, se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[E_{2t} \Delta l - E_{2n} \frac{h}{2} - E_{1n} \frac{h}{2} - E_{1t} \Delta l + E_{1n} \frac{h}{2} + E_{2n} \frac{h}{2} \right] = 0 \quad (4.133)$$

Simplificando valores y aplicando el límite cuando h tiende a cero, resulta:

$$E_{2t} \Delta l - E_{1t} \Delta l = 0 \quad (4.134)$$

Donde, las componentes tangenciales de los medios 1 y 2 son iguales, así:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (4.135)$$

Para obtener las componentes tangenciales D_{1t} y D_{2t} , se aplica la ecuación que relaciona D con E en el medio 1 y 2, esto es :

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 \quad (4.136)$$

$$D_2 = \epsilon_2 E_2 \quad (4.137)$$

Despejando y reemplazando en la Ecuación 4.135, se tiene:

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \quad \text{para dieléctricos lineales} \quad (4.138)$$

Condiciones de frontera de la tercera ecuación de Maxwell. A continuación, se obtienen las componentes normales y tangenciales de la intensidad de campo magnético \vec{H} , de la densidad de corriente \vec{J} y de la densidad de flujo magnético \vec{B} a partir de la primera ecuación de Maxwell en forma integral de acuerdo a las Tablas 4.1 y 4.2, esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.139)$$

Para obtener las condiciones de frontera entre el medio 1 y 2 se utiliza la tercera ecuación de Maxwell en forma integral de acuerdo a las Tablas 4.1 y 4.2 que relaciona el campo magnético \vec{H} , la densidad de corriente \vec{J} y el vector de desplazamiento eléctrico \vec{D} , donde, para la parte izquierda de la ecuación se selecciona una trayectoria cerrada 12341 de forma rectangular de dimensiones Δl por h , tal como se muestra en la Fig. 4.8; y, para la parte

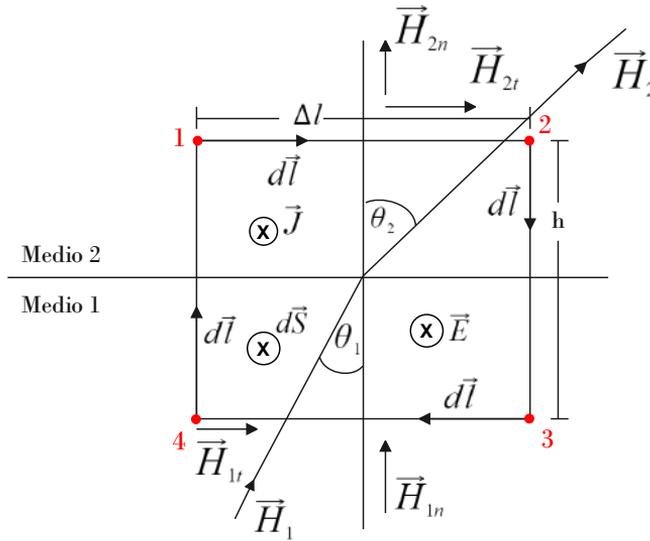


Figura 4.8: Condiciones de frontera de la tercera ecuación de Maxwell, Tabla 4.1.

Fuente: Los autores

derecha de la ecuación, se selecciona la superficie que describe la trayectoria rectangular cerrada.

A continuación, en la Fig. 4.8 se aplica el límite cuando h tiende a cero para que el análisis que se realiza sea en la frontera de los dos medios, esto es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right] \quad (4.140)$$

La integral cerrada de línea se convierte en cuatro integrales abiertas formada por los segmentos de 1-2, 2-3, 3-4 y 4-1. Las integrales de los segmentos de 2-3 y de 4-1 se anulan debido a que los vectores de desplazamiento $d\vec{l}$ tienen direcciones opuestas, únicamente quedan las integrales de los segmentos de 1-2 y de 3-4, por consiguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\int \vec{H}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int \vec{H}_{2t} \cdot d\vec{l} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right] \quad (4.141)$$

destruyendo el producto punto, se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\int H_{1t} dl \cos 180^\circ + \int H_{2t} dl \cos 0^\circ \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_S J dS \cos 0^\circ + \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS \cos 0^\circ \right] \quad (4.142)$$

simplificando,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[- \int H_{1t} dl + \int H_{2t} dl \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_S J dS + \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS \right] \quad (4.143)$$

Pero,

$$\int_S J dS = \int_S J h dl = \int_S J_S dl \quad (4.144)$$

Donde, J_S es la densidad superficial de corriente

y,

$$\int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS = 0 \quad \text{ya que el área tiende a cero} \quad (4.145)$$

Entonces, reemplazando valores e integrando, se obtiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [-H_{1t}\Delta l + H_{2t}\Delta l] = \lim_{h \rightarrow 0} [J_S \Delta l + 0] \quad (4.146)$$

Aplicando el límite cuando h tiende a cero, se obtiene la Ecuación 4.147 para determinar las componentes tangenciales de la intensidad de campo magnético H_{1t} y H_{2t} , esto es:

$$H_{2t} - H_{1t} = J_S \quad (4.147)$$

Si, $J_S = 0$

Entonces, las componentes tangenciales de los dos medios son iguales, esto es:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (4.148)$$

Para determinar las componentes tangenciales de la densidad de flujo magnético B_{1t} y B_{2t} , se aplica la ecuación que relaciona B con H en los medios 1 y 2, esto es:

$$B_{1t} = \mu_1 H_{1t} \quad (4.149)$$

$$B_{2t} = \mu_2 H_{2t} \quad (4.150)$$

Reemplazando estos valores en la Ecuación 4.148, se tiene:

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \quad \text{para un medio lineal} \quad (4.151)$$

4.5. Teorema de Poynting

El teorema de Poynting es la expresión de la Ley de conservación de la energía aplicada a los campos electromagnéticos. Toda la potencia o energía electromagnética se transmite a través de los campos electromagnéticos antes que a través de otros dispositivos que sirven para transmitir corriente eléctrica (ESPOL 1982, p462).

El Vector de Poynting se representado por \vec{S} , y está definido por el producto cruz entre el vector intensidad de campo eléctrico \vec{E} y el vector intensidad de campo magnético \vec{H} , esto es:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{4.152}$$

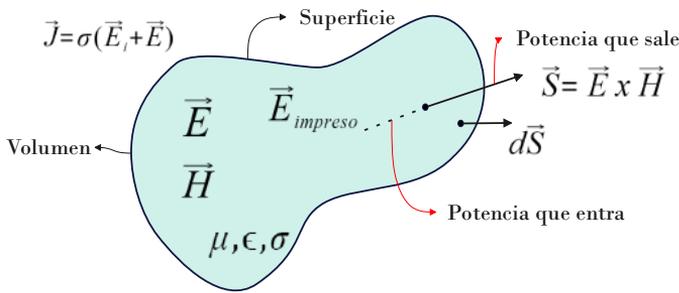


Figura 4.9: Balance de potencia electromagnética sobre un volumen arbitrario.
Fuente: Los autores

El teorema de Poynting describe el balance de potencia electromagnética sobre un volumen arbitrario, es decir, la potencia generada en el interior del volumen, se puede decir que, la potencia que entra a la superficie es igual a la potencia que sale por la superficie que encierra al volumen, como se muestra en la Fig. 4.9. Usando este teorema, se desarrollarán fórmulas para la potencia transportada por una onda plana (Demarest 1998, p462).

Para empezar esta discusión, se considera campos en el dominio del tiempo. No obstante, si se aplica la divergencia al Vector de Poynting, este vector sería en forma puntual, es decir

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \tag{4.153}$$

Matemáticamente, de acuerdo a las identidades vectoriales, la Ecuación 4.153 es igual a:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \tag{4.154}$$

Pero, utilizando las dos ecuaciones de Maxwell, esto es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.155)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.156)$$

Se reemplaza en la Ecuación 4.154, así:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (4.157)$$

Destruyendo paréntesis y simplificando en la Ecuación 4.157, se obtiene:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.158)$$

En un medio lineal e isotrópico, se aplican las dos ecuaciones que siguen:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4.159)$$

Por un lado, considerando la derivada parcial con respecto al tiempo del producto punto de los vectores \vec{H} y \vec{B} , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{B} \quad (4.160)$$

Además, debido a que el producto punto es conmutativo, el segundo término del lado derecho de la Ecuación 4.160 se intercambian los vectores \vec{H} y \vec{B} , entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.161)$$

simplificando,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) = 2\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.162)$$

Despejando el término de la derecha de la Ecuación 4.162, se tiene finalmente:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) \quad (4.163)$$

Igualmente, considerando la derivada parcial con respecto al tiempo del producto punto de los vectores \vec{E} y \vec{D} , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{D} \quad (4.164)$$

También, debido a que el producto punto es conmutativo, el segundo término del lado derecho de la Ecuación 4.164 se intercambian los vectores \vec{E} y \vec{D} , entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.165)$$

simplificando,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.166)$$

Despejando el término de la derecha de la Ecuación 4.166, se tiene finalmente:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (4.167)$$

Además, el vector densidad de corriente \vec{J} es igual a la conductividad σ por los campos eléctricos impreso \vec{E}_i y de cargas libres \vec{E} , esto es:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E}_i + \vec{E}) \quad (4.168)$$

Despejando \vec{E} , se tiene:

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E}_i + \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_i \quad (4.169)$$

Finalmente, reemplazando las ecuaciones: 4.163, 4.167 y 4.169 en la Ecuación 4.158, esto es

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) - \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_i \right) \cdot \vec{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (4.170)$$

Simplificando,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) - \frac{J^2}{\sigma} + \vec{J} \cdot \vec{E}_i - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (4.171)$$

Despejando el término $\vec{J} \cdot \vec{E}_i$, se obtiene:

$$\vec{J} \cdot \vec{E}_i = \frac{J^2}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (4.172)$$

Al integrar la Ecuación 4.172 con respecto al volumen de la Fig. 4.9, se tiene:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}_i dV = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV + \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV + \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV \quad (4.173)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el último término de la Ecuación 4.173, en la que una integral de volumen es igual a una integral de superficie, se tiene:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}_i dV = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV + \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV + \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (4.174)$$

A continuación, se va a interpretar cada término de la Ecuación 4.174, así:

El primer término, representa la potencia consumida por efecto Joule, esto es,

$$\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV \quad \text{Potencia consumida por efecto Joule} \quad (4.175)$$

el segundo término, se adecúa de la manera siguiente:

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_V (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV \right] \quad (4.176)$$

pero, U_m representa la densidad volumétrica de energía almacenada en el campo magnético y es igual a:

$$U_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (4.177)$$

Además, W_m representa la energía magnética y es igual a:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV \quad (4.178)$$

Reemplazando la Ecuación 4.178 en la Ecuación 4.176, se tiene:

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{H}) dV = \frac{\partial}{\partial t} W_m \quad (4.179)$$

De manera similar, el tercer término del lado derecho de la Ecuación 4.174, se adecúa como sigue:

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV \right] \quad (4.180)$$

pero, U_e representa la densidad volumétrica de energía almacenada en el campo eléctrico y

es igual a:

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (4.181)$$

También, W_e representa la energía eléctrica y es igual a:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV \quad (4.182)$$

Reemplazando la Ecuación 4.182 en la Ecuación 4.180, se tiene:

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV = \frac{\partial}{\partial t} W_e \quad (4.183)$$

De tal manera que, al reemplazar las ecuaciones 4.179 y 4.183 en la Ecuación 4.174, resulta:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}_i dV = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV + \frac{\partial}{\partial t} (W_m + W_e) + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (4.184)$$

Donde, el tercer término de la Ecuación 4.184, representa el flujo de potencia a través de la superficie S , o la velocidad con que fluye la potencia a través de la superficie S , esto es:

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Teorema de Poynting} \quad (4.185)$$

Y, como ya se dijo anteriormente, \vec{S} es el Vector de Poynting, y representa la densidad de potencia expresado en *Wattios/m²*, así:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{Vector de Poynting} \quad (4.186)$$

4.6. Problemas resueltos

Problema 4.1. Considere un capacitor de placas paralelas, tal como se muestra en la Fig.4.10. Asumiendo que el campo eléctrico es homogéneo y que se aplica un voltaje variable $v(t) = V_0 \cos \omega t$ entre las placas. Demostrar que la intensidad de campo magnético H en el capacitor viene expresado por:

$$H = \frac{V_0 r}{2b} (\sigma \operatorname{sen} \omega t + \epsilon \omega \cos \omega t) \quad (4.187)$$

Desarrollo:

De acuerdo a la fuente de voltaje de la Fig.4.10, en el semiciclo positivo, las cargas positivas se distribuyen sobre la superficie de la placa circular superior de conductividad σ ; mientras

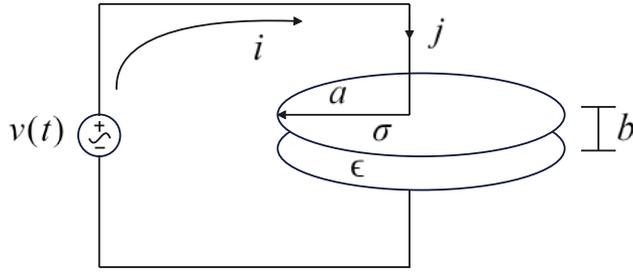


Figura 4.10: Capacitor de placas circulares paralelas.
Fuente: Los autores

que, las cargas negativas, se distribuyen sobre la superficie de la placa circular inferior, dando como resultado líneas de campo eléctrico desde la placa superior hasta la placa inferior. Por otro lado, debido a la corriente i que circula por los alambres y que conectan al capacitor, se produce un campo magnético alrededor del alambre vertical que une a las placas circulares del capacitor; además, en la frontera de la placa y el dieléctrico de permitividad ϵ del interior del capacitor, la corriente de conducción i es igual a la corriente de desplazamiento i_D , esto permite dibujar las líneas de campo magnético \vec{H} en el interior del capacitor y en forma circular de radio r , como se muestra en la Fig. 4.11.

Para calcular las magnitudes de la intensidad de campo eléctrico E y magnético H , se vuelve a redibujar la Fig. 4.11 en la trayectoria circular de radio r vista de la parte inferior de dicha trayectoria, y en dos dimensiones, tal como se muestra en la Fig. 4.12.

