GEOMETRÍA

Una lectura inicial

Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Martha Ximena Dávalos Villegas
Carlos Eduardo Cova Salaya

2023

GEOMETRÍA

Una lectura inicial

©2023 Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Martha Ximena Dávalos Villegas
Carlos Eduardo Cova Salaya

2023

GEOMETRÍA. Una lectura inicial

Martha Ximena Dávalos Villegas
Carlos Eduardo Cova Salaya

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)
Riobamba – Ecuador
Panamericana Sur Km. 1½
Teléfono: 593 (03) 2998-200
Código Postal EC0600155

2023
Publicado por acuerdo con los autores.
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego *(peer review)*

GEOMETRÍA. Una lectura inicial
Dirección de Publicaciones Científicas, 2023
ISBN: 978-9942-44-563-6
Fecha de Publicación: 2023-06-14
Riobamba. Ecuador

Introducción

La matemática se caracteriza por poseer teorías axiomáticas, las principales son la Aritmética, Teoría de Conjuntos y la Geometría. Estas teorías parten de una base que son los axiomas, términos primitivos y definiciones que relacionan los términos primitivos; para luego, con la ayuda de razonamientos lógicos y reglas de inferencias, demostrar proposiciones y teoremas que se constituyen en el edificio de la teoría.

El propósito de este texto es presentar al lector la construcción axiomática de la Geometría, a partir de términos primitivos y axiomas. Las demostraciones de los teoremas presentados en este texto contienen la justificación de los procesos realizado;, en algunos teoremas se identifica la hipótesis y tesis, es decir, se pone en evidencia lo que se conoce como antecedente y lo que se va a demostrar.

Los métodos de demostración aplicados son el directo y el de reducción al absurdo (negación de la tesis). Cada demostración está acompañada de una figura que ilustra dicha demostración; lo que permite una mejor comprensión de los razonamientos empleados. En cada capítulo se ha incluido una sección para ejercicios resueltos y otra para ejercicios propuestos; lo que seguramente se convierte en un reto para el lector ávido de conocimientos.

En el primer capítulo se presentan los axiomas de pertenencia, paralelismo y de orden, acompañados de modelos que satisfacen dichos axiomas. El segundo capítulo contiene los axiomas de congruencia y su aplicación a la congruencia de ángulos y triángulos. En el tercer capítulo se introducen los conceptos de longitud de segmento y amplitud de ángulos, lo que permite hacer comparaciones entre longitudes y amplitudes. El cuarto capítulo contiene las transformaciones referidas a la simetría central y las traslaciones que son el resultado de la composición de simetrías centrales. En el capítulo cinco se presentan las transformaciones referidas a la simetría axial y rotaciones como composición de simetrías axiales.

Índice general

1

Axiomas de pertenencia, paralelismo y de orden

En la actualidad todas las teorías matemáticas se organizan en forma de sistema axiomático. Un sistema axiomático se caracteriza por tener términos primitivos, conceptos derivados, axiomas, teoremas y reglas de inferencia.

¿Por qué un sistema axiomático?

La razón es muy simple: NO SE PUEDE DEFINIR TODO Y NO SE PUEDE DEMOSTRAR TODO.

En el caso del plano, los términos primitivos considerados son: el punto (que los representaremos por letras mayúsculas) y la recta que es un conjunto de puntos (representadas por letras minúsculas), los dos son subconjuntos del plano. Por lo tanto, se puede afirmar que las palabras punto y recta son términos desconocidos porque no se sabe nada más , y por tanto, hay que esperar "verlos en acción" para saber más de ellos, es decir, es necesario conocer lo antes posible los vínculos que existen entre estos términos primitivos introduciendo relaciones entre estos, los axiomas.

1.1 Axiomas de pertenencia

Las relaciones y vínculos que existen entre los términos primitivos se expresan por los axiomas. Por tanto, estudiaremos los enlaces entre ellos y trataremos de derivar de ellos, algunas propiedades; es decir demostraremos algunos teoremas.

Los primeros axiomas se denominan axiomas de pertenencia y los representaremos mediante $A1$, $A2$ y $A3$.

Supondremos a partir de ahora que el plano es un conjunto no vacío de puntos; sin embargo, no sabemos cuántos son, ni cómo se disponen, tampoco sabemos cómo se constituyen esos subconjuntos llamados rectas. A continuación enunciamos los axiomas que establecen relaciones entre puntos y rectas y entre rectas.

A1. Para dos puntos distintos, existe una única recta a la cual estos puntos pertenecen.

Nota

Analicemos lo que afirma el axioma:

1. En el plano existe al menos dos puntos distintos (distintos significa que los dos puntos no coinciden, en un sentido intuitivo);

2. Dado que hay dos puntos distintos, entonces también podemos hablar de una recta bien determinada por dichos puntos; esta recta la representaremos mediante estos dos puntos;

3. Dados dos puntos distintos, no pueden existir dos rectas distintas que contengan dichos puntos; es decir, el axioma establece que si dos rectas tienen en común dos puntos, entonces, las rectas coinciden (es decir, son la misma recta);

4. Para indicar una recta, se pueden nombrar dos puntos que le pertenecen, así en la Fig. 1.1, se puede escribir la recta a, o la recta AB, o la recta AD o la recta BA, etc.

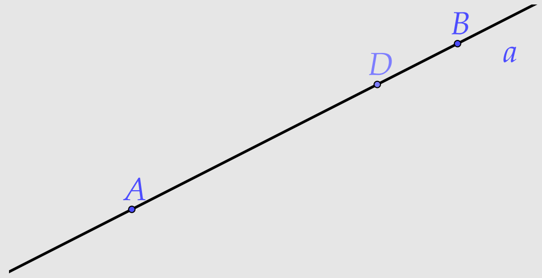

Figura 1.1. Recta a.

A continuación se demuestra un teorema que nos proporciona información de la cantidad de puntos que tienen en común dos rectas distintas.

Teorema 1.1
La intersección de dos rectas distintas es a lo máximo un punto.

Hipótesis: a y b dos rectas distintas.

Tesis: a y b tienen máximo un punto en común

Demostración.

1)	a y b rectas distintas	hipótesis
2)	a y b tienen uno o ningún punto en común	literal c) de la nota anterior
3)	a y b tienen al máximo un punto en común	debido a 2)

□

El modelo geométrico más intuitivo que se utiliza para la representación del plano y sus elementos es una hoja de papel, en este modelo, la hoja representa el plano, los puntos están representados por la huella que deja un lápiz sobre la hoja, y la recta es un doblez de esta hoja.

La Fig. 1.2 representa un modelo $M1$ de un plano cuyos puntos son A, B, C. Se puede verificar que en $M1$ se cumple el axioma $A1$.

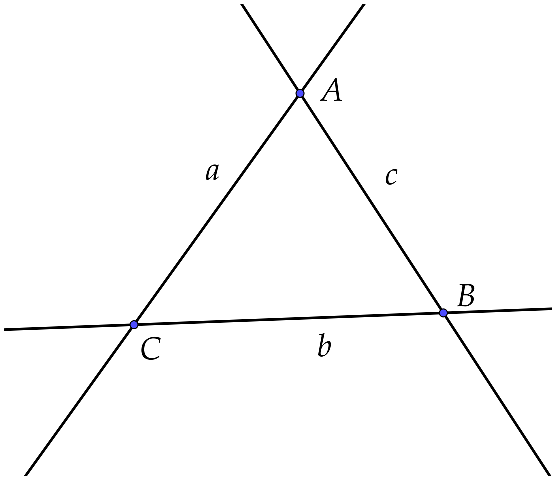

Figura 1.2. Modelo $M1$ del plano.

Llamamos a los subconjuntos del plano de la siguiente manera: $a = \{A, C\}$, $b = \{B, C\}$, $c = \{A, B\}$. Tome en cuenta que los únicos puntos de a son A y C; el tramo A hasta C en la Fig. 1.2 se ha dibujado continuo para mayor claridad, pero no hay otros puntos entre A y C.

Se verifica que:

las rectas a y c se intersecan en A;

las rectas a y b se intersecan en C;

las rectas b y c se intersecan en B.

En el modelo $M1$, todas las rectas tienen un punto en común con las demás, por tanto, en el modelo $M1$ no hay rectas sin puntos en común.

Si dos rectas tienen un solo punto en común, se dice que son *intersecantes*; y, si no tienen puntos en común se dice que son *paralelas*.

De manera explícita, se tiene:

Definición 1.1

Dos rectas se dicen *intersecantes* si tienen exactamente un punto en común; se dicen *paralelas* si no tienen puntos en común; no hay otros casos posibles, es decir, si dos rectas tienen más de un punto en común, se dicen *coincidentes*

> (son la misma recta).

El siguiente modelo $M2$ muestra el plano que contiene los puntos A y B y la recta AB,

Figura 1.3. Modelo $M2$.

El modelo $M2$ de la Fig. 1.3 también verifica el axioma $A1$; pero es tan pobre que el teorema 1.1 no se puede verificar, ya que no podemos hablar de dos rectas distintas. En este punto, necesitamos que se nos diga algo más al respecto. La existencia de rectas y puntos para evitar modelos demasiado "pobres". Este es el propósito del axioma $A2$.

A2. Dada una recta, existe al menos un punto que no le pertenece.

Se puede verificar inmediatamente que en el modelo $M2$ el axioma $A2$ no se cumple, mientras que es válido en el modelo $M1$, porque cualquiera sea la recta que se considere, siempre existe un punto que no pertenece a la recta considerada. Por ejemplo, si se considera la recta $a = \{A, C\}$, existe el punto B que no es un punto de la recta A.

Nótese que el axioma $A2$ todavía nos dice poco sobre el número de puntos que pertenecen a una recta o un plano; necesitamos más información; hasta ahora, en base a $A1$ y $A2$, sabemos que en un plano hay al menos tres puntos.

A3. Toda recta posee al menos tres puntos.

Los modelos $M1$ y $M2$ no satisfacen este axioma. Por esta razón buscamos otro modelo; consideramos la Fig. 1.4 que representa una situación que llamaremos $M3$. Supongamos que el plano es el conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$; las rectas se definen de la siguiente manera: $a = \{A, B, C\}$, $b = \{D, E, F\}$, $c = \{G, H, I\}$, $d = \{A, D, G\}$, $e = \{B, E, H\}$, $f = \{C, F, I\}$, $g = \{C, E, G\}$ y $h = \{A, E, I\}$.

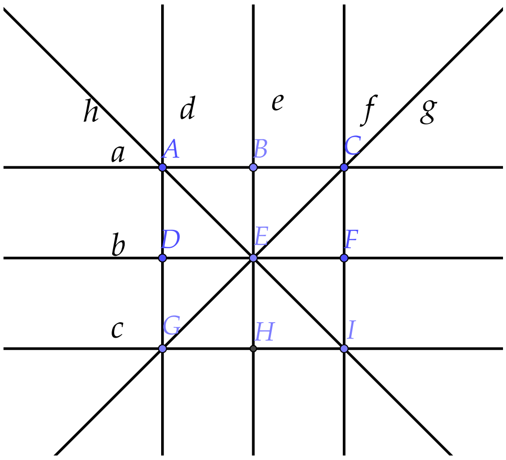

Figura 1.4. Modelo $M3$.

Veamos si $M3$ verifica los axiomas planteados y el teorema 1.1.

En este modelo, $A2$ se cumple porque cualesquiera que sea la recta considerada siempre hay puntos en el plano que no pertenecen a la recta tomada en consideración. En $M3$ se cumple $A3$ porque cada recta tiene, por definición, exactamente tres puntos. El teorema 1.1 se lo puede comprobar. Sin embargo, $A1$ no se verifica en $M3$ porque existe un par de puntos (por ejemplo B y F) para los cuales no pasa una recta. Por tanto en $M3$ son válidos $A2$ y $A3$ pero no $A1$.

Consideremos ahora la situación $M4$, ilustrada en la Fig. 1.5.

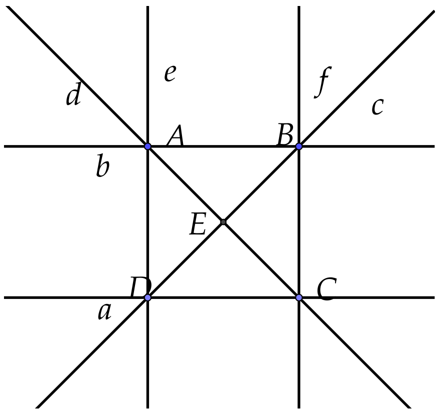

Figura 1.5. Modelo $M4$.

Inmediatamente se verifica que $A1$ está satisfecho (de hecho, dos puntos distintos determinan una y sólo una recta), por tanto, se satisface el teorema 1.1, que se sigue de $A1$; $A2$ se satisface; pero $A3$ no se satisface (hay en $M4$ algunas rectas con tres puntos, pero hay rectas con solo dos puntos). El trabajo de encontrar un modelo que satisfaga todos los axiomas de pertenencia empieza a ser difícil.

En cambio, el modelo $M5$ resolverá el problema.

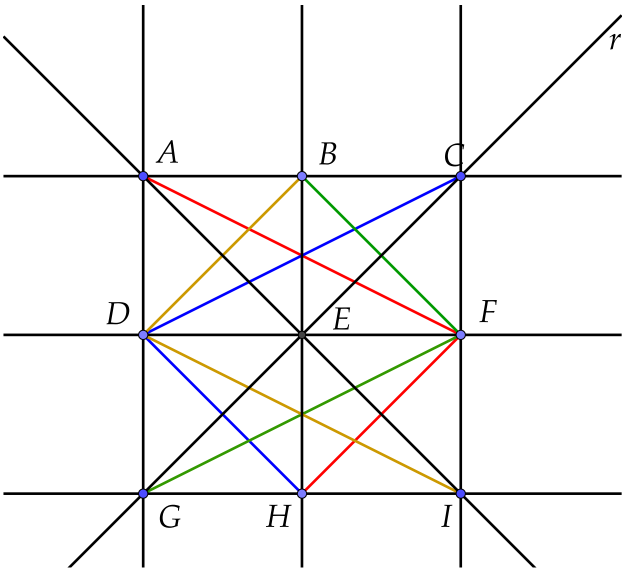

Figura 1.6. $M5$ Modelo de Young.

De acuerdo con la Fig. 1.6, el plano es el conjunto de puntos $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, mientras que las rectas son las siguientes:

{A,B,C}, {D,E,F}, {G,H,I}, {A,D,G}, {B,E,H}, {C,F,I}, {A,E,I}, {C,E,G}, {A,F,H}, {C,D,H}, {B,F,G}, {B,D,I}.

Tenga en cuenta que las dos rectas {A,E,I}, {B,D,I} son incidentes porque tienen en común el punto I; mientras que las dos rectas {A,E,I}, {C,D,H} son paralelas porque no tienen puntos en común.

El modelo $M5$ cumple los tres axiomas de pertenencia, como se puede verificar; por tanto, $M5$ es un modelo de los axiomas de pertenencia. Este modelo se lo conoce como modelo de Young.

Ejercicio. Considere el plano: $\{A, B, C, D\}$; llámese recta a cualquier terna de puntos y responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas rectas hay en este plano?
2. ¿Se verifican los tres axiomas $A1$, $A2$, $A3$?
3. ¿Se verifica el teorema 1.1? Note que el teorema 1.1 es consecuencia de $A1$ y no de $A2$ y $A3$.
4. ¿Hay rectas paralelas en el plano?
5. ¿Hay en el plano rectas incidentes?
6. ¿Puede hacer una imagen de la situación considerada?

Solución.

1. ¿Cuántas rectas hay en este plano?

   La condición que se impone es que las rectas son ternas de puntos, por tanto las rectas son:

   $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{B, C, D\}$, $\{A, C, D\}$

2. ¿Se verifican los tres axiomas $A1$, $A2$, $A3$?

   Con las rectas dadas en el numeral anterior, se tiene que :

   $A1$: no se cumple, pues por dos puntos diferentes debe pasar una sola recta, lo que no sucede aquí, por ejemplo, $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$ son ternas diferentes.

   $A2$: se cumple, para cada recta existe un punto que no le pertenece.

   $A3$: se cumple: a cada recta le pertenecen al menos tres puntos.

3. ¿Se verifica el teorema 1?

   No se satisface el Teorema 1, pues como se vió en el numeral anterior, existen rectas distintas que tienen dos puntos en común.

4. ¿Hay rectas paralelas en el plano?

   No hay rectas paralelas en el plano, pues todas las rectas tienen dos puntos en común.

5. ¿Hay en el plano rectas incidentes?

   No hay rectas incidentes, pues todas las rectas tienen más de un punto en común.

6. ¿Puede hacer una imagen de la situación considerada?

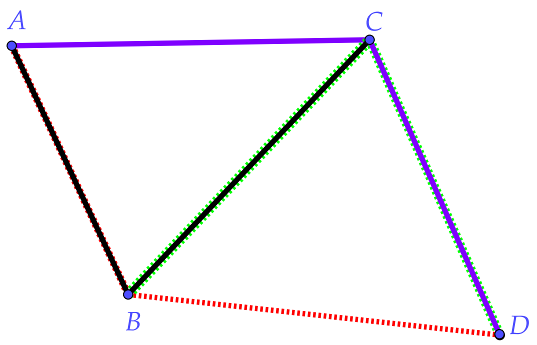

Figura 1.7. Plano de puntos $\{A, B, C, D\}$.

Definición 1.2
Se llama *haz de rectas* al conjunto de todas y solo las rectas que pasan por un determinado punto; este último se llama *centro del haz*.

Ejemplo
En la Fig. 1.4, es decir, en el modelo $M3$, hay cuatro rectas h, e, g, b que forman parte del haz de centro E.

Ejercicio. Complete las demostraciones de los siguientes teoremas empleando los axiomas de pertenencia, definiciones dadas y teoremas demostrados.

Teorema 1.2
Existe al menos un punto que no pertenece a ninguna de dos rectas distintas dadas.

Hipótesis: a y b dos rectas distintas

Tesis: existe al menos un punto C, tal que $C \notin a$ y $C \notin b$.

Demostración. En efecto, si tomamos dos rectas a y b, sean A un punto de a tal que A no pertenece a b (axioma ...) y B un punto de b tal que B no pertenece a la recta a (axioma $\cdots$), según el axioma $\cdots$, existe y es única la recta AB. Por el axioma $\cdots$, en la recta AB existe otro punto C, diferente de A y de B. C no puede estar en a por $\cdots$; C no puede estar en b por $\cdots$. Por lo tanto, C no pertenece a ninguna de las dos rectas dadas. □

Teorema 1.3
Existe al menos una recta que no es paralela a ninguna de dos rectas diferentes dadas.

Hipótesis: a y b dos rectas.

Tesis: existe al menos una recta que no es paralela ni a la recta a, ni a la recta b.

Demostración. En efecto, sean a y b las dos rectas dadas. Sobre a tomamos un punto A y sobre b un punto B. Por el axioma $\cdots$ existe la recta AB. Esta recta AB es la recta requerida en el enunciado del teorema. En efecto, esa no es paralela ni a a ni a b, debido a $\cdots$. □

1.2 Axioma de paralelismo

El axioma de paralelismo es un axioma peculiar, pues la negación de este, no conduce a una contradicción con los axiomas hasta ahora expuestos. Ante la pregunta; ¿cuántas rectas paralelas a r se pueden trazar por P? (Fig. 1.8), se puede responder con un axioma de la siguiente manera:

- existe más de una recta que pasa por P y es paralela a r;
- existe una y sólo una recta que pasa por P y es paralela a r;
- no existen rectas que pasen por P y sean paralelas a r.

Cada una de estas proposiciones puede tomarse como un axioma y cada una de ellas da lugar a modelos particulares y, por tanto a diferentes geometrías. En este texto se aceptará el axioma que expresa la unicidad de la paralela.

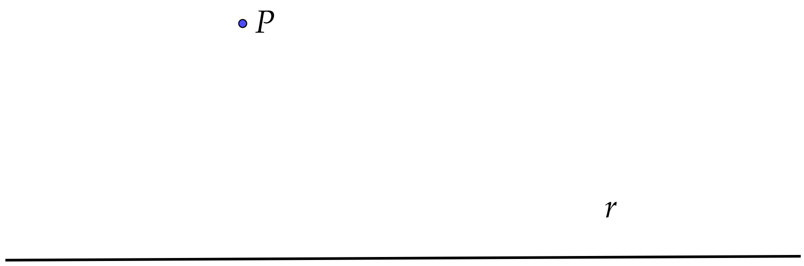

Figura 1.8. Recta r y un punto P externo a ella.

P. Dada una recta y un punto que no la pertenece, existe una y sólo una recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada.

Notas

1. Verifiquemos que existe al menos un modelo, en el cual son válidos los axiomas $A1$, $A2$, $A3$ y P. Para ello se considera el Modelo de Young.

   De acuerdo a la Fig. 1.6, suponga que el plano es el conjunto de puntos: $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$; también tenemos las siguientes doce rectas, cada una de las cuales es una terna de puntos:

   {A,B,C}, {D,E,F}, {G,H,I}, {A,D,G}, {B,E,H}, {C,F,I}, {A,E,I}, {C,E,G}, {A,F,H}, {C,D,H}, {B,F,G}, {B,D,I}.

   Los axiomas $A1$, $A2$, $A3$ ya fueron validados; por tanto, solo falta verificar el axioma P; consideremos una recta, sea {B,D,I} y un punto fuera de ella, sea G; las rectas que contienen a G son: {A,D,G}, {G,H,I}, {B,F,G}, {C,E,G}; de estas rectas solamente la recta {C,E,G} no tiene puntos en común con {B,D,I}; por lo tanto, la paralela por G a la recta {B,D,I} es única. De forma análoga se verifica lo mismo para las demás rectas.

2. Describamos una situación en la que sean válidos los axiomas $A1$, $A2$ y $A3$, mientras que no es válido P.

   Para ello recurrimos a algunos conceptos que no hemos definido formalmente, pero que los conocemos desde la educación básica; usemos estos conceptos intuitivamente. Ubiquémonos en el modelo de la hoja de papel y llamemos plano al conjunto de todos los puntos que están dentro del cuadrado (excluyendo su contorno). De acuerdo a la Fig. 1.9, A, B, C son puntos del plano (dado que son internos al cuadrado); D, E, F no son puntos del plano (dado que no son internos). Llamamos recta a cada segmento cuyos puntos son internos al cuadrado y cuyos extremos son puntos del contorno. Por ejemplo, de acuerdo a la Fig. 1.9, A y B son puntos de la recta a (debe tenerse cuidado, sin embargo: los puntos D y E, al no ser internos, no forman parte de la recta).

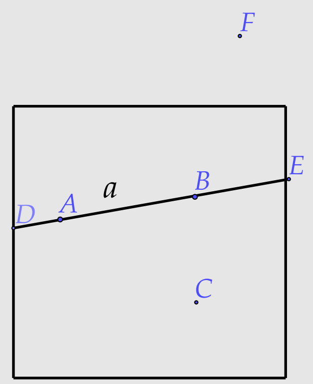

Figura 1.9. Modelo hoja de papel, puntos internos, externos y del contorno.

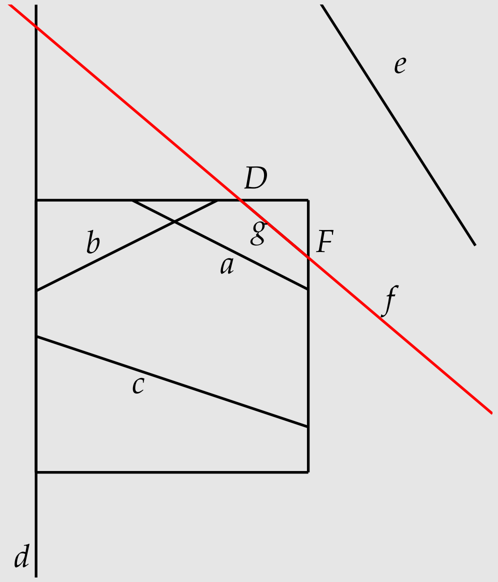

Figura 1.10. Modelo hoja de papel, rectas.

En la Fig. 1.10 vemos algunos ejemplos de rectas (a, b, c, son rectas; d, e, f no son rectas; en particular g, que es un subconjunto de f, es una recta de este plano; los puntos D y F no son internos).

Hemos construido una situación sobre una hoja de papel en la que $A1$, $A2$, $A3$ se cumplen, pero no P.

Que se verifique $A1$ se puede ver de la siguiente manera (Fig. 1.11): tomando dos puntos distintos A, B, existe una y sólo una recta que pasa por ellos, la recta a, análogamente por los otros casos.

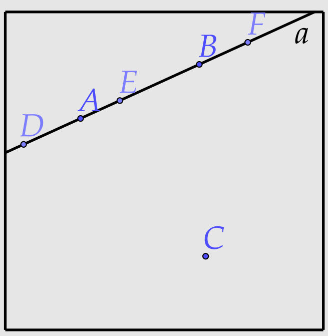

Figura 1.11. Modelo hoja de papel, axiomas de pertenencia.

Que se verifique $A2$, se puede ver del siguiente modo (Fig. 1.11): el punto C no pertenece a la recta AB, análogamente para cualquier otro caso.

Que se verifique $A3$, se puede ver de la siguiente manera: sobre cada recta existen al menos tres puntos. En la Fig. 1.11, sobre la recta a, además de los puntos A y B, se pueden identificar otros.

Que no se cumpla P se demuestra en la Fig. 1.12: sea a una recta de nuestro plano y sea A un punto externo a ella, por A pasan varias rectas paralelas $(b, c, d, e, f, g, \cdots)$ a a. En efecto, hemos descrito un modelo donde son válidos los postulados de pertenencia pero no el de paralelismo.

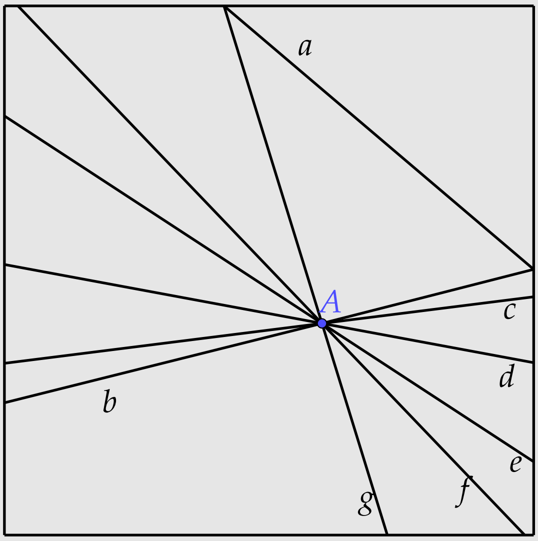

Figura 1.12. Modelo hoja de papel, no cumple el axioma P.

3. El modelo de Young nos asegura que existe un modelo de $A1$, $A2$, $A3$ y P; por lo tanto, la relaciones expresadas por $A1$, $A2$, $A3$ y P entre los términos recta y punto son relaciones coherentes, es decir, no están en contradicción entre sí. Si fuesen contradictorios entre sí, no podría existir un modelo que verifique todos los axiomas: la contradicción impediría construir un modelo.

4. El modelo del cuadrado nos asegura en cambio que el postulado P

es independiente de los axiomas $A1$, $A2$, $A3$; de hecho, si la relación expresada por P dependiera de las expresadas por $A1$, $A2$, $A3$, es decir, ya estaban implícitos en ellos, no podría existir un modelo de $A1$, $A2$, $A3$ y no de P.

Teorema 1.4
Sean a y b dos rectas paralelas; si r es una recta que interseca a la recta a, entonces r interseca también a la recta b.

Hipótesis: a y b rectas paralelas, r interseca a la recta a.

Tesis: r interseca a la recta b.

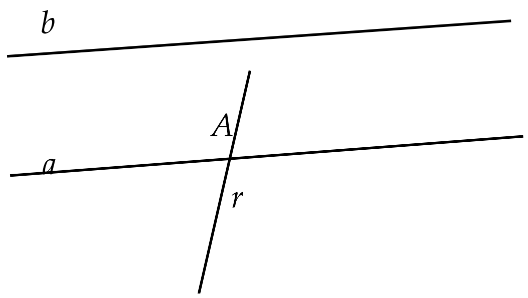

Figura 1.13. Rectas paralelas intersecadas por otra.

Demostración. La demostración la hacemos por reducción al absurdo (Fig. 1.13).

1)	$a \cap b = \emptyset$	hipótesis
2)	$\{A\} = r \cap a$	hipótesis
3)	$A \in a$	debido a 2)
4)	$A \in r$	debido a 2)
5)	$r \cap b = \emptyset$	negación de la tesis

Lo indicado en 5) es una contradicción con el axioma P, pues hemos encontrado dos rectas paralelas a b que pasan por el punto A. Por tanto r también interseca a la recta b.

$\square$

1.3 Dirección de una recta

Definición 1.3
Decimos que dos rectas *tienen la misma dirección* si coinciden o son paralelas.

Para indicar que las rectas r y s tienen la misma dirección escribiremos $r||s$.

Teorema 1.5
La relación "tener la misma dirección" es una relación de equivalencia.

Hipótesis: $||$ la relación tener la misma dirección.

Tesis: $||$ es una relación de equivalencia.

Demostración. Para demostrar que una relación es de equivalencia se deben probar tres propiedades: Reflexiva, simétrica y transitiva.

En efecto probemos cada una de ellas:

1. Reflexiva. Se debe probar que: $a||a$. Esto se cumple trivialmente, pues por definición dos rectas tienen la misma dirección si son paralelas ($r \cap s = \emptyset$) o coinciden ($r = s$); en este caso a coincide con a, consecuentemente, $a||a$.

2. Simétrica. Se debe probar que: Si $a||b$ entonces $b||a$. En efecto se cumple, pues, por hipótesis se sabe que a tiene la misma dirección de b; es decir, son paralelas ($a \cap b = \emptyset$) o coinciden ($a = b$), por la propiedad conmutativa de la intersección y la simetría de la igualdad se tiene que $b \cap a = \emptyset$ o $b = a$, por tanto, $b||a$.

3. Transitiva. Se debe probar que: Si $a||b$ y $b||c$, entonces $a||c$. En efecto, por hipótesis se tiene que $(a \cap b = \emptyset \vee a = b) \wedge (b \cap c = \emptyset \vee b = c)$.

   Vemos que existen cuatro posibilidades:

   $a \cap b = \emptyset \wedge b \cap c = \emptyset \rightarrow a \cap c = \emptyset$

   $a \cap b = \emptyset \wedge b = c \rightarrow a \cap c = \emptyset$

   $a = b \wedge b \cap c = \emptyset \rightarrow a \cap c = \emptyset$

$a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$

Cualquiera de los cuatro casos nos permite concluir que $a||c$.

De esta manera se concluye la demostración. $\square$

Notas

Sea A un conjunto no vacío, y R una relación de equivalencia definida sobre él.

1. Si $a \in A$, se denomina clase de equivalencia de a al conjunto
$$C_a = \{b \in A/bRa\}$$
.
2. Se demuestra que existe una familia de clases de equivalencia (llamada partición de A) que cumple lo siguiente:
   a) $A = \cup_{a \in A} C_a$
   b) $C_{a_i} \cap C_{a_j} = \emptyset$ para todo $a_i, a_j \in A$, tal que a_i no está relacionada con a_j.
3. Como la relación "tener la misma dirección" es una relación de equivalencia, cada clase de equivalencia de la partición determinada por esta relación, la denominamos dirección.

De ahora en adelante para indicar los axiomas $A1$, $A2$ y $A3$ utilizaremos simplemente A.

Un plano donde sean válidos A y P se denomina plano afín. Por lo tanto, los modelos en los son válidos A y P son modelos del plano afín; por ejemplo, el modelo de Young es un modelo del plano afín.

Ejercicio. Consideremos un plano formado por cuatro puntos A, B, C, D y de las cuatro rectas $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$, $\{A, D\}$.

1. ¿Son válidos los axiomas A? ¿Cuál de ellos no es válido?

2. ¿Es válido el axioma P?

3. ¿Es un modelo afín?

Solución.

1. ¿Son válidos los axiomas A? ¿Cuál de ellos no es válido?

   No se satisface $A1$ (por los puntos A y C no pasa alguna recta); tampoco se satisface $A3$ (las rectas están formadas por solamente dos puntos).

2. ¿Es válido el axioma P?

   Si es válido el axioma P. Para cada recta y un punto exterior a ésta existe una única recta paralela a la primera que pasa por el punto exterior.

3. ¿Es un modelo afín?

   No es un modelo afín. No cumple los todos los axiomas A.

Definición 1.4
El conjunto de todas las rectas que tienen la misma dirección se denomina *haz impropio*.