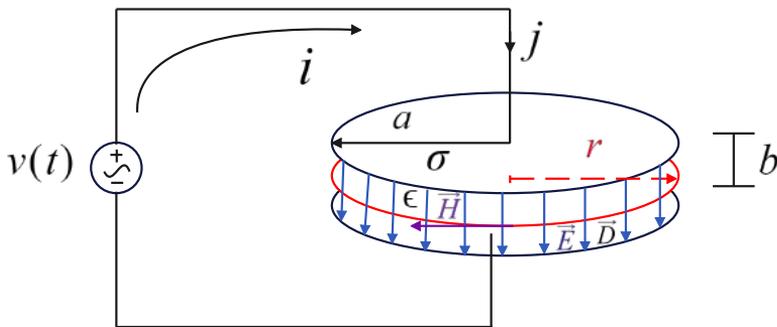


Figura 4.11: Capacitor de placas circulares con líneas de \vec{E} y \vec{H} perpendiculares entre sí.
Fuente: Los autores

Para calcular la intensidad de campo magnético H , se utiliza la ecuación de Maxwell en formato integral, esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.188)$$

Pero, el vector \vec{J} se relaciona con el vector \vec{E} , mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.189)$$

De igual manera, el vector \vec{D} se relaciona con el vector \vec{E} , mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4.190)$$

Reemplazando, se obtiene:

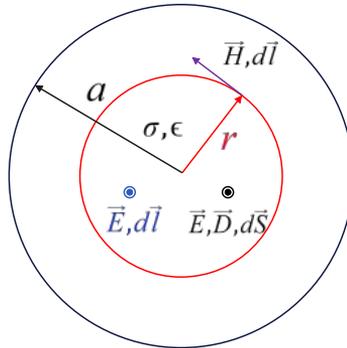


Figura 4.12: Vista inferior de la trayectoria circular del capacitor de placas circulares.

Fuente: Los autores

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.191)$$

reorganizando,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sigma \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.192)$$

Para integrar todos los términos de la Ecuación 4.192, se utiliza la Fig. 4.12; y, los límites de cada integral es de 0 a r , ya que se trata para un rango de $r < a$, así:

$$\int_0^r \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sigma \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{S} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.193)$$

Destruyendo el producto punto, se tiene:

$$\int_0^r H dl \cos 0^\circ = \sigma \int_0^r E dS \cos 0^\circ + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r E dS \cos 0^\circ \quad (4.194)$$

integrando,

$$H(2\pi r) = \sigma E(\pi r^2) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E(\pi r^2) \quad (4.195)$$

Simplificando y despejando H, se tiene:

$$H = \frac{\sigma r E}{2} + \frac{\epsilon r}{2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (4.196)$$

Ahora, para calcular la intensidad del campo eléctrico E , se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.197)$$

De igual manera, se utiliza la gráfica de los vectores \vec{E} y $d\vec{l}$ que se encuentran en la figura 4.12 para un radio $r < a$. Los límites de integración es de 0 hasta b ; y, $\Delta V = v(t)$, esto es:

$$v(t) = \int_0^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.198)$$

destruyendo el producto punto,

$$v(t) = \int_0^b E dl \cos 0^\circ \quad (4.199)$$

integrando,

$$v(t) = Eb \quad (4.200)$$

Despejando E y reemplazando el valor de $v(t)$, se obtiene:

$$E = \frac{v(t)}{b} = \frac{V_0 \cos \omega t}{b} \quad (4.201)$$

Se reemplaza la Ecuación 4.201 en la Ecuación 4.196,

$$H = \frac{\sigma r V_0 \cos \omega t}{2b} + \frac{\epsilon r}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{V_0 \cos \omega t}{b} \quad (4.202)$$

$$H = \frac{\sigma r V_0 \cos \omega t}{2b} + \frac{\epsilon r V_0}{2b} \frac{\partial}{\partial t} \cos \omega t \quad (4.203)$$

derivando,

$$H = \frac{\sigma r V_0 \cos \omega t}{2b} + \frac{\epsilon r V_0}{2b} (-\text{sen } \omega t) \omega \quad (4.204)$$

finalmente, simplificando se obtiene la Ecuación 4.205, que es lo que se quería demostrar.

$$H = \frac{r V_0}{2b} (\sigma \cos \omega t - \omega \epsilon \text{sen } \omega t) \quad (4.205)$$

Problema 4.2. Demostrar que el flujo de la suma $(\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t)$ a través de cualquier superficie cerrada es cero (ESPOL 1982, p471).

Desarrollo:

De acuerdo a la ecuación de Maxwell en forma integral, es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.206)$$

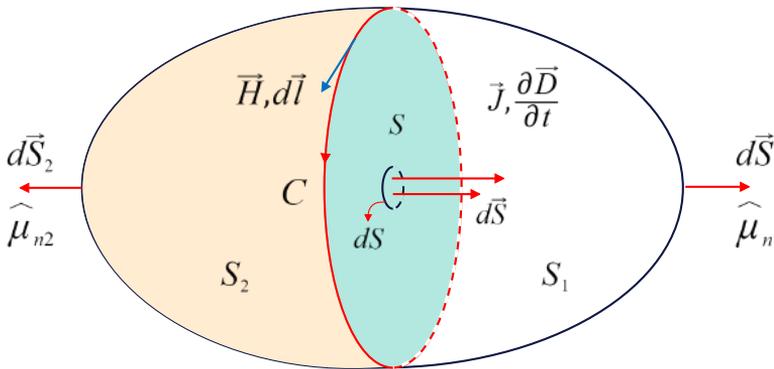


Figura 4.13: Flujo de $(\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t)$ a través de una superficie cerrada.

Fuente: Los autores

Donde, la trayectoria cerrada de línea C del producto punto entre los vectores intensidad de campo magnético \vec{H} y el vector de desplazamiento $d\vec{l}$, que determina la trayectoria de integración en el contorno cerrado C, es igual a la integral de superficie S descrita por el contorno cerrado. Por lo que, debido a que la superficie S de la parte derecha de la Ecuación 4.206 son iguales, se pueden agrupar los dos términos, así:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (4.207)$$

Si este contorno cerrado C está limitado por dos superficies S1 y S2 en la frontera de S, tal como se muestra en la Fig. 4.13, entonces, las superficies S1 y S2 forman una superficie cerrada.

De esta manera, la parte derecha de la Ecuación 4.207, se puede escribir como la suma de estas dos superficies; y, además, el flujo de $(\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t)$ es igual a través de todas las superficies limitadas por un contorno común, así:

$$\oint_{S_1+S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_2 \quad (4.208)$$

Pero, si se considera el vector unitario normal $\widehat{\mu}_{n1}$ positivo, entonces el vector unitario normal $\widehat{\mu}_{n2}$ es negativo, ya que tiene sentidos opuestos; por lo que, resolviendo la parte izquierda de la Ecuación 4.208, se tiene:

$$\oint_{S_1+S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS_1 \cos 0^\circ + \int_{S_2} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS_2 \cos 180^\circ \quad (4.209)$$

Simplificando,

$$\oint_{S_1+S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS_1 - \int_{S_2} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS_2 \quad (4.210)$$

Pero, debido a que las superficies son iguales, esto es, $S_1 = S_2 = S$; entonces $dS_1 = dS_2 = dS$, se tiene:

$$\oint_{S_1+S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS - \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS \quad (4.211)$$

Por consiguiente, la parte derecha de la Ecuación 4.211 es igual a cero, ya que los dos términos de la derecha son iguales, entonces se anulan, esto es:

$$\oint_{S_1+S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.212)$$

Aplicando el Teorema de la divergencia en la Ecuación 4.212, se tiene:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (4.213)$$

Resolviendo la Ecuación 4.213, se obtiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.214)$$

Desde el punto de vista matemático, si a cada término de una ecuación se multiplica o divide para un mismo valor, entonces la ecuación no se altera. Se aplica este criterio en la

Ecuación 4.214, es decir, si se aplica la divergencia a cada término de la ecuación, esta no se altera, entonces:

$$\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (4.215)$$

Finalmente, con el resultado de la Ecuación 4.215 queda demostrado lo que se pidió en este problema.

Problema 4.3. Demostrar que el Vector de Poynting en forma compleja \vec{S}_C viene dada por la siguiente ecuación (ESPOL 1982, p474):

$$\vec{S}_C = \frac{1}{2} \vec{E}_C \times \vec{H}_C \quad (4.216)$$

Desarrollo:

A partir de los vectores de campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} variables en el tiempo y espacio, que se muestran en las ecuaciones 4.85, 4.87 y 4.106, se escriben a continuación:

$$\vec{E}_C = \vec{E}(x, y, z) e^{j\theta_E(x, y, z)} \quad (4.217)$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_C e^{j\omega t} \quad (4.218)$$

$$\vec{H}_C = \vec{H}(x, y, z) e^{j\theta_H(x, y, z)} \quad (4.219)$$

y, reemplazando el \vec{E} por el \vec{H} en la Ecuación 4.87, se tiene:

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_C e^{j\omega t} \quad (4.220)$$

De estas ecuaciones del campo eléctrico y magnético se toma la parte real, así:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_C e^{j\omega t} \right\} \quad (4.221)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}_C e^{j\omega t} \right\} \quad (4.222)$$

Pero, el vector del campo eléctrico complejo \vec{E}_C tiene una parte real \vec{E}_r y una parte imaginaria \vec{E}_i , entonces:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_r + j\vec{E}_i \quad (4.223)$$

$$\vec{H}_C = \vec{H}_r + j\vec{H}_i \quad (4.224)$$

Reemplazando la Ecuación 4.223 en las Ecuación 4.221, resulta:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \left(\vec{E}_r + j\vec{E}_i \right) e^{j\omega t} \right\} \quad (4.225)$$

o, lo que es lo mismo

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \left(\vec{E}_r + j\vec{E}_i \right) e^{j\omega t} \right\} \quad (4.226)$$

Reemplazando la función de Euler en la Ecuación 4.226, se tiene:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \left(\vec{E}_r + j\vec{E}_i \right) (\cos \omega t + j \text{sen } \omega t) \right\} \quad (4.227)$$

Multiplicando los dos términos, resulta:

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \left(\vec{E}_r \cos \omega t - \vec{E}_i \text{sen } \omega t \right) + j \left(\vec{E}_r \text{sen } \omega t + \vec{E}_i \cos \omega t \right) \right\} \quad (4.228)$$

Finalmente, tomando la parte real, se tiene:

$$\vec{E} = \vec{E}_r \cos \omega t - \vec{E}_i \text{sen } \omega t \quad (4.229)$$

De igual manera, reemplazando la Ecuación 4.224 en las Ecuación 4.222, resulta:

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \left(\vec{H}_r + j\vec{H}_i \right) e^{j\omega t} \right\} \quad (4.230)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\vec{H} = \text{Re} \left\{ \left(\vec{H}_r + j\vec{H}_i \right) e^{j\omega t} \right\} \quad (4.231)$$

reemplazando la función de Euler en la Ecuación 4.231, se tiene:

$$\vec{H} = \text{Re} \left\{ \left(\vec{H}_r + j\vec{H}_i \right) (\cos \omega t + j \text{sen } \omega t) \right\} \quad (4.232)$$

Multiplicando los dos términos, resulta:

$$\vec{H} = \text{Re} \left\{ \left(\vec{H}_r \cos \omega t - \vec{H}_i \text{sen } \omega t \right) + j \left(\vec{H}_r \text{sen } \omega t + \vec{H}_i \cos \omega t \right) \right\} \quad (4.233)$$

Por último, tomando la parte real, se tiene:

$$\vec{H} = \vec{H}_r \cos \omega t - \vec{H}_i \sin \omega t \quad (4.234)$$

Por otro lado, considerando el Vector de Poynting \vec{S} , que es igual a:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.235)$$

Se reemplaza las ecuaciones 4.229 y 4.234 en el Vector de Poynting, de modo que:

$$\vec{S} = (\vec{E}_r \cos \omega t - \vec{E}_i \sin \omega t) \times (\vec{H}_r \cos \omega t - \vec{H}_i \sin \omega t) \quad (4.236)$$

Entonces, resolviendo el producto cruz, el valor instantáneo del Vector de Poynting, es:

$$\vec{S} = \vec{E}_r \times \vec{H}_r \cos^2 \omega t + \vec{E}_i \times \vec{H}_i \sin^2 \omega t - \vec{E}_r \times \vec{H}_i \sin \omega t \cos \omega t - \vec{E}_i \times \vec{H}_r \sin \omega t \cos \omega t \quad (4.237)$$

A continuación, de la Ecuación 4.237 se obtiene el valor promedio \vec{S}_{prom} , esto es:

$$\vec{S}_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt \quad (4.238)$$

Donde, T es el período igual a: $T = 2\pi/\omega$

y, utilizando las identidades trigonométricas, se tiene que:

$$\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t \quad (4.239)$$

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \quad (4.240)$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \quad (4.241)$$

Entonces, se reemplaza la Ecuación 4.239 en el tercer y cuarto término de la Ecuación 4.237 y luego al reemplazar en la Ecuación 4.238, se tiene:

$$\vec{S}_{prom1} = -\frac{1}{2T} \int_0^T (\vec{E}_r \times \vec{H}_i \sin 2\omega t + \vec{E}_i \times \vec{H}_r \sin 2\omega t) dt \quad (4.242)$$

Se reemplaza el valor del período $T = 2\pi/\omega$, esto es

$$\vec{S}_{prom1} = -\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (\vec{E}_r \times \vec{H}_i \sin 2\omega t + \vec{E}_i \times \vec{H}_r \sin 2\omega t) dt \quad (4.243)$$

Se integra,

$$\vec{S}_{prom1} = -\frac{\omega}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_r x \vec{H}_i \right) [-\cos 2\omega t]_0^{2\pi/\omega} \right\} + \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_i x \vec{H}_r \right) [-\cos 2\omega t]_0^{2\pi/\omega} \quad (4.244)$$

Se cambia de signos,

$$\vec{S}_{prom1} = \frac{\omega}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_r x \vec{H}_i \right) [\cos 2\omega t]_0^{2\pi/\omega} \right\} + \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_i x \vec{H}_r \right) [\cos 2\omega t]_0^{2\pi/\omega} \quad (4.245)$$

$$\vec{S}_{prom1} = \frac{\omega}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_r x \vec{H}_i \right) (\cos 2\omega \cdot 2\pi/\omega - \cos 0) \right\} + \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_i x \vec{H}_r \right) (\cos 2\omega \cdot 2\pi/\omega - \cos 0) \quad (4.246)$$

$$\vec{S}_{prom1} = \frac{\omega}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_r x \vec{H}_i \right) (\cos 720^\circ - \cos 0^\circ) \right\} + \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_i x \vec{H}_r \right) (\cos 720^\circ - \cos 0^\circ) \quad (4.247)$$

$$\vec{S}_{prom1} = \frac{\omega}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_r x \vec{H}_i \right) (1 - 1) \right\} + \left(\frac{1}{2\omega} \vec{E}_i x \vec{H}_r \right) (1 - 1) \quad (4.248)$$

$$\vec{S}_{prom1} = 0 \quad (4.249)$$

De igual manera, se reemplaza las ecuaciones 4.240 y 4.241 en el primero y segundo término de la Ecuación 4.237 y luego al reemplazar en la Ecuación 4.238, se tiene:

$$\vec{S}_{prom2} = \frac{1}{2T} \int_0^T \left(\vec{E}_r x \vec{H}_r + \cos 2\omega t + \vec{E}_i x \vec{H}_i - \cos 2\omega t \right) dt \quad (4.250)$$