1.4 Orden sobre una recta

Los puntos de una recta están dispuestos de cierta manera que podríamos pensar que están ordenados. Pensando en una carretera cerca de la ciudad de Riobamba, podemos decir, por ejemplo ,que Riobamba está antes de Ambato y Ambato está antes de Latacunga; y, en sentido contrario, Latacunga está antes de llegar a Ambato y Ambato está antes de Riobamba. La carretera representa la recta y las ciudades representan los puntos de ella. El concepto de estar antes (preceder) se lo puede expresar matemáticamente, hasta llegar a la formulación de un axioma.

Considérese una recta r con sus puntos genéricos A, B, C, Fig. 1.14. Decimos que *sobre r existe una relación de orden total*, representada por el símbolo $\preceq$ ($A \preceq B$ se leerá A precede a B), si son válidas las siguientes propiedades:

Figura 1.14. Orden total en una recta.

1. La relación $\preceq$ es reflexiva (es decir, $A \preceq A$ para todo A de r);
2. La relación $\preceq$ es antisimétrica (es decir, si $A \preceq B$ y $B \preceq A$ entonces $A = B$);
3. La relación $\preceq$ es transitiva (es decir, si $A \preceq B$ y $B \preceq C$ entonces $A \preceq C$);
4. Dados dos puntos cualesquiera A y B de una recta r, se cumple al menos una de las siguientes relaciones $A \preceq B$ o $B \preceq A$.

Notas

Tomar en cuenta las siguientes notaciones:

1. Para indicar que A precede a B, pero que no son iguales, se usa la notación $A \prec B$; en este caso se dice que A precede estrictamente a B.
2. La notación $A \preceq B$ se puede leer también como: B sigue a A

A continuación se enuncia el primer axioma de orden.

O1. El conjunto de puntos sobre una recta está totalmente ordenado según dos ordenamientos opuestos.

Notas

Analicemos el significado intuitivo del axioma.

1. Los dos ordenamientos se pueden llamar “sentidos”; se puede notar que si en una recta r el punto A precede al punto B yendo de izquierda a derecha; entonces, cambiando el sentido; es decir, yendo de derecha a izquierda, B estará antes de A (Fig. 1.15).

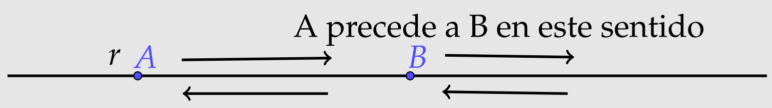

Figura 1.15. Los dos ordenamientos sobre una recta.

2. Si dos puntos distintos pertenecen a una recta sobre la que se ha definido un sentido, uno de los dos precederá al otro; en este caso, el segundo seguirá al primero; por lo tanto, si se ha elegido una orientación, también se ha establecido un orden estricto entre los puntos distintos.

3. Para orientar una recta basta escoger uno de los dos sentidos.

4. Surge un nuevo concepto que vincula tres puntos de la recta; sean A, B, C, puntos de la recta r, supongamos que $A \prec B$ y $B \prec C$ (habiendo elegido un sentido de la recta), se dice que B está entre A y C. Obsérvese que si elegimos el otro sentido de la recta, se cumple que B está entre C y A.

5. Dados tres puntos distintos sobre una recta, solamente uno de ellos está entre los otros dos. De hecho, dados tres puntos A, B, C distintos y alineados, con orientación de A a B, hay sólo dos casos posibles: o $C \prec A$ o $A \prec C$; en el primer caso, se tendría $C \prec B$ y por tanto A estaría entre C y B; en el segundo caso, hay dos posibilidades $C \prec B$ o $B \prec C$, por tanto C está entre A y B o B está entre A y C.

Ejercicio. Resolver

1. En el modelo de la hoja de papel, dibuje con un compás una circunferencia y elija tres puntos A, B,C de ella, y luego responda las siguientes preguntas:

   a) Si tomamos la circunferencia como modelo de la recta, ¿se verifica el axioma $O1$?

   b) ¿Y si en lugar de la circunferencia se considera un arco de circunferencia?

Solución.

a) Si tomamos la circunferencia como modelo de la recta, ¿se verifica el axioma $O1$?

No se satisface el axioma $O1$ pues no se pueden identificar los dos ordenamientos opuestos.

b) ¿Y si en lugar de la circunferencia se considera un arco de circunferencia?

En ese caso, si se satisface el axioma $O1$.

2. Considere una situación real: la que se puede presentar en el mostrador de un estadio de fútbol para la compra de entradas de un juego. Considerando como modelos de puntos las posiciones ocupadas por personas que desean comprar una entrada y todas las personas como modelo de recta que forman un "hilera" , ¿qué reglas establecería para la formación de las hileras si se desea una situación en la que sea válido el axioma $O1$? Proponga situaciones análogas.

   Solución. La regla sería: la persona que está más cerca al mostrador precede a las demás, por tanto se ha definido un orden de adelante hacia atrás. La última persona sigue a las demás (está sería la definición del orden contrario al anterior)

Nota

Tenga en cuenta que las rectas deben señalarse de manera diferente a la que se ha hecho hasta ahora, ya que $\{A, B, C\}$ da lugar a muchas interpretaciones; por ejemplo, en primer lugar hace falta indicar cuál de los tres puntos A o B o C está entre los otros dos, y una vez aclarado esto, todavía persisten dos posibilidades. Por esta razón para indicar la orientación y el orden, se usará, por ejemplo, (B, A, C) que significa que $B \prec A$ y $A \prec C$ como se representa en la Fig. 1.16.

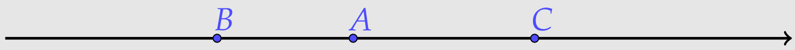

Figura 1.16. El punto A está entre B y C.

Considérese un modelo modificado del modelo de Young (Fig. 1.6), en el cual se ha asignado una orientación a cada recta, dicha orientación está señalada por una flecha, como en la Fig. 1.17.

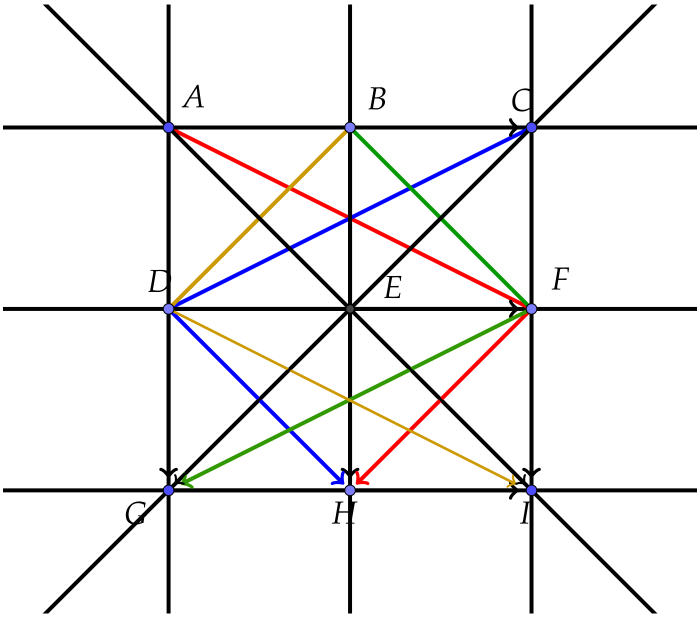

Figura 1.17. Modelo de Young, con rectas orientadas.

Luego las rectas de este modelo están representadas mediante (A, B, C), (D, E, F), (G, H, I), (A, D, G), (B, E, H), (C, F, I), (A, E, I),(C, E, G), (B, D, I), (A, F, H), (B, F, G) y (C, D, H); además este modelo satisface los axiomas A, P y $O1$.

Ejercicio. Resolver los siguientes ejercicios

1. En el modelo de Young (Fig. 1.6), fije una orientación para cada recta (diferente a la trabajada anteriormente), pruebe que se verifica el axioma $O1$.

   Solución. Puede fijarse la siguiente orientación en cada recta:

$(A, H, F), (B, I, D), (G, B, F), (H, C, D), (B, C, A)$

$(E, F, D), (H, I, G), (A, G, D), (B, H, E), (C, I, F)$

$(A, I, E), (C, G, E)$

2. En el modelo de la Fig. 1.18 pruebe que se cumplen los axiomas hasta ahora vistos, además son válidos los teoremas 1.1, 1.2 y 1.3.

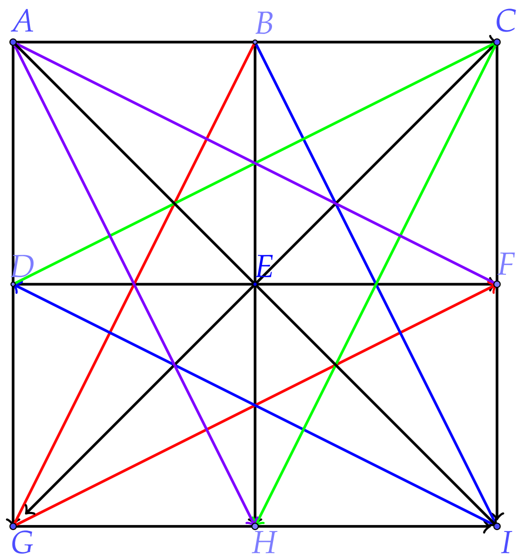

Figura 1.18. Modelo de Young con otra orientación en sus rectas.

Solución. Las rectas de este modelo son:

$(F, H, A), (B, G, F), (D, C, H), (B, I, D), (A, B, C), (A, D, G)$

$(D, E, F), (B, E, H), (G, H, I), (C, F, I), (A, E, I), (C, E, G)$

Los paréntesis indican además el orden.

a) $A1$ se cumple: por dos puntos distintos pasa una y solo una recta.

b) $A2$ se cumple: para cada recta del modelo existe al menos un punto que no la pertenece.

c) $A3$ se cumple: todas las rectas tienen al menos tres puntos.

d) P para cada recta del modelo, y un punto fuera de ella, existe una única recta paralela a la primera.

e) $O1$ cada recta está ordenada por dos órdenes contrarios.

1.5 Algunas consideraciones sobre la recta

Ahora introducimos algunos términos para completar el universo geométrico conocido. Considere una recta orientada y dos puntos distintos A y B de esta recta, supongamos que el sentido de la recta es de A hacia B.

Definición 1.5
Llamamos *segmento* AB, al conjunto de puntos que siguen a A y preceden a B; los puntos A y B se denominan *extremos del segmento*.

Los extremos del segmento pueden o no pertenecer a él; en el primer caso se dice que el segmento es *cerrado* (Figura 1.19) y en el segundo caso se dice *abierto* (Fig. 1.20).

Figura 1.19. Segmento cerradoAB.

Figura 1.20. Segmento abierto AB.

Si A y B coinciden se tiene el *segmento nulo*, es decir, el segmento constituido por un solo punto. De ahora en adelante consideraremos, generalmente, segmentos cerrados; es decir, diremos expresamente cuando un segmento se va a considerar abierto.

Ejercicio.

1. Considere la ruta ferroviaria de Riobamba-Alausí (se debe saber que para ir de Riobamba a Alausí se debe pasar por varias localidades

como: Calpi, Cajabamba, Colta, Columbe y Guamote). Construyamos un modelo de todos los axiomas vistos usando el siguiente espejo:

a) puntos A, B, C, etc.	$\to$	a') ciudades atravezadas por la línea ferroviaria;
b) recta orientadada r	$\to$	b') ruta del tren de Riobamba a Alausí;
c) estar entre $\cdots$ y $\cdots$	$\to$	c') estar en la vía del tren después de $\cdots$ y antes $\cdots$

i) En el modelo así construido, ¿cómo podemos definir los segmentos?, ¿los segmentos abiertos?, ¿los segmentos cerrados?

Solución.

1) ¿cómo podemos definir los segmentos?
   Los segmentos son rutas entre localidades intermedias y los extremos.
2) ¿los segmentos abiertos?
   Las rutas pueden contener las estaciones o no. Son intervalos abiertos cuando no contienen las estaciones.
3) ¿los segmentos cerrados? Las rutas pueden contener las estaciones o no. Son intervalos cerrados cuando contienen las estaciones.

ii) Indicando con A, B, C y D, los puntos distintos de la recta r qué sentido le daríamos, en el modelo, a las escrituras:

1)	$AB \cup BC$	(AB y BC son segmentos cerrados);
2)	$AB \cup CD$	($A \prec B$, $B \prec C$, $C \prec D$; AB y CD son segmentos cerrados);
3)	$AB \cap AC$	($A \prec B$, $A \prec C$; AB y AC son segmentos cerrados)?

Solución.

1) $AB \cup BC$	(AB y BC son segmentos cerrados);
$AB \cup BC = AC$	la ruta entre las localidades A y C incluidas las estaciones.
2) $AB \cup CD$	($A \prec B$, $B \prec C$, $C \prec D$; AB y CD son segmentos cerrados);
	La ruta ferroviaria comprendida
	entre las localidades A y B y después
	entre las localidades C y D

3) $AB \cap AC$ ($A \prec B$, $A \prec C$; AB y AC son segmentos cerrados)?

$AB \cap AC = AB$ si $B \prec C$

$AB \cap AC = AC$ si $C \prec B$

Definición 1.6
Sea r una recta orientada y O un punto de ésta; llamamos *semirecta de origen* O tanto al conjunto de los puntos de r que preceden a O, como el conjunto de puntos de r que siguen a O.

Si O no hace parte de la semirecta, se dice que la *semirecta es abierta*. Si O hace parte de la semirecta, se dice que la *semirecta es cerrada*. Las semirectas generadas por O se dicen *opuestas* (además se dice que la una es la prolongación de la otra).

Ejercicio.
Considere el perfil estilizado de un grupo de montañas (Fig. 1.21) y construya un modelo usando el siguiente espejo:

a) puntos A, C, E, G, I	$\rightarrow$	a') puntos del perfil A',C', E', G', I' los llamaremos puntos valle;
b) puntos B, D, F, H	$\rightarrow$	b') puntos del perfil B',D', F', H' los llamaremos puntos pico;
c) recta r	$\rightarrow$	c') conjunto formado por los elementos descritos en a') y b');
d) estar entre	$\rightarrow$	d') estar entre dos picos o dos valles.

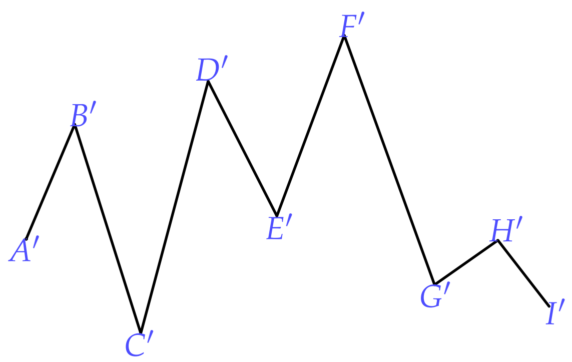

Figura 1.21. Perfil estilizado de un grupo de montañas.

en este modelo, ¿qué significado tienen las siguientes expresiones?

1. semirecta de origen C';
2. segmento $C'D'$;
3. ¿cuál es la intersección de dos semirectas abiertas de origen D'?
4. ¿se puede decir que E' está entre C' y F'?
5. ¿entre qué puntos está F'?

Solución.

1. semirecta de origen C';

   El perfil a la derecha de C' o a la izquierda de C'.

2. segmento $C'D'$;

   El segmento $C'D'$ no existe, pero si existe $C'E'$ pues "estar entre" se ha definido solo entre dos picos o dos valles.

3. ¿cuál es la intersección de dos semirectas abiertas de origen D'?

   El conjunto vacío

4. ¿se puede decir que E' está entre C' y F'?

   No, porque C' es un valle y F' es un pico.

5. ¿entre qué puntos está F'?

   F' está entre E' y G' o entre D' y H' o entre C' e I'.

Ahora, fijamos en una recta orientada r dos puntos distintos A y B (Fig. 1.22). Intuitivamente parece légitimo insertar otros puntos. Es obvio notar que, si se acepta insertar un punto (llamemos C) entonces, por este "axioma" existirá otro punto entre A y C y así sucesivamente. Además, en este mismo modelo se puede intuir también que existen otros puntos que siguen a B (uno es suficiente, los otros siguen a este último) y otros que preceden al punto A (como dijimos uno es suficiente). Por tanto podemos enunciar el siguiente axioma de orden:

Figura 1.22. Recta por dos puntos.

O2 Dada una recta orientada y sobre ella dos puntos distintos A y B, existe un punto C que se encuentra entre A y B, un punto D que sigue a B y un punto E. que precede a A.

Teorema 1.6
Toda recta tiene infinitos puntos.

Hipótesis: r una recta orientada.

Tesis: r tiene infinitos puntos.

Demostración. Consideremos una recta orientada r (Fig. 1.23) y sobre ella dos puntos distintos A y B.

1)	Existe un punto C entre A y B	axioma $O2$
2)	Existe un punto D que sigue a B	axioma $O2$
3)	Existe un punto E que precede a A	axioma $O2$
4)	Existe un punto F que precede a E	axioma $O2$
5)	Existe un punto G que precede a F	axioma $O2$

Continuando de la misma manera que en 3), 4) y 5) vemos que, por el mismo axioma $O2$, se puede continuar infinitamente encontrando puntos que preceden al anterior, por tanto los puntos de r son infinitos.

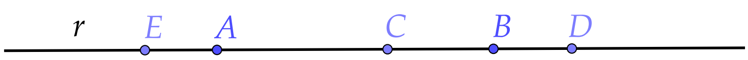

Figura 1.23. Recta con infinitos puntos.

□

El teorema 1.6 expresa la propiedad de la recta de ser infinita. En cambio el axioma $O2$ expresa la propiedad de la recta de ser *densa e ilimitada a la izquierda y derecha*. Del teorema 1.6 se tiene como consecuencia inmediata el siguiente corolario.

Corolario 1.1
Al plano le pertenecen infinitos puntos.

Demostración. Basta recordar que la recta es un subconjunto del plano; por tanto, al plano le pertenecen al menos los infinitos puntos de la recta. □

Notas

1. Por el corolario anterior, el plano es infinito y por $O2$ el plano es ilimitado.

2. El teorema 1.6 nos indica que cada modelo en el que se satisfagan los axiomas A, P, $O1$ y $O2$ no puede ser finito (estar constituido por un número finito de puntos). En todos los modelos de A y P hasta ahora considerados no se verifica el axioma $O2$; por lo tanto, a partir de ahora los modelos que presentemos deberán ser ilimitados y contener imágenes de infinitos puntos.

3. El axioma $O2$ asegura que: dados dos puntos distintos A y B sobre una recta orientada, siempre existe un punto que precede a uno de los dos puntos y sigue al otro. Si, por ejemplo, $A \prec B$ (Fig. 1.24), existe un punto C que sigue a A y precede a B . Ahora si consideramos los puntos A y C, entonces, existe un punto D que sigue a A y precede a C; considerando los puntos A y D, existe un punto E que sigue a A y precede a D y así sucesivamente. Esta propiedad expresada en $O2$, que acabamos de ilustrar, es la propiedad que se conoce como densidad.

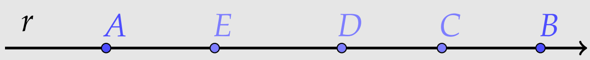

Figura 1.24. Densidad de una recta.

Ejercicio. Si en un modelo son válidos todos los axiomas vistos hasta ahora:

1. ¿Un segmento de aquel modelo es denso?

   Si, ya que es válido el axioma $O2$.

2. ¿Una semirecta suya es densa?

   Si, ya que es válido el axioma $O2$.

3. ¿El plano es denso? No, no hemos dado esa definición.

1.6 El semiplano

Hasta ahora se ha hablado bastante sobre las rectas y sus subcojuntos (segmentos y semirectas), pero no se ha dicho nada sobre otros subconjuntos del plano. Primero preguntémonos si existe alguno. El plano obtenido al aceptar los axiomas A, P, $O1$ y $O2$ es un plano que tiene infinitos puntos; nos preguntamos si existen en él subconjuntos distintos a las rectas. Sin embargo, nos damos cuenta que no existe suficiente información , ya que todos los axiomas vistos hasta ahora hablan solo de rectas.

A continuación se presenta un axioma que responde a nuestras actuales inquietudes.

O3. (Axioma de Pasch). Sean A, B, C tres puntos distintos no alineados y sea r una recta que no pasa por los puntos A, B, C; si la recta r pasa por un punto del segmento AC, también pasa por un punto del segmento AB o bien por un punto del segmento BC.

Notas

1. El axioma $O3$ nos asegura que si una recta interseca uno de los tres segmentos AB, BC, AC (siendo A, B, C distintos no alineados), entonces también debe intersecar uno y sólo uno de los otros dos segmentos (Fig. 1.25).

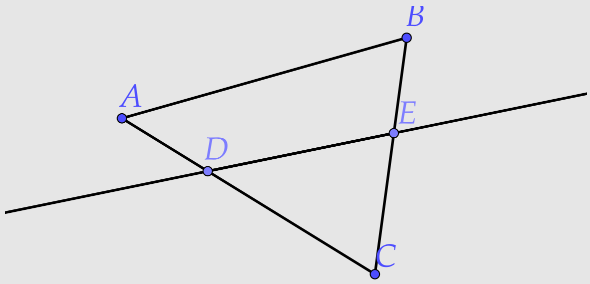

Figura 1.25. Axioma de Pasch.

2. El axioma $O3$ (Fig. 1.25) asegura que, la recta r que no pasa por alguno de los puntos A, B, C y que encuentra al segmento AC en en el punto D, también se encuentra con el segmento BC en el punto E, pero podría encontrase con el segmento AB(y no en el BC). Por el contrario, si una recta r satisface las condiciones anteriores y pasa por el punto D del segmento AC y por el punto F del segmento AB, entonces no puede pasar por un punto del segmento BC (Fig. 1.26)

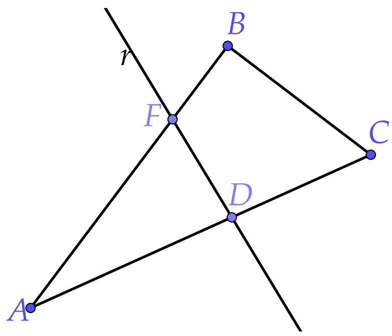

Figura 1.26. Otra interpretación del axioma de Pasch.

Queremos ahora definir una relación entre los puntos del plano, para ello consideremos una recta r. Esta recta permite hacer distinciones entre el resto de puntos del plano (Fig. 1.27). En efecto, hay pares de puntos (como A y B) tales que el segmento que los tiene como extremos no interseca la recta r; al contrario, hay pares de puntos (como A y A') tal que el segmento que los tiene como extremos interseca a la recta r (en H). Los pares de puntos que están en la misma situación que A y B son los siguientes: (A, C), (C, B), (C, D), (B, D), etc; parejas como (A, A') son las siguientes: (B, B'), (C, C'), (B, D'), etc.

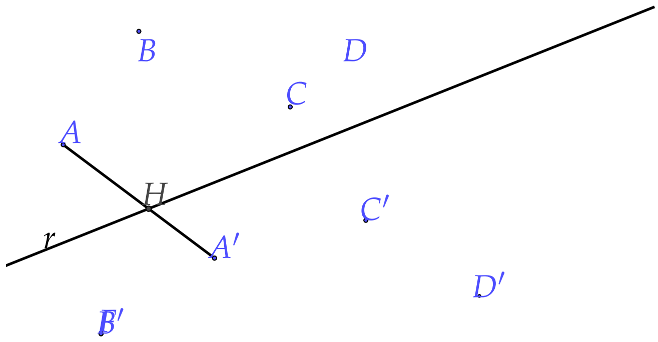

Figura 1.27. Puntos del plano.

Definición 1.7
Diremos que los puntos A y B *están del mismo lado respecto a* r, si el segmento que los une no interseca a r, mientras diremos que están *en lados opuestos respecto a* r, si el segmento que los une interseca a la recta r.

Ejercicio. Demuestre que la relación entre pares de puntos del plano "estar del mismo lado respecto a una recta" es una relación de equivalencia.

Solución. En efecto, la relación "estar del mismo lado respecto a una recta" satisface las propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva.

1. Reflexiva. Todo punto A está del mismo lado de la recta que él mismo; es decir: $A\mathcal{R}A$

2. Simétrica. Si A está del mismo lado de la recta que B, entonces B está del mismo lado de A, por tanto, $A\mathcal{R}B \to B\mathcal{R}A$

3. Transitiva. Si A está del mismo lado de la recta r que B y B está del mismo lado de la recta r que C, entonces A está del mismo lado de la recta r que C; es decir, $(A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}C) \rightarrow A\mathcal{R}C$

La relación entre puntos del plano "estar del mismo lado respecto a una recta r" establece una partición entre los puntos del plano (excluidos los puntos de r) en dos clases.

Definición 1.8
Denominamos *semiplano abierto* a un subconjunto del plano cuyos puntos están todos del mismo lado respecto a una recta, la que se denomina origen del semiplano.

Notas

1. Una recta determina dos semiplanos abiertos.
2. La unión entre un semiplano abierto con su recta origen se denomina semiplano cerrado.

Teorema 1.7
La intersección de un semiplano (abierto o cerrado) con una recta que interseca a su origen es una semirecta (abierta o cerrada, respectivamente).

Hipótesis: σ' un semiplano que tiene como origen la recta r, s una recta que interseca a r.

Tesis: $\sigma' \cap s$ es una semirecta.

Demostración. Sea r el origen de los semiplanos σ' y σ'', y s la recta que interseca a la recta r en el punto R (Fig. 1.28), consideremos las semirectas definidas sobre la recta s con origen el punto R, nombrémolas como s' y s''. Como $s' \subset \sigma'$ y $s'' \subset \sigma''$, se tiene que $s' \cap \sigma' = s'$ y $s'' \cap \sigma'' = s''$. Si σ' es abierto (cerrado) entonces s' también es abierta(cerrada), lo mismo ocurre con s''. $\square$

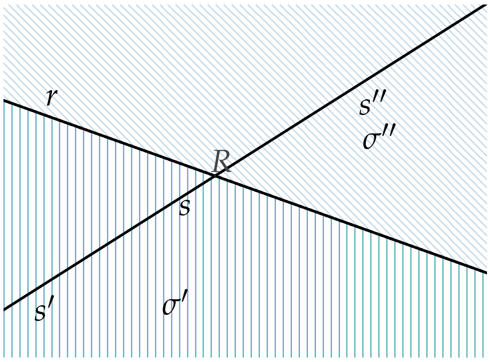

Figura 1.28. Intersección de un semiplano con una recta.

1.7 Figuras convexas

Definición 1.9

Se dice *figura geométrica* (o simplemente figura) a cualquier subconjunto no vacío de puntos del plano.

Nota

En base a la definición anterior, la recta, el plano, el segmento y un punto son figuras.

Teorema 1.8

Dos figuras iguales son la misma figura.

Demostración. En efecto, recordemos que dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos, es decir, cuando son el mismo conjunto. $\square$

Teorema 1.9
Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos figuras; supongamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es una figura.

Hipótesis: $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos figuras, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Tesis: $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es una figura.

Demostración. En efecto, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ es una figura pues por hipótesis se ha indicado que dicha intersección es no vacía, y la definición de figura exige que un conjunto sea diferente del vacío para llamarse figura. $\square$

Consideremos ahora un grupo de figuras particulares, las figuras convexas.

Definición 1.10
Una figura $\mathcal{F}$ que contiene al menos dos puntos distintos se dice *convexa* cuando, cualquiera sea el par de puntos A y B de $\mathcal{F}$ y considerando el segmento de extremos A y B, se tiene que cada punto de este segmento es también un punto de $\mathcal{F}$.

La definición de figura convexa se ilustra en la Fig. 1.29. En ésta A y B son puntos cualesquiera en la figura $\mathcal{F}$: note que todos los puntos el segmento AB pertenecen a $\mathcal{F}$; esta observación es válida para cualquier otra pareja de puntos. Un ejemplo contrario está dado en la Fig. 1.30, en ésta, si bien es cierto que si elegimos los puntos C y D, todo el segmento CD está contenido en $\mathcal{G}$, pero no sucede lo mismo con el segmento que tiene como extremos a E y F; como se aprecia, existen algunos puntos de dicho segmento que no pertenecen a $\mathcal{G}$.

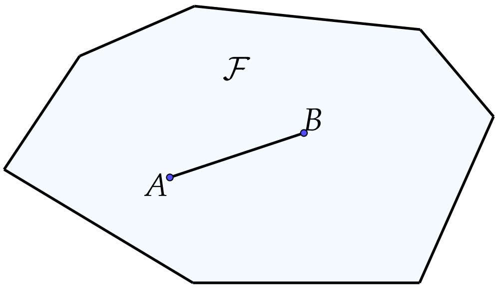

Figura 1.29. Figura convexa.

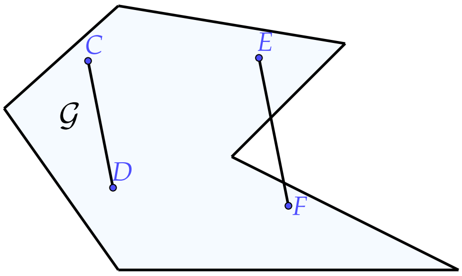

Figura 1.30. Figura no convexa.

Ejercicio. Resolver

1. Dibuje ejemplos de figuras convexas y no convexas.

   Solución.

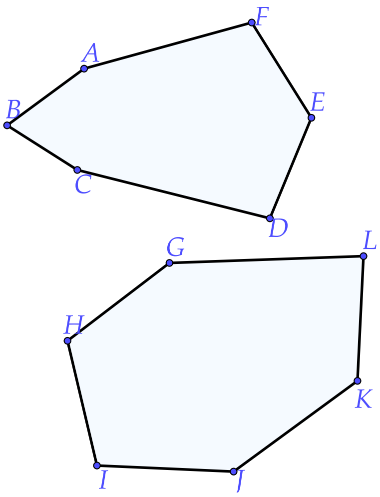

Figura 1.31. Figuras convexas.

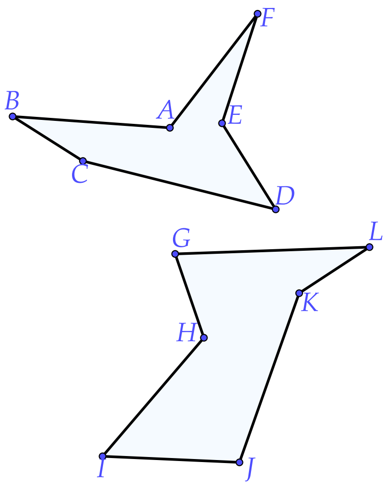

Figura 1.32. Figuras no convexas.

2. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) El plano es una figura convexa.

   b) La recta es una figura convexa.

   c) Un segmento es una figura convexa.

   d) El semiplano es una figura convexa

   Solución.

   a) El plano es una figura convexa.

   Si se toman dos puntos A y B de un plano, entonces el segmento que los une también está totalmente contenido en dicho plano, pues la recta que los contiene es un subconjunto del plano y por propiedad transitiva de la relación $\subseteq$.

   b) La recta es una figura convexa.

   Si se toman dos puntos A y B de una recta, entonces todos los puntos del segmento AB están contenidos en la recta, por tanto, la recta es una figura convexa.

   c) Un segmento es una figura convexa.

Si se toman dos puntos C y D que se encuentran entre los extremos del segmento AB, entonces el segmento CD estará totalmente contenido en el segmento AB.

d) El semiplano es una figura convexa.

Un semiplano es el conjunto de todos los puntos que están del mismo lado de una recta, por tanto si escogemos dos puntos A y B de un semiplano, entonces el segmento AB está totalmente contenido en el semiplano.

Teorema 1.10
Una figura que resulta de la intersección de dos o más figuras convexas es una figura convexa.

Hipótesis: $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n$ figuras convexas.

Tesis: $\cap\mathcal{F}_i$ es una figura convexa.

Demostración. Para hacernos una idea de la demostración, primero demostramos el teorema para dos figuras convexas. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos figuras convexas, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$

Sean A y B puntos de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, entonces AB está totalmente contenido en $\mathcal{F}$, esto debido a que $\mathcal{F}$ es convexo, así mismo AB está totalmente contenido en $\mathcal{G}$; por tanto, AB está totalmente contenido en $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Para n figuras convexas $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n$, se tiene:

Si A y B son puntos de $\cap\mathcal{F}_i$, entonces $AB \subseteq \mathcal{F}_i$, para todo $i = 1 \cdots n$, luego

$AB \subseteq \cap\mathcal{F}_i$ □

Consideremos α' y α'' dos semiplanos (los dos abiertos o cerrados) cuyos de orígenes son la rectas paralelas a y b respectivamente, con estos elementos damos la siguiente definición.