Simplificando,

$$\vec{S}_{prom2} = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\vec{E}_r x \vec{H}_r + \vec{E}_i x \vec{H}_i \right) dt \quad (4.251)$$

integrando, se tiene:

$$\vec{S}_{prom2} = \frac{\omega}{4\pi} \left(\vec{E}_r x \vec{H}_r + \vec{E}_i x \vec{H}_i \right) \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}_r x \vec{H}_r + \vec{E}_i x \vec{H}_i \right) \quad (4.252)$$

$$\vec{S}_{prom2} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}_r x \vec{H}_r + \vec{E}_i x \vec{H}_i \right) \quad (4.253)$$

Finalmente, el valor promedio es la suma de las dos ecuaciones 4.249 y 4.253, esto es:

$$\vec{S}_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \vec{S}_{prom1} + \vec{S}_{prom2} = 0 + \frac{1}{2} \left(\vec{E}_r x \vec{H}_r + \vec{E}_i x \vec{H}_i \right) \quad (4.254)$$

$$\vec{S}_{prom} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}_r \times \vec{H}_r + \vec{E}_i \times \vec{H}_i \right) \quad (4.255)$$

Ahora, de acuerdo con la Ecuación 4.223 y Ecuación 4.224 el valor promedio dado en la Ecuación 4.255 del Vector de Poynting, también se puede obtener directamente de los vectores de campo complejo \vec{E}_C y \vec{H}_C de la siguiente manera (ESPOL 1982, p475):

$$\vec{S}_{prom} = \frac{1}{2} Re \left\{ \vec{E}_C \times \vec{H}_C^* \right\} = \frac{1}{2} Re \left\{ \left(\vec{E}_r + j\vec{E}_i \right) \times \left(\vec{H}_r - j\vec{H}_i \right) \right\} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}_r \times \vec{H}_r + \vec{E}_i \times \vec{H}_i \right) \quad (4.256)$$

El asterisco como superíndice en \vec{H}_C^* denota el complejo conjugado de \vec{H}_C , es decir:

$$\vec{H}_C^* = \vec{H}_r \mp j\vec{H}_i \quad (4.257)$$

Si,

$$\vec{H}_C = \vec{H}_r \pm j\vec{H}_i \quad (4.258)$$

Por tanto, para determinar el valor promedio del Vector de Poynting en un punto, es suficiente encontrar el producto cruz a partir de los vectores de campo complejo \vec{E}_C y \vec{H}_C , esto es:

$$\vec{S}_C = \frac{1}{2} \vec{E}_C \times \vec{H}_C^* \quad ; \text{definición del vector de Poynting complejo} \quad (4.259)$$

La parte real de la Ecuación 4.259 es exactamente igual al valor medio del Vector de Poynting. \vec{S}_C así definido se denomina Vector de Poynting en forma compleja. Tener en cuenta que esta conclusión no se puede deducir de las ecuaciones 4.223 y 4.224 sin conocer la Ecuación 4.255. Otro error muy frecuente es olvidar que \vec{H}_C^* , en lugar de \vec{H}_C , entra en esta expresión (ESPOL 1982, p475).

Capítulo V

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES

5.1. Ondas electromagnéticas

En el capítulo IV, se observó que la corriente de desplazamiento según lo postuló Maxwell conduce a ecuaciones de onda. Uno de los logros más brillantes de la teoría del electromagnetismo de Maxwell fue la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas. En el presente capítulo se analizarán los tipos más simples (y en cierto sentido tipos idealizados) de estas ondas, conocidas como ondas planas, las cuales son solo función del tiempo y de la dirección en la cual se propagan. Por lo tanto, una onda que se propaga en la dirección del eje z , es función solo de z y t . Aunque son muy simples, tienen una importancia práctica considerable como aproximaciones a ciertos tipos de ondas que se encuentran con frecuencia (ESPOL 1982, p510).

Para determinar las ondas electromagnéticas, se utilizan las cuatro Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, y que se muestran a continuación:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.4)$$

5.1.1. Ecuación de onda del campo magnético \vec{H}

A continuación, para determinar la ecuación de onda de la intensidad del campo magnético H , se parte de la Ecuación de Maxwell (Ecuación 5.2) en forma diferencial, esto es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.5)$$

Matemáticamente, si se multiplica o divide un valor a todos los términos de la ecuación, ésta no se altera. Por lo tanto, si se aplica el rotacional a todos los términos de la Ecuación 5.2, ésta no se verá alterada, así:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (5.6)$$

La parte izquierda de la Ecuación 5.6 es una identidad vectorial, que es igual a :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} \quad (5.7)$$

y, en la parte derecha de la ecuación, se destruye el paréntesis, así:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.8)$$

Pero, utilizando la ecuación que relaciona el vector de densidad de flujo magnético \vec{B} con la intensidad de campo magnético \vec{H} en un medio de permeabilidad μ , esto es:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.9)$$

A continuación, se aplica la divergencia en los dos lados de la Ecuación 5.9, así:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{H} \quad (5.10)$$

Despejando la divergencia de $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$, se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{\mu} \quad (5.11)$$

Por otro lado, de acuerdo a la Ecuación 5.4 de Maxwell, la divergencia de la densidad de flujo magnético es igual a cero $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, entonces la Ecuación 5.11 se reduce a cero, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{\mu} = 0 \quad (5.12)$$

Además, utilizando la ecuación que relaciona el vector de desplazamiento eléctrico \vec{D} con la intensidad de campo eléctrico \vec{E} en un medio de permitividad ϵ , se tiene:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5.13)$$

Reemplazando las Ecuación 5.12 y 5.13 en la Ecuación 5.8, se obtiene:

$$\vec{\nabla} (0) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \quad (5.14)$$

Simplificando,

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \quad (5.15)$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (5.16)$$

También, de acuerdo a la Ecuación 5.1 de Maxwell, el rotacional de la intensidad de campo eléctrico es igual a la derivada parcial con respecto al tiempo de la densidad de flujo magnético, entonces se reemplaza la Ecuación 5.1 en la Ecuación 5.16, así:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (5.17)$$

Seguidamente, se reemplaza la Ecuación 5.9 en la Ecuación 5.17, esto es:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} - \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu \vec{H}) \quad (5.18)$$

Destruyendo el paréntesis, se obtiene:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5.19)$$

Ordenado los términos,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (5.20)$$

En la Ecuación 5.20, el término $(-\vec{\nabla} \times \vec{J})$ de la parte derecha representa la **generación del campo**, y la parte izquierda representa la **onda**, esto es:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \text{Onda} \quad (5.21)$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{J} = \text{Genera el campo} \quad (5.22)$$

Continuando con la deducción de la ecuación de onda de campo magnético, se utiliza la ecuación que relaciona el vector de densidad de corriente \vec{J} con la intensidad de campo eléctrico \vec{E} en un medio de conductividad σ , entonces:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.23)$$

De esta manera, se reemplaza la Ecuación 5.23 en la Ecuación 5.20, así:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \times \sigma \vec{E} \quad (5.24)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (5.25)$$

Nuevamente, se reemplaza la Ecuación 5.1 en la Ecuación 5.25, esto es:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\sigma \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (5.26)$$

Simplificando,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.27)$$

También, se reemplaza la Ecuación 5.9 en la ecuación 5.27, esto es:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} \quad (5.28)$$

Simplificando e igualando a cero, se tiene:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (5.29)$$

Finalmente, la Ecuación 5.29 representa la ecuación de la onda del campo magnético \vec{H} válida para cualquier medio por donde se propague la onda. Además, es válida para cualquier sistema de coordenadas, esto es: cartesianas, cilíndricas y esféricas.

5.1.2. Ecuación de onda del campo eléctrico \vec{E}

Para determinar la ecuación de onda del campo eléctrico \vec{E} , se sigue un procedimiento similar para la onda del campo magnético. A partir de la Ecuación de Maxwell en forma diferencial (Ecuación 5.1), se aplica el rotacional en los dos lados de la ecuación, esto es:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (5.30)$$

Se aplica la identidad vectorial en el lado izquierdo de la Ecuación 5.30 y en la parte derecha se reemplaza el vector \vec{B} , así:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (5.31)$$

Simplificando,

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (5.32)$$

Se reemplaza la Ecuación 5.2 en la Ecuación 5.32, se obtiene:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (5.33)$$

Destruyendo el paréntesis y reemplazando las Ecuaciones 5.13 y 5.21 en la Ecuación 5.33, se tiene:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.34)$$

A continuación, se reemplaza la Ecuación 5.13 en la tercera Ecuación de Maxwell, esto es 5.3, entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho_V \quad (5.35)$$

Despejando,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon} \quad (5.36)$$

A continuación, se reemplaza la Ecuación 5.36 en la Ecuación 5.34, esto es:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho_V}{\epsilon} \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.37)$$

Ordenando los términos,

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \left(\frac{\rho_V}{\epsilon} \right) = 0 \quad (5.38)$$

Finalmente, la Ecuación 5.38 representa la ecuación de la onda del campo eléctrico \vec{E} válida para cualquier medio por donde se propague la onda. Además, es válida para cualquier sistema de coordenadas, esto es: cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Similar a las Ecuaciones 5.21 y 5.22, previa a la Ecuación 5.38, se puede escribir:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla (\rho/\epsilon) \quad (5.39)$$

En la Ecuación 5.39, el término $\left(\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla (\rho/\epsilon) \right)$ de la parte derecha representa la *generación del campo*, y la parte izquierda representa la *onda*, esto es:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{Onda} \quad (5.40)$$

$$\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla (\rho/\epsilon) = \text{Genera el campo} \quad (5.41)$$

5.2. Ecuación de onda en el espacio libre (caso sin pérdidas)

Las ecuaciones de onda en el espacio libre y sin fuentes, se obtienen cuando los términos generadores del campo eléctrico y magnético son iguales a cero, esto es, la densidad de corriente J y la densidad volumétrica de cargas ρ_V son iguales a cero, así, $J = 0$ y $\rho_V = 0$.

Por consiguiente, en la Ecuación 5.20 si la densidad de corriente es igual a cero, se tiene

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.42)$$

De igual manera, en la Ecuación 5.39 si la densidad volumétrica de cargas es igual a cero, se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.43)$$

De tal manera que, las ecuaciones 5.42 y 5.43 corresponden a las ondas electromagnéticas propagándose en el espacio libre; y, pueden aplicarse en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas.

Por consiguiente, en un sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares, al campo eléctrico \vec{E} está dirigido en la componente x , y el campo magnético \vec{H} está dirigido en la compo-

nente y . No obstante, estos dos vectores se encuentran en el plano xy , y se propagan en la dirección de la componente z a través del vector de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, tal como se muestra en la Fig. 5.1. A partir de la Ecuación 5.43, en coordenadas rectangulares, se tiene:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(x, y, z, t)\hat{a}_x + E_y(x, y, z, t)\hat{a}_y + E_z(x, y, z, t)\hat{a}_z \quad (5.44)$$

Pero, el campo eléctrico solo existe en la componente x , esto es E_x , mientras que las componentes E_y y E_z son iguales a cero, esto es:

$$E_y = E_z = 0 \quad (5.45)$$

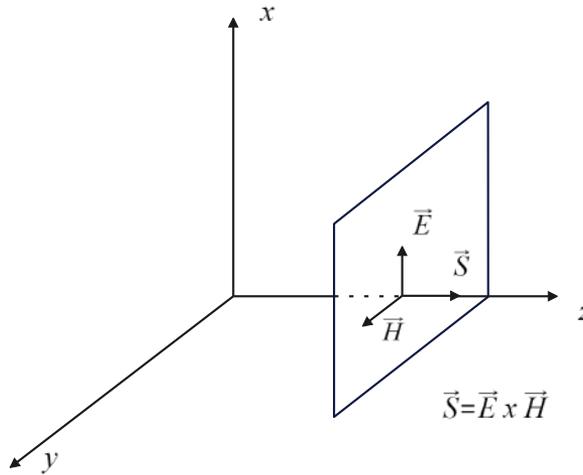


Figura 5.1: Ondas electromagnéticas planas.

Fuente: Los autores

Por lo tanto, la Ecuación 5.44 se reduce a:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(x, y, z, t)\hat{a}_x \quad (5.46)$$

Por lo que, el campo eléctrico es función del espacio z y del tiempo t , así:

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{a}_x \quad (5.47)$$

De la Ecuación 5.43, el Laplaciano $\vec{\nabla}^2 \vec{E}$ en coordenadas rectangulares, es igual a:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \quad (5.48)$$

Pero, debido a que el campo eléctrico está en la componente x , y varía con respecto a z , entonces, la derivada parcial con respecto a x y a y son iguales a cero, esto es:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0 \quad (5.49)$$

Por lo que, la Ecuación 5.48 es igual a:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \quad (5.50)$$

Finalmente, reemplazando la Ecuación 5.50 en la Ecuación 5.43, se tiene:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (5.51)$$

A continuación, la solución de la ecuación diferencial de segundo orden mostrada en la Ecuación 5.51, tiene dos partes, la una parte viaja en la dirección positiva de z , y se llama onda incidente representada por $E_1(t - z/v)$, y la otra parte viaja en la dirección negativa de z , y se llama onda reflejada que está representada por $E_2(t + z/v)$, esto es:

$$E_x(z, t) = E_1(t - z/v) + E_2(t + z/v) \quad (5.52)$$

Donde, v es la velocidad de la onda que viaja a la velocidad de la luz en el espacio libre, E_1 y E_2 son las funciones de campo eléctrico incidente y reflejado, respectivamente, que se debe calcular; y, $(t - z/v)$ y $(t + z/v)$ son los argumentos de las funciones de las ondas incidentes y reflejadas, respectivamente.

5.3. Ecuación de onda en medios materiales (caso con pérdidas)

En el apartado 5.1 se desarrollaron las ecuaciones 5.29 y 5.38 correspondientes a la intensidad de campo magnético \vec{H} y a la intensidad de campo eléctrico \vec{E} , respectivamente. Por consiguiente, considerando que las ecuaciones de onda de campo eléctrico y magnético se obtienen a partir de una onda de corriente, entonces, la ecuación 5.38, queda como sigue.

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (5.53)$$

Por último, las ecuaciones 5.29 y 5.53 representan a las ondas electromagnéticas viajando por cualquier medio de propagación, como se muestra en la Fig. 5.2. Sin embargo, si se considera una onda de campo eléctrico, Ecuación 5.53, propagándose por un **medio dieléctrico**, se dice que la derivada parcial del vector de desplazamiento \vec{D} (o $\epsilon \vec{E}$) con respecto al tiempo es mucho mayor que la densidad de corriente \vec{J} (o $\sigma \vec{E}$), esto es:

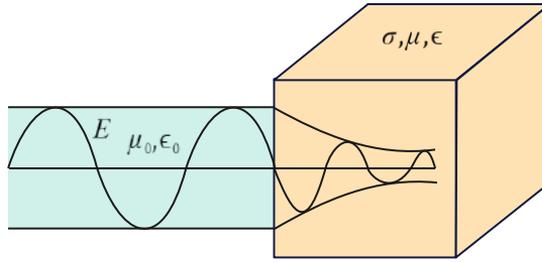


Figura 5.2: Onda de campo eléctrico propagándose en diferentes medios.