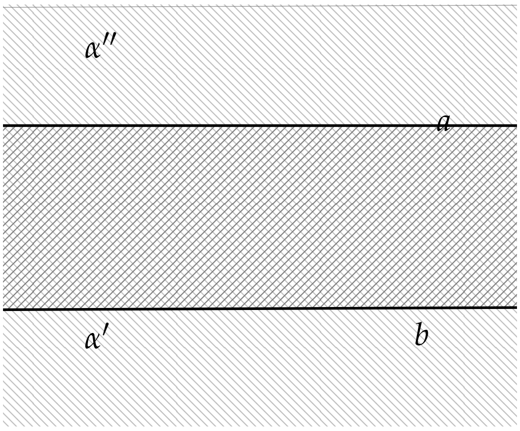

Figura 1.33. Franja limitada por las rectas a y b.

Definición 1.11
Sea α' un semiplano de origen a que contiene a la recta b, paralela a la recta a; y sea α'' el semiplano de origen b que contiene a la recta a (Fig. 1.33). Se dice *franja limitada por las rectas a y b* a la intersección de los dos semiplanos α' y α''. En símbolos, $\alpha' \cap \alpha''$ es la franja. La franja se dice abierta o cerrada, según que los semiplanos sean ambos abiertos o ambos cerrados.

Teorema 1.11
Una franja es una figura convexa.

Demostración. La franja es una figura puesto que es la intersección de dos semiplanos, y como los semiplanos son figuras convexas, se tiene que debido al teorema 1.10, también la franja es una figura convexa. □

1.8 Ángulos

Continuando con las figuras convexas, hablemos ahora de los ángulos convexos. Sean α' y α'' respectivamente dos semiplanos cerrados que tienen como origen las rectas intersecantes a y b, Fig. 1.34.

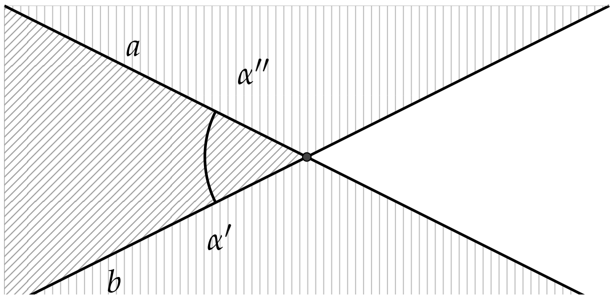

Figura 1.34. Semiplanos de orígenes incidentes.

Definición 1.12
Llamamos *ángulo convexo* a la intersección de dos semiplanos cerrados que tienen orígenes incidentes.

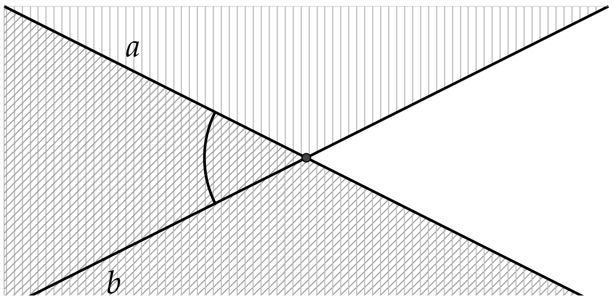

Figura 1.35. Ángulo convexo.

Nótese que, dadas dos rectas incidentes se presentan cuatro casos posibles, de los cuales se observa solo uno de ellos en la Fig. 1.35. En cada uno de los casos mencionados, la intersección de los semiplanos cerrados con orígenes incidentes, corresponden a un ángulo convexo. El punto de incidencia de las rectas origen de los semiplanos se llama *vértice* del ángulo. Las semirectas (origen) que pertenecen a los ángulos, se llaman lados del ángulo (Fig. 1.36). Por tanto, dos rectas incidentes forman cuatro ángulos.

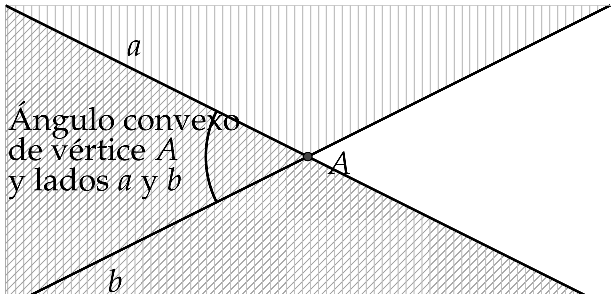

Figura 1.36. Ángulos convexos.

Ejercicio. Demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 1.12
Un ángulo convexo es una figura convexa.

Demostración. Un ángulo convexo es la intersección de dos semiplanos, debido al teorema 1.10 se tiene que un ángulo convexo es una figura convexa. □

Teorema 1.13
Sean a y b dos rectas incidentes en un punto A. Cada uno de los cuatro ángulos que quedan determinados por estas rectas son convexos.

La demostración de este teorema se deja al lector.

Consideremos la situación ilustrada en la Fig. 1.37. Sean a y b dos rectas incidentes en A. Consideremos los semiplanos α' y α'' de origen, respectivamente a y b, su intersección es el ánguo $\mathcal{A}$. Consideremos los semiplanos α_1' y α_1'' de origen respectivamente a y b, opuestos a los anteriores; su intersección es el ángulo convexo $\mathcal{B}$.

Los ángulos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dicen *opuestos por el vértice*.

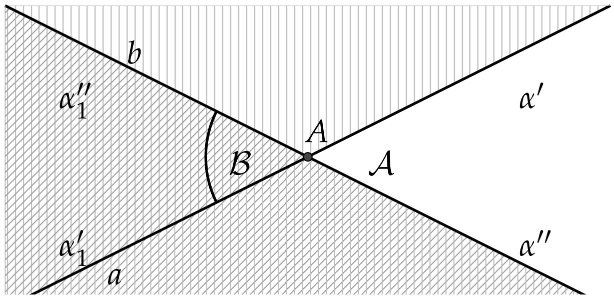

Figura 1.37. Ángulos opuestos por el vértice.

Ejercicio. Resolver

1. Dar una definición más precisa de ángulos opuestos por el vértice. Nótese que hemos hecho uso de la figura, para evitarlo definamos de manera oportuna el ángulo $\mathcal{B}$.

   Sugerencia. Nótese que los lados de $\mathcal{B}$ son la prolongación de $\cdots$

   Solución. Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando tienen el vértice común y los lados del uno, son la prolongación de los lados del otro.

2. Demostrar que la unión de ángulos opuestos por el vértice no es una figura convexa.

   La demostración de este teorema se deja al lector.

Definición 1.13
Sea un ángulo convexo de vértice A y lados a y b, llamaremos *puntos internos del ángulo convexo* a aquellos que pertenecen al ángulo, incluidos los puntos de los lados; y llamaremos *los puntos externos al ángulo convexo* a los demás (Fig. 1.38).

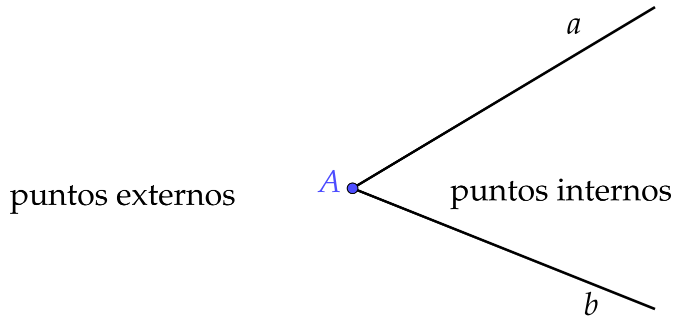

Figura 1.38. Puntos internos y externos de un ángulo.

Definición 1.14
Sea dado un ángulo convexo de vértice A y lados a y b; se dice un *ángulo cóncavo de vértice A y lados a y b*, al conjunto formado por los puntos externos al ángulo convexo de vértice A y lados a y b, unido con los puntos de los lados a y b (Fig. 1.39).

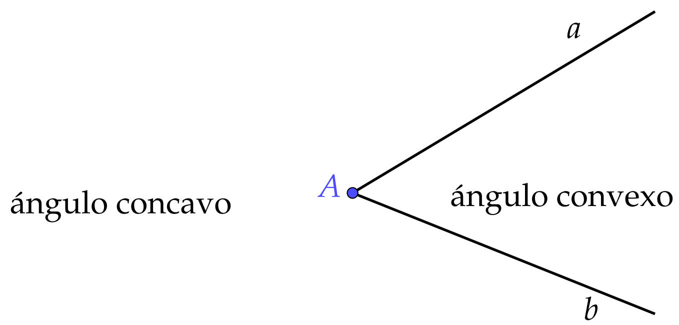

Figura 1.39. Ángulo cóncavo de vértice A y lados a y b.

Ejercicio. Demostrar los siguientes teoremas.

Teorema 1.14
La intersección de dos ángulos convexos, cuyos vértices (no coincidentes) son el uno un punto interno del otro, es una figura convexa.

Hipótesis: Ángulos $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ convexos con vértice del uno, un punto interno del otro.

Tesis: La intersección de los ángulos $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ es una figura convexa.

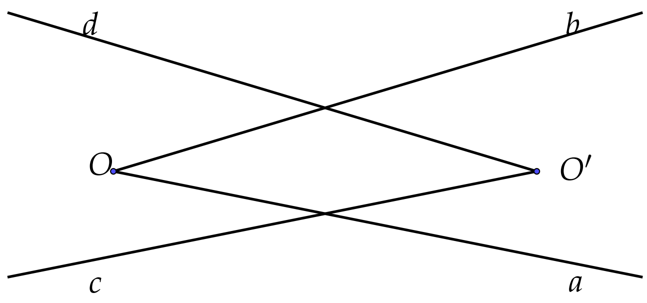

Figura 1.40. Ángulos de vértices el uno interno al otro.

Demostración. Como la intersección no vacía de figuras convexas es también convexa (teorema 1.10), se tiene que esta intersección es convexa. □

Teorema 1.15
Un ángulo cóncavo no es una figura convexa.

Teorema 1.16
El ángulo convexo no contiene las prolongaciones de sus lados, el ángulo cóncavo si las contiene.

Consideremos un semiplano de origen r; se puede pensar este semiplano como un ángulo cuyos lados son semirectas (a y b) obtenidas prolongando la una (o la otra), y cuyo vértice es un punto elegido a conveniencia sobre r y pensado como origen de las semirectas (Fig. 1.41).

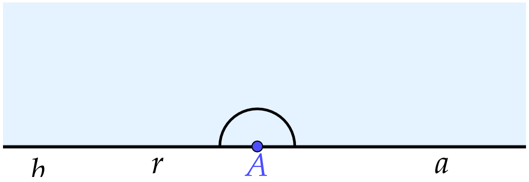

Figura 1.41. Ángulo llano de lados a y b.

Ya que el semiplano es una figura convexa es habitual incluir al ángulo que acabamos de describir como ángulo convexo. El nombre que se da a este particular semiplano es *ángulo llano*.

Si las dos semirectas a y b son coincidentes, el ángulo se llama *ángulo giro*; se admiten como puntos de este ángulo a todos los puntos del plano (Fig. 1.42)

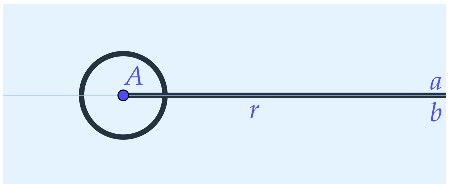

Figura 1.42. Ángulo giro de lados a y b.

Si las dos semirectas coinciden y admite solo puntos de la semirecta a (o de b), entonces lo denominaremos *ángulo nulo* (Fig. 1.43).

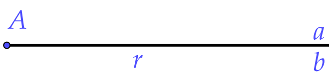

Figura 1.43. Ángulo nulo de lado a y b.

Definición 1.15
Dos ángulos se dicen *consecutivos* cuando tienen en común solo el vértice y uno de sus lados (Fig. 1.44). Si dos ángulos consecutivos tienen los lados no coincientes tal que son semirectas opuestas, se dicen *adyacentes* (Fig. 1.45). Si dos ángulos consecutivos tienen en común también el segundo lado, se dicen *explementarios* (Fig. 1.46).

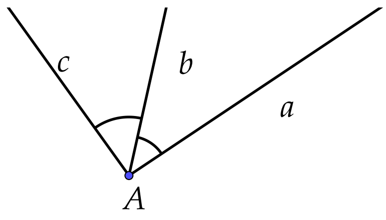

Figura 1.44. Ángulos consecutivos.

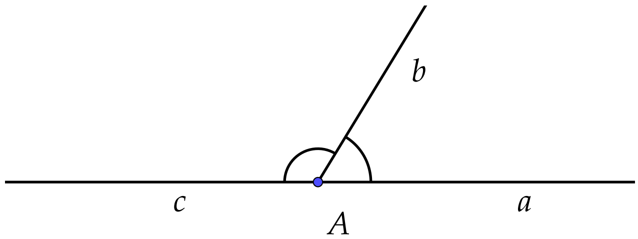

Figura 1.45. Ángulos adyacentes.

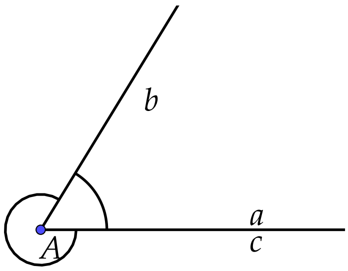

Figura 1.46. Ángulos explementarios.

Definición 1.16
Sean dados dos ángulos convexos consecutivos de vértice A, y de lados a, b y b, c respectivamente. Se dice *ángulo suma* (de los dos ángulos dados) al ángulo convexo que tiene como vértice A y como lados a y c.

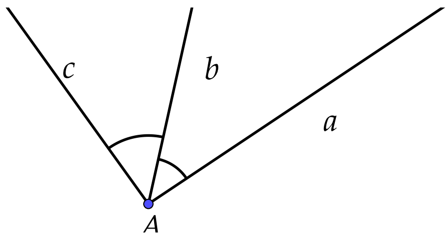

Figura 1.47. Ángulo $\widehat{ac}$ ángulo suma de $\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$.

Por ejemplo en la Fig. 1.47, el ángulo de lados a y c y vértice A, es el ángulo suma de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Existen diferentes maneras de representar un ángulo convexo.

Las siguientes son notaciones equivalentes del ángulo de la Fig. 1.48:

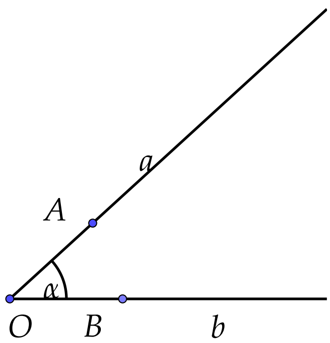

Figura 1.48. Ángulo y sus representaciones.

$A\widehat{O}B$ o $\widehat{O}ab$ o $a\widehat{O}b$ o $\widehat{ab}$ o α.

Ejercicio. Demostrar los siguientes teoremas:

1. Los ángulos plano, giro y nulo son figuras convexas.

2. El ángulo suma de dos ángulos adyacentes es un ángulo plano.

   Demostración. Sean α y β dos ángulos adyacentes, de lados respectivamente a, b y b, c; la suma de estos ángulos es el ángulo de lados a y c, pero como estos son el uno la prolongación del otro, se tiene que la suma es el ángulo plano. □

3. El ángulo suma de dos ángulos explementarios es un ángulo giro.

4. Si un ángulo es cóncavo, entonces su explementario es convexo.

1.9 Polígonos

Las siguientes definiciones corresponden a figuras vistas en la educación media.

Definición 1.17
Dos segmentos se dicen *consecutivos* cuando tienen un extremo en común (y ningún otro punto), Fig. 1.49, AB y BC son consecutivos.

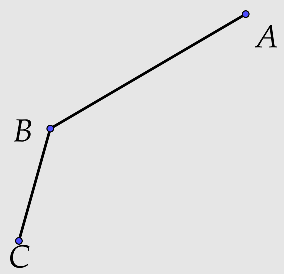

Figura 1.49. Segmentos consecutivos.

.

Definición 1.18
Dos segmentos consecutivos AB y BC se dicen *adyacentes* cuando los extremos A, B y C están alineados (Fig. 1.50).

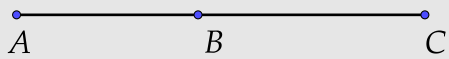

Figura 1.50. Segmentos adyacentes.

Definición 1.19
Se llama *quebrada* a una figura que consta de segmentos consecutivos AB, BC, CD, etc. Cada segmento se dice lado de la quebrada y cada extremo del

segmento se llama vértice, (Fig. 1.51).

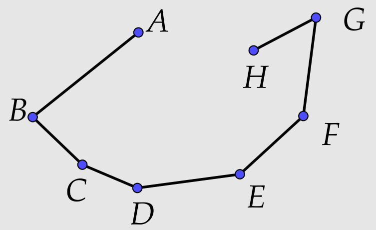

Figura 1.51. Quebrada.

Definición 1.20

Sean $AB, BC, CD, \cdots, EF, FG, GH$ los lados de una quebrada: si A es distinto de H la quebrada se dice *abierta de extremos* A *y* H (Fig. 1.52); si A coincide con H, la quebrada se dice *cerrada o poligonal* (Fig. 1.53); la poligonal se indica por medio de sus vértices en el orden $ABCD \cdots, EFG$; dos lados que sean segmentos consecutivos se dicen *lados consecutivos*; si dos lados no consecutivos de una poligonal tienen en común un punto, se dice que la poligonal es *intersecante* (Fig. 1.52); si la poligonal no es intersecante, se dice *simple* (Fig. 1.54).

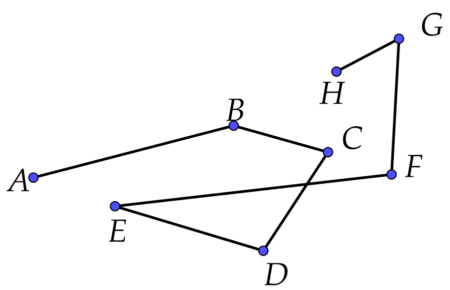

Figura 1.52. Quebrada abierta e intersecante.

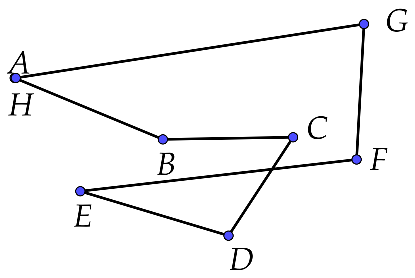

Figura 1.53. Quebrada cerrada e intersecante.

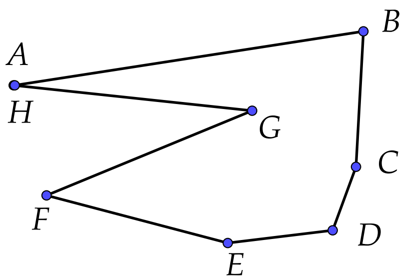

Figura 1.54. Poligonal simple.

A continuación consideraremos poligonales que no tienen dos o más lados consecutivos adyacentes.

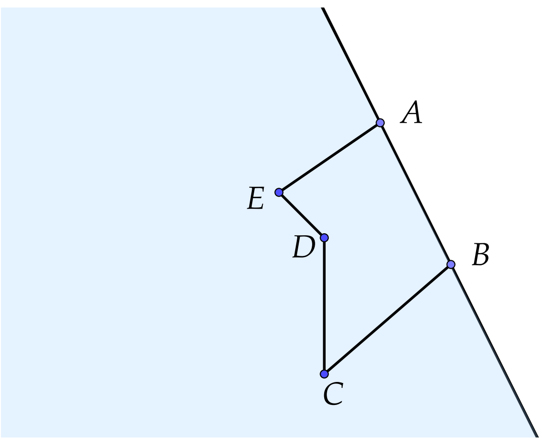

Figura 1.55. Semiplano que tiene como origen la recta AB.

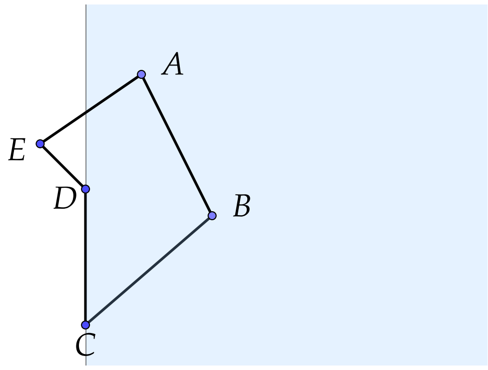

Figura 1.56. Semiplano que tiene como origen la recta CD.

Consideremos una poligonal simple (Figuras 1.55 y 1.56); además tomemos dos de sus lados y las rectas que los contienen; analicemos los semiplanos que tienen como origen estas rectas; se tienen dos casos:

1. la poligonal está totalmente del mismo lado de la recta (Fig. 1.55);
2. la poligonal no está totalmente del mismo lado de la recta (Fig. 1.56).

Definición 1.21
Llamamos *poligonal convexa* a una poligonal simple que está toda del mismo lado respecto a cada uno de sus lados. Decimos poligonal cóncava a una poligonal simple no convexa.
Las figuras 1.57 y 1.58 ilustran los dos casos expuestos.

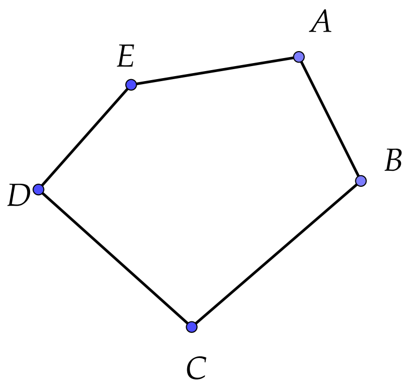

Figura 1.57. Poligonal convexa.

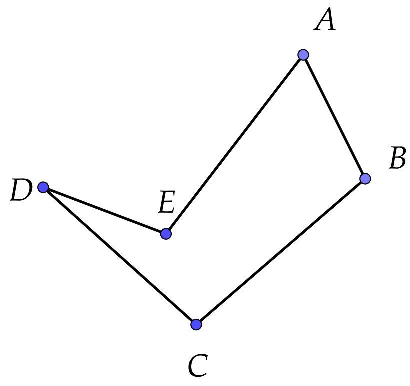

Figura 1.58. Poligonal cóncava.

Ejercicio. Dibuje una figura con cada una de las siguientes características.

1. Quebrada abierta;
2. Poligonal;
3. Poligonal intersecante;
4. Quebrada intersecante abierta;
5. Quebrada simple abierta;
6. Poligonal simple;
7. Poligonal convexa.

Definición 1.22
Dada una poligonal convexa, consideremos el lado AE; sea r la recta que contiene al lado AE, r divide el plano en dos semiplanos. Llamamos *semiplano asociado al lado* AE, a aquel que contiene totalmente a la poligonal (Fig. 1.59)

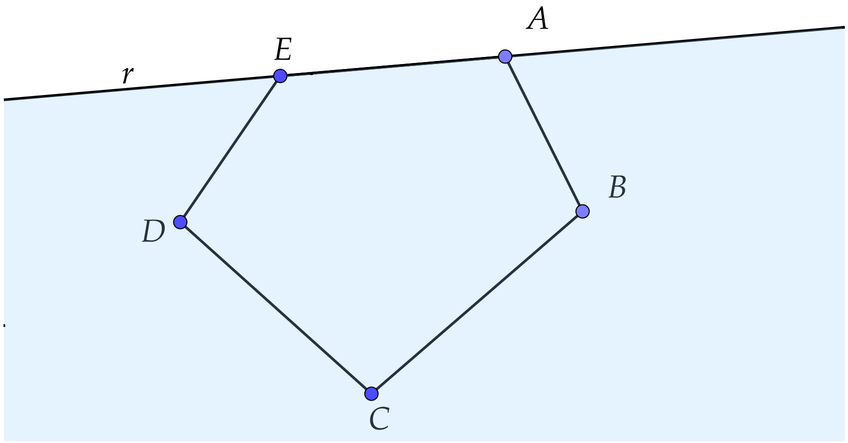

Figura 1.59. Semiplano asociado al lado AE.

Dada una poligonal convexa, consideremos todos los semiplanos asociados a sus lados (Fig. 1.60).

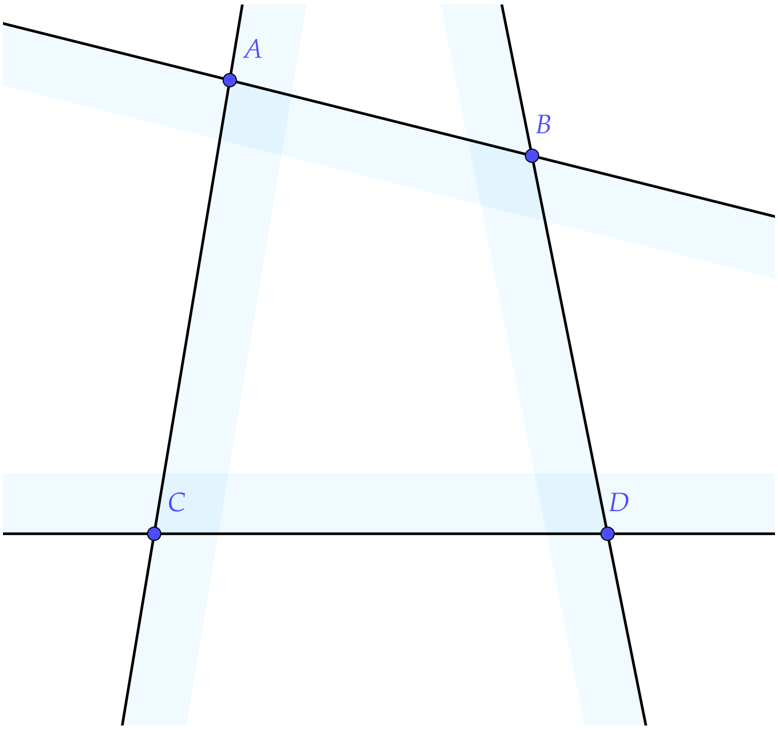

Figura 1.60. Polígono convexo.

Definición 1.23

Llamamos *polígono convexo* o simplemente *polígono* a la figura que se obtiene como la intersección de todos los semiplanos asociados a los lados de una poligonal convexa. Tal poligonal se dice *contorno del polígono*; sus lados y vértices se llaman respectivamente *lados y vértices del polígono*.

Definición 1.24

Si AB y BC son lados consecutivos del contorno de un polígono, consideremos los semiplanos asociados: la intersección de estos se llama *ángulo interno* o simplemente *ángulo del polígono*. El extremo común a los dos lados se llama *vértice del ángulo*. Dos vértices de un polígono que son también extremos de un mismo lado, se dicen *vértices consecutivos*. Dos ángulos del polígono cuyos vértices son consecutivos, se dicen *ángulos consecutivos*. Los ángulos adyacentes a los ángulos de un polígono se dicen *ángulos externos del polígono* (Fig. 1.61).

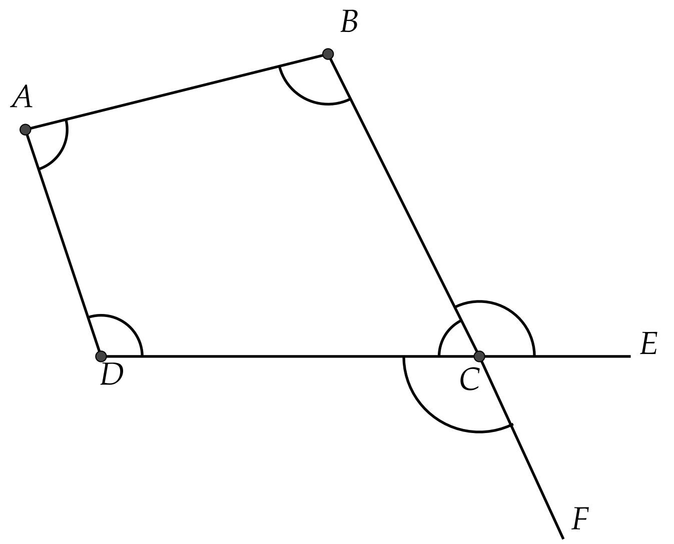

Figura 1.61. Ángulos de un polígono.

A y B son vértices consecutivos;

B y C son vértices consecutivos;

C y D son vértices consecutivos;

A y D son vértices consecutivos;

$B\widehat{A}D$ y $A\widehat{B}C$ son ángulos consecutivos;

$B\widehat{A}D$ y $A\widehat{D}C$ son ángulos consecutivos;

$A\widehat{B}C$ y $B\widehat{C}D$ son ángulos consecutivos;

$B\widehat{C}D$ y $A\widehat{D}C$ son ángulos consecutivos;

$B\widehat{C}E$ es un ángulo externo;

$D\widehat{C}F$ es un ángulo externo.

Ejercicio.
Demuestre que:

1. Los polígonos son figuras convexas.

   Demostración. Los polígonos por definición son el resultado de la intersección de figuras convexas; como la intersección de figuras convexas es también una figura convexa, se tiene que los polígonos son figuras convexas. □

2. En un polígono, el número de los vértices es igual al número de sus ángulos y sus lados.

   Demostración. Cada vértice de un polígono es vértice de un ángulo y viceversa; además, el número de los vértices de un polígono es igual al número de lados, porque fijado un vértice se puede seguir la poligonal a partir de aquel vértice, llegando al segundo vértice. En este caso, se ha recorrido el primer lado, siguiendo el trayecto de la poligonal; llegamos al tercer vértice, recorriendo así el segundo lado, y así sucesivamente, hasta volver al vértice de partida después de haber recorrido tantos lados como vértices no coincidentes. □

3. Un polígono tiene al menos tres lados.

Demostración. Supongamos por absurdo que existe un polígono de dos lados, es decir, dos únicos vértices. Una figura con tales características no cumple la definición de polígono. □

Definición 1.25
Un polígono de tres lados se dice triángulo (o trilátero).

Un polígono de cuatro lados se dice cuadriángulo (o cuadrilátero).

Un polígono de cinco lados se dice pentágono (o pentalátero).

Un polígono de n lados se dice $n-$ágono (o n-látero) (Figuras 1.62, 1.63 y 1.64).

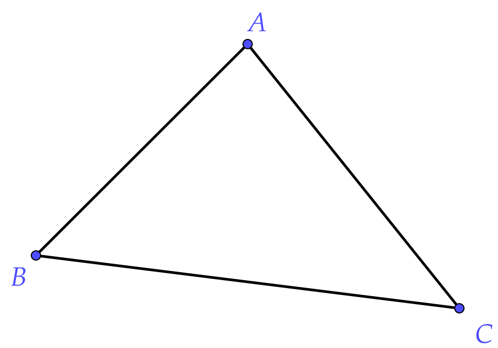

Figura 1.62. Triángulo.

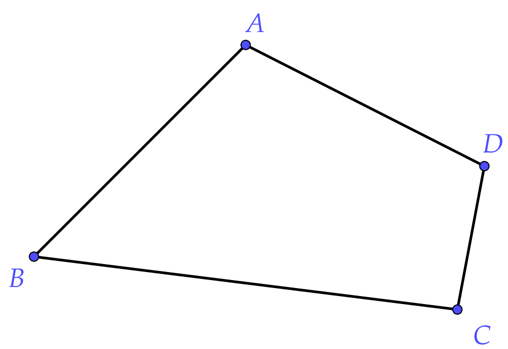

Figura 1.63. Cuadilátero.

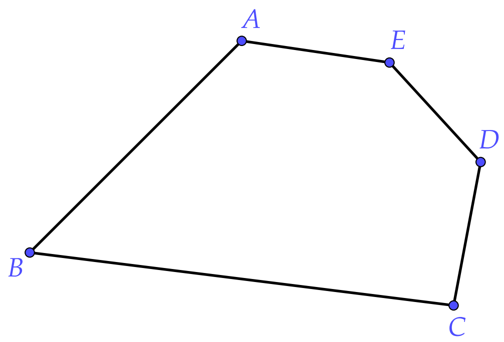

Figura 1.64. Pentágono.

Definición 1.26
Sea dados un polígono (Fig. 1.65) y, sean los vértices no consecutivos E y C. El segmento EC se dice *diagonal del polígono*.

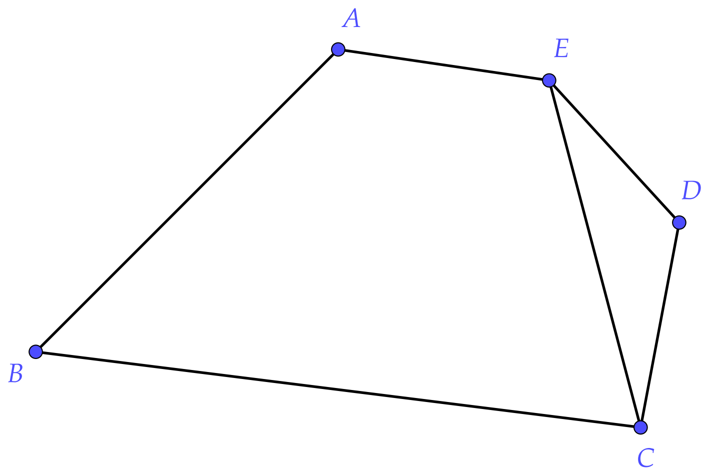

Figura 1.65. CE diagonal del polígono $ABCDE$.