Fuente: Los autores

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \gg \vec{J} \quad (5.54)$$

Entonces, el tercer término de la Ecuación 5.53 que representa a un medio conductor, es despreciable; por consiguiente, el resultado final, se muestra en la Ecuación 5.55, así:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{La onda se está propagando en un medio más dieléctrico} \quad (5.55)$$

Por otro lado, si se considera una onda de campo eléctrico, Ecuación 5.53, propagándose por un **medio conductor**, se dice que la derivada parcial del vector de desplazamiento \vec{D} con respecto al tiempo es mucho menor que la densidad de corriente \vec{J} , esto es:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J} \quad (5.56)$$

Entonces, el segundo término de la ecuación que representa a un medio dieléctrico, es despreciable (Ecuación 5.57).

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{La onda se está propagando en un medio más conductor} \quad (5.57)$$

5.4. Ecuación de ondas planas sinusoidales

Las ondas planas, son ondas que varían solamente en la dirección de propagación z y con el tiempo t . Son uniformes en planos normales a la dirección de propagación, como se muestra en la Fig. 5.1.

Para determinar la ecuación de onda de la intensidad de campo eléctrico; en primer lugar, a partir de la Ecuación 5.47, se escribe en formato exponencial complejo, así:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left[\vec{E}_c(z) e^{j\omega t} \right] \quad (5.58)$$

y, en segundo lugar, se reemplaza la Ecuación 5.58 en la Ecuación 5.53, esto es:

$$\nabla^2 \left[\text{Re} \left(\vec{E}_c e^{j\omega t} \right) \right] - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\text{Re} \left(\vec{E}_c e^{j\omega t} \right) \right] - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \left[\text{Re} \left(\vec{E}_c e^{j\omega t} \right) \right] = 0 \quad (5.59)$$

simplificando,

$$\text{Re} \left[\nabla^2 \left(\vec{E}_c e^{j\omega t} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vec{E}_c e^{j\omega t} \right) - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E}_c e^{j\omega t} \right) \right] = 0 \quad (5.60)$$

Resolviendo las derivadas parciales,

$$\text{Re} \left[e^{j\omega t} \nabla^2 \vec{E}_c - \mu\epsilon \vec{E}_c(j\omega)(j\omega) e^{j\omega t} - \mu\sigma \vec{E}_c(j\omega) e^{j\omega t} \right] = 0 \quad (5.61)$$

Simplificando,

$$e^{j\omega t} \nabla^2 \vec{E}_c - \mu\epsilon \vec{E}_c(j\omega)(j\omega) e^{j\omega t} - \mu\sigma \vec{E}_c(j\omega) e^{j\omega t} = 0 \quad (5.62)$$

Sacando factor común y simplificando,

$$e^{j\omega t} \left[\nabla^2 \vec{E}_c + \mu\epsilon \omega^2 \vec{E}_c - \mu\sigma \vec{E}_c(j\omega) \right] = 0 \quad (5.63)$$

simplificando,

$$\nabla^2 \vec{E}_c + \mu\epsilon \omega^2 \vec{E}_c - j\omega\mu\sigma \vec{E}_c = 0 \quad (5.64)$$

Por otro lado, el vector campo eléctrico se encuentra representado en la componente x del plano cartesiano, esto es \vec{E}_x , y el vector campo magnético se encuentra en la componente y del plano cartesiano, esto es \vec{H}_y , tal como se muestra en la Fig.5.3; entonces, al reemplazar la Ecuación 5.50 en la Ecuación 5.64, se tiene:

$$\frac{\partial^2 E_{xc}}{\partial z^2} + \mu\epsilon \omega^2 E_{xc} - j\omega\mu\sigma E_{xc} = 0 \quad (5.65)$$

Agrupando,

$$\frac{\partial^2 E_{xc}}{\partial z^2} + E_{xc} (\mu\epsilon \omega^2 - j\omega\mu\sigma) = 0 \quad (5.66)$$

ó,

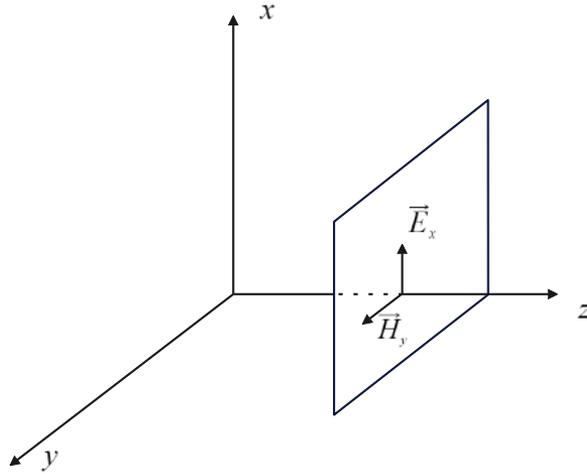


Figura 5.3: Onda plana compuesta por el campo eléctrico \vec{E}_x y el campo magnético \vec{H}_y .

Fuente: Los autores

$$\frac{\partial^2 E_{xc}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) E_{xc} = 0 \quad (5.67)$$

pero, ϵ^* es la permitividad compleja, así:

$$\epsilon^* = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) \quad (5.68)$$

Reemplazando la Ecuación 5.68 en la Ecuación 5.67, se tiene:

$$\frac{\partial^2 E_{xc}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon^* E_{xc} = 0 \quad (5.69)$$

También, $\omega^2 \mu \epsilon^*$ es igual a $-\gamma^2$, esto es:

$$\omega^2 \mu \epsilon^* = -\gamma^2 \quad (5.70)$$

y,

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (5.71)$$

Donde,

$$\gamma = \text{constante de propagación} \quad (5.72)$$

$$\alpha = \text{constante de atenuación} \quad (5.73)$$

$$\beta = \text{constante de fase} \quad (5.74)$$

Reemplazando la Ecuación 5.70 en la Ecuación 5.69, se tiene:

$$\frac{\partial^2 E_{xc}}{\partial z^2} - \gamma^2 E_{xc} = 0 \quad (5.75)$$

Resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden 5.75 se obtiene la onda de campo eléctrico E_{xc} en el formato exponencial complejo, que depende únicamente del espacio z , esto es $E_{xc}(z)$, así:

$$E_{xc}(z) = E_{0i}e^{-\gamma z} + E_{0r}e^{\gamma z} \quad (5.76)$$

Para que la Ecuación 5.76, a más de variar con respecto al espacio, también varíe con respecto al tiempo, los términos de la derecha se multiplican por la función exponencial $e^{j\omega t}$, entonces:

$$E_{xc}(z, t) = E_{0i}e^{-\gamma z + j\omega t} + E_{0r}e^{\gamma z + j\omega t} \quad (5.77)$$

De tal forma que, la Ecuación 5.77 está compuesta de dos partes, la primera parte se denomina onda incidente, y la segunda parte se denomina onda reflejada; además, E_{0i} y E_{0r} representan las amplitudes de la onda incidente y reflejada, respectivamente, esto es:

$$E_{xc}(z, t) = E_{0i}e^{-\gamma z + j\omega t} \quad \text{onda incidente} \quad (5.78)$$

$$E_{xc}(z, t) = E_{0r}e^{\gamma z + j\omega t} \quad \text{onda reflejada} \quad (5.79)$$

Si una onda está propagándose por el medio 1, denominado onda incidente, e incide en la frontera de dos medios diferentes, entonces en el medio 1 también va a existir una onda reflejada, tal como se muestra en la Fig. 5.4.

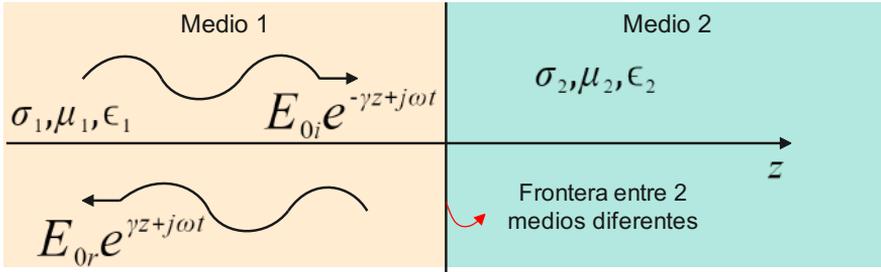


Figura 5.4: Ondas incidente y reflejada en el medio 1.

Fuente: Los autores

Para determinar la ecuación de onda de la intensidad de campo magnético, se sigue el procedimiento de forma similar al campo eléctrico; de tal forma que, el resultado final de la onda de campo magnético está en la componente y , que viaja en la dirección de la componente z , esto es:

$$H_{yc}(z, t) = H_{0i}e^{-\gamma z + j\omega t} + H_{0r}e^{\gamma z + j\omega t} \quad (5.80)$$

De tal forma que, la Ecuación 5.80 está compuesta de dos partes, la primera parte se denomina onda incidente, y la segunda parte se denomina onda reflejada, así:

$$H_{yc}(z, t) = H_{0i}e^{-\gamma z + j\omega t} \quad \text{onda incidente} \quad (5.81)$$

$$H_{yc}(z, t) = H_{0r}e^{\gamma z + j\omega t} \quad \text{onda reflejada} \quad (5.82)$$

Propagación de ondas electromagnéticas incidente. A continuación, si la onda de campo eléctrico o campo magnético no chocan o inciden en la frontera de dos medios diferentes, no existirá la onda reflejada, únicamente existe onda incidente; entonces, en la Ecuación 5.78 se reemplaza la constante de propagación γ , esto es:

$$E_{xc}(z, t) = E_{0i}e^{-(\alpha + j\beta)z + j\omega t} \quad (5.83)$$

Destruyendo el paréntesis y aplicando las propiedades de la función exponencial, se tiene:

$$E_{xc}(z, t) = E_{0i}e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\omega t} \quad (5.84)$$

$$E_{xc}(z, t) = E_{0i} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.85)$$

Pero,

$$E_x(z, t) = \text{Re}[E_{xc}(z, t)] \quad (5.86)$$

entonces:

$$E_x(z, t) = E_{0i} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.87)$$

De igual manera se obtiene la onda incidente de campo magnético, esto es:

$$H_y(z, t) = H_{0i} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.88)$$

Medio dieléctrico perfecto o vacío sin pérdidas

A partir de las Ecuaciones 5.67, 5.68, 5.69 y 5.75, esto es:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) E_x = 0 \quad (5.89)$$

$$\epsilon^* = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial^2 E_{xc}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon^* E_{xc} = 0 \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial^2 E_{xc}}{\partial z^2} - \gamma^2 E_{xc} = 0 \quad (5.92)$$

La solución de la onda de campo eléctrico que se obtuvo en función del espacio y tiempo es la Ecuación 5.77 que representa una onda incidente y una onda reflejada, así:

$$E_{xc}(z, t) = E_{0i} e^{-\gamma z + j\omega t} + E_{0r} e^{\gamma z + j\omega t} \quad (5.93)$$

por otro lado, considerando que σ representa un medio conductor y, ϵ representa un medio dieléctrico, entonces, cuando $\sigma/\omega\epsilon$ es mucho menor que uno, se está frente a un medio dieléctrico, así:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1 \quad (5.94)$$

Por consiguiente, el segundo término de $\left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)$ es despreciable, es decir, es aproximadamente igual a cero, de esta manera:

$$\epsilon^* = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) = \epsilon (1 - j0) = \epsilon \quad (5.95)$$

entonces,

$$\epsilon^* = \epsilon \quad (5.96)$$

pero,

$$\omega^2 \mu \epsilon^* = -\gamma^2 \quad (5.97)$$

Despejando la constante de propagación γ , se tiene:

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon^*} = j\omega \sqrt{\mu \epsilon^*} = \alpha + j\beta \quad (5.98)$$

Reemplazando valores en la Ecuación 5.98, se tiene:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} = \alpha + j\beta \quad (5.99)$$

Debido a que se tiene un medio dieléctrico perfecto o vacío sin pérdidas, la constante de atenuación α es igual a cero ($\alpha = 0$), entonces, reemplazando en la Ecuación 5.99, se tiene:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} = 0 + j\beta = j\beta \quad (5.100)$$

De la Ecuación 5.100, se tiene dos resultados:

El primer resultado, es:

$$\gamma = j\beta \quad (5.101)$$

El segundo resultado, es:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (5.102)$$

Reemplazando la Ecuación 5.101 en la Ecuación 5.78, se tiene:

$$E_{xc}(z, t) = E_0 e^{-j\beta z + j\omega t} \quad (5.103)$$

Escribiendo de otra manera, así:

$$E_{xc}(z, t) = E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.104)$$

La Ecuación 5.104, representa la variación del campo eléctrico en una onda plana, siempre y cuando la propagación de la onda sea en un medio dieléctrico; esto es, cuando se cumple que $(\sigma/\omega\epsilon) \ll 1$.

Medio conductor con muy pocas pérdidas

Nuevamente, a partir de las Ecuaciones 5.67, 5.68, 5.69, 5.75 y 5.77; Y además, considerando que σ representa un medio conductor y, ϵ representa un medio dieléctrico, entonces, cuando $\sigma/\omega\epsilon$ es mucho mayor que uno, así:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \quad (5.105)$$

Entonces, el primer término de $(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})$ es despreciable con respecto al segundo, esto es:

$$\epsilon^* = \epsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \quad (5.106)$$

El valor de 1 se reemplaza por 0, debido a que el segundo término es mucho mayor que uno, es decir, si se suma 1, no varía significativamente, así:

$$\epsilon^* = \epsilon \left(0 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) = -j\frac{\sigma}{\omega} \quad (5.107)$$

Reemplazando la Ecuación 5.107 en la Ecuación 5.98, se tiene:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu\epsilon^*} = j\omega \sqrt{\mu\left(-j\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \alpha + j\beta \quad (5.108)$$

Pero,

$$j\omega \sqrt{\mu\left(-j\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \sqrt{j^2\omega^2\mu\left(-j\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \sqrt{(-1)\omega^2\mu\left(-j\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \sqrt{j} \quad (5.109)$$

entonces,

$$j\omega \sqrt{\mu\left(-j\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \sqrt{j} \quad (5.110)$$

ahora bien,

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \quad (5.111)$$

Reemplazando la Ecuación 5.111 en la Ecuación 5.110, se tiene:

$$j\omega \sqrt{\mu \left(-j \frac{\sigma}{\omega}\right)} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \frac{1+j}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1+j) \quad (5.112)$$

Esto es,

$$j\omega \sqrt{\mu \left(-j \frac{\sigma}{\omega}\right)} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1+j) \quad (5.113)$$

Pero, δ_s representa la *profundidad de penetración* (en metros) de una onda electromagnética propagándose a una velocidad \vec{v} en un material conductor, tal como se muestra en la Fig.5.5, dado por:

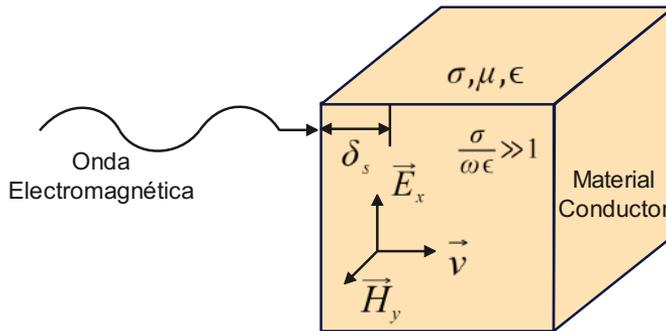


Figura 5.5: Penetración δ_s de una onda electromagnética en un conductor.

Fuente: Los autores

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (5.114)$$

Reemplazando la Ecuación 5.114 en la Ecuación 5.113, se tiene:

$$j\omega \sqrt{\mu \left(-j \frac{\sigma}{\omega}\right)} = \frac{1}{\delta_s} (1+j) \quad (5.115)$$

Por último, se reemplaza la Ecuación 5.115 en la Ecuación 5.108, así:

$$\gamma = \frac{1}{\delta_s} (1+j) = \alpha + j\beta \quad (5.116)$$

$$\gamma = \frac{1}{\delta_s} + \frac{1}{\delta_s} j = \alpha + j\beta \quad (5.117)$$

Donde,

$$\alpha = \frac{1}{\delta_s} = \beta \quad (5.118)$$

Reemplazando la Ecuación 5.117 en la Ecuación 5.78, se tiene

$$E_{xc}(z, t) = E_0 e^{-\left(\frac{1}{\delta_s} + \frac{j}{\delta_s}\right)z + j\omega t} \quad (5.119)$$

Separando términos,

$$E_{xc}(z, t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta_s}} e^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta_s}\right)} \quad (5.120)$$

La Ecuación 5.120, representa la variación del campo eléctrico en una onda plana, siempre y cuando la propagación de la onda sea en un medio conductor; esto es, cuando se cumple que $(\sigma/\omega\epsilon) \gg 1$.

5.5. Naturaleza transversal de las ondas planas

Cuando una onda electromagnética plana se propaga por el espacio libre se observa que el medio carece de distribuciones de carga y de corriente, esto es, densidad volumétrica de cargas $\rho_v = 0$ y densidad de corriente $\vec{J} = 0$. Entonces, con estas condiciones, las Ecuaciones de Maxwell se escriben de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.121)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.122)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.123)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.124)$$

A partir de la Ecuación 5.122, establece que si \vec{E} está cambiando con el tiempo en algún punto, entonces el campo magnético \vec{H} tiene rotacional en ese punto; por lo tanto, \vec{H} varía espacialmente en una dirección normal a su dirección de orientación. Además, si \vec{E} cambia con el tiempo, entonces, en general, también \vec{H} lo hará, aunque no necesariamente de la misma manera. Luego, a partir de la Ecuación 5.121, se observa que un campo magnético \vec{H} variante con el tiempo produce un campo eléctrico \vec{E} , el cual, al tener un rotacional, varía espacialmente en la dirección normal a su orientación. Una vez más se tiene un campo eléctrico cambiante. También, por definición, ambos campos, \vec{E} y \vec{H} , tienen una magnitud constante en el plano transversal y son perpendiculares entre sí, como se muestra en la Fig. 5.3. Por esta razón, dicha onda a menudo se denomina onda *electromagnética transversal* (TEM, por sus siglas en inglés), o también llamado, *modos TEM* (Hayt W 2012, p313).

No obstante, una onda plana en el **modo de propagación TEM**, se caracteriza por no tener

componentes axiales en la dirección de propagación de la onda, esto es, $\vec{E}_z = 0$ y $\vec{H}_z = 0$. A continuación, se demuestra que estas componentes axiales son iguales a cero:

En primer lugar, de la Ecuación 5.123, la divergencia del campo eléctrico es igual a cero, debido a que, si está en el vacío, no hay variación de cargas. Por otro lado, matemáticamente, la divergencia del campo eléctrico en coordenadas cartesianas, es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (5.125)$$

Reemplazando la Ecuación 5.125 en la Ecuación 5.123, se tiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (5.126)$$

Sin embargo, el campo eléctrico E_x se encuentra en la componente x del plano cartesiano; y además, como se dijo anteriormente, por definición, el campo eléctrico y magnético tienen una magnitud constante en el plano transversal y son perpendiculares entre sí, entonces la derivada de una constante es igual a cero, esto es:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (5.127)$$

$$E_z \partial z = 0 \quad (5.128)$$

Ahora bien, la derivada del campo eléctrico con respecto a la componente y es igual a cero, ya que el campo eléctrico se encuentra en la dirección de la componente x , entonces:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (5.129)$$

Finalmente, como la onda de campo eléctrico varía en la dirección de propagación y el tiempo, esto es, $E(z, t)$, entonces, E_z no puede ser constante ya que tiene que variar con el tiempo, por tal razón, para que la derivada de E_z con respecto a z sea igual a cero, E_z solo puede ser igual a cero, esto es $E_z = 0$, entonces:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (5.130)$$

En segundo lugar, de la Ecuación 5.124, la divergencia del campo magnético es igual a cero, debido a que, si está en el vacío, no hay variación de corriente. Por otro lado, matemáticamente, la divergencia del campo magnético en coordenadas cartesianas, es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (5.131)$$

Reemplazando la Ecuación 5.131 en la ecuación Ecuación 5.124, se tiene:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (5.132)$$

Sin embargo, el campo magnético H_y se encuentra en la componente y del plano cartesiano; y además, como se dijo anteriormente, por definición, el campo eléctrico y magnético tienen una magnitud constante en el plano transversal y son perpendiculares entre sí, entonces la derivada de una constante es igual a cero, esto es:

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (5.133)$$

Ahora bien, la derivada del campo magnético con respecto a la componente x es igual a cero, ya que el campo magnético se encuentra en la dirección de la componente y , entonces:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad (5.134)$$

Finalmente, como la onda de campo magnético varía en la dirección de propagación y el tiempo, esto es, $H(z,t)$, entonces, H_z no puede ser constante ya que tiene que variar con el tiempo, por tal razón, para que la derivada de H_z con respecto a z sea igual a cero, H_z solo puede ser igual a cero, esto es $H_z = 0$, entonces:

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (5.135)$$

En conclusión, para el modo de propagación **TEM**, queda demostrado que las componentes axiales del campo eléctrico y magnético son iguales a cero, esto es, $\vec{E}_z = \vec{H}_z = 0$.

Impedancia característica en el espacio libre o vacío.

Las dos Ecuaciones de Maxwell en formato complejo se muestran en las Ecuaciones 5.136 y 5.137

$$\vec{\nabla}_x \vec{E}_c = -j\omega\mu \vec{H}_c \quad (5.136)$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{H}_c = j\omega\epsilon_0 \vec{E}_c \quad (5.137)$$

Pero,

$$\vec{\nabla}_x \vec{E}_c = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (5.138)$$

Donde,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (5.139)$$

reemplazando 5.139 en la Ecuación 5.138, se tiene:

$$\vec{\nabla}_x \vec{E}_c = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} \quad (5.140)$$

Al reemplazar la Ecuación 5.140 en la Ecuación 5.136, se tiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} = -j\omega\mu \vec{H}_c \quad (5.141)$$

ó

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} = -j\omega\mu H_y \hat{y} \quad (5.142)$$

Por otro lado, la solución de la onda incidente del campo eléctrico y magnético se muestran en las ecuaciones 5.78 y 5.81, respectivamente; y, considerando únicamente la variación con respecto al espacio z , se tienen:

$$E_{xc}(z) = E_0 e^{-\gamma z} \quad (5.143)$$

$$H_{yc}(z) = H_0 e^{-\gamma z} \quad (5.144)$$

se reemplaza las ecuaciones 5.143 y 5.144 en la Ecuación 5.142, así:

$$\frac{\partial E_{xc}(z)}{\partial z} = -j\omega\mu H_{yc}(z) \quad (5.145)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (E_0 e^{-\gamma z}) = -j\omega\mu H_0 e^{-\gamma z} \quad (5.146)$$

Derivando,

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} = -j\omega\mu H_0 e^{-\gamma z} \quad (5.147)$$

Cambiando de signos,

$$\gamma E_0 e^{-\gamma z} = j\omega\mu H_0 e^{-\gamma z} \quad (5.148)$$

Pero,

$$E_{xc} = E_0 e^{-\gamma z} \quad (5.149)$$

$$H_{yc} = H_0 e^{-\gamma z} \quad (5.150)$$

Entonces, reemplazando las Ecuaciones 5.149 y 5.150 en la Ecuación 5.148, se tiene:

$$\gamma E_{xc} = j\omega\mu H_{yc} \quad (5.151)$$

Despejando, E_{xc}/H_{yc} , se tiene:

$$\frac{E_{xc}}{H_{yc}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (5.152)$$

La Ecuación 5.152, es la impedancia característica del medio en el cual se propaga la onda plana representada por Z_c , también llamada *Ley de Ohm para ondas planas*, esto es:

$$\frac{E_{xc}}{H_{yc}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = Z_c \quad (5.153)$$

Cuando la onda electromagnética se propaga por un medio dieléctrico perfecto o vacío sin pérdidas, la constante de propagación γ es igual a j multiplicado por la constante de fase β , como se muestra en la Ecuación 5.101, es decir, $\gamma = j\beta$; $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$.

Por otro lado, las ecuaciones del campo eléctrico y magnético en función del espacio y tiempo, es:

$$E_x = E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.154)$$

$$H_y = H_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.155)$$

Donde,

$$E_{xc}(z, t) = E_x \quad (5.156)$$

$$H_{yc}(z, t) = H_y \quad (5.157)$$

Pero,

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_c \quad (5.158)$$

Reemplazando las ecuaciones 5.154 y 5.155 en la Ecuación 5.158, se tiene:

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_0}{H_0} = Z_c \quad (5.159)$$

Pero,

$$Z_c = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5.160)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5.161)$$

La Ecuación 5.161, representa la impedancia característica en el vacío.

Despajando H_y de la Ecuación 5.158, y reemplazando E_x de la Ecuación 5.154, se tiene:

$$H_y = \frac{E_x}{Z_c} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.162)$$

entonces,

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.163)$$

Para determinar la velocidad de fase v_p de la onda electromagnética, se selecciona la fase φ de las ecuaciones 5.154 y 5.155, esto es:

$$\varphi = \omega t - \beta z \quad \text{fase de la onda} \quad (5.164)$$

Pero, la fase de la onda electromagnética se mantiene constante a lo largo de la propagación, entonces al derivar los dos lados de la Ecuación 5.164 con respecto al tiempo, se tiene:

$$0 = \omega - \beta \frac{dz}{dt} \quad (5.165)$$

Donde, dz/dt es la velocidad de fase representada por v_p , entonces:

$$0 = \omega - \beta v_p \quad (5.166)$$

Despejando v_p ,

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{velocidad de fase} \quad (5.167)$$

Para determinar la longitud de onda λ , es decir, la distancia entre dos máximos o dos mínimos, se toma dos puntos z_1 y z_2 , entonces, para un z_1 existe un φ_1 , y para un z_2 existe un φ_2 , esto es:

$$\varphi_1 = \omega t - \beta z_1 \quad (5.168)$$

$$\varphi_2 = \omega t - \beta z_2 \quad (5.169)$$

Sumando las dos ecuaciones 5.168 y 5.169, se tiene:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \beta z_2 - \beta z_1 \quad (5.170)$$

Factorando,

$$\Delta\varphi = \beta\Delta z \quad (5.171)$$

Pero, Δz es la longitud entre dos máximos o mínimos, que viene a ser la longitud de onda λ , y $\Delta\varphi$ es la variación del ángulo de una oscilación completa igual a 360 grados o 2π , entonces:

$$2\pi = \beta \lambda \quad (5.172)$$

Despejando, se obtiene el valor de la longitud de onda, así:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (5.173)$$

También, la frecuencia angular ω es igual a:

$$\omega = 2\pi f \quad (5.174)$$

y, la frecuencia f es igual al inverso del período T , entonces:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.175)$$

Finalmente, a partir de la Ecuación 5.154, la onda incidente instantánea de campo eléctrico E_x incidente, es:

$$E_x \text{ incidente} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.176)$$

De igual manera, a partir de la Ecuación 5.155 y combinando las ecuaciones 5.159 y 5.161, la onda incidente instantánea de campo magnético $H_y \text{ incidente}$, es:

$$H_y \text{ incidente} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.177)$$

Para terminar, se procede a graficar la onda incidente de campo eléctrico y magnético propagándose en el espacio libre, correspondiente al modo de propagación TEM, determinadas en las Ecuaciones 5.176 y 5.177, respectivamente; las mismas que, se muestran en la Fig. 5.6.

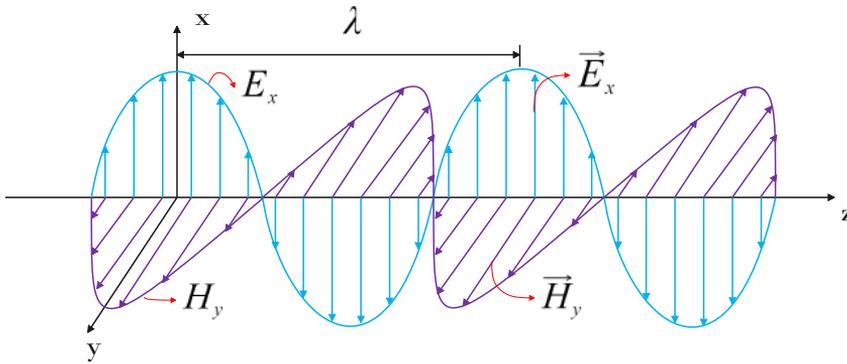


Figura 5.6: Ondas electromagnéticas propagándose en el espacio libre.
Fuente: Los autores

En la Fig. 5.7 se presenta el campo Eléctrico E_x de una onda plana que se propaga en dirección z en el espacio libre ($\epsilon_r = 1$) y la madera ($\epsilon_r = 2,2$). Se puede observar claramente que la longitud de onda (λ) en la madera es menor, esto debido al mayor valor de la ϵ_r . Lo cual a su vez representa una menor velocidad de propagación.

5.6. Propagación de ondas planas desfasadas en el plano XY

Antes que nada, en una onda electromagnética plana, el campo eléctrico \vec{E}_x está en la dirección del eje x , y el campo magnético \vec{H}_y está en la dirección del eje y , entonces, al realizar el producto cruz entre los dos vectores, se obtiene la dirección de propagación de la onda en el eje z que se encuentra representado por el vector unitario \hat{k} que coincide con la dirección del vector de Poynting \vec{S} , tal como se muestra en la Fig. 5.8 (a), esto es:

$$\vec{E}_x \times \vec{H}_y = \hat{k} \quad (5.178)$$

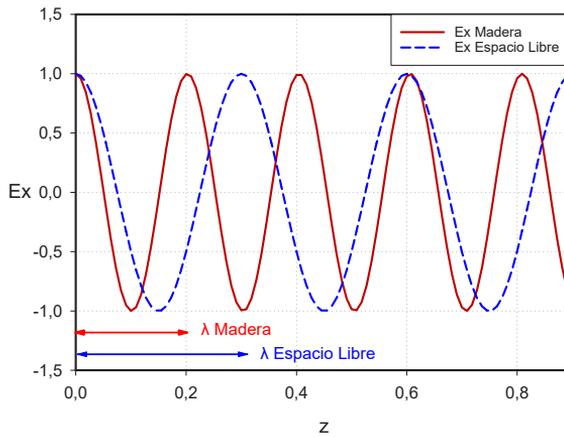


Figura 5.7: Campo Eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en el espacio libre y la madera.