Ejercicio.

1. Demuestre que un triángulo no posee diagonales.

   Demostración. Todos los vértices de un triángulo son consecutivos, por tanto, no se pueden encontrar dos vértices no consecutivos para trazar una diagonal, en consecuencia, el triángulo no tiene diagonales.

□

2. Demuestre que de cada vértice de un $n-$látero (con $n > 3$) salen $n-3$ diagonales.

   Demostración. Se probó que un polígono de n lados tiene n vértices. Si tomamos un vértice en particular, no se puede trazar una diagonal que una el vértice con sigo mismo (no cumpliría la definición de diagonal); tampoco se podrían trazar diagonales a ninguno de sus vértices consecutivos (que son dos), entonces para cada vértice quedan eliminados tres vétrices para trazar diagonales; por tanto, por cada vértice de un polígono hay $n-3$ diagonales. □

1.10 Estudio de triángulos y cuadriláteros

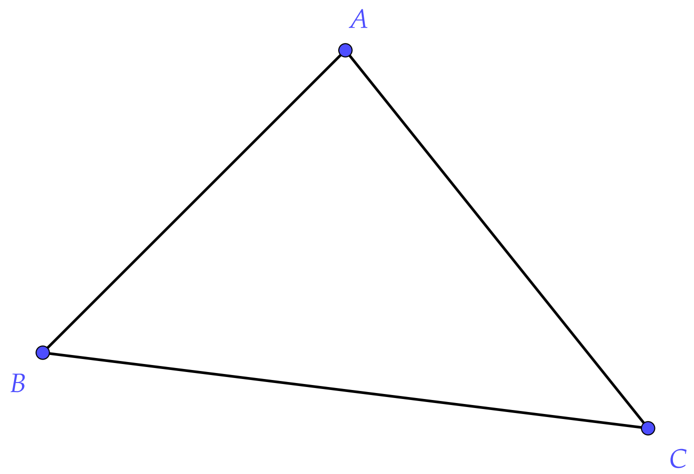

Figura 1.66. $\triangle ABC$.

En la Fig. 1.66; se tiene:

el lado AB y el $A\widehat{C}B$ se dicen opuestos;

el lado AC y el $A\widehat{B}C$ se dicen opuestos;

el lado BC y el $B\widehat{A}C$ se dicen opuestos;

el triángulo de vértices A, B y C se indica con $A\overset{\triangle}{B}C$, o $\triangle ABC$.

Definición 1.27
En un triángulo, *un ángulo y un lado se dicen opuestos*,si el vértice del ángulo no es extremo del lado, caso contrario se dicen adyacentes.

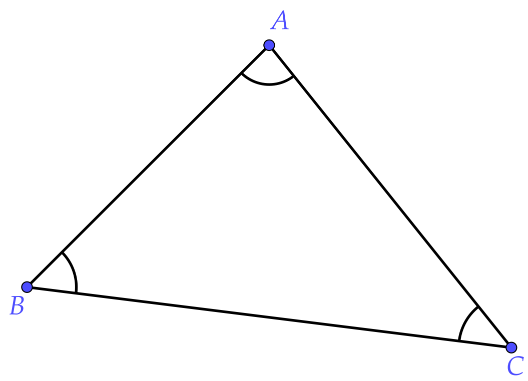

Figura 1.67. $\triangle ABC$, ángulos y lados.

Por ejemplo, en la Fig. 1.67, $B\widehat{A}C$ y $A\widehat{B}C$ son adyacentes al lado AB; $A\widehat{B}C$ y $A\widehat{C}B$ son adyacentes a BC; etc.

Teorema 1.17
Todo triángulo es una figura convexa.

Demostración. En efecto, todo polígono es una figura convexa; como el triángulo es un polígono, entonces el triángulo es una figura convexa. □

Definición 1.28
En un cuadrilátero $ABCD$ (Fig. 1.68) se dicen *elementos opuestos* a los siguientes:

dos vértices no consecutivos;

dos lados no consecutivos;

dos ángulos cuyos vértices son opuestos.

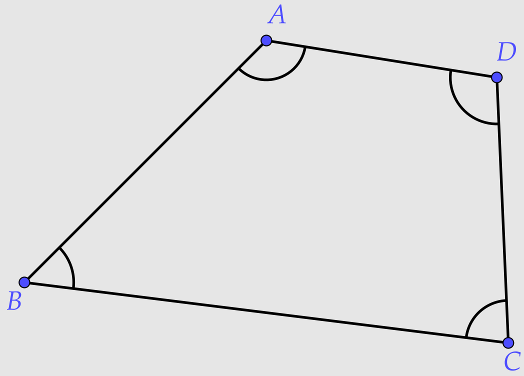

Figura 1.68. Cuadrilátro $ABCD$.

Ejercicio.

1. Forme una definición de diagonal de un cuadrilátero a partir de la definición de vértices opuestos.

   Solución. Dado un cuadrilátero $ABCD$, llamaremos diagonales de $ABCD$ a los segmentos que unen dos vértices opuestos (definición 1.28).

2. Recordando que las diagonales de un polígono están constituidas por puntos internos, y que la intersección de dos figuras convexas es una figura convexa, demuestre que dos diagonales de un cuadrilátero se encuentran en un punto interno.

Definición 1.29
Se dice *trapecio* a un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos (Figura 1.69).

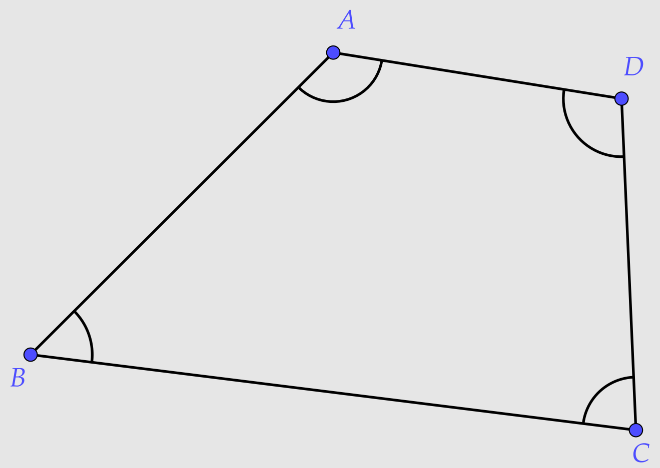

Figura 1.69. Trapecio $ABCD$.

Definición 1.30
Se dice *paralelogramo* a un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (Fig. 1.70).

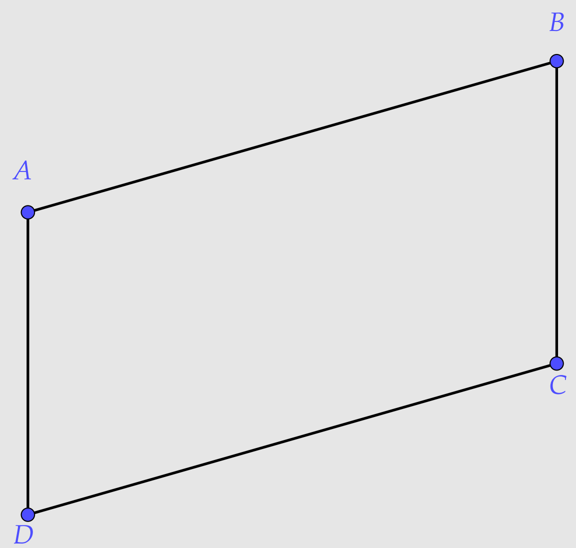

Figura 1.70. Paralelogramo $ABCD$.

Ejercicio.

Verifique, en base a la definición: los paralelogramos son trapecios.

Solución. Para que un cuadrilátero sea un trapecio se requiere que tenga un par de lados opuestos paralelos. El paralelogramo cumple con esto y más, por tanto, todo paralelogramo es un trapecio (pero no todo trapecio es un paralelogramo).

1.11 Ejercicios resueltos

1. Considere un modelo del plano constituido por cinco puntos. Tomando como rectas las parejas de puntos, verifique que la cantidad de rectas son diez y que por cada punto pasan cuatro rectas.

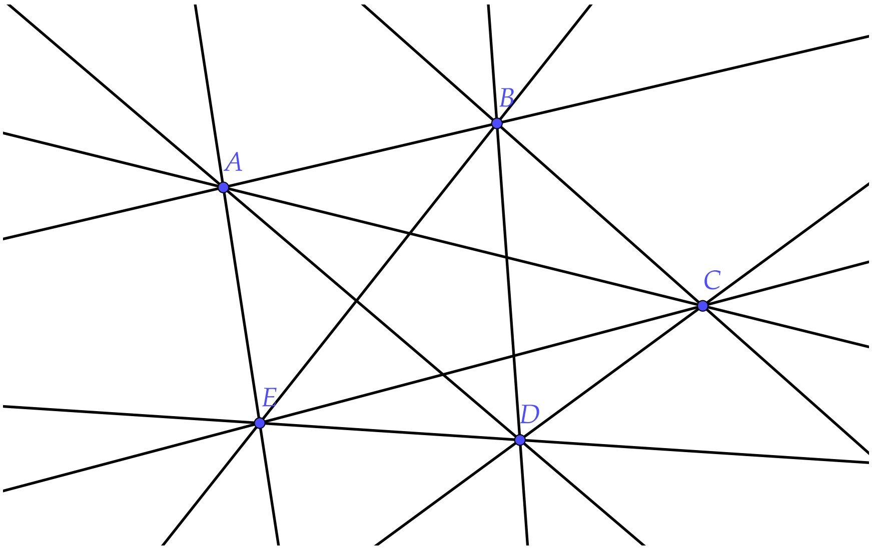

Figura 1.71. Rectas por cinco puntos.

Solución. Si llamamos a los puntos A, B, C, D, E entonces las rectas son:

$\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, E\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, D\}$, $\{C, E\}$, $\{D, E\}$.

En efecto, por cada punto pasan cuatro rectas.

2. ¿Cuáles de los axiomas $A1$, $A2$ $A3$ son válidos en el siguiente modelo: el plano es $\{A, B, C, D, E\}$, las rectas son $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{D, C\}$, $\{D, E\}$?

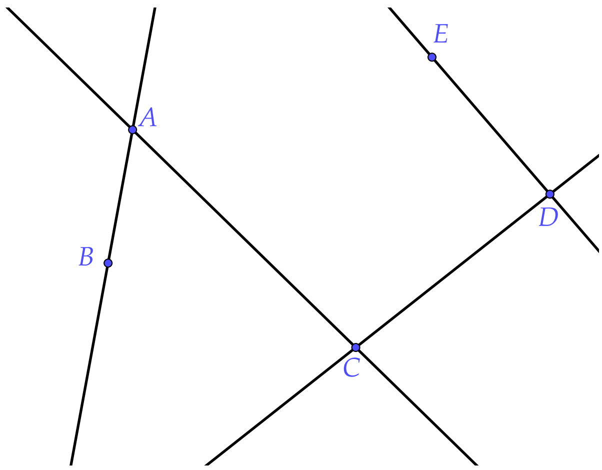

Figura 1.72. Plano de puntos $A, B, C; D$.

Solución. El axioma $A1$ no se cumple pues por los puntos A y E no pasa alguna recta.

El axioma $A2$ se cumple pues por cada recta del modelo si hay un punto exterior a ella.

El axioma $A3$ no cumple pues todas las rectas tienen únicamente dos puntos.

3. En el modelo $M4$ ¿es válido el siguiente teorema?: "Las rectas con dos puntos admiten una paralela, las otras no"

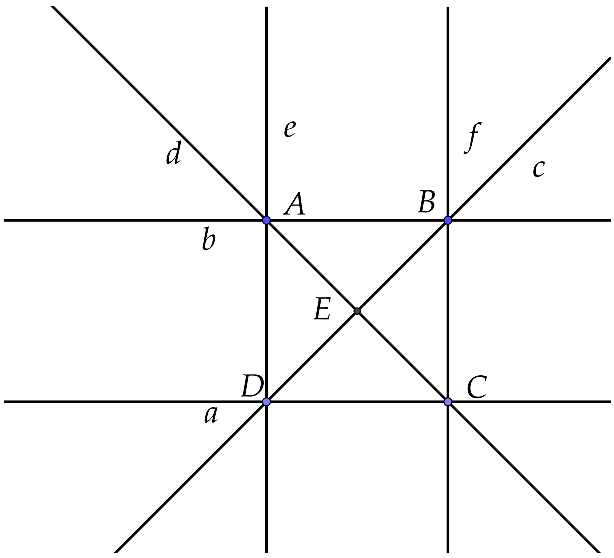

Figura 1.73. Modelo $M4$.

En el modelo $M4$ el plano está formado por los puntos A, B, C, D, E; mientras que las rectas son, respectivamente: $a = \{C, D\}$, $b = \{A, B\}$, $c = \{B, D, E\}$, $d = \{A, C, E\}$, $e = \{A, D\}$, $f = \{B, C\}$.

Solución. Si se satisface el teorema: "Las rectas con dos puntos admiten una paralela, las otras no", ya que la recta $a = \{C, D\}$ es paralela con la recta $b = \{A, B\}$, la recta $e = \{A, D\}$ es paralela con la recta $f = \{B, C\}$, mientras que las rectas con tres puntos no tienen paralelas (cualquier recta con tres puntos tiene al menos un punto en común con otra recta) .

4. Verifique que en el modelo F (Fig. 1.74), se satisfacen los axiomas $A1$, $A2$ $A3$ y $P1$, donde $P1$ significa "Dado un punto P que no pertenece a la recta r, no existen rectas que pasan por P, paralelas a r". El plano es $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ y las rectas son $\{A, B, F\}$, $\{A, C, E\}$,$\{A, D, G\}$, $\{B, C, D\}$,$\{B, E, G\}$, $\{D, E, F\}$ y $\{F, C, G\}$.

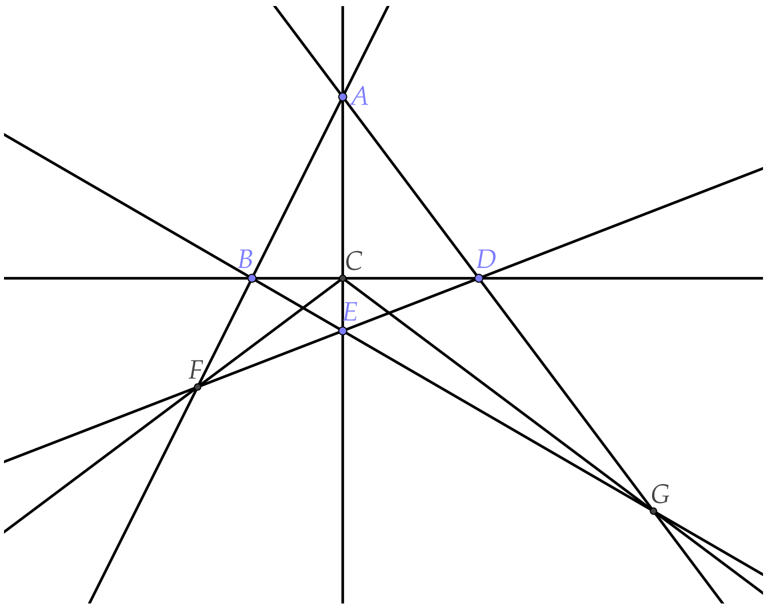

Figura 1.74. Modelo F.

Solución.

a) El axioma $A1$ se cumple, pues si tomamos dos puntos del plano, existe una única recta que las contiene; es decir, no existen dos rectas diferentes con dos puntos en común.

b) El axioma $A2$ se cumple, ya que para cada recta del modelo existe un punto exterior a ella.

c) El axioma $A3$ se satisface, ya que toda recta de este modelo tiene tres puntos.

d) EL axioma $P1$ se cumple, ya que si vamos tomando una a una las rectas de este modelo y un punto exterior a ellas se verifica que cualquier recta que pasa por este punto interseca a la primera recta, es decir, no existen rectas paralelas.

5. Considere el cuadrado mágico representado en el Modelo Q; considere los números dentro de los cuadrados pequeños como elementos del plano. Las rectas de este modelo son los conjuntos de tres números que sumados dan 15. Estos números son elegidos de tres columnas diferentes o de tres filas diferentes.

El modelo Q es el siguiente:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

a) Verifique si Q satisface los axiomas de pertenencia.

b) Determine las rectas del modelo Q paralelas a la recta $\{2, 5, 8\}$. ¿Es Q un modelo de A y de $P1$?

c) Determine las rectas del haz de centro 5.

Solución. Primero determinamos las rectas de este modelo: $\{4, 9, 2\}$,$\{3, 5, 7, \}$, $\{8, 1, 6\}$, $\{4, 3, 8\}$, $\{9, 5, 1\}$, $\{2, 7, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{2, 5, 8\}$.

a) Verifique si Q satisface los axiomas de pertenencia.

El modelo Q no satisface el axioma $A1$, pues tomados los puntos 4 y 7 no existe una recta que pase por estos dos puntos.

El modelo Q satisface el axioma $A2$ pues para cada recta del modelo existe un punto que no le pertenece.

El modelo Q satisface el axioma $A3$ pues cada recta del modelo tiene 3 puntos.

b) Determine las rectas del modelo Q paralelas a la recta $\{2,5,8\}$. ¿Es Q un modelo de A y de $P1$?

No existen rectas paralelas a la recta $\{2,5,8\}$, pues cada recta del modelo tiene al menos un punto en común con dicha recta.

Q no es modelo de A, pues no satisface el axioma $A1$.

El modelo Q no satisface el axioma P_1, pues sí existen rectas paralelas, mientras que $P1$ afirma que para toda recta y un punto exterior a ella, no existe recta paralela a la primera que pase por dicho punto.

c) Determine las rectas del haz de centro 5.

Las rectas del haz de centro 5 son:

$\{3,5,7\}$, $\{9,5,1\}$, $\{4,5,6\}$, $\{2,5,8\}$.

6. Demuestre que la intersección de un ángulo convexo con una recta que interseca cada lado en un punto distinto al vértice es un segmento. Elabore un gráfico y determine la hipótesis y tesis.

Hipótesis: $\widehat{ab}$ ángulo convexo, t una recta que interseca los lados del ángulo $\widehat{ab}$ en los puntos A y B respectivamente. Tesis: AB es un segmento.

Demostración. La intersección del semiplano "inferior" de origen la recta b, con la recta t, es la semirecta de origen B que contiene al punto A; y la intersección del semiplano "superior", de origen la recta a, con la recta t, es la semirecta de origen A que contiene al punto B. Es decir, la intersección del ángulo $\widehat{ab}$ con la recta t es el conjunto de puntos que están entre A y B, por lo tanto, la intersección es el segmento AB.

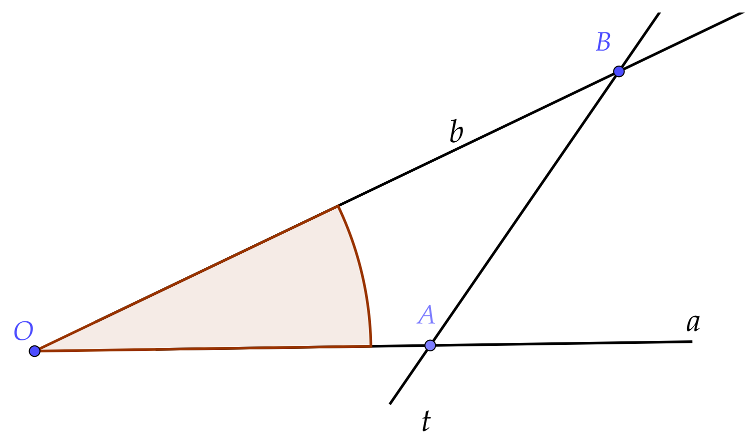

Figura 1.75. Segmento formado por un ángulo y una recta.

□

7. En un mismo plano, considere dos semiplanos de orígenes r y s respectivamente. Demuestre que si los dos semiplanos tienen intersección vacía, entonces r y s tienen la misma dirección. Elabore un gráfico y determine la hipótesis y tesis.

   Hipótesis: r origen del semiplano α, s origen del semiplano β, $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

   Tesis: r y s tienen la misma dirección.

   Demostración. Hay dos casos:

   a) Las rectas no coinciden:

   Suponiendo que las rectas r y s se intersecan en un único punto P, entonces los semiplanos α y β se intersecan, lo que es una contradicción con la hipótesis, por tanto, las rectas r y s son paralelas; en consecuencia, tienen la misma dirección.

   b) Las rectas coinciden: entonces los semiplanos son opuestos y abiertos, por tanto, las rectas tienen la misma dirección.

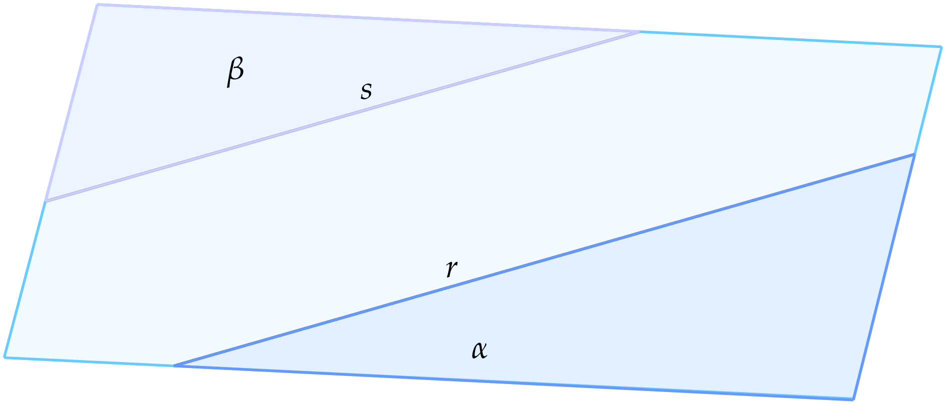

Figura 1.76. Semiplanos de orígenes paralelos.

□

1.12 Ejercicios propuestos

1. Enuncie un modelo de plano que satisfaga los axiomas $A1$ y $A2$, pero no el axioma $A3$.

2. Enuncie un modelo de plano que satisfaga los axiomas $A2$ y $A3$, pero no el axioma $A1$.

3. ¿Puede construirse un modelo de plano con un número finito de puntos, en el cual se satisfaga el axioma $O2$?

4. Demostrar que la unión de ángulos opuestos por el vértice no es una figura convexa.

5. Considere tres puntos del plano no alineados, demuestre que al menos dos de estos están en el mismo semiplano cerrado que tiene por origen cualquier recta del plano que no pase por dos de estos puntos.

6. Considere el haz de rectas de centro el punto P y la relación $\mathcal{R}$ definida así: "dos rectas a y b están relacionadas ($a\mathcal{R}b$) si tienen en común exactamente el punto P". ¿$\mathcal{R}$ cumple con las propiedades, reflexiva, transitiva y simétrica? Demuestre las propiedades que satisface.

7. Demuestre que si dos ángulos convexos tienen en común un lado y el vértice, y a más de los puntos indicados tienen en común un punto, entonces uno de los ángulos es subconjunto del otro.

2

La congruencia

2.1 Axiomas de la congruencia

En el lenguaje común se puede presentar confusión con el término igualdad. Decimos que dos cosas son iguales, a veces para indicar que tienen la misma forma o aspecto; otras veces decimos que dos objetos son iguales aclarando que ocupan posiciones distintas en el espacio; decimos que dos cifras son iguales, para indicar que representan el mismo número; decimos que un cuadro es igual a su copia.

En matemática se presentan diferentes acepciones de la palabra igual. Se prefiere admitir que: cada ente es igual solo a si mismo; en símbolos sea x, $x = x$.

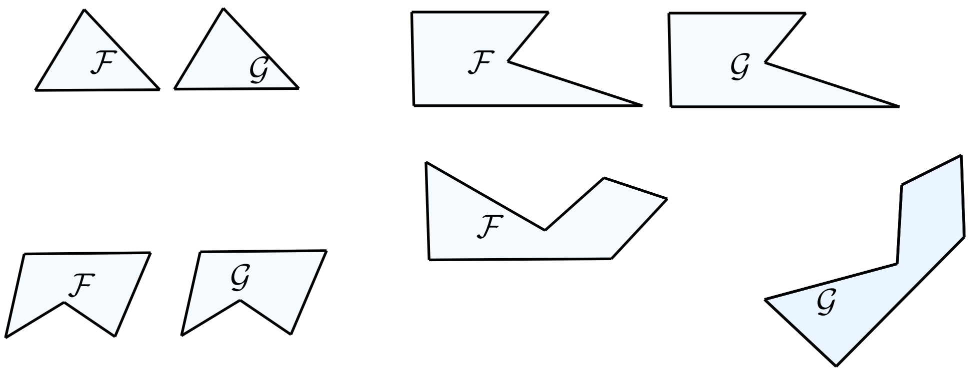

Figura 2.1. Figuras congruentes.

Sin embargo, falta incluir uno de los usos que en el lenguaje común se da de la palabra igual. En las Fig. 2.1 se presentan parejas de figuras geométricas que en el lenguaje común se dirían iguales. En efecto, note que cada figura $\mathcal{F}$ puede ser transportada sobre una figura $\mathcal{G}$, haciendo que sus contornos coincidan perfectamente. Por lo tanto, más que de igualdad entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, debemos hablar, en goemetría, de transporte rígido; de modo que los contornos de las figuras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ coincidan perfectamente.

Se comprende de inmediato que dicha propiedad es muy complicada: ¿que significa transporte? ¿Cómo puede hacerse seguro que una figura se pueda transportar en aquel modo, si no se opera concretamente? Por otro lado, ¿cómo se puede operar concretamente sobre una figura geométrica?

En seguida, veremos como interpretar matemáticamente todo esto recurriendo a un término primitivo y a algunos axiomas.

Antes de pasar a la parte más formal, comprendamos qué debemos esperar de nuestros axiomas; en lo que sigue, usaremos a menudo el verbo "transportar " o el sustantivo "transporte"; esta operación intuitiva alude a un movimiento rígido (es decir que no deforma la figura).

Tomemos en consideración dos semirectas: r y s, de origen respectivamente R y S (Fig. 2.2). Es intuitivo admitir que r se puede transportar sobre s de modo que R resulte transportada sobre S.

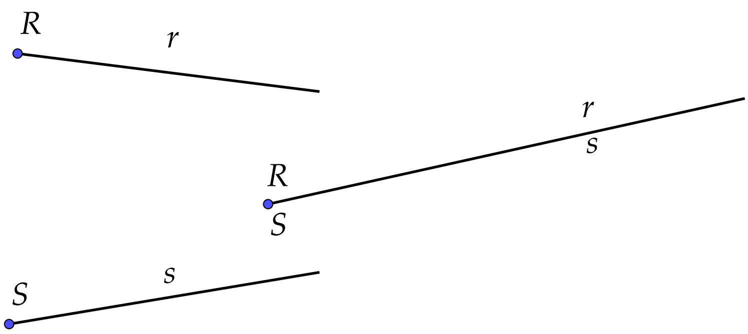

Figura 2.2. Transporte de semirectas.

El mismo razonamiento se puede repetir para dos semiplanos (Figuras 2.3 y 2.4).

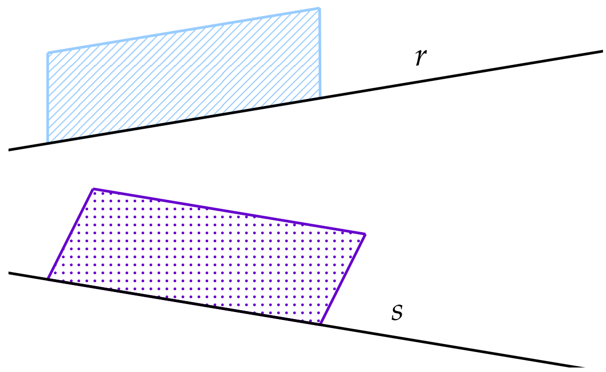

Figura 2.3. Semiplanos de origen r y s.

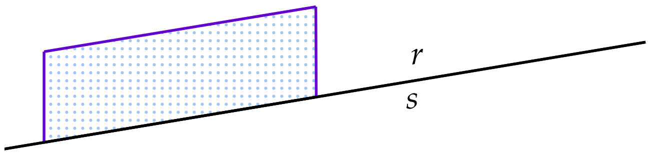

Figura 2.4. Semiplanos transportados de origen r y s.

Consideremos ahora dos segmentos AB y CD, A se puede transportar sobre C Fig. 2.5 a), o bien B sobre D Fig. 2.5 b), y la semirecta de origen A que contiene a B se puede transportar sobre la semirecta de origen C que contiene a D pero no hemos dicho que el segmento AB se pueda transportar sobre el segmento CD.

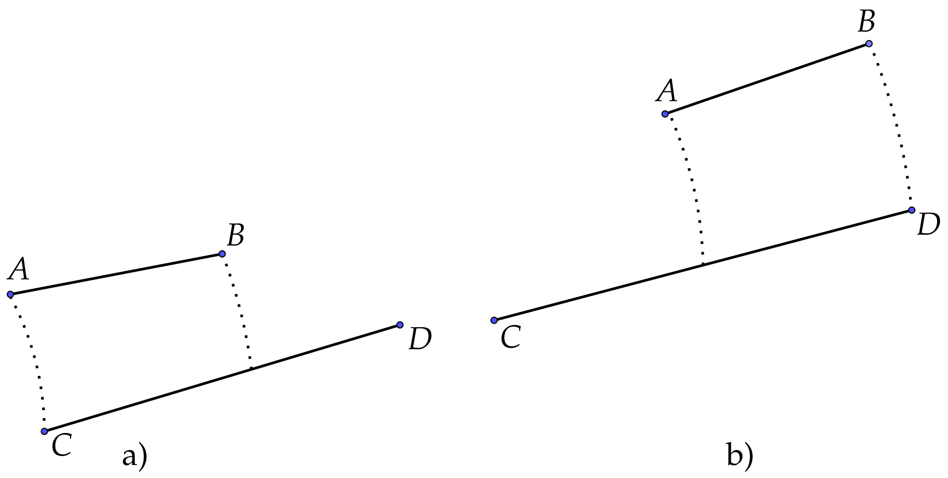

Figura 2.5. Transporte de un segmento sobre otro con un extremo coincidente.

Para que dos segmentos AB y CD se puedan transportar el uno sobre el otro, deben ocurrir las siguientes condiciones:

1. La semirecta de origen A que contiene a B debe ser transportada sobre la semirecta de origen C que contiene a D.

2. Los orígenes de las dos semirectas descritas deben ser transportadas el uno sobre el otro.

3. Si también ocurre que B y D coinciden , se puede decir que el segmento AB se ha transportado sobre el segmento CD.

Usaremos como término primitivo el de *"congruencia " entre segmentos*. El término "congruente" va a ser entendido como primitivo, pero para tener una idea intuitiva se puede pensar que dos segmentos son congruentes cuando, tranportados rígidamente el uno sobre el otro, coinciden (es decir coinciden sus extremos). Para indicar que dos segmentos AB y CD son congruentes, escribiremos $AB \cong CD$.

Para desarrollar la teoría de la congruencia primero damos el siguiente axioma de la congruencia:

C1: Sean dados tres puntos A, B y P, y dos rectas a y p, tales que $A, B \in a$, $P \in p$. Fijado el punto A como origen de la semirecta a_1 de a que contiene a B, sea P el origen de una semirecta p_1 fijado como se desee sobre p. Entonces existe sobre tal semirecta p_1 uno y solo un punto Q tal que $AB \cong PQ$ (Fig. 2.6).

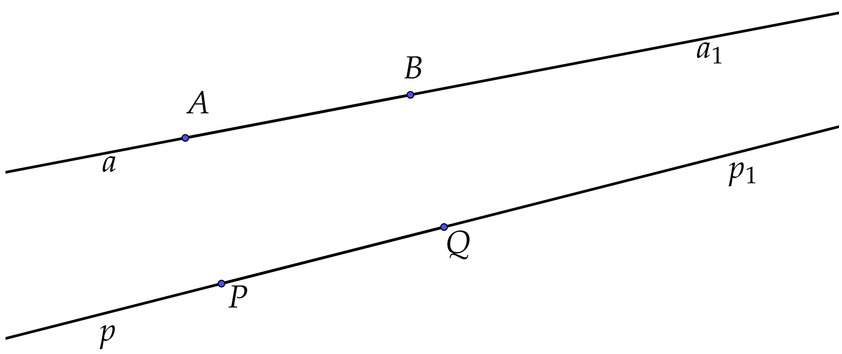

Figura 2.6. Transporte de un segmento sobre otro.