Fuente: Los autores

En cambio, cuando el campo eléctrico \vec{E}_y se encuentra en la dirección del eje y , y el campo magnético \vec{H}_x se encuentra en la dirección del eje x , entonces, al realizar el producto cruz entre los dos vectores, se obtiene la dirección de propagación de la onda en el eje z que se encuentra representado por el vector unitario $-\hat{k}$ que no coincide con la dirección y sentido del vector de Poynting \vec{S} , tal como se muestra en la Fig.5.8 (b), esto es:

$$\vec{E}_y \times \vec{H}_x = -\hat{k} \tag{5.179}$$

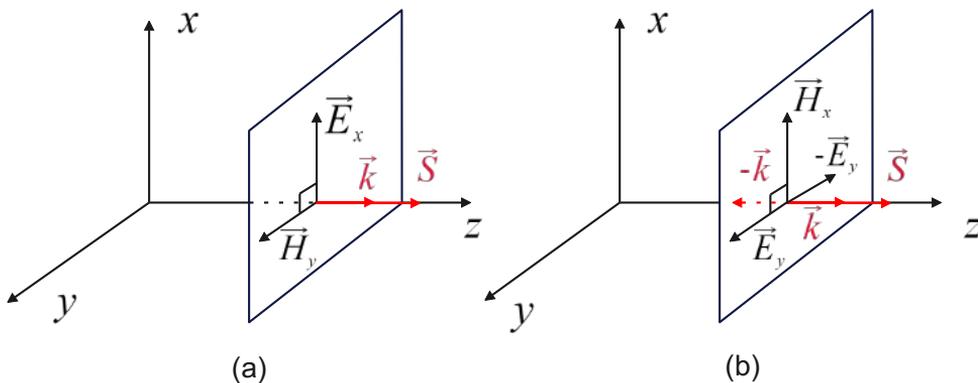


Figura 5.8: Onda electromagnética propagándose en la dirección a) \hat{k} , b) $-\hat{k}$.

Fuente: Los autores

Por lo tanto, para que la propagación de la onda coincida con el vector de Poynting \vec{S} , se

debe realizar el producto cruz entre los vectores $-\vec{E}_y$ y \vec{H}_x , esto es:

$$-\vec{E}_y \times \vec{H}_x = \hat{k} \quad (5.180)$$

Por consiguiente, en la Ecuación 5.138 el campo eléctrico se ubica en la dirección del eje y , esto es, E_y ; y, el campo magnético se ubica en la dirección del eje x , esto es, \vec{H}_x . Considerando una transmisión TEM, $E_z = 0$ y $H_z = 0$, entonces:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (5.181)$$

Reemplazando la Ecuación 5.181 en la Ecuación 5.138, se tiene:

$$\vec{\nabla}_x \vec{E}_c = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} \quad (5.182)$$

Y, reemplazando la Ecuación 5.182 en la Ecuación 5.136, se tiene:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} = -j\omega\mu H_x \hat{x} \quad (5.183)$$

Reemplazando los valores de E_y y H_x en formato exponencial, se obtiene:

$$-\frac{\partial E_y e^{-\gamma z}}{\partial z} = -j\omega\mu H_x e^{-\gamma z} \quad (5.184)$$

$$-(-\gamma) E_y e^{-\gamma z} = -j\omega\mu H_x e^{-\gamma z} \quad (5.185)$$

$$\gamma E_y e^{-\gamma z} = -j\omega\mu H_x e^{-\gamma z} \quad (5.186)$$

Simplificando,

$$\gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (5.187)$$

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (5.188)$$

pero, $(j\omega\mu/\gamma) = Z_c$, entonces:

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = Z_c \quad (5.189)$$

Por consiguiente, la Ecuación 5.189 es igual a la Ecuación 5.159, así:

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{E_0}{H_0} = Z_c \quad (5.190)$$

Hasta ahora solo se consideró ondas planas simples que se propagan a lo largo del eje z. Este fue un punto de partida conveniente, pero no hay nada mágico en la dirección z; las ondas planas pueden propagarse en cualquier dirección a través de un medio. En esta sección, se usará lo que ya se descubrió sobre ondas que se propagan a lo largo del eje z para describir ondas planas que se propagan en cualquier dirección (Demarest 1998, p446).

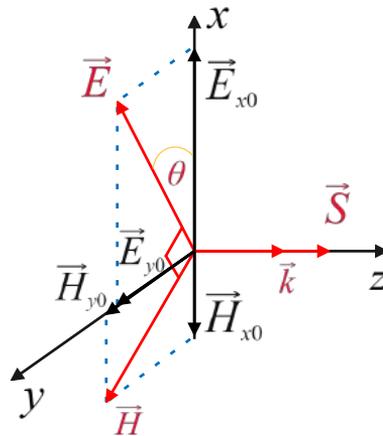


Figura 5.9: Onda plana \vec{E} y \vec{H} desfasada un ángulo θ propagándose en la dirección z.

Fuente: Los autores

Propagación de la onda plana desfasada en el plano xy. Se debe considerar que una onda plana estudiada hasta ahora, \vec{E} tenía una orientación recta fija en todo momento y para toda posición; se dice que dicha onda está *polarizada linealmente*. Se ha considerado que \vec{E} está sobre el eje x, sin embargo, el campo puede estar orientado en cualquier dirección fija sobre el plano xy y estar polarizado linealmente, tal como se muestra en la Fig. 5.9. En esta figura, la onda electromagnética \vec{E} y \vec{H} está desfasada un ángulo θ con respecto al eje x en el plano xy. También, se puede decir que, los vectores de campo eléctrico y magnético pueden tener cualquier orientación en el plano xy, siempre que el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{H}$ representado por el vector de Poynting \vec{S} , apunta en la dirección de z positivo. Por lo tanto, las expresiones generales de las ondas planas que se propagan en la dirección de z positivo, se pueden escribir en la forma que se muestra en las ecuaciones 5.191 y 5.192 (Hayt W 2012, p337).

$$\vec{E}(z, t) = (E_{x0}\hat{x} + E_{y0}\hat{y})e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.191)$$

$$\vec{H}(z, t) = (H_{x0}\hat{x} + H_{y0}\hat{y})e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (5.192)$$

Donde, E_{x0} , E_{y0} , H_{x0} y H_{y0} son las amplitud de las componentes del campo eléctrico y magnético x e y , respectivamente; \hat{x} y \hat{y} son los vectores unitarios en las direcciones positivas de x y y . $\vec{E}(z, t)$ y $\vec{H}(z, t)$ corresponden a los vectores \vec{E} y \vec{H} (Fig. 5.9), respectivamente, que varían con respecto al espacio z y al tiempo t .

De acuerdo a las leyes exponenciales, las ecuaciones 5.191 y 5.192 se pueden escribir únicamente en función del espacio, así:

$$\vec{E}(z) = (E_{x0}\hat{x} + E_{y0}\hat{y})e^{-j\beta z} \quad (5.193)$$

$$\vec{H}(z) = (H_{x0}\hat{x} + H_{y0}\hat{y})e^{-j\beta z} \quad (5.194)$$

Por otro lado, \vec{k} se llama el **vector número de onda**, que tiene la misma dirección y sentido que el vector de Poynting \vec{S} en la que se propaga la onda plana, esto es $\vec{E} \times \vec{H} = \vec{k}$. Además, β es igual al número de onda k cuando el medio es sin pérdidas, sabiendo que, β es la constante de fase.

Pero, de la Ecuación 5.193,

$$\vec{E}_0 = E_{x0}\hat{x} + E_{y0}\hat{y} \quad (5.195)$$

Entonces, al reemplazar la Ecuación 5.195 en la Ecuación 5.193, se tiene:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{-j\beta z} \quad (5.196)$$

Donde, \vec{E}_0 , se llama **vector polarización**, que puede ser cualquier vector que es perpendicular a \vec{k} , así:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad (5.197)$$

Se puede derivar una expresión complementaria para el campo H de esta onda plana si se observa que la Ecuación 5.194 se puede escribir en términos del producto vectorial entre \vec{E}_0 y \vec{k} ; para lo cual, de la ecuación 5.190, H_x y H_y es igual a:

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_c} \quad (5.198)$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_c} \quad (5.199)$$

Haciendo, $H_x = H_{x0}$, y $H_y = H_{y0}$; y, reemplazando las ecuaciones 5.198 y 5.199 en la Ecuación 5.194, se tiene:

$$\vec{H}(z) = \left(-\frac{E_{y0}}{Z_c} \hat{x} + \frac{E_{x0}}{Z_c} \hat{y} \right) e^{-j\beta z} \quad (5.200)$$

Sacando factor común Z_c , se tiene:

$$\vec{H}(z) = \frac{e^{-j\beta z}}{Z_c} (-E_{y0} \hat{x} + E_{x0} \hat{y}) \quad (5.201)$$

Pero,

$$(-E_{y0} \hat{x} + E_{x0} \hat{y}) = \vec{k}_x (-E_{y0} \hat{x} + E_{x0} \hat{y}) = \vec{k}_x \vec{E}_0 \quad (5.202)$$

donde,

$$\vec{k}_x \vec{E}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_{x0} & E_{y0} & 0 \end{vmatrix} = -E_{y0} \hat{x} + E_{x0} \hat{y} \quad (5.203)$$

Y, $\vec{k} = \hat{z}$

Por lo tanto, reemplazando la Ecuación 5.202 en la Ecuación 5.201, se tiene:

$$\vec{H}(z, t) = \frac{e^{-j\beta z}}{Z_c} \vec{k}_x \vec{E}_0 \quad (5.204)$$

Finalmente, la impedancia característica Z_c del medio por donde se propaga la onda, también se puede llamar *impedancia intrínseca* del medio, representado por η .

5.7. Reflexión y refracción de ondas planas

La onda o rayo incidente \vec{k}_i , el reflejado \vec{k}_r y el refractado o transmitido \vec{k}_t se encuentran en el mismo plano, como se muestra en la Fig. 5.10. La onda incidente y reflejada con la normal N que es perpendicular a la frontera de separación entre el medio 1 y 2 trazada en el punto de incidencia A y C , forman el ángulo de incidencia θ_1 , el ángulo de reflexión θ_r y el ángulo refractado θ_2 .

Los ángulos de incidencia θ_1 y de reflexión θ_r son iguales, ya que en la Fig. 5.10 las leyes de la reflexión pueden deducirse aplicando el principio de Huygens a una onda que incide \vec{k}_i con cierto ángulo θ_1 en una superficie de separación de dos medios 1 y 2. Si el foco emisor de ondas dista lo suficiente de la superficie reflectora, se puede considerar que la onda es plana. Al avanzar su frente de ondas, su extremo (inicio de la onda incidente \vec{k}_i) será el primero que encuentre a la superficie reflectora. Esto ocurrirá en el punto A , el cual, según el Principio de Huygens, se convierte en nuevo centro emisor de ondas secundarias \vec{k}_r . Las ondas secundarias generadas en el punto A retroceden a igual velocidad que trae la onda incidente. Esto implica que cuando el otro extremo B del frente incidente alcance la superficie reflectora (recorra la distancia BC), la onda secundaria tendrá un radio AD (siendo $BC = AD$). Teniendo en cuenta, además, que cuando el extremo B alcanza el punto C , este último se convierte en un nuevo foco emisor de ondas secundarias, podemos formar los triángulos rectángulos ABC (de la onda incidente) y ADC (de la onda reflejada), ambos iguales al tener la hipotenusa y los lados BC y AD iguales. De la igualdad de los triángulos rectángulos y a la perpendicularidad de los lados \vec{k}_i y \vec{k}_r con los lados de los triángulos, se puede deducir que los ángulos θ_1 y θ_r son iguales (Hayt W 2012, p457).

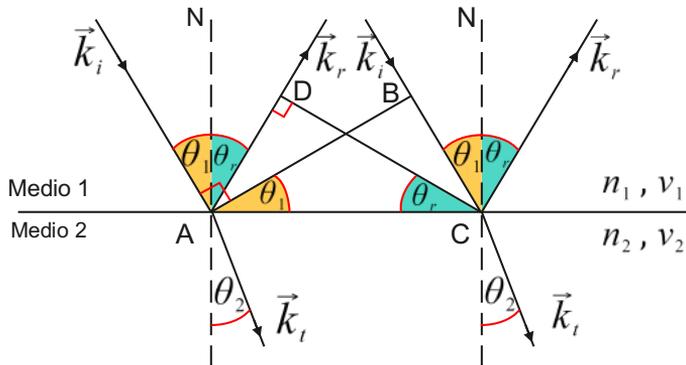


Figura 5.10: Ondas incidente \vec{k}_i , reflejado \vec{k}_r y refractado o transmitido \vec{k}_t .

Fuente: Los autores

5.7.1. Índice de refracción

La refracción es el cambio de dirección y velocidad que experimenta una onda de luz al pasar de un medio a otro, ya sea líquido o gaseoso, con distinto índice refractivo. Solo se produce si la onda incide oblicuamente sobre la superficie de separación de los dos medios y si estos tienen índices de refracción distintos. La refracción se origina en el cambio de velocidad de propagación de la onda señalada.

Se denomina índice de refracción al cociente de la velocidad de la luz en el vacío y la veloci-

dad de la luz en el medio cuyo índice se calcula. Se simboliza con la letra n y se trata de un valor adimensional, esto es:

$$n = \frac{c}{v} \quad (5.205)$$

Donde,

$c = \text{velocidad de la luz en el vacío}$

$v = \text{velocidad de la luz en el medio}$

$n = \text{índice de refracción}$

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (5.206)$$

El índice de refracción determina cuánto se desvía o se refracta la trayectoria de la luz al entrar en un material. Esto se describe mediante la Ley de Refracción de Snell, esto es:

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \quad (5.207)$$

Donde, θ_1 y θ_2 son los ángulos de incidencia y refracción, respectivamente, de un rayo que cruza la interfaz entre dos medios 1 y 2 con índices de refracción n_1 y n_2 (Hayt W 2012, p449). También, para la luz, la Ley de Refracción de Snell, tiene relación con las velocidades v_1 y v_2 del medio 1 y 2, respectivamente, esto es:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (5.208)$$

En condiciones sin pérdida se puede escribir la constante de fase de la onda plana, así como la impedancia intrínseca del material en términos del índice de refracción, por medio de la Ecuación 5.209 (Hayt W 2012, p36).

$$\beta = k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{n\omega}{c} \quad (5.209)$$

y

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\eta_0}{n} \quad (5.210)$$

esto es,

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} \quad (5.211)$$

donde,

$\eta = \text{impedancia intrínseca del medio}$

$\eta_0 = \text{impedancia intrínseca del vacío}$

$n = \text{índice de refracción}$

$\epsilon_r = \text{permitividad relativa del medio}$

En la Fig. 5.11 se muestra una onda incidente \vec{k}_1^+ con su respectivo ángulo de incidencia θ_1 , una onda reflejada \vec{k}_1^- con su ángulo θ'_1 , y una onda transmitida \vec{k}_2 con su ángulo θ_2 . Los ángulos de incidencia θ_1 y reflejado θ'_1 son iguales. Los dos medios son dieléctricos sin pérdidas y los caracterizan impedancias intrínsecas η_1 y η_2 ; y, permitividades ϵ_1 y ϵ_2 . Suponer que los materiales no son magnéticos y, por tanto, tienen una permeabilidad μ_0 . La Fig. 5.11, muestra dos casos en la selección de la dirección del campo eléctrico (Hayt W 2012, p367).