Nótese que sobre la recta p se puede escoger como se desee la semirecta p_1 de origen P; por tanto, ya que hay dos posibilidades, podemos decir que existen dos segmentos PQ sobre la recta p, que son congruentes a AB; estos se hallan en lados opuestos respecto a P (Fig. 2.7).

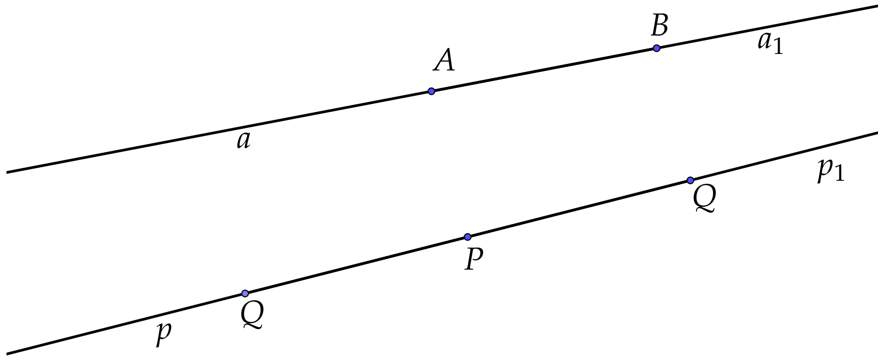

Figura 2.7. Segmentos congruentes con AB.

El axioma C_1 se conoce también como axioma de transporte de segmentos por el significado intuitivo siguiente: un segmento puede ser transportado como se desee sobre el plano.

Nótese que no se ha dicho que las rectas a y p deban ser distintas; puede suceder que éstas sean coincidentes. El axioma C_1 es válido también cuando a y p coinciden; es decir, se puede transportar un segmento AB de a sobre la misma recta a.

Si un segmento AB es congruente a un segmento CD, entonces el segmento CD es congruente al segmento AB (propiedad simétrica de la congruencia).

Intuitivamente, si AB es congruente a CD y CD es congruente a EF, entonces AB es congruente a EF (propiedad transitiva de la congruencia).

Es más intuitivo que cada segmento AB es congruente a si mismo (propiedad reflexiva de la congruencia).

Entre los segmentos del plano surge una relación que llamaremos de congruencia, y que la notaremos mediante $\cong$; dos segmentos están en esta relación si y solo si son congruentes. La relación de congruencia cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, por tanto, es una relación de equivalencia (Figuras 2.8, 2.9 y

2.10).

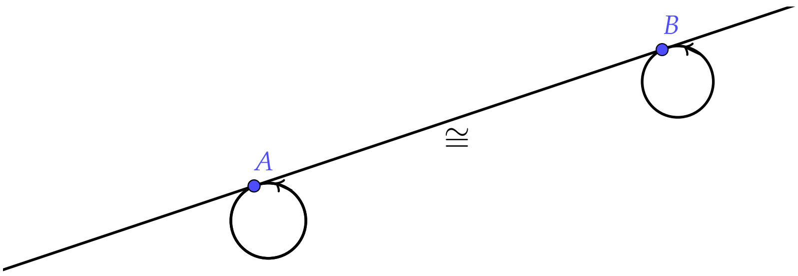

Figura 2.8. Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos.

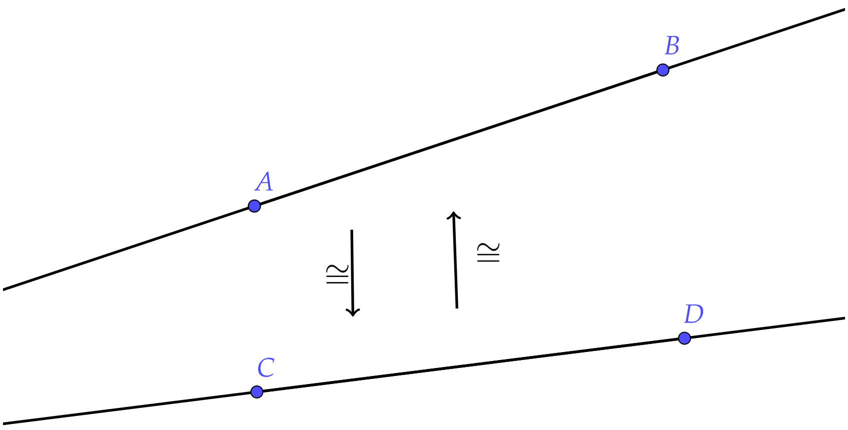

Figura 2.9. Propiedad simétrica de la congruencia de segmentos.

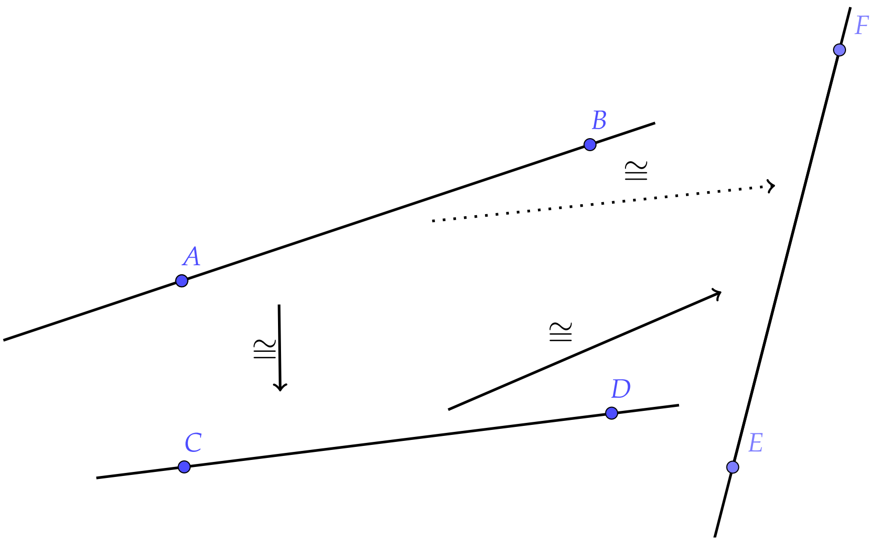

Figura 2.10. Propiedad transitiva de la congruencia de segmentos.

C2: En el conjunto de segmentos del plano, la congruencia es una relación de equivalencia.

El siguiente axioma se conoce como el axioma de la adición de segmentos:

C3: Sea dada la siguiente pareja de segmentos adyacentes AB y BC sobre la recta a y PQ y QR sobre la recta b, de modo tal que: $AB \cong PQ$, $BC \cong QR$. Se tiene por tanto que $AC \cong PR$ (Fig. 2.11).

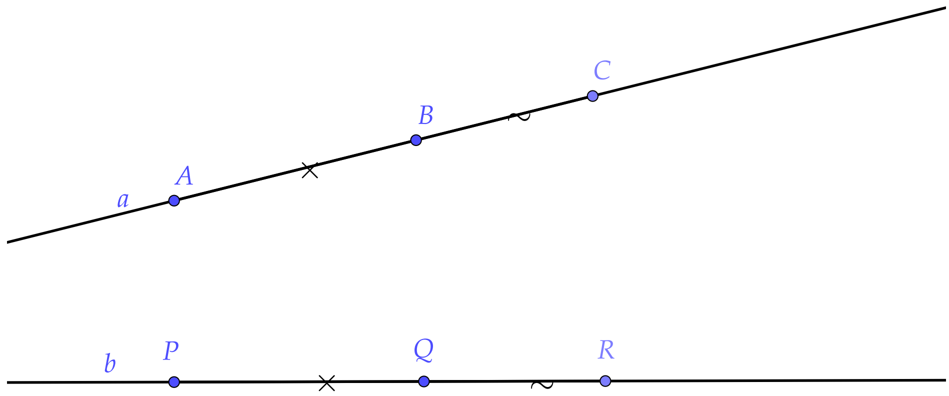

Figura 2.11. Congruencia$AC \cong PR$.

Ejercicio.

1. El axioma $C3$ ha sido enunciado para un par de segmentos, enunciarlo para ternas considerando AB, BC, CD segmentos adyacentes sobre la recta a; PQ, QR, RS segmentos adyacentes sobre b.

   Solución.

   Sean los segmentos adyacentes AB, BC, CD sobre la recta a y los segmentos adyacentes PQ, QR, RS sobre la recta b; si $AB \cong PQ$, $BC \cong QR$ y $CD \cong RS$, entonces $AD \cong PS$

   Una vez enunciado el axioma para ternas de segmentos, contestar la siguiente pregunta: ¿la proposición para ternas que se ha enunciado es un axioma o un teorema; es decir, consecuencia de C3? Si su respuesta es un teorema, demuéstrelo. ¿el enunciado para $n-$uplas es un teorema?

Solución.

Es un teorema, se demuestra de la siguiente manera:

$AC \cong PR$ por el axioma C3

luego, aplicando el axioma C3 a los segmentos adyacentes AC y CD que son congruentes a PR y RS respectivamente, se tiene que $AD \cong PS$.

Sean $AB, BC, CD, \cdots, EF, FG$ segmentos adyacentes de una recta a y sean $A'B', B'C', C'D', \cdots, E'F', F'G'$ segmentos adyacentes de la recta b; si $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CD \cong C'D'$, $\cdots$, $EF \cong E'F'$, $FG \cong F'G'$, entonces $AG \cong A'G'$.

En el axioma C2 se aceptó que $AB \cong AB$ cualesquiera sean los puntos A y B. Nótese que también $AB \cong BA$ (Fig. 2.12).

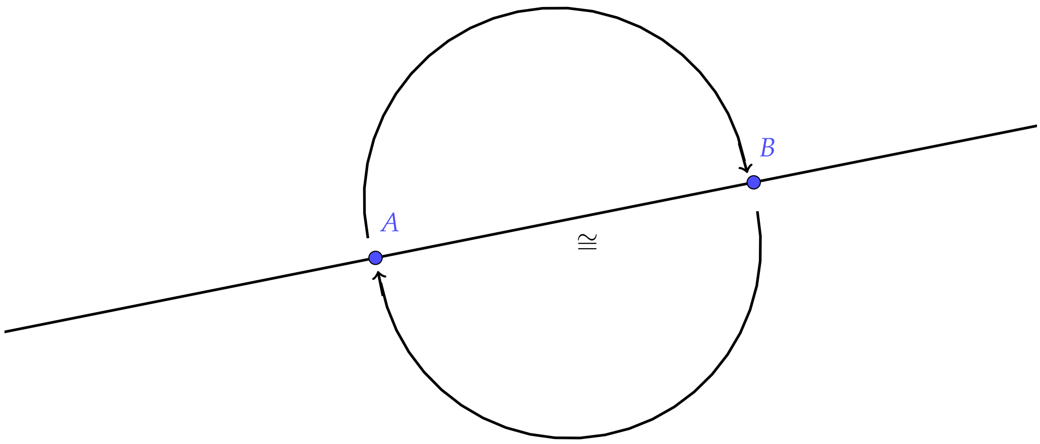

Figura 2.12. Congruencia $AB \cong BA$.

2.2 Congruencia entre ángulos

Hemos dicho que el objetivo de este capítulo es hablar correctamente de la congruencia de figuras cualesquiera; hasta ahora hemos hablado de congruencia de segmentos. Es necesario, antes de llegar a la máxima generalización, hablar correctamente de congruencia de ángulos. Primero introduciremos un nuevo axioma, pero antes un nuevo término, el de “congruencia” referido a una pareja de ángulos. El concepto intuitivo de ángulo congruente expresa el hecho intuitivo de que dos ángulos se pueden transportar rígidamente uno sobre el otro haciendo que coincidan. Dicho esto, se asumirá como primitivo el término congruente relacionado a los ángulos. Para indicar que dos ángulos son congruentes, continuaremos usando el símbolo $\cong$.

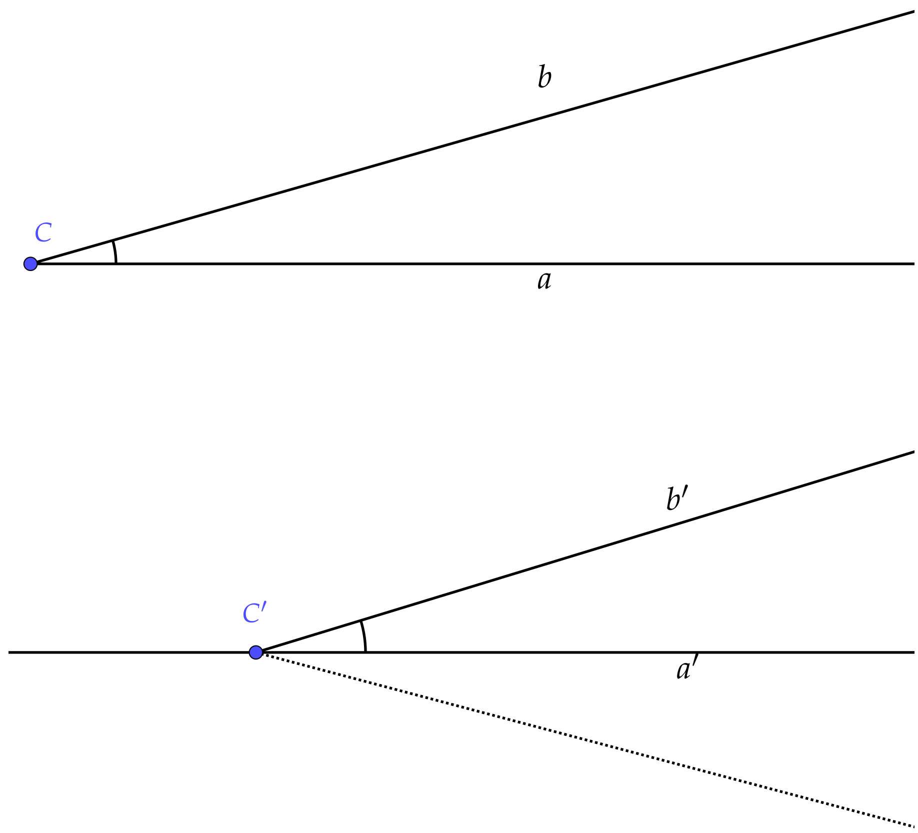

Figura 2.13. Representación gráfica del axioma $C4$.

C4: Sean dados en el plano un ángulo convexo $\widehat{ab}$ de vértice C y una semirecta a' de origen C'; fíjese uno de los dos semiplanos que tiene como origen a la recta que contiene a la semirecta a' de origen C', en tal semiplano existe una y una sola semirecta b' de origen C' tal que $\widehat{ab} \cong \widehat{a'b'}$ (Fig. 2.13)

Según la Fig. 2.13, nótese que son dos los semiplanos que contienen como origen a la semirecta a', por tanto, existen dos posibilidades de ángulos que tienen a C' como vértice y a la semirecta a' como lado.

El axioma $C4$ se conoce como axioma de transporte de ángulos por obvias razones.

Nótese que un ángulo $\widehat{ab}$ puede ser transportado sobre si mismo; es decir, la relación ser congruente entre ángulos es reflexiva.

Ejercicio. Demuestre las siguientes proposiciones:

1. En un semiplano de origen la recta AO, si $A\widehat{O}B \cong A\widehat{O}C$, entonces C pertenece al lado OB.

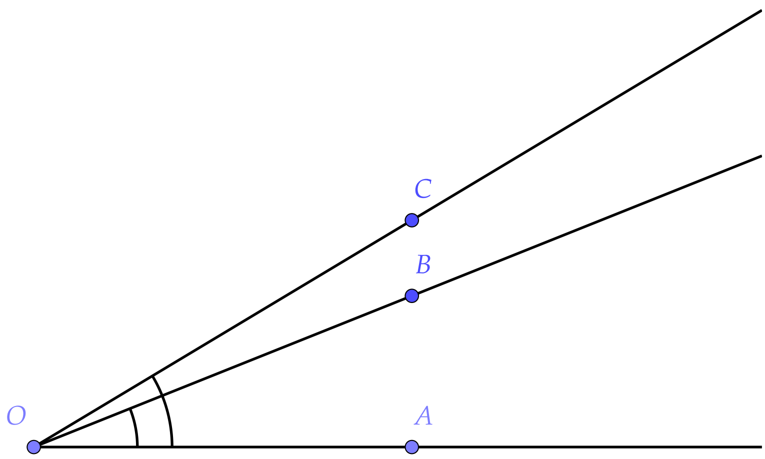

Figura 2.14. Ángulos congruentes $A\widehat{O}B \cong A\widehat{O}C$.

Demostración. La demostración la haremos por reducción al absurdo (Fig. 2.14). Supongamos que $C \notin OB$. entonces la recta OC no coincide con la recta OB; por tanto, al transportar el $A\widehat{O}B$ sobre el $A\widehat{O}C$ no coinciden, luego $A\widehat{O}B \ncong A\widehat{O}C$; esto es absurdo pues por hipótesis se tiene que si son congruentes. Por tanto, C pertenece al lado OB. □

2. Dar una definición de congruencia de los ángulos cóncavos, y demostrar que si un ángulo cóncavo $\widehat{ab}$ es congruente con un ángulo $\widehat{cd}$, entonces $\widehat{cd}$ es cóncavo.

   La demostración se deja al lector.

3. ¿Cuál es la proposición inversa de 1?

En la sección 1.8 se estudió lo que se entiende por suma de dos ángulos convexos. Revisemos si la congruencia entre ángulos respeta la definición de suma de ángulos; es decir, si la suma entre ángulos “conserva” la congruencia (Fig. 2.15)

C5: Sea $a\widehat{O}b \cong a'\widehat{O'}b'$, y además $b\widehat{O}c \cong b'\widehat{O'}c'$, entonces, $a\widehat{O}c \cong a'\widehat{O'}c'$ (Fig. 2.15).

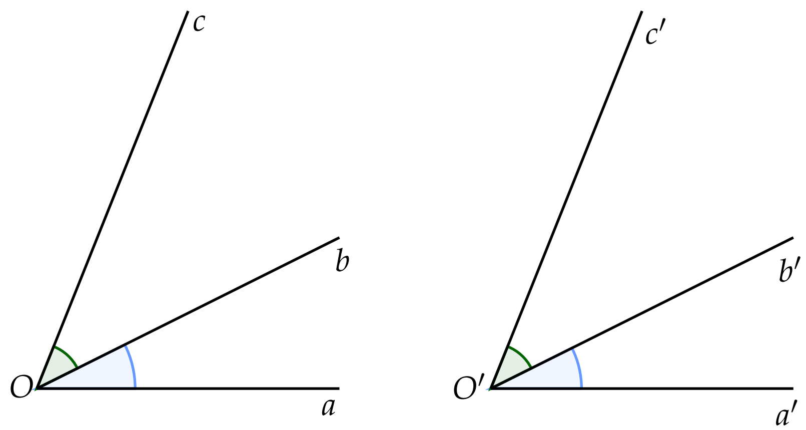

Figura 2.15. Interpretación axioma C5.

En pocas palabras, sean dos parejas de ángulos congruentes dos a dos, entonces, también sus sumas serán congruentes.

También para los ángulos vale el axioma análogo a $C2$ (dado para los segmentos).

C2': En el conjunto de los ángulos del plano, la congruencia entre ángulos es una relación de equivalencia.

Teorema 2.1

Sean $\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$ dos ángulos convexos consecutivos y sea O su vértice común. Sean $\widehat{a'b'}$ y $\widehat{b'c'}$ dos ángulos convexos consecutivos con vértice común O'. Sean $\widehat{ab} \cong \widehat{a'b'}$ y $\widehat{bc} \cong \widehat{b'c'}$. Si $\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$ son adyacentes, entonces también $\widehat{a'b'}$ y $\widehat{b'c'}$ son adyacentes.

Hipótesis: $\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$ dos ángulos convexos consecutivos de vértice común O; $\widehat{a'b'}$ y $\widehat{b'c'}$ dos ángulos convexos consecutivos de vértice común O'; $\widehat{ab} \cong \widehat{a'b'}$ y $\widehat{bc} \cong \widehat{b'c'}$.

Tesis: $\widehat{a'b'}$ y $\widehat{b'c'}$ son adyacentes.

Demostración.

En efecto (Fig. 2.16), por el axioma $C5$ se tiene que $a\widehat{O}c \cong a'\widehat{O'}c'$; por tanto, tomando la semirecta $O'a'$ en el semiplano que contiene a b', existe una única semirecta $O'c'$, tal que $a\widehat{O}c \cong a'\widehat{O'}c'$, y gracias a que la semirecta c es opuesta a la semirecta a , entonces también la recta c' debe ser opuesta a la semirecta a'. Es decir. $\widehat{a'b'}$ y $\widehat{b'c'}$ son adyacentes. $\square$

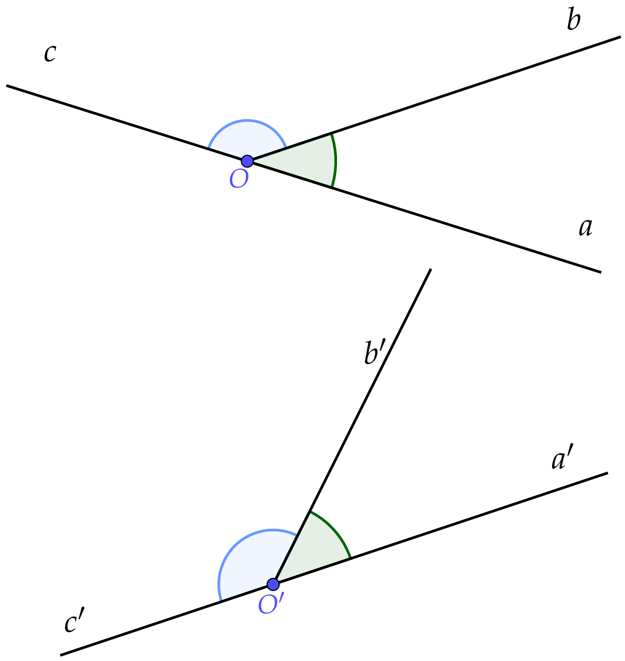

Figura 2.16. Parejas de ángulos consecutivos congruentes.

Teorema 2.2

Dados los ángulos $a\widehat{O}c$, suma de $\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$; y el ángulo $a'\widehat{O'}c'$, suma de $\widehat{a'b'}$ y $\widehat{b'c'}$, si se tiene que $\widehat{ac} \cong \widehat{a'c'}$ y $\widehat{ab} \cong \widehat{a'b'}$, entonces $\widehat{bc} \cong \widehat{b'c'}$.

Hipóteisis: $a\widehat{O}c$, suma de $\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$; $a'\widehat{O'}c'$, suma de $\widehat{a'b'}$ y $\widehat{b'c'}$; $\widehat{ac} \cong \widehat{a'c'}$; $\widehat{ab} \cong \widehat{a'b'}$.

Tesis: $\widehat{bc} \cong \widehat{b'c'}$.

Demostración. En efecto, por absurdo, si $\widehat{bc}$ no fuese congruente a $\widehat{b'c'}$, no sería, por el axioma C5, $\widehat{ac} \cong \widehat{a'c'}$, lo que es contradictorio con la hipótesis. Por lo tanto, $\widehat{bc} \cong \widehat{b'c'}$. $\square$

El ángulo $\widehat{bc}$, definido en el teorema anterior se llama *"diferencia" de los ángulos* $\widehat{ac}$ y $\widehat{ab}$; además el teorema 2.2 se puede enunciar en un modo más general: Las diferencias de dos parejas de ángulos congruentes son congruentes.

2.3 Congruencia entre triángulos

Ya que conocemos la congruencia de segmentos y ángulos, ahora nos podemos ocupar de la congruencia entre figuras más complejas , como por ejemplo los triángulos. El siguiente, corresponde al axioma de congruencia de triángulos.

C6: Sean dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$. Si se tiene que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $A\widehat{B}C \cong A'\widehat{B'}C'$, entonces se tiene que $AC \cong A'C'$, $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$ y $A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C'}B'$ (Fig. 2.17)

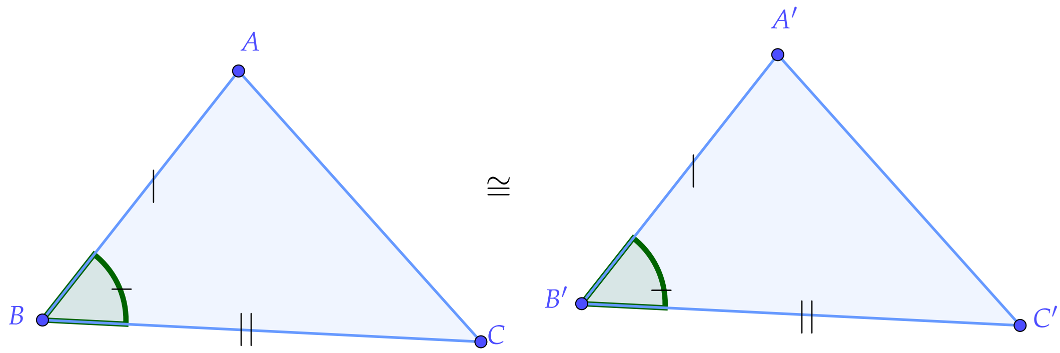

Figura 2.17. Interpretación geométrica del axioma *C*6.

Nótese que en el enunciado de este axioma se hace uso de la congruencia entre segmentos y entre ángulos.

El axioma *C*6 se conoce como axioma del transporte de triángulos, por la siguiente razón: Tenemos dos triángulos, si dos lados y el ángulo comprendido son respectivamente congruentes, entonces, los demás elementos del triángulo son respectivamente congruentes; ya que cada lado y cada ángulo se puede transportar, entonces se puede decir que cada triángulo se puede transportar.

El axioma *C*6 es esencial para la demostración de los siguientes teoremas, los que recibirán el nombre de criterios de congruencia de triángulos. Antes de dar los criterios de congruencia de triángulos, hagamos una definición.

Definición 2.1
Dos triángulos se dicen congruentes cuando sus ángulos y sus lados son dos a dos ordenadamente congruentes.

Por ejemplo, para los triángulos de la Fig. 2.18 se puede decir que: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$; en tal caso, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$; viceversa, si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, esto significa que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$.

Nótese que también en la congruencia de triángulos se utiliza el símbolo $\cong$

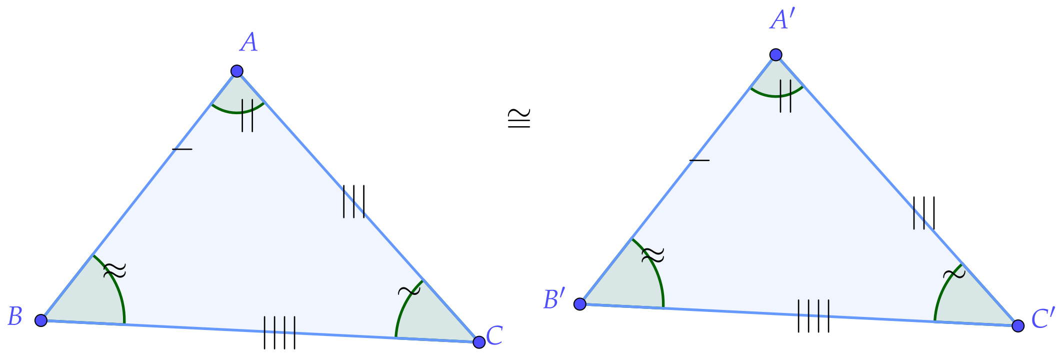

Figura 2.18. Congruencia de trángulos.

Teorema 2.3
Primer criterio de congruencia de triángulos: sean dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ y sean $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Demostración. El teorema queda demostrado a partir del axioma C6 y de la definición de triángulos congruentes. □

Teorema 2.4
Segundo criterio de congruencia de triángulos, sean dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ y sean $AB \cong A'B'$, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (Fig. 2.19)

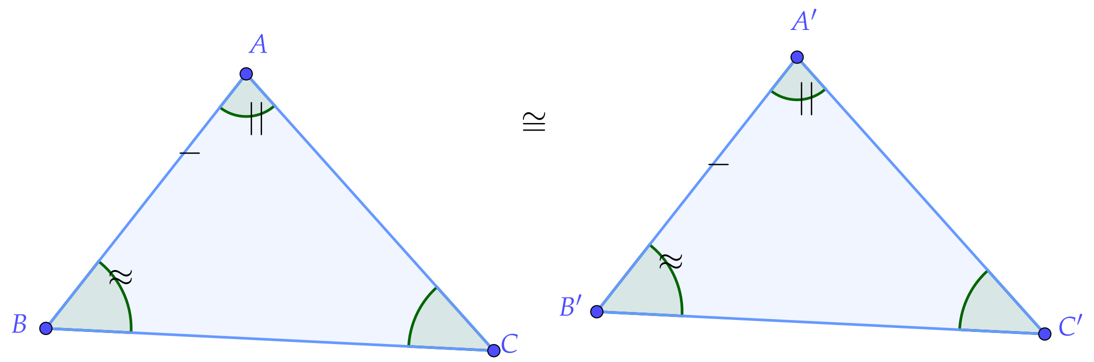

Figura 2.19. Segundo criterio de congruencia de triángulos.

Demostración. Transportando el $B\widehat{A}C$ sobre el ángulo $B'\widehat{A}'C'$ de modo que coincidan A con A' y el lado AB con el lado $A'B'$. Por el axioma de transporte de ángulos, ya que $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A}'C'$, C pertenencerá al lado $A'C'$.

Por otro lado, transportando el $A\widehat{B}C$ sobre el ángulo (congruente) $A'\widehat{B}'C'$, por el mismo motivo C pertenecerá al lado $B'C'$. Ahora bien, el único punto que se halla tanto sobre $A'C'$ y $B'C'$ es el punto C. Por tanto, en el transporte del $\triangle ABC$ sobre $\triangle A'B'C'$, en las hipótesis formuladas, a C le corresponderá C'. Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

Ejercicio. Demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 2.5
Ángulos adyacentes de ángulos congruentes son congruentes.

Hipótesis: $A\widehat{O}B \cong D\widehat{O}'E$; $A\widehat{O}B$ y $B\widehat{O}C$ adyacentes; $D\widehat{O}'E$ y $E\widehat{O}'F$ adyacentes (Fig. 2.20).

Tesis: $B\widehat{O}C \cong E\widehat{O}'F$ (Fig. 2.20).

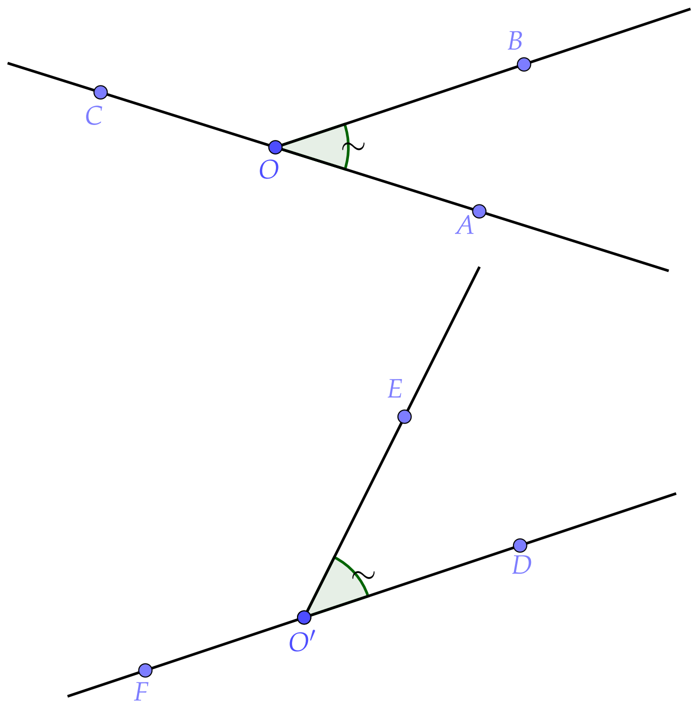

Figura 2.20. Dos ángulos congruentes.

Demostración. Por hipótesis se tiene que los ángulos $A\widehat{O}B$ y $D\widehat{O'}E$ son congruentes, por tanto, gracias al axioma de transporte de ángulos, se transporta el lado OA sobre el lado $O'D$, el lado OB sobre el lado $O'E$ y el vértice O sobre el vértice O'; siendo C otro punto de la recta OA y F otro punto de la recta $O'D$ se tiene también que el lado OC se transporta sobre el lado $O'F$; se concluye, que los ángulos $C\widehat{O}B$ y $F\widehat{O'}E$ son congruentes. □

Teorema 2.6

Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Teorema 2.7

Ángulos planos son congruentes.

Definición 2.2

Un triángulo se dice *isósceles* si tiene dos lados congruentes.

El $\triangle ABC$ de la Fig. 2.21 es isósceles ya que en él se tiene que $AB \cong BC$. En este tipo de triángulo, el lado AC se dice *base del triángulo isósceles*, mientras que cualquiera de los otros dos lados congruentes se llaman *lados del triángulo isósceles*. Si también $AC \cong AB$, el triángulo se dice *equilátero*.

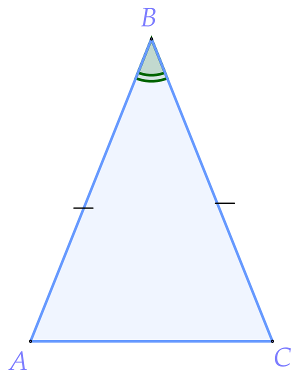

Figura 2.21. Triángulo isósceles.

Definición 2.3

Un triángulo se dice equilátero si tiene los tres lados congruentes.

Teorema 2.8

Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles y sea $AC \cong BC$. Entonces $\widehat{A} \cong \widehat{B}$. También se dice que en un triángulo isósceles, los ángulos en la base son congruentes.

Demostración. Consideremos los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BAC$ (Fig. 2.22), estos tienen $AC \cong BC$, $BC \cong AC$ y $A\widehat{C}B \cong B\widehat{C}A$ (por la propiedad reflexiva de la congruencia de ángulos). Por tanto, los dos triángulos considerados son congruentes por el primer criterio de congruencia de triángulos; en particular los ángulos $C\widehat{A}B$ y $A\widehat{B}C$.

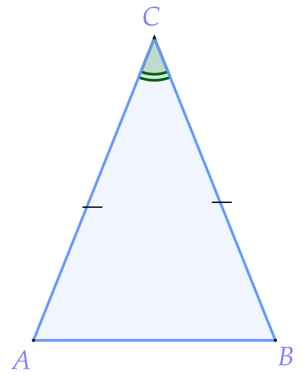

Figura 2.22. Triángulo isósceles $AC \cong CB$.

□

Ejercicio. Demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.9
Si en un triángulo dos ángulos son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

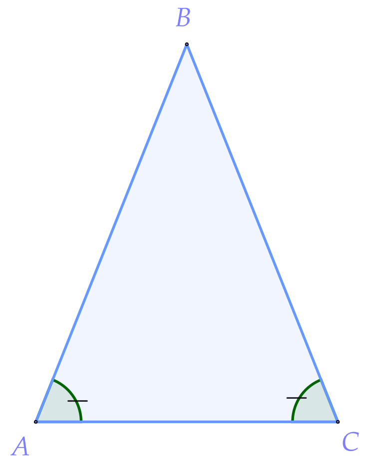

Figura 2.23. Triángulo con dos ángulos congruentes.

Hipótesis: $B\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$. Tesis: $\triangle ABC$ es isósceles.

Demostración. Considérese los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACB$ (son un solo triángulo, pero para efectos de la aclarar razonamientos los consideraremos dos triángulos) Fig. 2.23.

Estos triángulos tienen:

$C\widehat{A}B \cong A\widehat{C}B$	(ángulo del primer triángulo, ángulo del segundo triángulo)	A
$AC \cong AC$	(propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos)	L
$B\widehat{C}A \cong B\widehat{A}C$	(ángulo del primer triángulo, ángulo del segundo triángulo)	A

Por el segundo criterio de congruencia se tiene que los triángulos analizados son congruentes (esto ya lo sabíamos), por tanto, los lados homólogos son congruentes, en particular $AB \cong BC$; por tanto, el $\triangle ABC$ es isósceles. □

El siguiente teorema lo aceptaremos sin demostración.

Teorema 2.10

Tercer criterio de congruencia de triángulos: sean dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, y sean $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ y $AC \cong A'C'$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Ejercicio. Demuestre la siguiente proposición:

En el conjunto de triángulos del plano la relación de congruencia es una relación de equivalencia.

Demostración.

1. Reflexiva. La relación de congruencia entre triángulos es reflexiva pues cada triángulo es congruente a si mismo, esto debido la reflexividad de la congruencia de segmentos y ángulos; lo que implica por el axioma $C6$ un triángulo es congruente a si mismo (esta propiedad se puede demostrar también por cualquiera de los criterios de congruencia o por la definición de congruencia).

2. Simétrica. Esta propiedad se cumple por la simetría de las relaciones de congruencia entre lados y ángulos y la definición de congruencia de ángulos.

3. Transitiva. Igual que las anteriores, se cumple esta propiedad por la transitividad de las relaciones de congruencia de segmentos y ángulos.

□

Definición 2.4
Un ángulo convexo se dice *recto* si es congruente a uno de sus adyacentes (Fig. 2.24)

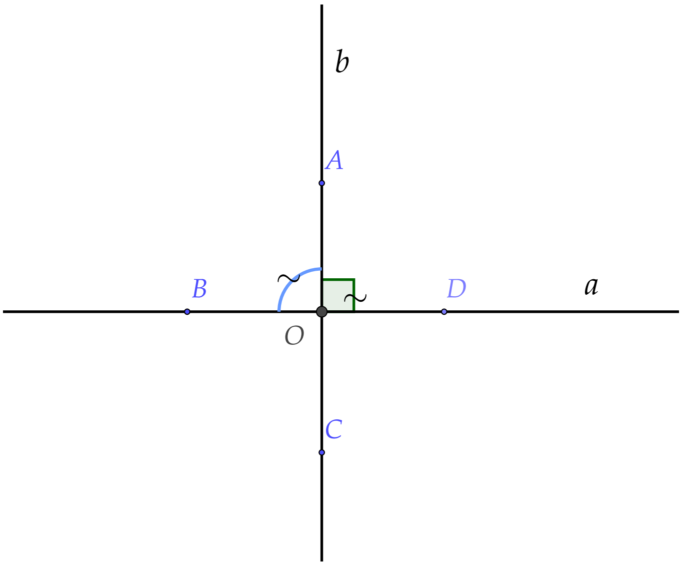

Figura 2.24. Ángulo congruente a uno de sus adyacentes.

En la Fig. 2.24, los ángulos determinados por las rectas a y b son $A\widehat{O}D$, $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}C$ y $C\widehat{O}D$. Si $A\widehat{O}D \cong A\widehat{O}B$ o bien $A\widehat{O}D \cong D\widehat{O}C$, entonces $A\widehat{O}D$ es un ángulo recto.

Teorema 2.11
Los ángulos rectos son congruentes entre sí.

La demostración se deja al lector.

Teorema 2.12
Sean dadas dos rectas incidentes, si uno de los ángulos determinados por estas rectas es recto, entonces también lo son los demás.

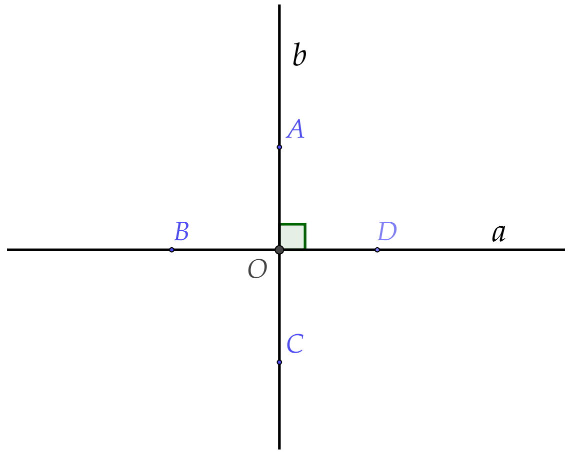

Figura 2.25. Rectas que forma un ángulo recto.

Demostración. Nos apoyamos en la Fig. 2.25. Sea $A\widehat{O}D$ el ángulo recto determinado por las rectas a y b. Por definición de ángulo recto, también uno de los dos ángulos $B\widehat{O}A$ o $C\widehat{O}D$ es recto, mientras que el $B\widehat{O}C$ es recto por ser opuesto por el vértice con $A\widehat{O}D$. Ahora bien, si $B\widehat{O}A$ es recto, también lo será $C\widehat{O}D$ y viceversa; finalmente se tiene que los cuatro ángulos son rectos □

Definición 2.5
Dos rectas incidentes se dicen *perpendiculares* si determinan ángulos rectos. Para indicar simbólicamente que dos rectas a y b son perpendiculares se escribe $a \perp b$.

Definición 2.6
Un triángulo se dice *triángulo rectángulo*, si uno de sus ángulos es recto.

Note que un triángulo puede ser rectángulo e isosósceles al mismo tiempo (Fig. 2.26).

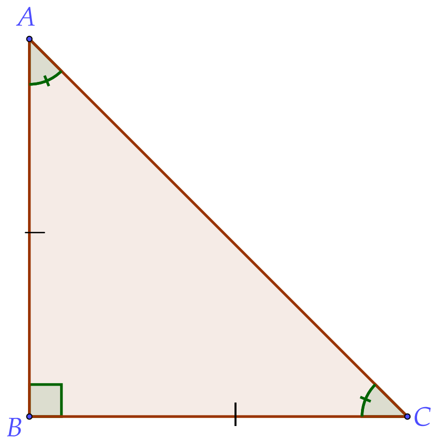

Figura 2.26. Triángulo rectángulo e isósceles.

Teorema 2.13
De la construcción de la perpendicular: sea dada una recta r y un punto P externo a ella (Fig. 2.27). Sea A un punto de r y sea $PA \cong QA$ de modo que Q está en el semiplano de origen r que no contiene a P; si $P\widehat{A}C \cong Q\widehat{A}C$ con $C \in r$, entonces la recta PQ es perpendicular a r.

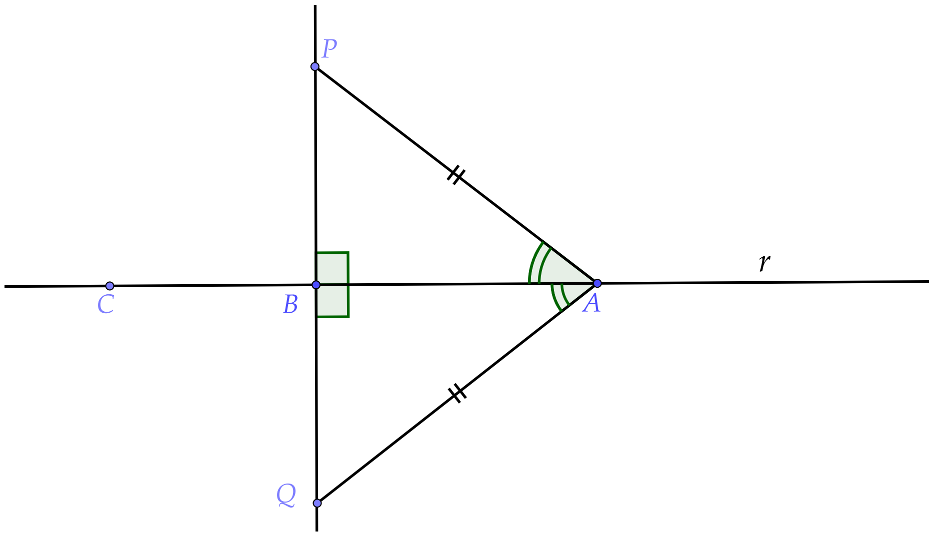

Figura 2.27. Construcción de una perpendicular por un punto interno de una recta.

Demostración. Consideremos la recta PQ y la intersección B de ésta con la recta r (existe esta intersección pues P y Q están en difirerentes lados de la recta r).

Consideremos los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle AQB$, en estos se tiene (por hipótesis) que $AP \cong QA$, $P\widehat{A}C \cong Q\widehat{A}C$ y $AB \cong AB$. Por el primer criterio de congruencia resulta que $\triangle APB \cong \triangle AQB$. Luego todos los elementos de los triángulos son congruentes (en forma ordenada), en particular $A\widehat{B}P \cong A\widehat{B}Q$; como estos últimos son adyacentes se concluye, por definición, que las rectas PQ y r son perpendiculares. $\square$

Teorema 2.14

La perpendicular a una recta r por un punto fuera de ella es única.

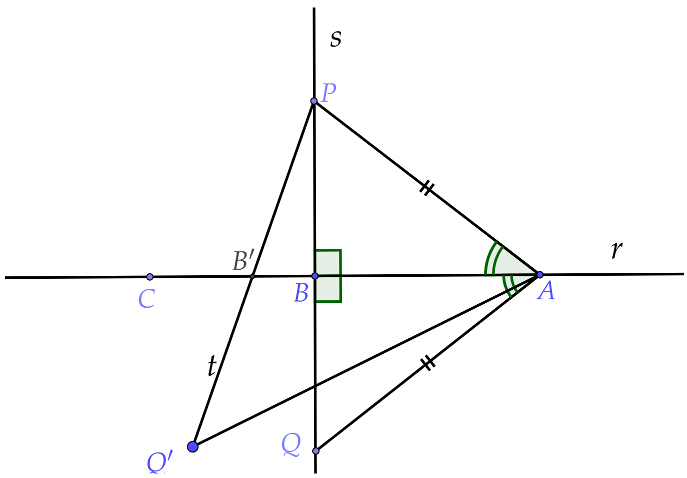

Figura 2.28. Unicidad de recta perpendicular a una recta por un punto externo.

Demostración. Nos apoyamos en la Fig. 2.28 que es una ampliación de la Fig. 2.27 . Ya se demostró que dada una recta r y un punto P fuera de ella, entonces existe una recta s que pasa por P y es perpendicular a r. Sólo falta demostrar que esta recta es única.

La demostración la haremos por reducción al absurdo, entonces suponemos que existe otra recta t diferente de s que pasa por P y es perpendicular a r.

Sean los segmentos PB' y $B'Q'$ congruentes. Entonces los triángulos $\triangle PB'A$ y $\triangle A\widehat{B'}Q'$ son congruentes (LAL, $PB' \cong B'Q'$, $P\widehat{B'}A \cong A\widehat{B'}Q'$, $AB' \cong AB'$). Por tanto $PA \cong AQ'$;por transitividad (conociendo que $PA \cong AQ$) se tiene que

$AQ \cong AQ'$ y $B\widehat{A}Q \cong B\widehat{A}Q'$ (por $P\widehat{A}B \cong B\widehat{A}Q$ y $P\widehat{A}B \cong B\widehat{A}Q'$); es decir, PQ coincide con PQ' lo que es una contradicción pues se indicó que s y t son rectas distintas. En conclusión, la perpendicular es única. □

Teorema 2.15
La perpendicular a una recta r por un punto que le pertenece es única.

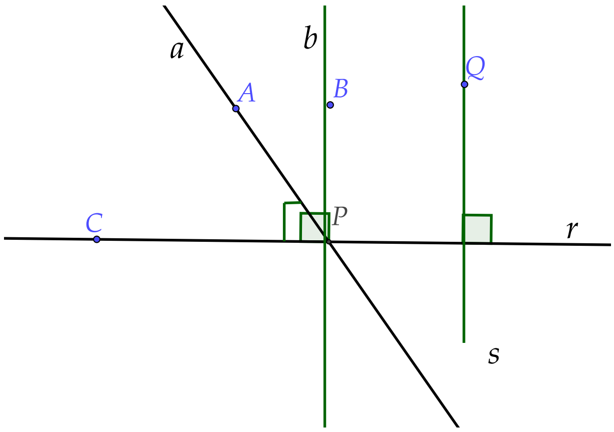

Figura 2.29. Unicidad de recta perpendicular a otra por un punto de la recta.

Demostración. Sean r una recta y P un punto de ella.

1)	Sea $Q \notin r$	existe al menos un punto que no pertenece a una recta;
2)	Sea $s \perp r$ y $Q \in s$	por un punto externo a una recta pasa una única recta perpendicular a la primera;
3)	Si $P \in s$, quedaría demostrado	pues es la tesis;
4)	Si $P \notin s$	puede suceder lo contrario a 3);
5)	Sea b la recta que forma con r un ángulo congruente con $\widehat{rs}$ con $P \in b$	transporte de ángulos;
6)	$b \perp r$	por 5) y 2).

Esto demuestra que por $P \in r$ pasa una recta perpendicular a r. Ahora demostremos que esta recta es única. Lo haremos por reducción al absurdo. Para ello supongamos que existe otra recta perpendicular a r que pasa por P, llámese a.

7) $B\widehat{P}C \cong A\widehat{P}C$ con $C \in r$ | de 6) y por la negación de la tesis.

Lo indicado en 7) es una contradicción con $C4$ pues este axioma afirma que dado un ángulo α y un semiplano de origen una recta t que contiene a un punto P, existe un único ángulo β congruente a α con vértice en P .

$\square$

Definición 2.7
El punto intersección de una recta r con una recta s perpendicular, se llama pie de la perpendicular.

2.4 Ángulos formados por dos rectas paralelas con una transversal

De acuerdo a la Fig. 2.30 damos algunas definiciones.

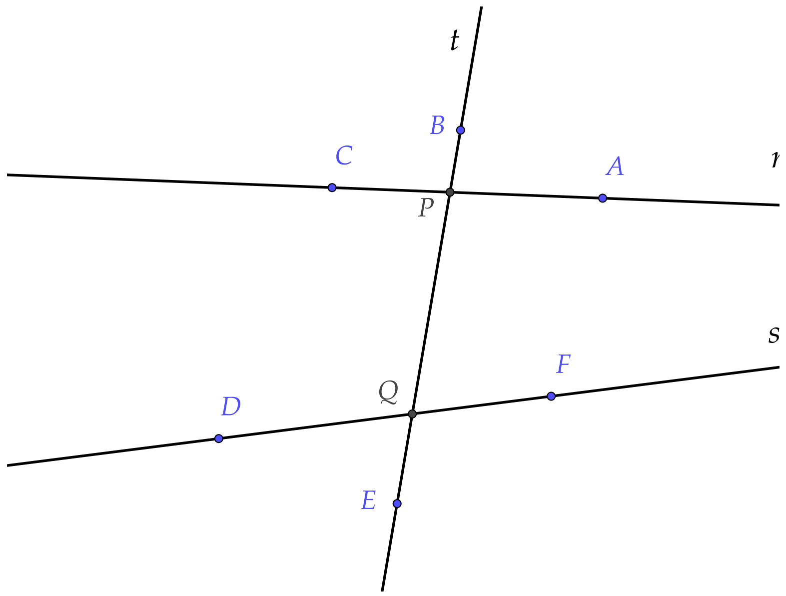

Figura 2.30. Rectas cortadas por una transversal.

Sean dadas dos rectas r y s, y una recta t que interseca a las dos.

Los ángulos $A\widehat{P}B$, $P\widehat{Q}F$ y $F\widehat{Q}E$, $A\widehat{P}Q$ se dicen *correspondientes*, así como también los ángulos $C\widehat{P}Q$, $D\widehat{Q}E$ y $D\widehat{Q}P$, $C\widehat{P}B$;

Los ángulos $A\widehat{P}Q$ y $P\widehat{Q}D$ se dicen *aternos internos*, así como también $C\widehat{P}Q$ y $P\widehat{Q}F$;

Los ángulos $A\widehat{P}B$ y $D\widehat{Q}E$ se dicen *aternos externos*, así como también $E\widehat{Q}F$ y $C\widehat{P}B$;

Los ángulos $A\widehat{P}Q$ y $P\widehat{Q}F$ se dicen *conjugados internos*, así como también $C\widehat{P}Q$ y $P\widehat{Q}D$;

los ángulos $A\widehat{P}B$ y $E\widehat{Q}F$ se dicen *conjugados externos*, así como también $E\widehat{Q}D$ y $B\widehat{P}C$.

Teorema 2.16

Sean dadas tres rectas, tal que una de ellas interseca a las otras dos; si una pareja de ángulos alternos internos está formada por ángulos congruentes, entonces la otra pareja también lo está. Si una pareja de ángulos alternos internos está formada por ángulos congruentes, entonces las parejas de ángulos alternos externos son congruentes. Si una pareja de ángulos alternos internos está formada por ángulos congruentes, entonces las parejas de ángulos correspondientes son congruentes. Para cada uno de esto enunciados el inverso también es válido.

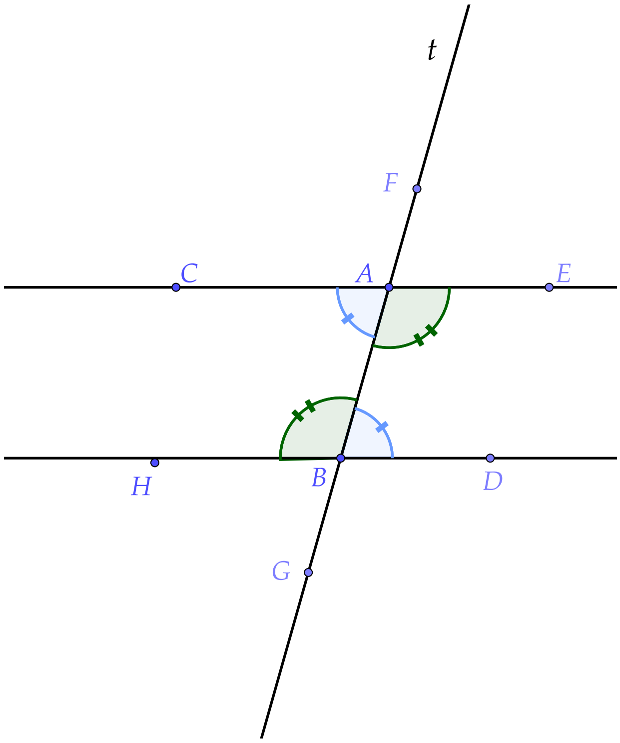

Figura 2.31. Ángulos congruentes formados por dos rectas cortadas por una transversal.

Demostración. Supongamos (Fig. 2.31) que $C\widehat{A}B \cong A\widehat{B}D$, es decir, que son congruentes dos ángulos alternos internos, entonces también $E\widehat{A}B \cong A\widehat{B}H$, ya que son adyacentes a ángulos congruentes (teorema 2.5). Son congruentes los ángulos alternos externos $H\widehat{B}G$ y $F\widehat{A}E$, porque son opuestos a ángulos congruntes (teorema 2.6); son también congruentes $C\widehat{A}F$ y $D\widehat{B}G$ porque son adyacentes a ángulos congruentes. Por la propiedad transitiva de la congruencia se tiene que $F\widehat{A}E \cong A\widehat{B}D$, $E\widehat{A}B \cong G\widehat{B}D$ y $F\widehat{A}C \cong A\widehat{B}H$, $C\widehat{A}B \cong H\widehat{B}G$, es decir los ángulos correspondientes son congruentes.

□

Teorema 2.17

Si dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Demostración. La demostración la haremos por reducción al absurdo (Fig. 2.32). Sea t la recta que interseca a r y s formando ángulos alternos internos congruentes, supongamos que r y s no son paralelas, por tanto tendrán un punto de intersección P. Consideremos el segmento AQ sobre la semirecta de origen A que no contiene a P, tal que $AQ \cong PB$. Consideremos los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle ABQ$; se tiene, $AQ \cong PB$, $AB \cong AB$ y $A\widehat{B}P \cong B\widehat{A}Q$ por hipótesis; por el primer criterio de congruencia, los triángulos estudiados son congruentes, en particular se cumple, $P\widehat{A}B \cong A\widehat{B}Q$.

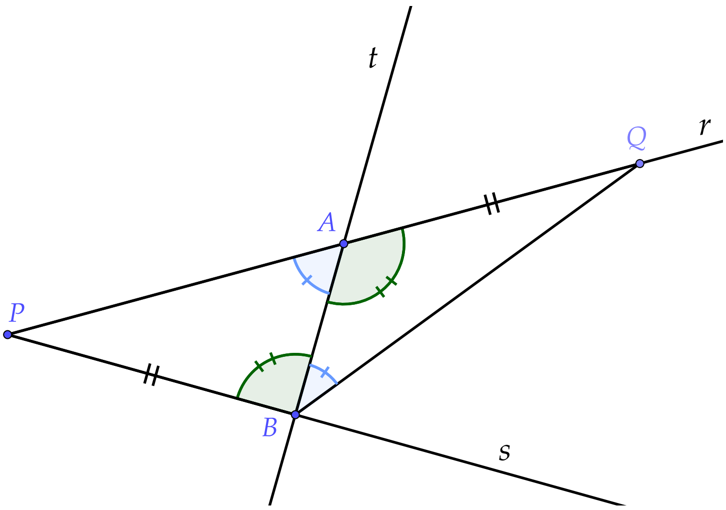

Figura 2.32. Rectas r y s no paralelas.

Como $B\widehat{A}Q$ es adyacente a $B\widehat{A}P$, entonces por el teorema 2.1 se tiene que $P\widehat{B}A$ y $A\widehat{B}Q$ son adyacentes, por lo tanto, P, B, Q deben estar sobre la misma recta, si consideramos los puntos P y Q vemos que existen dos rectas diferentes que contienem a estos puntos, una la recta que contiene a P, Q, A y otra que contiene a P, Q, B, lo que es una contradicción con el axioma $A1$. □

Nótese que hasta ahora no se ha usado el axioma de la paralela. Por tanto, el teorema 2.17 es válido también en la geometría, en la que no es válido el postulado P.

Ejercicio. Demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.18

Sean dadas tres rectas r, s, t, tales que t interseca a las otras dos. Si los ángulos alternos externos son congruentes, entonces r y s son paralelas.

Teorema 2.19

Sean dados tres rectas r, s, t tales que $r \perp t$ y $s \perp t$, entonces r es paralela a s.

Demostración. En la Fig. 2.33, por definición, $D\widehat{A}C$ y $A\widehat{B}E$ son ángulos rectos; el $F\widehat{A}B$ opuesto por el vértice del $D\widehat{A}C$ es recto; por tanto, $F\widehat{A}B$ y $A\widehat{B}E$ son ángulos rectos, y por tanto congruentes. Como $F\widehat{A}B$ y $A\widehat{B}E$ son ángulos alternos internos, por el teorema 2.17, entonces, r es paralela a s (o bien r y s coinciden). $\square$

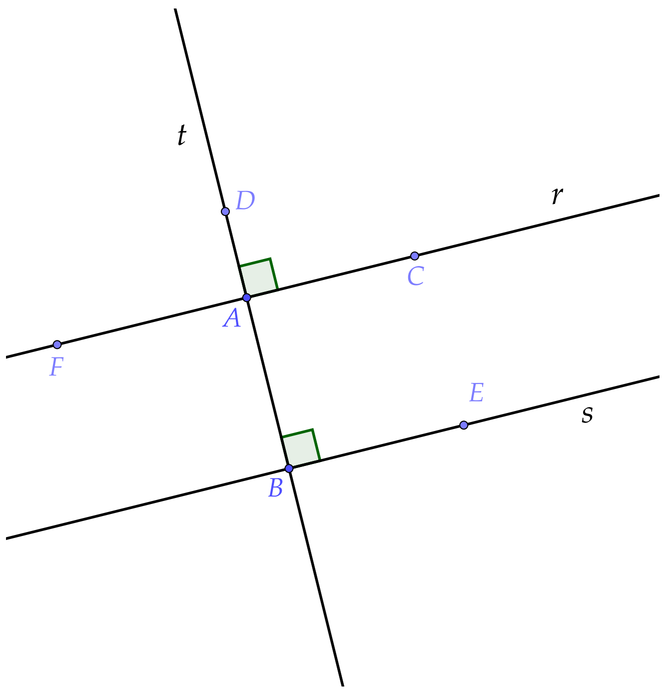

Figura 2.33. Dos rectas perpendiculares a una tercera.

Teorema 2.20

(Inverso del teorema 2.17) Sean dadas tres rectas r, s, t, tales que t interseca a las rectas r y s, si r y s son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Demostración. Sean r y s dos rectas paralelas intersecadas por una recta t (Fig. 2.34). Suponiendo por absurdo que $A\widehat{B}C$ no sea congruente a $B\widehat{A}E$, entonces por el axioma $C4$ podemos transportar el $A\widehat{B}C$ al semiplano que tiene como origen t y que contiene E; haciendo que el vértice B coincida con el vértice A y la semirecta BC recaiga en dicho semiplano. Supongamos sea $B\widehat{A}D$ el ángulo (congruente a $A\widehat{B}C$) obtenido después del transporte, y sea u la semirecta de origen A contenida en el semiplano en cuestión; aplicando el teorema 2.17, la recta u resulta paralela a la recta s; de esta manera se surge una contradicción, pues hemos encontrado dos rectas paralelas a s que pasan por A. □

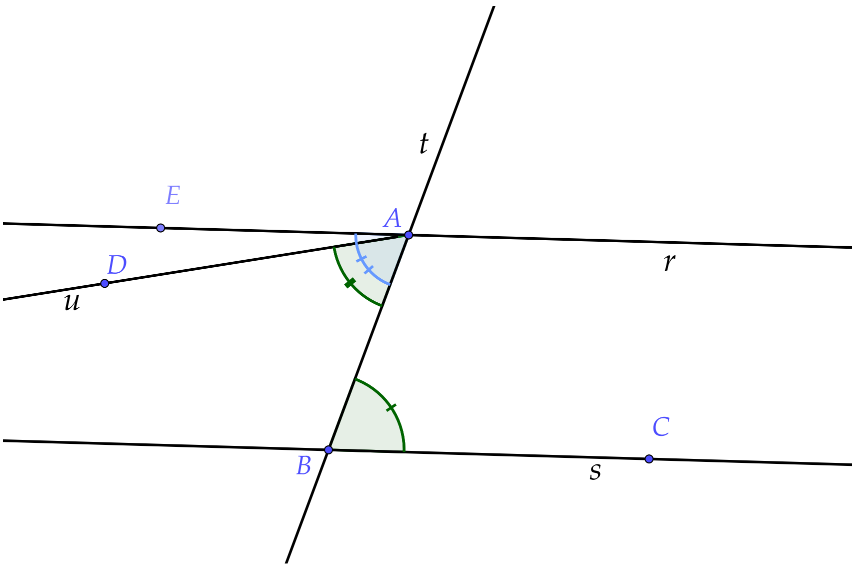

Figura 2.34. Rectas r y s paralelas.

Definición 2.8

Sea $a\widehat{O}b$ un ángulo y sea c una semirecta de origen O, interna al ángulo, tal que $a\widehat{O}c \cong c\widehat{O}b$; c se denomina *bisectriz del* $a\widehat{O}b$.

Definición 2.9
Sea AB un segmento y sea C un punto entre A y B, tal que $AC \cong CB$; C se denomina *centro del segmento* AB. La recta que pasa por C y es perpendicular a AB, se denomina *mediatriz (o eje) del segmento* AB.

Las últimas dos definiciones se usarán también para definir nuevos conceptos en el triángulo.

Definición 2.10
Sea $\triangle ABC$ un triángulo. La bisectriz de cualquier ángulo interno de $\triangle ABC$ se llama *bisectriz del triángulo.*

Definición 2.11
La semirecta (o segmento) que une un vértice con el centro de lado opuesto se llama *mediana del triángulo.*

Definición 2.12
La semirecta (o segmento) que parte de un vértice y es perpendicular al lado opuesto (o su prolongación) se dice *altura del triángulo.*

2.5 Ejercicios resueltos

1. Sean AB y BC dos segmentos adyacentes y congruentes. Demuestre que, si D y E son respectivamente sus centros, entonces $DE \cong AB$.

   Hipótesis: $AB \cong BC$, $AD \cong DB$, $BE \cong EC$.

   Tesis: $DE \cong AB$

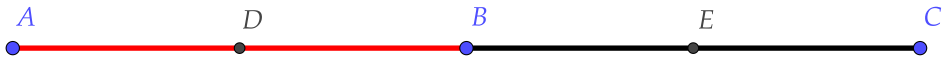

Figura 2.35. Segmentos sobre una misma recta.

Demostración. Primero se prueba que $DB \cong BE$; esta demostración se la hace por reducción al absurdo.

Supóngase que $DB \ncong BE$, entonces $DB \ncong EC$, pues la relación de congruencia es una relación de equivalencia, además, $AD \ncong BE$ y $AD \ncong EC$, por lo que $AB \ncong BC$, lo que es una contradicción con la hipótesis; por tanto, $DB \cong BE$.

Aplicando el axioma C3 de la suma de segmentos a los siguientes:

$AD \cong DB$ y $DB \cong BE$ se tiene que $AB \cong DE$. □

2. Cuatro puntos de una misma recta que están ordenados según el alfabeto A, B, C, D y tales que $AC \cong BD$. Demuestre que $AB \cong CD$.

   Hipótesis: $A < B < C < D$, $AC \cong BD$

   Tesis: $AB \cong CD$

Figura 2.36. Segmentos sobre una misma recta.

Demostración. Supóngase por reduccción al absurdo que $AB \ncong CD$, entonces la suma de AB y BC no es congruente con la suma de BC y CD, pero la suma de AB y BC es AC, y la suma de BC y CD es BD, por tanto, se ha demostrado que $AC \ncong BD$, lo que es una contradicción. Por tanto, $AB \cong CD$. □

3. Cinco semirectas de un haz individualizan cuatro ángulos consecutivos, tal que el primero es congruente al cuarto y el segundo al tercero. Demuestre que si

la primera y la quinta semirectas son opuestas, los ángulos formados por la primera y tercera semirecta y por la tercera y la quinta son congruentes y rectos. Grafique y extraiga la hipótesis y tesis.

hipótesis: Las semirectas a y e de origen coincidente O son opuestas; $\widehat{ab} \cong \widehat{de}$; $\widehat{bc} \cong \widehat{cd}$.