Primer caso, en la Fig. 5.11 a, el campo eléctrico \vec{E} está polarizado sobre el plano de la página denominado también el *plano de incidencia*; y, el campo magnético \vec{H} está en forma perpendicular de la página hacia fuera. Al estar el vector campo eléctrico \vec{E} sobre el plano de incidencia, se dice que tiene una *polarización paralela*, es decir, el vector campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia (o plano de la página). Por otro lado, debido a que el vector campo magnético \vec{H} es perpendicular al plano de la página, este tipo de polarización se denomina *transverso magnético* o polarización TM.

Segundo caso, en la Fig. 5.11 b, el campo eléctrico \vec{E} está polarizado en forma perpendicular de la página hacia dentro; y, el campo magnético \vec{H} está en forma paralela al plano de incidencia. Al estar el vector campo eléctrico \vec{E} perpendicular al plano de incidencia, se dice que tiene una *polarización perpendicular*, es decir, el vector campo eléctrico es perpendicular al plano de la página, por lo que este caso también se llama *transversal eléctrico* o polarización TE.

A partir de la Fig. 5.11 a, correspondiente al primer caso, el coeficiente de reflexión Γ_p para una polarización paralela está definida como la amplitud de la onda reflejada E_{10}^- dividido para la amplitud de la onda incidente E_{10}^+ ; Además, es igual a la impedancia intrínseca del medio 2 para una polarización paralela, η_{2p} , menos la impedancia intrínseca del medio 1

para una polarización paralela, η_{1p} , dividido para la suma de las impedancias intrínsecas de los medios 1 y 2, esto es:

$$\Gamma_p = \frac{E_{10}^-}{E_{10}^+} = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \quad (5.212)$$

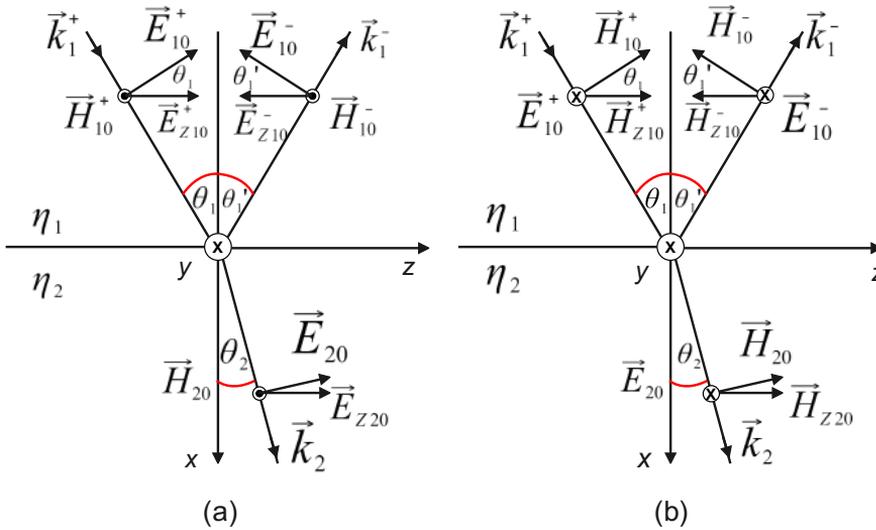


Figura 5.11: Ondas planas. (a) Polarización paralela TM, (b) Polarización perpendicular TE. **Fuente:** Los autores

Por otro lado, el coeficiente de transmisión τ_p para una polarización paralela, está definida como la amplitud de la onda transmitida o refractada E_{20} dividido para la amplitud de la onda incidente E_{10}^+ ; además, está relacionado con las impedancias intrínsecas de los dos medios 1 y 2; y, los ángulos de incidencia θ_1 y reflejado θ_2 , como se muestra en la Ecuación 5.207, así:

$$\tau_p = \frac{E_{20}}{E_{10}^+} = \frac{2\eta_{2p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \quad (5.213)$$

Seguidamente, las impedancias intrínseca para una polarización paralela del medio 1 y el medio 2, η_{1p} y η_{2p} , respectivamente, es igual a:

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos \theta_1 \quad (5.214)$$

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos \theta_2 \quad (5.215)$$

De forma similar, a partir de la Fig.5.11 b, correspondiente al segundo caso, el coeficiente de

reflexión Γ_s para una polarización perpendicular está definida como la amplitud de la onda reflejada E_{y10}^- dividido para la amplitud de la onda incidente E_{y10}^+ en la dirección del eje y ; Además, es igual a la impedancia intrínseca del medio 2 para una polarización perpendicular, η_{2s} , menos la impedancia intrínseca del medio 1 para una polarización perpendicular, η_{1s} , dividido para la suma de las impedancias intrínsecas de los medios 1 y 2, esto es:

$$\Gamma_s = \frac{E_{y10}^-}{E_{y10}^+} = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \quad (5.216)$$

Por otro lado, el coeficiente de transmisión τ_s para una polarización perpendicular, está definida como la amplitud de la onda transmitida o refractada E_{y20} dividido para la amplitud de la onda incidente E_{y10}^+ en la dirección del eje y ; Además, está relacionado con las impedancias intrínsecas de los dos medios 1 y 2, como se muestra en la Ecuación 5.217, así:

$$\tau_s = \frac{E_{y20}}{E_{y10}^+} = \frac{2\eta_{2s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \quad (5.217)$$

Seguidamente, las impedancias intrínseca para una polarización perpendicular del medio 1 y el medio 2, η_{1s} y η_{2s} , respectivamente, es igual a:

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec\theta_1 \quad (5.218)$$

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec\theta_2 \quad (5.219)$$

$$(5.220)$$

5.8. Problemas resueltos

Problema 5.1. El vector campo eléctrico \vec{E} posee solo una componente en la dirección y . La onda se propaga en la dirección x . Demostrar que la ecuación de onda del campo eléctrico E_y en la dirección de y , propagándose en la dirección de x , es:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (5.221)$$

Donde, C es igual a la velocidad de la luz en el vacío o aire.

Solución:

Por un lado, el problema dice que el campo eléctrico \vec{E} se encuentra únicamente en la dirección del eje y , esto es:

$$\vec{E} = 0\hat{i} + E_y\hat{j} + 0\hat{k} \quad (5.222)$$

Por otro lado, una de las Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, dice que, el rotacional del campo eléctrico es igual a menos la derivada parcial con respecto al tiempo de la densidad de flujo magnético, así:

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.223)$$

Pero,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.224)$$

entonces,

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.225)$$

En cambio, matemáticamente el rotacional del campo eléctrico es,

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{i} - 0 \hat{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{k} \quad (5.226)$$

Sin embargo, en la Ecuación 5.226 el primer término $\partial E_y / \partial z$ es igual a cero, debido a que la onda, en este caso, se propaga en la dirección del eje x , entonces:

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{k} \quad (5.227)$$

Por consiguiente, igualando las dos ecuaciones 5.225 y 5.227; y, como la dirección del resultado del rotacional de la Ecuación 5.227 es \hat{k} , entonces, la intensidad del campo magnético en la Ecuación 5.225 también está en la dirección \hat{k} que representa al vector unitario \hat{z} , esto es, $H_z \hat{k}$, así

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{k} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{k}$$

0, escribiendo en forma escalar,

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (5.228)$$

También, otra de las Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial que involucra la intensidad de campo magnético, es la siguiente

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.229)$$

Pero, como se está considerando las ondas electromagnéticas en el espacio libre, el vector \vec{j} es igual a cero, y el vector desplazamiento eléctrico es $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, entonces:

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.230)$$

De igual manera que la Ecuación 5.227, matemáticamente el rotacional del campo eléctrico es,

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{j} + 0 \hat{k} \quad (5.231)$$

Sin embargo, en la Ecuación 5.231 el primer término $\partial H_z / \partial y$ es igual a cero, debido a que la onda, en este caso, se propaga en la dirección del eje x , entonces:

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{j} \quad (5.232)$$

Por consiguiente, igualando las dos ecuaciones 5.230 y 5.232; y, como la dirección del resultado del rotacional de la Ecuación 5.232 es \hat{j} , entonces, la intensidad del campo magnético en la Ecuación 5.230 también está en la dirección \hat{j} que representa al vector unitario \hat{y} , esto es, $E_y \hat{j}$, así:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{j} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j} \quad (5.233)$$

Escribiendo en forma escalar,

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (5.234)$$

Por consiguiente, en la Ecuación 5.228 el campo eléctrico está en la dirección y , y se propaga en la dirección x . Mientras que, en la ecuación 5.234 el campo magnético está en la dirección z , y se propaga en la dirección x . Por tanto, la gráfica del campo electromagnético, se muestra en la Fig. 5.12, que cumple con la condición de propagación de las ondas planas, es decir, el producto cruz entre \vec{E}_y y \vec{H}_z se obtiene el vector de Poynting, así:

$$\vec{E}_y \times \vec{H}_z = \vec{S} \quad (5.235)$$

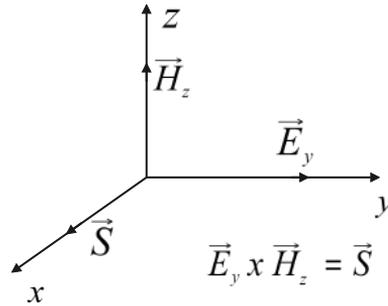


Figura 5.12: Propagación de \vec{E}_y y \vec{H}_z en la dirección de \vec{S} .
Fuente: Los autores

Ahora, en la Ecuación 5.228, para que el campo magnético H_z varíe con respecto x , todos los términos de dicha ecuación, deben derivarse con respecto a x , esto es:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (5.236)$$

A continuación, se reemplaza la Ecuación 5.234 en la Ecuación 5.236, esto es:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) \quad (5.237)$$

Simplificando,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (5.238)$$

No obstante, la velocidad de la luz c propagándose por el aire es,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (5.239)$$

entonces,

$$\mu \epsilon = \frac{1}{c^2} \quad (5.240)$$

Por consiguiente, al reemplazar la Ecuación 5.240 en la Ecuación 5.238, se tiene la Ecuación 5.221, que es lo que se quería demostrar.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (5.241)$$

Problema 5.2. Calcular la potencia disipada por metro cuadrado debajo de la superficie que

se muestra en la Fig. 5.13, donde una onda plana armónica de tiempo normalmente incide sobre una placa de cobre. La frecuencia de la onda es de 1.0 GHz y la amplitud máxima del campo E es de 700 V/m.

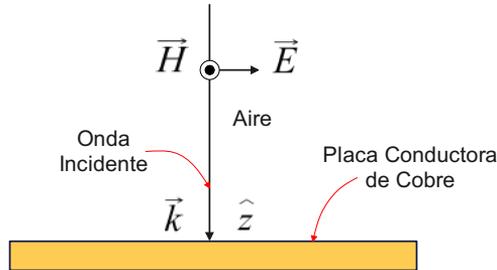


Figura 5.13: Onda plana normalmente incide desde el aire sobre una placa conductora con pérdidas.

Fuente: Los autores

Solución:

En primer lugar. En referencia a la reflexión y absorción de ondas de superficies conductoras, una propiedad importante de los metales es que son buenos reflectores de ondas. Esto permite que las superficies metálicas confinen las ondas a un área del espacio o las envíen en otra dirección. Una amplia gama de dispositivos prácticos hace uso de esta propiedad, incluidas líneas de transmisión, guías de ondas, cavidades resonantes y antenas. Las superficies metálicas más fáciles de modelar son los conductores perfectos, que tienen una conductancia que tiende al infinito, $\sigma \rightarrow \infty$, es decir, la onda que incide en la superficie metálica se refleja en su totalidad. Por consiguiente, únicamente se tienen una densidad superficial de corriente \vec{J}_s , como se muestra en la Fig. 5.14 (Demarest 1998, p476).

Cuando el conductor tiene pérdidas, el campo E transmitido al conductor es pequeño, pero definitivamente no es cero. Debido a que los campos transmitidos decaen exponencialmente, se puede, para todos los propósitos prácticos, suponer que estos campos existen solo dentro de unas pocas profundidades de piel δ_s (profundidad de penetración) de la superficie, como se muestra en la Fig. 5.14, cuyo valor está representado en la Ecuación 5.114. Además, la longitud de onda en la losa (bloque conductor) es mucho más pequeña que en el dieléctrico, ya que β es grande en un buen conductor.

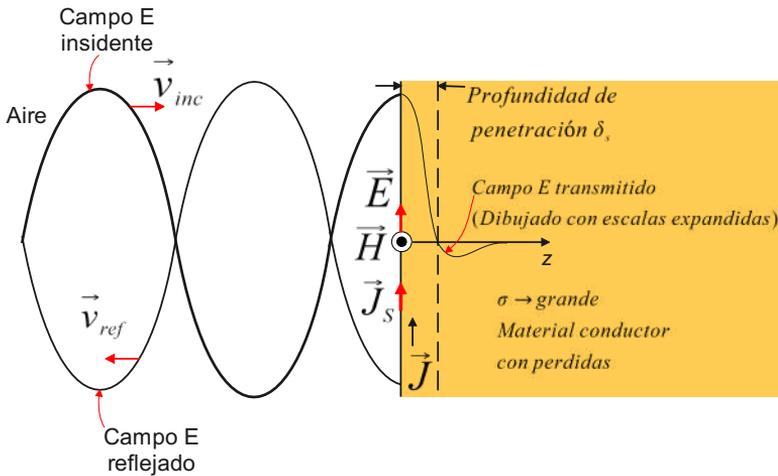


Figura 5.14: Campos E incidente, reflejado y transmitido cerca de la superficie de un conductor con pérdidas.

Fuente: Los autores

Por lo tanto, para determinar la potencia instantánea disipada P_{dis} dentro de un volumen de un material conductor, usando la ecuación de la Ley de Joule, se tiene:

$$P_{dis} = \int_v \vec{E} \cdot \vec{J} \, dv \quad (5.242)$$

Pero, el diferencial de volumen dv se puede dividir en diferencial de área dA por diferencial de distancia dz , esto es:

$$P_{dis} = \int_v \vec{E} \cdot \vec{J} \, dA \, dz \quad (5.243)$$

Por otro lado, de la Ecuación 5.243, la potencia promedio que se disipa por metro cuadrado de la superficie del conductor, esto es, la densidad de potencia S sobre el espesor δ_s del bloque del material conductor para un campo sinusoidal, es:

$$S = \frac{P_{dis}}{m^2} = \frac{1}{2} Re \left[\int_0^\infty \vec{E} \cdot \vec{J}^* \, dz \right] \quad [W/m^2] \quad (5.244)$$

En la Ecuación 5.244, se ha reemplazado el espesor real de la losa (material conductor) por infinito, que es una buena aproximación siempre que la losa tenga al menos varias profundidades superficiales. Ahora bien, la mayoría de los metales son isotrópicos, por lo que \vec{E} y \vec{J} apuntan en la misma dirección. Esto significa que el producto escalar $\vec{E} \cdot \vec{J}^*$ es igual a EJ^* , donde E y J son las componentes de \vec{E} y \vec{J} a lo largo de la dirección de polarización

(Demarest 1998, p478).

Pero, $J = \sigma E$ y $E = \eta H$, entonces, se puede escribir la densidad de corriente como

$$J = \sigma E = \sigma \eta H = \sigma \eta H_s e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad [A/m^2] \quad (5.245)$$

Donde, H_s es el valor total del campo H en la superficie, σ y η son la conductividad y la impedancia intrínseca del metal; α y β son la atenuación y la constante de fase en el metal.

Reemplazando la Ecuación 5.245 en la Ecuación 5.244, se tiene:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E J^* \cos 0^\circ dz \quad (5.246)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sigma |\eta|^2 |H_s|^2 e^{-2\alpha z} dz \quad (5.247)$$

Desarrollando la integral,

$$S = \frac{\sigma |\eta|^2 |H_s|^2}{4\alpha} \quad (5.248)$$

pero,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (5.249)$$

y

$$\eta = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \angle 45^\circ \quad (5.250)$$

entonces,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} |H_s|^2 \quad (5.251)$$

pero, R_s es la **resistencia superficial** del conductor, representado por:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma \delta_s} \quad [\Omega] \quad (5.252)$$

Reemplazando la Ecuación 5.252 en la Ecuación 5.251, se tiene:

$$S = \frac{1}{2} R_s |H_s|^2 \quad [W/m^2] \quad (5.253)$$

En SEGUNDO LUGAR. Considerando el problema propiamente dicho, en la Fig. 5.13, La conductividad del cobre a $20^{\circ}C$ es $\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$, entonces, utilizando la Ecuación 5.114, se procede a calcular la profundidad de penetración δ_s en el conductor con pérdidas, como se muestra en la Fig. 5.14, esto es:

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi f \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \quad (5.254)$$

$$\delta_s = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi(1 \times 10^9)(4\pi \times 10^{-7})(5,8 \times 10^7)}} = 2,1 \times 10^{-6} \text{ m} = 2,1 \text{ } \mu\text{m} \quad (5.255)$$

A continuación, se obtiene la resistencia superficial R_s utilizando la Ecuación 5.252, así:

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta_s} = \frac{1}{(5,8 \times 10^7)(2,1 \times 10^{-6})} = 8,25 \times 10^{-3} \Omega = 8,25 \text{ m}\Omega \quad (5.256)$$

Luego, el campo magnético H_i incidente es,

$$H_i = \frac{E}{\eta_0} = \frac{700}{377} = 1,86 \text{ A/m} \quad (5.257)$$

Debido a que σ es grande, el campo H_s total en la superficie es aproximadamente:

$$H_s = 2H_i = 2(1,86) = 3,72 \text{ A/m} \quad (5.258)$$

Por lo tanto, utilizando la Ecuación 5.253, la potencia disipada por metro cuadrado (densidad de potencia S) debajo de la superficie que se muestra en la Fig. 5.13, es:

$$S = \frac{1}{2} R_s |H_s|^2 = \frac{1}{2} (8,25 \times 10^{-3}) (3,72)^2 = 56,9 \text{ mW/m}^2 \quad (5.259)$$

Problema 5.3. Una onda plana uniforme propagándose en el aire incide sobre vidrio con un ángulo de 35° con respecto a la perpendicular. Determinar la fracción de la potencia incidente que se transmite y que se refleja para: a) polarización paralela TM y b) polarización perpendicular TE. El vidrio tiene un índice de refracción $n_2 = 1,45$.

Solución:

En primer lugar, se aplica la Ley de Snell para hallar el ángulo de transmisión. Utilizando el índice de refracción $n_1 = 1$ para el aire, se obtiene:

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2 \quad (5.260)$$

Se despeja el ángulo de refracción θ_2 , así

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1} \left(\frac{n_1 \text{sen } \theta_1}{n_2} \right) \quad (5.261)$$

Reemplazando valores, se tiene

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1} \left(\frac{1 \text{sen } 35^\circ}{1,45} \right) = 23,3^\circ \quad (5.262)$$

Para una polarización paralela o TE

Se utiliza la Ecuación 5.214 para determinar la impedancia intrínseca para una polarización paralela en el medio 1, η_{1p} , esto es:

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos \theta_1 \quad (5.263)$$

Reemplazando valores,

$$\eta_{1p} = (377) \cos 35^\circ = (377)(0,866) = 308,82 \, \Omega \quad (5.264)$$

Y, la Ecuación 5.215 para determinar la impedancia intrínseca η_{2p} , esto es:

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos \theta_2 \quad (5.265)$$

Pero, de la Ecuación 5.211, se determina la impedancia intrínseca del medio 2, esto es:

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} \quad (5.266)$$

reemplazando valores de la impedancia intrínseca del aire $\eta_0 = 377\Omega$, y el índice de refracción del medio 2, en este caso, el vidrio $n_2 = 1,45$, se obtiene

$$\eta_2 = \frac{\eta_0}{n_2} = \frac{377}{1,45} = 260 \quad (5.267)$$

Seguidamente, se reemplaza η_2 en η_{2p} , así:

$$\eta_{2p} = (260) \cos 23,3^\circ = 238,80 \, \Omega \quad (5.268)$$

Posteriormente, se utiliza la Ecuación 5.212 para determinar el coeficiente de reflexión Γ_p para una polarización paralela, así:

$$\Gamma_p = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \quad (5.269)$$

Reemplazando valores, se tiene:

$$\Gamma_p = \frac{238,80 - 308,82}{238,80 + 308,82} = \frac{-70,02}{547,62} = -0,128 \quad (5.270)$$

Entonces, para determinar la fracción de la potencia incidente que se refleja, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\frac{P_r}{P_{inc}} = |\Gamma_p|^2 \quad (5.271)$$

Donde, P_r es la potencia reflejada y P_{inc} es la potencia incidente, reemplazando valores, se tiene:

$$\frac{P_r}{P_{inc}} = |\Gamma_p|^2 = |-0,128|^2 = 0,016 \quad (5.272)$$

Por tanto, para determinar la fracción de la potencia transmitida P_t , es:

$$\frac{P_t}{P_{inc}} = 1 - |\Gamma_p|^2 = 1 - 0,016 = 0,984 \quad (5.273)$$

Para una polarización perpendicular o TM

Se utiliza la Ecuación 5.218 para determinar la impedancia intrínseca para una polarización perpendicular en el medio 1, η_{1s} , esto es:

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec \theta_1 \quad (5.274)$$

Reemplazando valores,

$$\eta_{1s} = \eta_1 \frac{1}{\cos \theta_1} = 377 \frac{1}{\cos 35^\circ} = \frac{377}{0,819} = 460,32 \Omega \quad (5.275)$$

Y, la Ecuación 5.219 para determinar la impedancia intrínseca η_{2s} , esto es:

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec \theta_2 \quad (5.276)$$

Reemplazando valores,

$$\eta_{2s} = \eta_2 \frac{1}{\cos \theta_2} = \frac{377}{1,45} \frac{1}{\cos 23,3^\circ} = \frac{260}{0,918} = 283,22 \Omega \quad (5.277)$$

Posteriormente, se utiliza la Ecuación 5.216 para determinar el coeficiente de reflexión Γ_s para una polarización perpendicular, así:

$$\Gamma_s = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} = \frac{283,22 - 460,32}{283,22 + 460,32} = \frac{-177,10}{743,54} = -0,238 \quad (5.278)$$

Por tanto, la fracción de la potencia reflejada es:

$$|\Gamma_s|^2 = |-0,238|^2 = 0,056 \quad (5.279)$$

La fracción de la potencia incidente que se transmite es:

$$1 - |\Gamma_s|^2 = 1 - |0,238|^2 = 0,944 \quad (5.280)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Germán Antonio Alcázar. “Imanes permanentes: características, aplicaciones y futuro”. En: *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* 40 (jun. de 2016), págs. 221-233.
- [2] M. Arrayás. *Electromagnetismo, circuitos y semiconductores*. Dykinson, 2007. ISBN: 9781449206635.
- [3] Rojas E. Barco H. *Electromagnetismo y Física Moderna*. Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2001.
- [4] J. D. Catalá. *Electromagnetismo práctico*. Editorial Tébar Flores, 2017. ISBN: 9781449206635.
- [5] Kenneth Demarest. *Engineering Electromagnetics*. United States of America: PRENTICE HALL, 1998.
- [6] ESPO. *Introducción al Electromagnetismo*. Guayaquil-Ecuador: Dpto. de Ingeniería Eléctrica, 1982.
- [7] A et. al Ferrero Botero. *Electricidad y magnetismo: una guía introductoria*. Universidad Católica de Colombia, 2020. ISBN: 9789585133044.
- [8] A. García Abad. *Campos electromagnéticos y medios de enlace entre transmisor y receptor*. Universitas, 2020. ISBN: 9789879406960.
- [9] Buck J. Hayt W. *Teoría Electromagnética (8a Ed.)*. México: McGRAWN-HILL, 2012.
- [10] M. D. M. López Rodríguez V. y Montoya Lirola. *Electromagnetismo II*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2021. ISBN: 9788436277623.
- [11] Molina F. Quintero N. “Una descripción sencilla de las Teorías Gauge”. En: *Tumbaga* 4 (2009), págs. 19-29.
- [12] Miguel Rodríguez. *Materiales y Circuitos Magnéticos*. España: Universidad de Cantabria, 2014.
- [13] Shackelford. *Introducción a la ciencia de materiales para ingenieros*. Sexta Edición. Madrid: Pearson Educación S.A., 2005.

CONTRAPORTADA

Magnetostática es una obra que trata sobre el análisis y obtención de los campos magnéticos en ausencia y presencia de materiales magnéticos, utilizando las leyes de Biot-Savart y de Ampere. Análisis de circuitos magnéticos. Análisis de la inducción electromagnética, utilizando las Leyes generales de inducción de Faraday y de Lenz. Obtención y análisis de las ecuaciones de Maxwell en forma integral, diferencial y compleja. Finalmente, se analiza las ondas electromagnéticas planas. La obra está dirigida a investigadores, docentes y estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral y matemática vectorial. Presenta una explicación y análisis de los contenidos teóricos, para posteriormente aplicarlos en el desarrollo de los problemas.



Pedro Severo Infante Moreira, es Ingeniero Electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). Tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, dos Maestrías: una en Gestión Académica Universitaria y otra en Administración de Empresas, un Doctorado en Ciencias Técnicas. Ha publicado seis libros, dos libros corresponde al electromagnetismo y cuatro a circuitos eléctricos. Ha participado en congresos nacionales e internacionales. Ha publicado varios artículos científicos. Ha desarrollado dos proyectos de investigación en el área de las radiaciones electromagnéticas. Actualmente es Profesor Titular Principal 1 en la Facultad de Informática y Electrónica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), y continúa escribiendo artículos científicos, libros y desarrollando proyectos de investigación en el área del electromagnetismo.



Jefferson Alexander Ribadeneira Ramírez, recibió el grado de Ingeniero en Electrónica y Computación en 2008 por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Riobamba, Ecuador. En 2013, obtuvo el grado de máster Universitario en Tecnologías, Sistemas y redes de comunicaciones por la Universitat Politècnica de València (UPV), Valencia, España. En 2016, recibió el grado de Doctor en Telecomunicación por la UPV. Desde el 2012 hasta el 2016 desempeñó las funciones de investigador en el Grupo de Comunicaciones Móviles (MCG) del Instituto de Telecomunicaciones y Aplicaciones Multimedia (iTEAM) de la UPV. Ha participado como director e investigador en varios proyectos de investigación nacionales e internacionales. Sus actividades de investigación están enfocadas en diseño de dispositivos para electrónica de alta frecuencia, optimización del espectro radioeléctrico, planificación de redes de Televisión Digital Terrestre y comunicaciones Móviles 5G y 6G, compatibilidad electromagnética y estudios de propagación para bandas de frecuencia sub-6 GHz y milimétricas.

Magnetostática es una obra que trata sobre el análisis y obtención de los campos magnéticos en ausencia y presencia de materiales magnéticos, utilizando las leyes de Biot-Savart y de Ampere. Análisis de circuitos magnéticos. Análisis de la inducción electromagnética, utilizando las Leyes generales de inducción de Faraday y de Lenz. Obtención y análisis de las ecuaciones de Maxwell en forma integral, diferencial y compleja. Finalmente, se analiza las ondas electromagnéticas planas. La obra está dirigida a investigadores, docentes y estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral y matemática vectorial. Presenta una explicación y análisis de los contenidos teóricos, para posteriormente aplicarlos en el desarrollo de los problemas.

Pedro Severo Infante Moreira es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). Tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, dos Maestrías: una en Gestión Académica Universitaria y otra en Administración de Empresas, un Doctorado en Ciencias Técnicas. Ha publicado seis libros, dos libros corresponden al electromagnetismo y cuatro a circuitos eléctricos. Ha participado en congresos nacionales e internacionales. Ha publicado varios artículos científicos. Ha desarrollado dos proyectos de investigación en el área de las radiaciones electromagnéticas. Actualmente es profesor titular principal 1 en la Facultad de Informática y Electrónica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), y continúa escribiendo artículos científicos, libros y desarrollando proyectos de investigación en el área del electromagnetismo.

Jefferson Alexander Ribadeneira Ramírez recibió el grado de ingeniero en Electrónica y Computación en 2008 por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Riobamba, Ecuador. En 2013, obtuvo el grado de máster universitario en Tecnologías, Sistemas y redes de comunicaciones por la Universitat Politècnica de València (UPV), Valencia, España. En 2016, recibió el grado de doctor en Telecomunicación por la UPV. Desde el 2012 hasta el 2016 desempeñó las funciones de investigador en el Grupo de Comunicaciones Móviles (MCG) del Instituto de Telecomunicaciones y Aplicaciones Multimedia (iTEAM) de la UPV. Ha participado como director e investigador en varios proyectos de investigación nacionales e internacionales. Sus actividades de investigación están enfocadas en diseño de dispositivos para electrónica de alta frecuencia, optimización del espectro radioeléctrico, planificación de redes de Televisión Digital Terrestre y Comunicaciones Móviles 5G y 6G, compatibilidad electromagnética y estudios de propagación para bandas de frecuencia sub-6 GHz y milimétricas.