Tesis: $\widehat{ac} \cong ce$, $\widehat{ac}$ y $\widehat{ce}$ ángulos rectos.

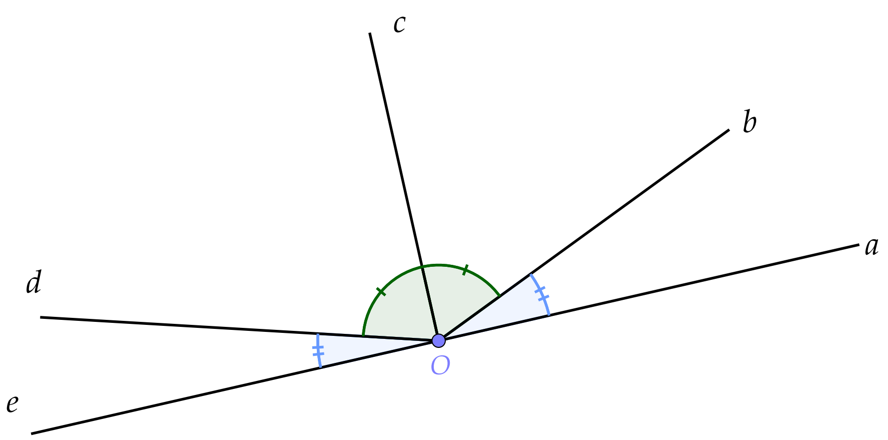

Figura 2.37. Semirectas de un haz.

Demostración.

$\widehat{ac} \cong ce$	la suma de parejas de ángulos congruentes, es congruente;
$\widehat{ac}$ es recto	ya que es congruente a su adyacente (a y e son semirectas opuestas);
$\widehat{ce}$ es recto	ya que es congruente a su adyacente (a y e son semirectas opuestas).

□

4. Sea $A\widehat{O}B$ un ángulo, y OM y ON dos semirectas respectivamente perpendiculares a los lados OA, OB del ángulo dado. Demuestre que el $M\widehat{O}N$ es congruente al $A\widehat{O}B$, o bien a su adyacente. Grafique y extraiga la hipótesis y tesis.

   Hipótesis: $A\widehat{O}B$ un ángulo, $OM \perp OA$, $ON \perp OB$, $B\widehat{O}A'$ adyacente a $A\widehat{O}B$.

   Tesis: $M\widehat{O}N \cong A\widehat{O}B$ o $M\widehat{O}N \cong B\widehat{O}A'$.

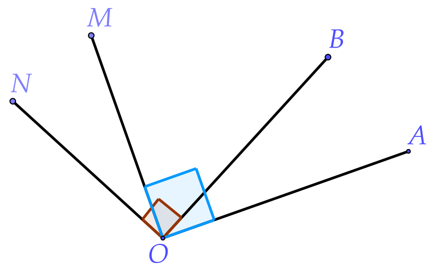

Figura 2.38. $M\widehat{O}N \cong A\widehat{O}B$.

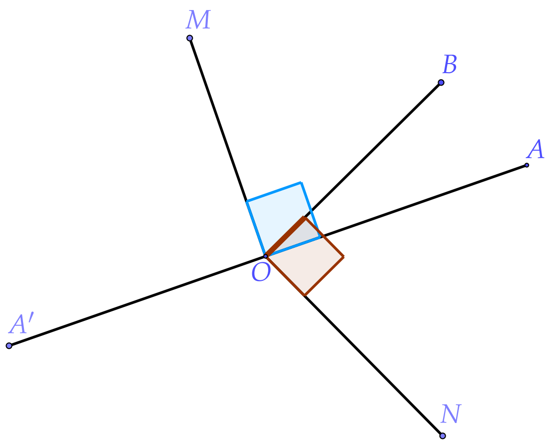

Figura 2.39. $M\widehat{O}N \cong B\widehat{O}A'$.

Demostración. Considérese los siguientes casos:

a) M y N están del mismo lado respecto a la recta OA (Fig. 2.38),

1)	$A\widehat{O}M \cong B\widehat{O}N$	son ángulos rectos y todos los ángulos rectos son congruentes;
2)	El $A\widehat{O}N$ es la suma de $A\widehat{O}M$ y $M\widehat{O}N$	definición de suma de ángulos;
3)	El $A\widehat{O}N$ es la suma $A\widehat{O}B$ y $B\widehat{O}N$	definición de suma de ángulos;
4)	$A\widehat{O}N \cong A\widehat{O}N$	propiedad reflexiva de la congruencia de ángulos;
5)	$M\widehat{O}N \cong A\widehat{O}B$	Diferencia de ángulos congruentes (teorema 2.2 y de 1), 2) 3) Y 4).

b) M y N están en lados opuestos respecto a la recta OA (Fig. 2.39)

1)	$A\widehat{O}M \cong M\widehat{O}A'$	$A\widehat{O}M$ es recto, por tanto es congruentea su adyacente;
2)	El $N\widehat{O}M$ es la suma de $N\widehat{O}B$ y $B\widehat{O}M$	definición de suma de ángulos;
3)	El $B\widehat{O}A'$ es la suma de $B\widehat{O}M$ y $M\widehat{O}A'$	definición de suma de ángulos;
4)	$N\widehat{O}B \cong A\widehat{O}M$	hipótesis (son ángulos rectos)
5)	$N\widehat{O}B \cong M\widehat{O}A'$	por 1) ,4) y transitividad de la congruencia de ángulos;
6)	$M\widehat{O}N \cong B\widehat{O}A'$	por 2) y 3) y suma de ángulos congruentes.

□

5. Dos rectas paralelas r y s son intesecadas por una transversal t. Sean A y B las intersecciones respectivamente de t con r y s. Por el centro M de AB, trace una transversal que interseca a r y s en C y D, respectivamente. Demuestre que M es también centro de CD.

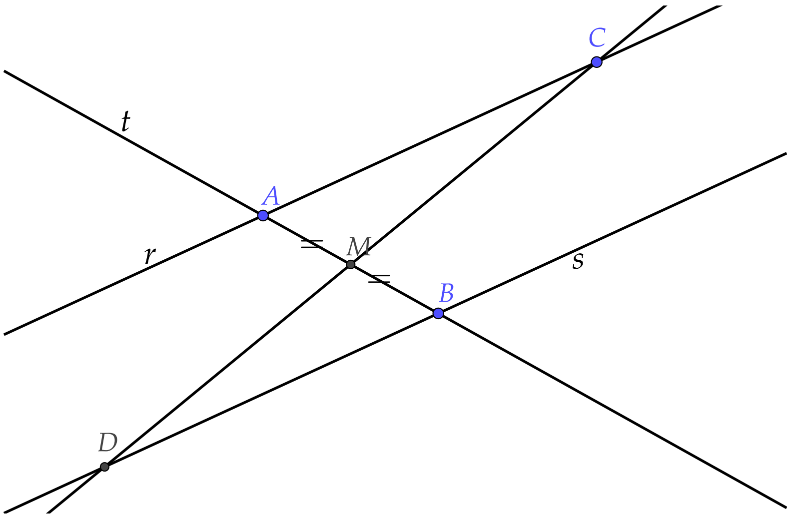

Figura 2.40. Rectas r, s y t.

Demostración. Los triángulos $\triangle MCA$ y $\triangle DBM$ son congruentes por el segundo criterio de congruencia. Como DM y MC son lados homólogos de triángulos congruentes, se cumple, $DM \cong MC$. □

6. Utilice el siguiente teorema y los criterios de congruencia para demostrar lo que se pide.

Teorema 2.21
La suma de ángulos internos de un triángulo es un ángulo plano.

Dado el $\triangle AEC$, y D un punto en el lado AC, trácese por D la perpendicular a la recta AC (llámese a esta recta r), sea B la intersección entre r y el lado EC; sea F un punto sobre la recta r tal que B está entre F y D, y además, la recta AF sea perpendicular a la recta EC; sea EA congruente AB, sea $\triangle ABE$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Demuestre que $\triangle ABF \cong \triangle AEC$. Graficar y determinar la hipótesis y tesis.

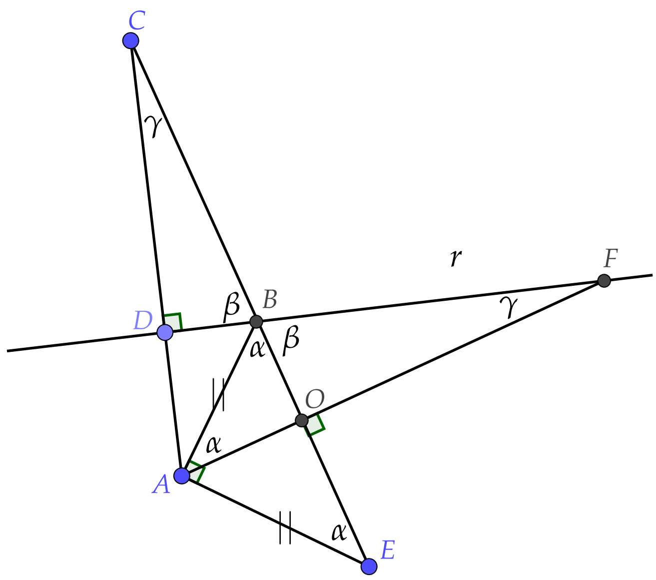

Figura 2.41. $\triangle AEC$.

Hipótesis: $\triangle AEC$, D un punto en el lado AC, r perpendicular a AC por D, B la intersección entre r y el lado EC, F un punto sobre la recta r tal que B está entre F y D, AF perpendicular a la recta EC, $EA \cong AB$, $\triangle ABE$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en A.

Tesis: $\triangle ABF \cong \triangle AEC$.

Demostración. Por hipótesis ($EA \cong AB$) se tiene que el $\triangle AEB$ es isósceles, por tanto, los ángulos en la base son congruentes (a estos los llamamos α). En este mismo triángulo, se cumple que la suma de los ángulos internos es un ángulo llano, luego se tiene que al sumar un ángulo recto con dos ángulos α nos da un ángulo llano. Consideremos ahora el $\triangle AOB$, este triángulo por hipótesis también es triángulo rectángulo y dos de sus ángulos son α y un ángulo recto; lo que nos permite concluir por diferencia de ángulos que el $B\widehat{A}O$ es también congruente con el ángulo α.

Si llamamos γ al ángulo $D\widehat{C}B$ y β al $D\widehat{B}C$, se tiene que el $O\widehat{B}F$ también es congruente con β (pues son opuestos por el vértice); mientras que el $B\widehat{F}O$ es congruente con γ (suma de ángulos internos de un triángulo).

Estudiemos ahora los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle BAF$, estos tienen los tres ángulos congruentes, pues tienen dos ángulos congruentes y el tercero (por la suma de ángulos internos de un triángulo) también lo es. Además, por el segundo criterio de congruencia, estos triángulos son congruentes (AE y AB congruentes y los ángulos adyacentes a dichos lados congruentes). □

2.6 Ejercicios propuestos

1. Demuestre que el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos es congruente a su semisuma.

2. Considere un ángulo agudo $\widehat{ab}$, un ángulo recto $\widehat{ac}$, tal que b está en su interior y el ángulo recto $\widehat{bd}$ tal que la semirecta a está en su interior. Demuestre que $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ son suplementarios y tienen la misma bisectriz.

3. Demuestre que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son semirectas opuestas.

4. Demuestre que las bisectrices de ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

5. Dado un triángulo equilátero $\triangle ABC$, considere tres puntos D, E, F sobre los lados o las prolongaciones de los lados del triángulo, tal que $AD \cong BE \cong CF$. Demuestre que el $\triangle DEF$ es equilátero.

6. Dado un triángulo isósceles $\triangle ABC$, considere sobre la recta de la base BC dos puntos D y E, los dos internos o externos a BC, tales que $BD \cong CE$. Demuestre que $AD \cong AE$.

7. Demuestre que dos triángulos que tienen respectivamente congruentes dos lados y las medianas relativas al tercer lado son congruentes, son congruentes.

8. Demuestre que dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen congruentes:

    a) un cateto y la bisectriz del ángulo agudo adyacente;

    b) un cateto y la bisectriz del ángulo recto.

9. Demuestre que son congruentes dos triángulos que tienen congruentes:

    a) dos lados y la mediana relativa a uno de esos lados;

    b) dos lados y la mediana relativa al tercer lado.

10. Demuestre que dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un lado y la mediana y la altura relativas a dicho lado.

11. La altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo lo divide en dos triángulos que tienen los ángulos congruentes.

3

Longitud de segmentos y amplitud de ángulos

3.1 Comparación entre segmentos

En esta sección se busca comparar segmentos intuitivamente; esto quiere decir que si dos segmentos no son congruentes, se pueda decidir cuál de ellos es mayor; este objetivo se alcanza mediante la aplicación del axioma de transporte C1.

Definición 3.1
Consideremos dos segmentos AB y CD, por el axioma $C1$ del transporte entre segmentos es posible transportar, sobre la semirecta AB de origen A , un segmento congruente a CD, sea AE. Supongamos además que E precede a B en el orden de A a B, es decir $E \prec B$ (Fig. 3.1). En tal caso se dirá que el segmento CD *es menor que el segmento* AB y se escribirá: $CD < AB$.

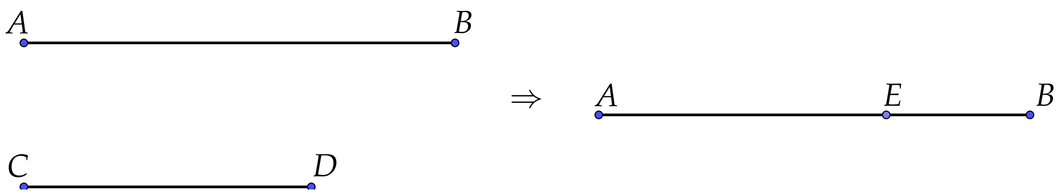

Figura 3.1. $AB > CD$.

Pero puede suceder que, dados dos segmentos AB y CD (Fig. 3.2), transportando el segmento CD sobre la semirecta AB de origen A, sobrepase al segmento AB (sea $AE \cong CD$); el punto E sigue a B en el ordenamiento de A a B; es decir, $B \prec E$.

En tal caso se dice que el segmento CD *es mayor que el segmento* AB, y se escribe: $CD > AB$.

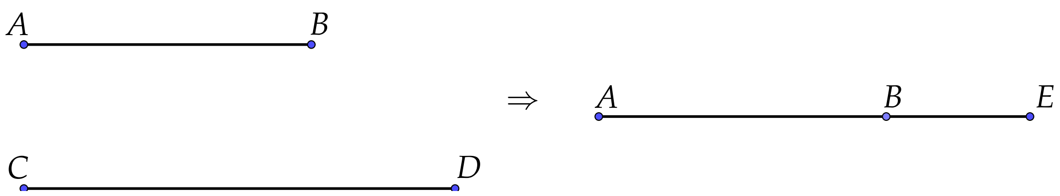

Figura 3.2. $AB < CD$.

Recordando la defínción dada antes de segmento menor, se puede también decir que el segmento AB es menor que el segmento CD, y escribir $AB < CD$.

Surge de manera espontánea la pregunta, ¿qué relación existe entre los conceptos de "mayor" y "menor" de segmentos?

Teorema 3.1

Consideremos dos segmentos AB y CD, es válido uno y sólo uno de los siguientes enunciados: $AB < CD$, $AB \cong CD$, $AB > CD$.

Demostración. Dados dos segmentos AB y CD, consideremos la semirecta de origen A que contiene a B; por el axioma $C1$ se puede determinar sobre tal semirecta un punto E , tal que $AE \cong CD$. Se presentan en la determinación de E sobre AB tres posibilidades; primero fijemos un orden; supongamos de A hacia B, el punto E precede, coincide o sigue al punto B ($E \prec B, E = B, E \succ B$). Si E precede a B, entonces $CD < AB$; si E coincide con B, entonces $CD \cong AB$; si E sigue a B, entonces $CD > AB$.

Se puede observar que cualquiera de las tres posibilidades excluye a las otras dos. $\square$

Las relaciones $<$ y $>$ entre segmentos son una la inversa de la otra; en el sentido de que si es válido que $AB > CD$ entonces es válido que $CD < AB$, y viceversa.

Teorema 3.2
La relación $<$ ($>$) entre segmentos es una relación de orden estricto.

Demostración.

a) La relación $<$ entre segmentos es antireflexiva, pues cualquiera que sea el segmento AB no se tiene que $AB < AB$, por cuanto, $AB \cong AB$ y por el teorema 3.1.

b) La relación $<$ entre segmentos es transitiva ($AB < CD$ y $CD < EF$, entonces $AB < EF$); por hipótesis se tiene que $AB < CD$, por tanto, existe (por el axioma de transporte) sobre la semirecta AB de origen A un punto G tal que $CD \cong AG$ y $G \succ B$ (Fig. 3.3), por tanto, $AB < AG$. Por hipótesis $CD < EF$, luego se tiene que existe un punto H sobre la semirecta CD de origen C que contiene a D tal que $CH \cong EF$ y $H \succ D$. Como $CD \cong AG$ se tiene que $AG < EF$; de esto último podemos decir que sobre la semirecta AG de origen A que contiene a G existe un punto K, tal que $AK \cong EF$ y $K \succ G$; resumiendo, $B \prec G \prec K$, por tanto, $AB < AK$; como $AK \cong EF$ se tiene que $AB < EF$.

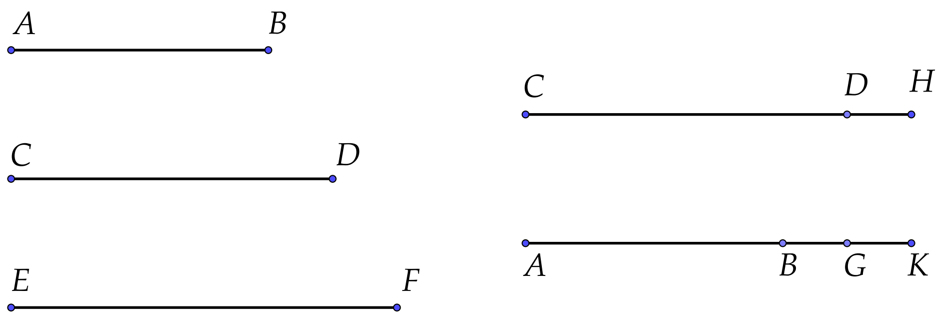

Figura 3.3. Comparación de segmentos.

□

Teorema 3.3
Si $AB < CD$ y $CD \cong EF$, entonces $AB < EF$.

La demostración de este teorema queda como ejercicio para el lector.

3.2 Longitud de un segmento

En esta sección se pretende dar el concepto de suma de segmentos, pero antes de ello necesitamos definir la longitud de un segmento.

Sean AB y CD dos segmentos (Fig. 3.4) que pertenecen a la recta r. Por el axioma del transporte se puede determinar un punto E, tal que $BE \cong CD$; en este caso es intuitivo llamar al segmento AE: suma de AB y CD. Análogamente, se puede tomar un segmento $DF \cong AB$ y llamar a CF el segmento suma de CD y DF. Por la congruencia de AB y DF, se puede decir que CF es la suma de AB y CD. Por lo tanto, los dos segmentos distintos AE y CF se pueden considerar como la suma de AB y CD. Estas observaciones nos permiten concluir que por suma de dos segmentos debe considerarse indiferentemente AE o CF o cualquier otro segmento XY, tal que $XY \cong AE$ y $XY \cong CF$; es decir, por suma debe entenderse una clase de todos los segmentos congruentes entre sí. Análogamente, AE es la suma tanto de AB y BE como de CD y DF, ya que $AB \cong DF$ y $BE \cong CD$; es decir, AE es la suma de dos segmentos que pertenecen a dos clases constituidas cada una de segmentos congruentes. Para indicar la clases de segmentos congruentes a AB se usará la notación $|AB|$ que llamaremos longitud de AB . La longitud será denotada mediante letras minúsculas $a, b, c, \cdot$ Por ejemplo, la longitud a de AB se indicará así $a = |AB|$.

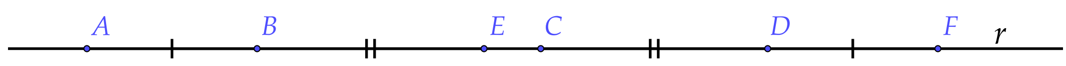

Figura 3.4. Longitud de un segmento.

Definición 3.2
Por *longitud de un segmento* AB, se entiende la clase de todos los segmentos congruentes a AB (es decir, la clase de equivalencia respecto a la relación de

congruencia entre segmentos, a la cual AB pertenece).

Se ha introducido el término longitud para acortar el lenguaje; en efecto, de aquí en adelante en lugar de decir "clase de segmentos congruentes a AB" se dirá "longitud de AB"; en lugar de decir "clase de segmentos suma de dos segmentos" diremos simplemente "longitud suma de dos longitudes dadas", etc. Además, para avanzar más rápidamente, cuando sea necesario operar sobre los elementos de una clase, se tomará como representativo cualquier elemento de la misma. Por ejemplo, si queremos hablar de la suma de las longitudes de dos segmentos AB y CD consideraremos, por ejemplo, la recta AB y sobre esta transportaremos el segmento $BE \cong CD$, entonces escribiremos (Fig. 3.4):

$$|AB| + |CD| = |AE|$$

Entre las longitudes hay una operación que la hemos indicado con el signo $+$ y que la llamaremos adición entre longitudes. Tal operación es interna (dado que la adición entre longitudes es también una longitud) y goza, como se demostrará de las propiedades conmutativa y asociativa. Nótese que usamos el signo $+$ para indicar la operación de adición entre longitudes; es decir, el mismo signo que se usa para la adición de números.

Teorema 3.4
La adición de longitudes satisface las propiedades conmutativa y asociativa.

Demostración. Sean a y b dos longitudes y consideremos las dos sumas $a+b$ y $b+a$. Consideremos dos segmentos adyacentes AB y BC de longitudes respectivamente a y b (Fig. 3.5).

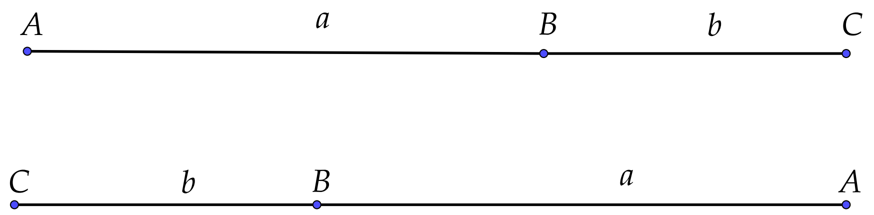

Figura 3.5. Interpretación geométrica de la suma de segmentos.

Se tiene que $a + b = |AB| + |BC| = |AC|$.

Como $|AC| = |CA|$ y $|CA| = |CB| + |BA| = b + a$

por tanto, se concluye que $a + b = b + a$.

Para demostrar la asociatividad, consideramos los segmentos dos a dos adyacentes AB, BC y CD de longitudes respectivamente a, b y c (Fig. 3.6). Se tiene que $a + b = |AC|$, $b + c = |BD|$ y por tanto $(a + b) + c = |AD|$ también $a + (b + c) = |AD|$, luego se tiene que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Figura 3.6. Interpretación geométrica de la propiedad asociativa de la suma de segmentos.

$\square$

La validez de la propiedad asociativa de la adición entre longitudes permiten simplificar la notación de la adición de tres o más longitudes; es decir, se puede omitir los paréntesis; se escribirá de aquí en adelante simplemente $a + b + c$ en lugar de $(a + b) + c$ o $a + (b + c)$.

Teorema 3.5
Con respecto a la suma de longitudes, existe un único elemento neutro, es decir, la longitud que sumada a una longitud b cualquiera, da como resultado b misma.

Demostración. Consideremos la clase de los segmentos AA, BB, CC, etc; estos son congruentes entre sí, por tanto, $|AB| + |BB| = |AB|$ además $|AA| + |AB| = |AB|$; la clase que se ha introducido es la de longitud nula, y la notaremos mediante 0. □

La demostración de la unicidad se deja como ejercicio.

3.3 Comparación entre longitudes

Sean AB y CD dos segmentos de longitud a y b respectivamente; si $AB < CD$, cualquier segmento de longitud a será menor de cualquier segmento de longitud b por el teorema 3.3. Por tanto, se puede dar la siguiente definición:

Definición 3.3
Dadas dos longitudes a y b, decimos que *a es menor que b* y escribimos $a < b$ si un segmento de longitud a es menor que un segmento de longitud b.

Análogamente se puede definir la relación de *mayor* $(>)$ entre longitudes.

Ejercicio.

1. Dar la definición de $a > b$.

2. Demostrar el siguiente teorema

Teorema 3.6
La relación $<$ $(>)$ entre longitudes es una relación de orden estricto.

Teorema 3.7
Dadas las longitudes a y b, condición necesaria y suficiente para que $a > b$ es que exista una longitud c ($c \neq 0$) tal que $b + c = a$.

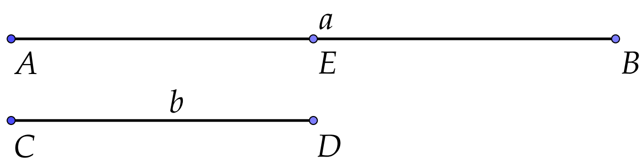

Figura 3.7. Longitud a mayor que la longitud b.

Demostración.
$\Rightarrow$) Sean $a = |AB|$ y $b = |CD|$; si $a > b$ (Fig. 3.7), entonces por definición de la relación $>$ entre longitudes y segmentos, es posible transportar el segmento CD sobre AB de modo que existe un punto E comprendido entre A y B tal que $AE \cong CD$. Luego, $|AB| = |AE| + |EB|$; si denotamos por $c = |EB|$ se tiene que $a = b + c$.
$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $a = b + c$. Consideremos sobre una recta los puntos A, E y B, de modo que $|AE| = b$ y $|EB| = c$; como $AB > AE$, se tiene que $a > b$. □

Note que, debido a que el segmento nulo es menor que cualquier otro, también su longitud es menor que cualquier otra; por tanto, cualquiera sea a, si $a \neq 0$, se tiene $a > 0$.

Definición 3.4
Se dice *parte de un segmento* AB a todo segmento CD cuyos extremos pertenecen al segmento AB y no coinciden simultáneamente con A y B.

Teorema 3.8

1. La longitud de un segmento es mayor que la longitud de una parte;

2. Un segmento no es congruente a una parte.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio.

Definición 3.5
Se llama *diferencia de dos longitudes a y b* (con $a \geq b$) a la longitud c tal que $a = b + c$; tal longitud se representa también mediante $c = a - b$.

Observemos que respecto a la adición de longitudes no puede existir el elemento opuesto de una longitud $a(\neq 0)$, es decir, el elemento a' tal que $a + a' = 0$; en efecto, si existiera, se tendría por el teorema 3.8 que $0 > a$, contrario a la observación hecha al final del teorema 3.7.

3.4 Comparación de ángulos convexos

Realizaremos consideraciones similares a las realizadas en la sección 3.1, en este caso para ángulos convexos. Primero indicamos cuándo un ángulo convexo se dice menor (mayor) que otro, recordando para este propósito, el axioma $C4$.

Definición 3.6
Dados los ángulos convexos $A\widehat{B}C$ y $D\widehat{E}F$ (Fig. 3.8) si existe un punto G interno a $D\widehat{E}F$ tal que $D\widehat{E}G \cong A\widehat{B}C$, decimos que $A\widehat{B}C$ es menor que $D\widehat{E}F$ (o que $D\widehat{E}F$ es mayor que $A\widehat{B}C$), y lo notamos por $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$ (o $D\widehat{E}F > A\widehat{B}C$).

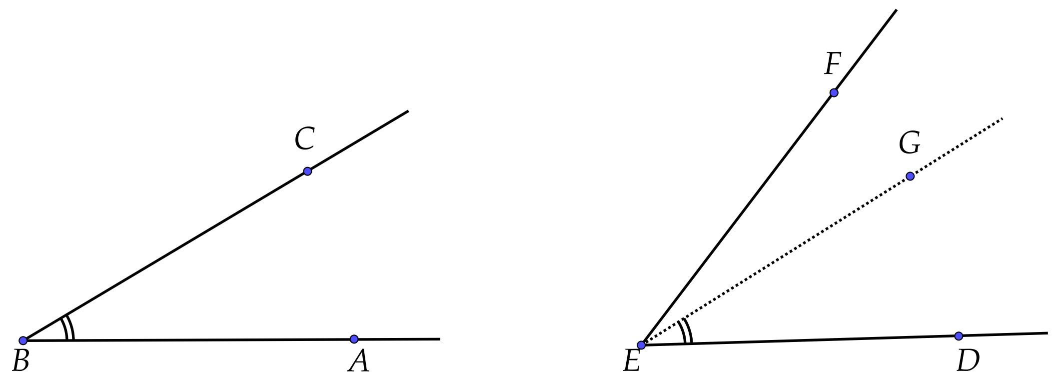

Figura 3.8. Ángulo $A\widehat{B}C$ menor que el $D\widehat{E}F$.

Son válidos para los ángulos convexos los teoremas análogos a los ya enunciados en la sección 3.1. Las demostraciones quedarán como ejercicio.

Teorema 3.9
Dados los ángulos convexos $A\widehat{B}C$ y $D\widehat{E}F$, es válida una y sólo una de las siguientes relaciones: $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$, $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$ o $A\widehat{B}C > D\widehat{E}F$.

Teorema 3.10
La relación $<(>)$ entre ángulos convexos es una relación de orden estricto.

Definición 3.7
Un ángulo convexo menor que un ángulo recto se llama *agudo*, un ángulo mayor que un ángulo recto se llama *obtuso*.

Teorema 3.11
Si $\widehat{ab} < \widehat{cd}$ $(\widehat{ab} > \widehat{cd})$ y $\widehat{cd} \cong \widehat{ef}$, entonces $\widehat{ab} < \widehat{ef}$ $(\widehat{ab} > \widehat{ef})$.

3.5 Amplitud de ángulos convexos

En esta sección hacemos las consideraciones realizadas en las secciones 3.2 y 3.3 y dado que existen muchas analogías, procederemos de manera rápida. Pero hay que hacer una importante diferencia pues la suma de ángulos convexos no siempre existe.

Definición 3.8

Dado un ángulo convexo $\widehat{ab}$, llamaremos *amplitud de tal ángulo* a la clase de todos los ángulos a él congruentes; es decir, la clase de equivalencia respecto a la relación de congruencia entre ángulos a la cual pertenece $\widehat{ab}$.

Indicaremos la amplitud de un ángulo $\widehat{ab}$ mediante dos barras verticales, o con una letra griega minúscula: $\alpha = |\widehat{ab}|$.

Cuando se considere una amplitud dada, para simplificar el discurso, se tomará un particular ángulo como representante de la clase; en general, cuando no exista riesgo de confusión se usará la misma letra griega para indicar la amplitud del ángulo o para indicar a un representante de la clase.

Si consideramos dos ángulos convexos pueden presentarse dos casos como en la Fig. 3.9.

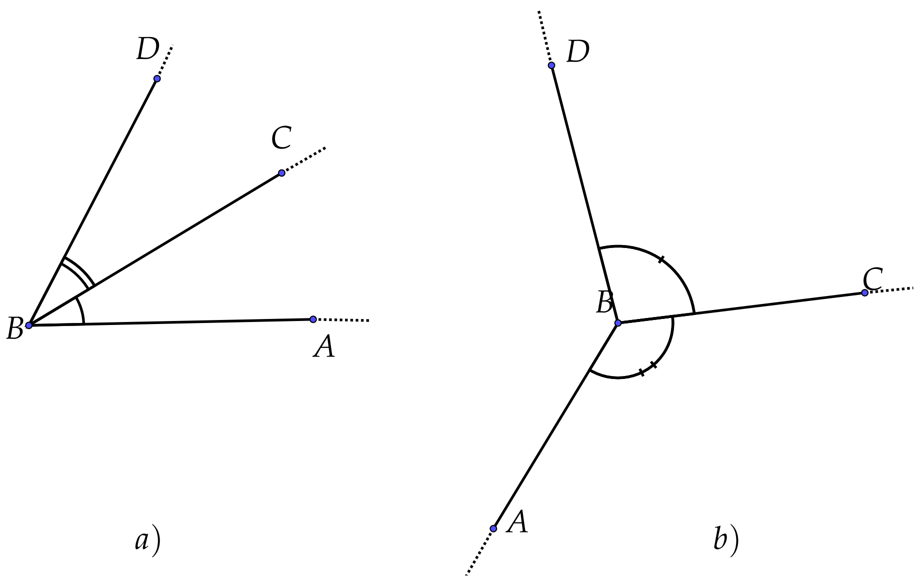

Figura 3.9. Suma de ángulos convexos.

En el caso $a)$, la suma de los dos ángulos convexos es también un ángulo convexo; en el caso $b)$, la suma de dos ángulos convexos no es un ángulo convexo; por esta razón en el conjunto de ángulos convexos la adición no siempre está definida.

Este hecho diferencia la amplitud de la longitud. Nos limitaremos por lo tanto a considerar solo ángulos convexos y ángulos suma convexos.

Teorema 3.12
Si existe la suma $\alpha + \beta$ de dos ángulos convexos α y β, entonces existe también la suma $\beta + \alpha$ y se tiene que $\alpha + \beta \cong \beta + \alpha$. La adición goza además de la propiedad asociativa.

Teorema 3.13
Respecto a la adición entre amplitudes, existe y es único el elemento neutro, es decir, la amplitud que adicionada a la amplitud α cualquiera, da como resultatado α.

Definición 3.9

Se dice que $A\widehat{B}C$ *es una parte del ángulo* $D\widehat{B}F$ si A y C son puntos internos del $D\widehat{B}F$ (Fig. 3.10 *a*)) o uno de ellos es interno y el otro está sobre uno de sus lados (Fig. 3.10 *b*)).

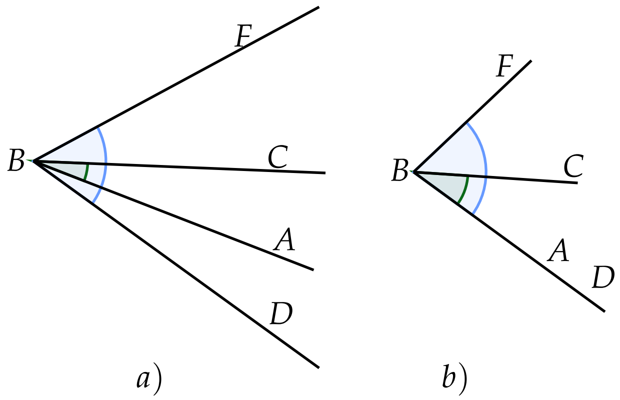

Figura 3.10. Ángulo $A\widehat{B}C$ es una parte del $D\widehat{B}F$.

Teorema 3.14

Toda amplitud de un ángulo es mayor que la amplitud de una de sus partes.

La demostración del teorema anterior queda como ejercicio.

Notas

1. Los ángulos convexos $\widehat{ab}$ y $\widehat{ba}$ tienen la misma amplitud (Fig. 3.11).

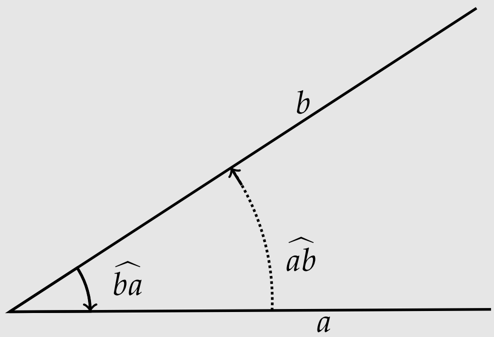

Figura 3.11. Ángulos $\widehat{ab}$ y $\widehat{ba}$.

2. Si a dos ángulos convexos congruentes se adicionan dos ángulos convexos congruentes, las respectivas sumas (supuestas convexas) son congruentes (Fig. 3.12); es decir, si $\alpha \cong \beta$ y $\gamma \cong \delta$ entonces $\alpha + \gamma \cong \beta + \delta$.

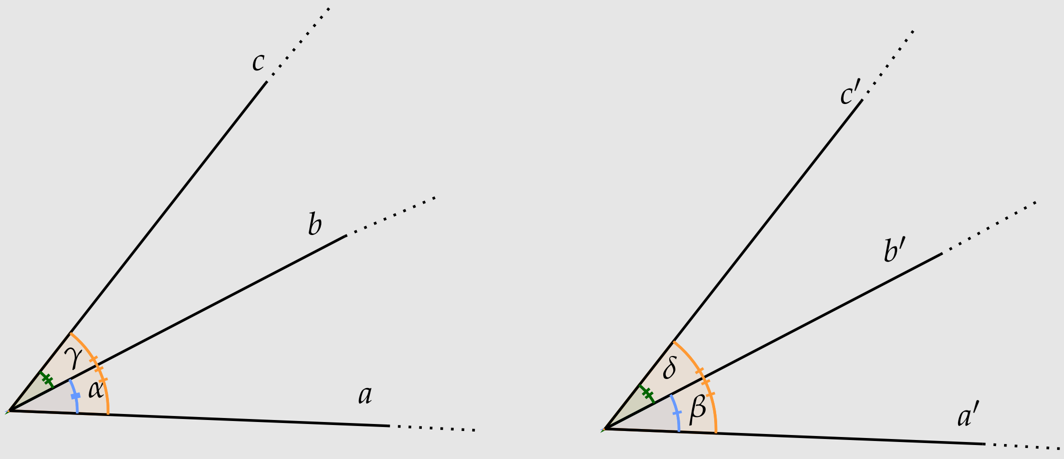

Figura 3.12. Suma de ángulos congruentes

3. Es válida la propiedad inversa de la anterior; es decir, si $\alpha + \gamma \cong \beta + \delta$ y además $\alpha \cong \beta$ entonces $\gamma \cong \delta$.

Si dos ángulos $\widehat{ab}$ y $\widehat{ac}$ de amplitud α y β respectivamente no son congruentes, existe un ángulo de amplitud γ tal que entre la amplitud α y β es válida una y sólo una de las siguientes relaciones:

a) $\beta = \alpha + \gamma$ (Fig. 3.13).

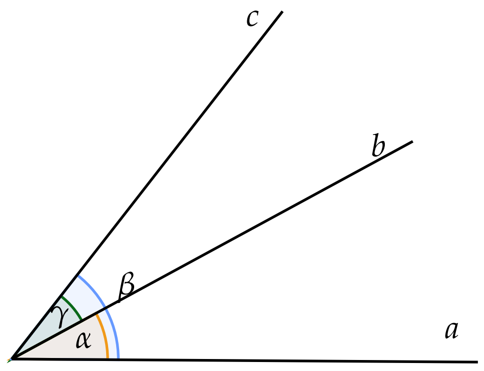

Figura 3.13. $\alpha < \beta$, $|\widehat{ac}| = \beta$.

b) $\alpha = \beta + \gamma$ (Fig. 3.14).

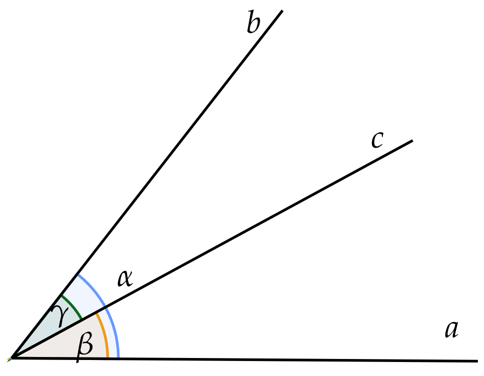

Figura 3.14. $\beta < \alpha$, $|\widehat{ab}| = \alpha$.

En el caso de $a)$ se dice que la amplitud α es menor que la amplitud β y se escribe $\alpha < \beta$; en el caso $b)$ se dice que α es mayor que β y se escribe $\alpha > \beta$.

Si $\beta = \alpha + \gamma$, la amplitud de γ se puede indicar también como: $\gamma = \beta - \alpha$ y se dice diferencia de las dos amplitudes β y α.

Se puede demostrar que si $\alpha \cong \beta$ y $\gamma \cong \delta$ y además $\gamma < \alpha$ y $\delta < \beta$, entonces $\alpha - \gamma \cong \beta - \delta$, es decir, las diferencias de parejas de ángulos congruentes son congruentes.

Ejercicio.
Demostrar las siguientes proposiciones:

1. Si $\alpha = |\widehat{ab}|$, $\beta = |\widehat{cd}|$ y $\alpha < \beta$ entonces $\widehat{ab} < \widehat{cd}$.
2. Si $\alpha = |\widehat{ab}|$, $\beta = |\widehat{cd}|$ y $\alpha > \beta$ entonces $\widehat{ab} > \widehat{cd}$.
3. Las diferencias de ángulos respectivamente congruentes son congurentes.

3.6 Aplicaciones a los triángulos

En la presente sección vamos a ver ejemplos de aplicaciones de los resultados vistos hasta ahora, en las propiedades de los triángulos.

Teorema 3.15
(Teorema del ángulo externo) En un triángulo cada ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos no adyacentes a él.

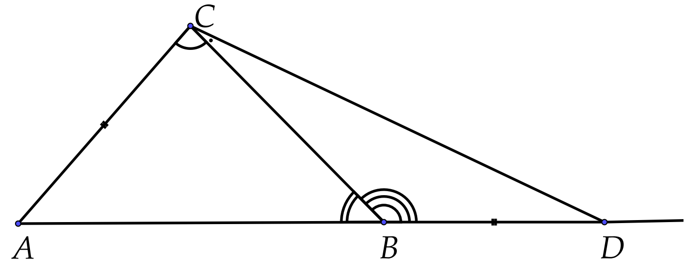

Figura 3.15. Ángulo externo de un triángulo.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo (Fig. 3.15). Consideremos el $C\widehat{B}D$, habiendo colocado al punto D de tal manera que $BD \cong AC$, queremos demostrar que

$C\widehat{B}D$ es mayor que los ángulos $A\widehat{C}B$ y $B\widehat{A}C$. Demostremos primero que $C\widehat{B}D > A\widehat{C}B$; para hacer esto supondremos inicialmente que $C\widehat{B}D \cong A\widehat{C}B$. Si esto fuese cierto se tendría que $\triangle ABC \cong \triangle CBD$ (por el primer criterio de congruencia), en particular sería $A\widehat{B}C \cong B\widehat{C}D$. Como $A\widehat{B}C$ es adyacente a $C\widehat{B}D$, por el teorema 2.1, lo mismo debería suceder con los ángulos $B\widehat{C}D$ y $A\widehat{C}B$, es decir D debería estar sobre el segmento AC; en este caso los puntos A, B, D y C estarían alineados, en contradicción con la hipótesis de que $\triangle ABC$ es un triángulo. Por tanto, se ha demostrado que un ángulo externo a un triángulo no puede ser congruente a uno de sus ángulos internos no adyacentes.

Demostremos ahora que no puede suceder que $C\widehat{B}D < A\widehat{C}B$. En efecto, si suponemos que si es menor, existiría una semirecta CX (Fig. 3.16) de origen C interna al $A\widehat{C}B$ tal que $X\widehat{C}B \cong C\widehat{B}D$. Sea E el punto de intersección entre CX y AB, el $\triangle CBE$ tiene un ángulo interno congruente a un ángulo externo, en contradicción a lo demostrado en el párrafo anterior. Por lo tanto, no puede ser $C\widehat{B}D < A\widehat{C}B$.

Se ha probado entonces que $C\widehat{B}D > A\widehat{C}B$. De modo análogo se demuestra que $A\widehat{B}F > C\widehat{A}B$, y como $A\widehat{B}F \cong C\widehat{B}D$ se tiene que por el teorema 3.11 se cumple $C\widehat{B}D > C\widehat{A}B$ □

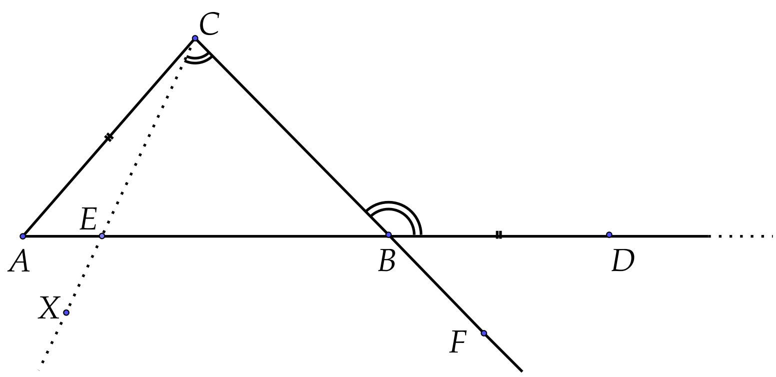

Figura 3.16. Ángulo externo de un triángulo.

Teorema 3.16
En un triángulo la amplitud de cada ángulo externo es igual a la suma de las amplitudes de los dos ángulos internos no adyacentes.

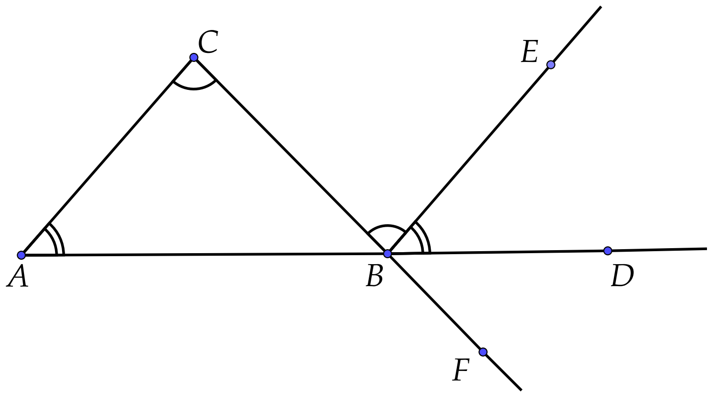

Figura 3.17. Interpretación teorema 3.16.

Demostración. Consideremos el ángulo externo $C\widehat{B}D$ de un $\triangle ABC$, del vértice B trazamos la recta BE paralela a AC (Fig. 3.17). E es interno al $C\widehat{B}D$, por tanto $|C\widehat{B}D| = |C\widehat{B}E| + |E\widehat{B}D|$.

Por el teorema 2.20 se tiene que $A\widehat{C}B \cong C\widehat{B}E$ y $B\widehat{A}C \cong E\widehat{B}D$.

Sustituyendo en la igualdad anterior se tiene $|C\widehat{B}D| = |A\widehat{C}B| + |B\widehat{A}C|$. Basta finalmente observar que $A\widehat{B}F \cong C\widehat{B}D$ (opuestos por el vértice) para que el teorema sea completamente demostrado.

$\square$

Teorema 3.17
En un triángulo, la suma de los ángulos internos tiene una amplitud de un ángulo plano.

Corolario 3.1
Los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo son agudos y complementarios.

Teorema 3.18
Si en un triángulo dos lados no son congruentes, al lado mayor se opone el ángulo mayor y viceversa.

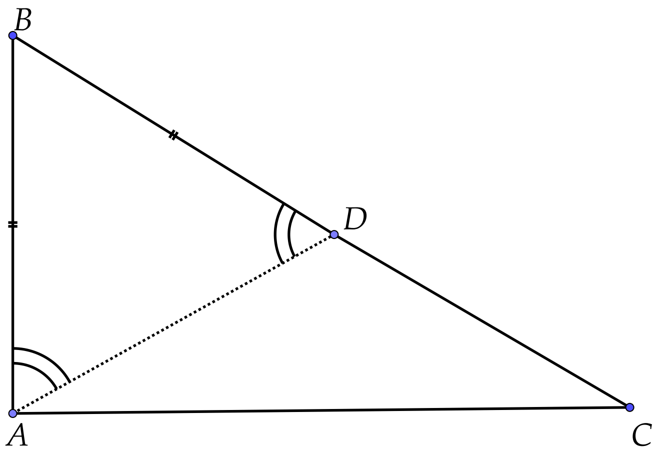

Figura 3.18. Interpretación teorema 3.18.

Demostración.

1. Supongamos que en el $\triangle ABC$ Fig. 3.18, el lado BC es mayor al lado AB, se tiene que demostrar que el $B\widehat{A}C$ es mayor al $A\widehat{C}B$. Sobre el lado BC, tomamos un punto D tal que $BD \cong AB$. El $\triangle ABD$ es isósceles por tanto los ángulos en la base son congruentes ($B\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B$). Por el teorema 3.15 (cualquier ángulo externo de triángulo es mayor que cualquiera de sus ángulos no adyacentes) considerando el $\triangle ACD$ se tiene que $A\widehat{D}B > A\widehat{C}D$ y por el teorema 3.11 se tiene que $B\widehat{A}D > A\widehat{C}D$. Pero $B\widehat{A}D < B\widehat{A}C$ (ya que el primero es una parte del segundo), se tiene por transitividad que $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$.

2. Ahora probemos que si $B\widehat{A}C > A\widehat{C}B$, entonces $BC > AB$. Si fuese $BC \cong$

AB entonces por el teorema 2.8 (ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes) sería $B\widehat{A}C \cong A\widehat{C}B$, lo que no es posible. Si fuese $BC < AB$, por la primera parte de este teorema sería $B\widehat{A}C < A\widehat{C}B$, lo cual no es posible. Por tanto debe ser necesariamente $BC > AB$.

□

Corolario 3.2
En un triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado mayor.

Teorema 3.19
En cada triángulo la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.

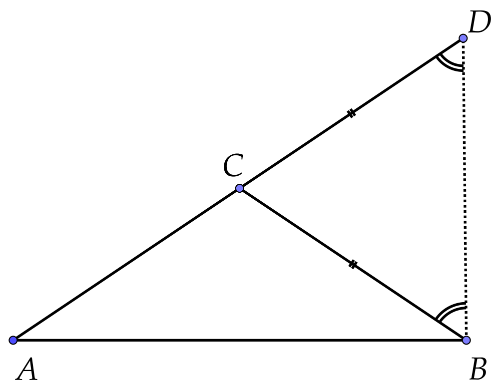

Figura 3.19. Ilustración del teorema 3.19.

Demostración. Dado el $\triangle ABC$ se desea probar que $|AC| + |CB| > |AB|$, $|AB| + |AC| > |BC|$ y que $|AB| + |BC| > |AC|$. Probaremos la primera, las demás se prueban de forma análoga.

1)	CD prolongación de AC	construcción;
2)	$CD \cong CB$	construcción, axioma de traslado de segmentos congruentes;
3)	$\lvert CD\rvert = \lvert CB\rvert$	de 2);
4)	$\triangle BCD$ es isóscels	de 2);
5)	$C\widehat{B}D \cong C\widehat{D}B$	de 4);
6)	BC es interno al $A\widehat{B}D$	C está entre A y D;
7)	$A\widehat{B}D > C\widehat{B}D$	todo ángulo es mayor a una de sus partes;
8)	$A\widehat{B}D > C\widehat{D}B$	de 5) y 7);
9)	$\lvert AD\rvert > \lvert AB\rvert$	En un triángulo a ángulo mayor se opone lado mayor;
10)	$\lvert AD\rvert = \lvert AC\rvert + \lvert CD\rvert$	construcción;
11)	$\lvert AD\rvert = \lvert AC\rvert + \lvert CB\rvert$	3) y 10);
12)	$\lvert AC\rvert + \lvert CB\rvert > \lvert AB\rvert$	11) y 9).

□

Corolario 3.3
En cada triángulo la longitud de cada lado es mayor que la diferencia de los otros dos.

Teorema 3.20
Si en un triángulo dos ángulos son congruentes, también los dos lados opuestos son congruentes.

Corolario 3.4
Si los tres ángulos de un triángulo tienen la misma amplitud entonces los tres lados tienen la misma longitud.

En base al teorema 3.17, es claro que no pueden existir triángulos con dos ángulos rectos, de lo contrario la suma de los ángulos internos sería mayor que un ángulo plano. Nótese que el teorema 3.17 se basa en el teorema 3.16, el cual se basa en el teorema 2.20, y este último se basa en el axioma P. Por tanto, el teorema 3.17 es válido solo en la geometría en la cual se requiere de P.

3.7 Triángulos rectángulos

En esta sección haremos consideraciones válidas únicamente para los triángulos rectángulos.

Teorema 3.21
Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen congruentes los catetos respectivos (Fig. 3.20)

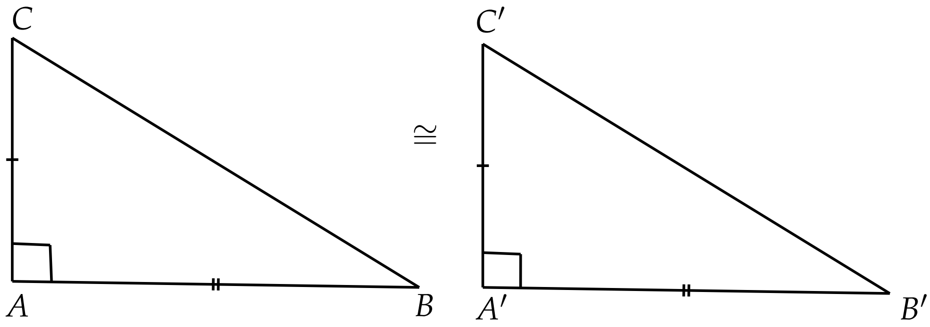

Figura 3.20. Ilustración del teorema 3.21.

Teorema 3.22
Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto (Fig. 3.21 a)) (o hipotenusa Fig. 3.21 b)) y un ángulo agudo congruente.

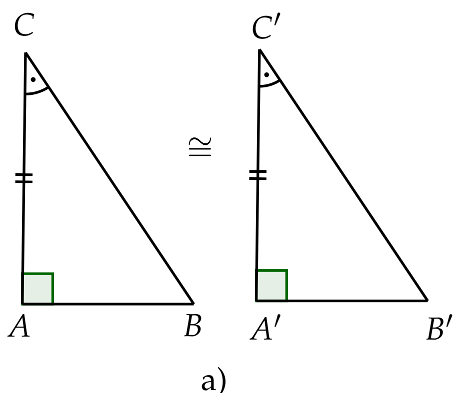

Figura 3.21. Triángulos rectángulos congruentes.

Teorema 3.23
Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y la hipotenusa congruentes (Fig. 3.22).

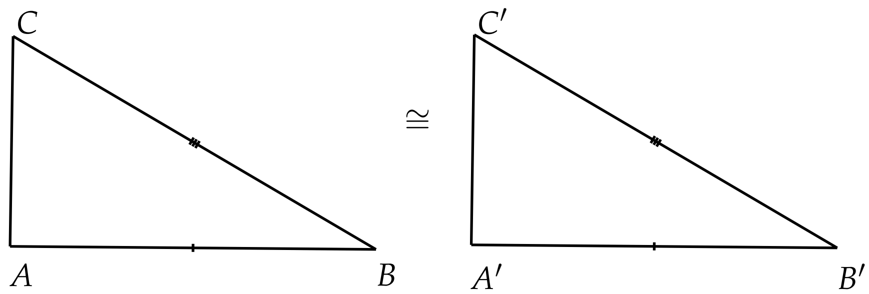

Figura 3.22. Triángulos rectángulos congruentes.

3.8 Ejercicios resueltos

1. Dado un paralelogramo $ABCD$, sea E un punto sobre la prolongación de AB, tal que $BE \cong BC$, y sea F un punto sobre la prolongación de AD tal que $CD \cong DF$. Demuestre que:

   a) E, F y C están alineados;

   Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo; $BE \cong BC$; $CD \cong DF$.

Tesis: E, F y C están alineados.

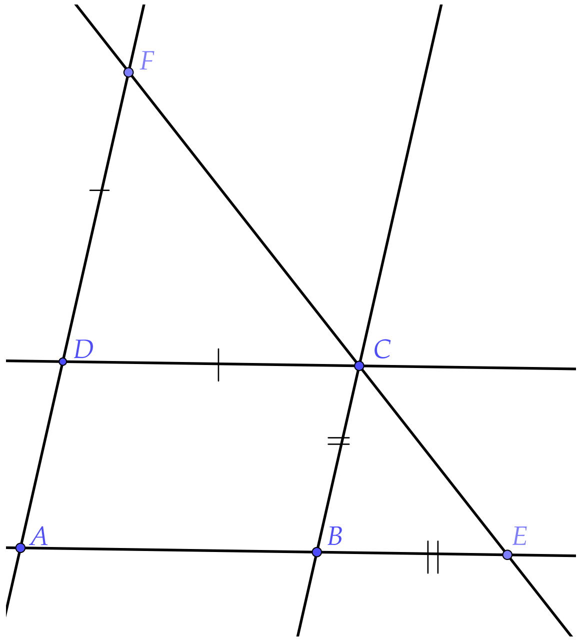

Figura 3.23. Paralelogramo $ABCD$.

Demostración. Los triángulos $\triangle DCF$ y $\triangle BEC$ son isósceles; por tanto, $D\widehat{F}C \cong D\widehat{C}F$ y $B\widehat{C}E \cong B\widehat{E}C$.

Por ángulos correspondientes en rectas paralelas cortadas por una transversal se cumple:

$$F\widehat{D}C \cong D\widehat{C}B \cong C\widehat{B}E$$

.

Por suma de ángulos internos de un triángulo se tiene que:

$$D\widehat{C}F \cong B\widehat{C}E$$

Por suma de ángulos se tiene que la suma de los ángulos $D\widehat{C}F$, $B\widehat{C}D$ y $B\widehat{C}E$ es un ángulo llano; por tanto, $F\widehat{C}E$ es un ángulo llano. Es decir, los puntos E, F y C están alineados. □

b) Todos los paralelogramos que tienen un lado sobre AB y el otro sobre AD y el cuarto vértice sobre FE tienen perímetros congruentes (Perímetro es la suma de los lados).

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo; $BE \cong BC$; $CD \cong DF$; $AJIH$ paralelogramo.

Tesis: Los paralelogramos $ABCD$ y $AJIH$ tienen el mismo perímetro.

Demostración. El $\triangle KIC$ es isósceles (los ángulos en C e I son congruentes); luego, $CK \cong KI$. Además, $DH \cong CK \cong KI \cong BJ$, $HA \cong KB \cong IJ$, $DC \cong HK \cong AB$.

Como el perímetro de $ABCD$ es la suma de DC, CK, KB, AB, HA y DH; además, el perímetro de $AJIH$ es la suma de AB, BJ, IJ, KI, HK y HA. Debido a las congruencias anteriores se tiene que la suma de las longitudes de los lados de los dos paralelogramos es la misma.

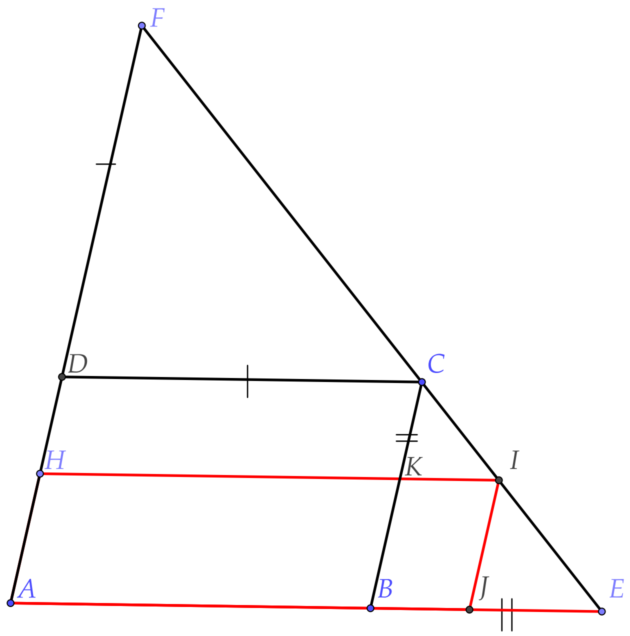

Figura 3.24. Paralelogramo $ABCD$.

$\square$

2. Si en un triángulo se une un punto interno P con los dos extremos de uno de sus lados (se trazan dos segmentos desde P, uno a cada extremo), el ángulo formado por estos segmentos es mayor que el ángulo entre los otros dos lados del triángulo no considerados.

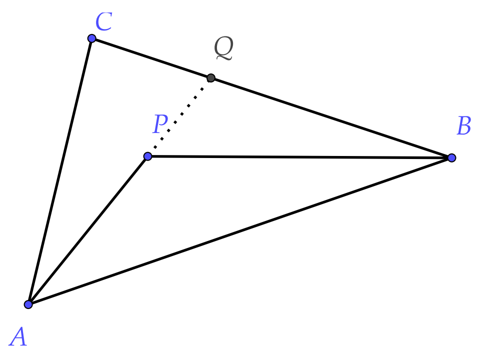

Figura 3.25. Punto P interno al $\triangle ABC$.

Hipótesis: $\triangle ABC$; P un punto interno del triángulo.

Tesis: $A\widehat{P}B > A\widehat{C}B$

Demostración. Prolongando el segmento AP hasta intersecar con el lado BC en el punto Q. Considerando el $\triangle BPQ$, se tiene que el $A\widehat{P}B$ es externo y por tanto:

$$|A\widehat{P}B| = |B\widehat{Q}P| + |P\widehat{B}Q| \tag{3.1}$$

Considerando el $\triangle ACQ$, se tiene que el $B\widehat{Q}P$ es externo y por tanto:

$$|B\widehat{Q}P| = |C\widehat{A}P| + |A\widehat{C}B| \tag{3.2}$$

De las ecuaciones 3.1 y 3.2 se tiene:

$$|A\widehat{P}B| = |C\widehat{A}P| + |A\widehat{C}B| + |P\widehat{B}Q|$$

luego $A\widehat{C}B$ es una parte de $A\widehat{P}B$, y por tanto:

$$A\widehat{P}B > A\widehat{C}B$$

□

3. Si en un $\triangle ABC$ el lado BC es mayor que los otros dos lados, y en él se toman los segmentos $BP \cong BA$, $CQ \cong CA$, entonces el $P\widehat{A}Q$ es congruente a la mitad de la suma de los dos ángulos adyacentes al lado mayor BC.

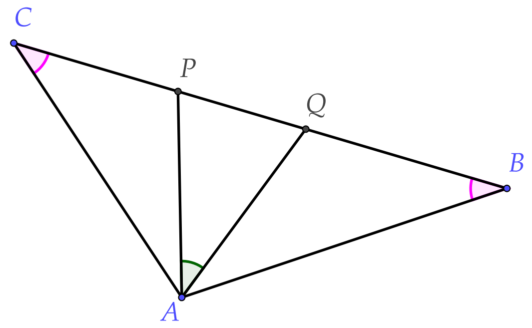

Figura 3.26. $\triangle ABC$.

Hipótesis: $\triangle ABC$, BC es el lado mayor, P y Q puntos del lado BC, $BP \cong BA$ y $CQ \cong CA$.

Tesis: $|P\widehat{A}Q| = \frac{|\widehat{B}|+|\widehat{C}|}{2}$

Demostración. Los triángulos $\triangle ACQ$ y $\triangle ABP$ son isósceles por tener dos lados congruentes, por tanto se tiene:

$$|A\widehat{Q}C| = |C\widehat{A}Q| = \alpha \tag{3.3}$$

y

$$|B\widehat{A}P| = |A\widehat{P}B| = \beta \tag{3.4}$$

En el $\triangle APQ$ se cumple:

$$\alpha + \beta + |P\widehat{A}Q|$$

es un ángulo llano y en el $\triangle ABC$ se cumple:

$$\alpha + \beta + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| - |P\widehat{A}Q|$$

es un ángulo llano.

Como los ángulos llanos son congruentes, se tiene:

$$\alpha + \beta + |P\widehat{A}Q| = \alpha + \beta + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| - |P\widehat{A}Q|$$

de donde:

$$|P\widehat{A}Q| = \frac{|\widehat{B}| + |\widehat{C}|}{2}$$

□

4. Si en un triángulo se une un punto interno con los extremos de un lado, entonces la suma de los dos segmentos formados es menor que la suma de los lados no considerados.

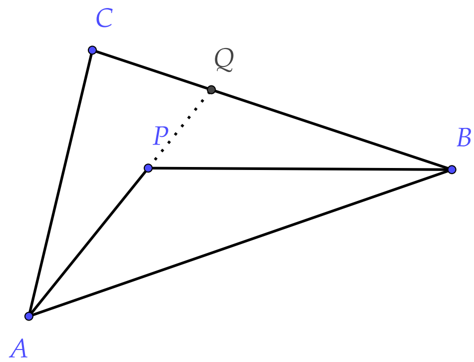

Figura 3.27. Segmentos formados por un punto interior a un triángulo y sus vértices.

Hipótesis: P un punto interno del $\triangle ABC$.

Tesis: $AP + BP < AC + BC$

Demostración. Prolongando el segmento AP hasta intersecar con el lado BC en el punto Q. Considerando el $\triangle BPQ$, se tiene que:

$$BP < BQ + PQ \tag{3.5}$$

Ahora considerando el $\triangle ACQ$, se tiene que:

$$AQ < AC + CQ \tag{3.6}$$

Sumando las desigualdades (3.5) y (3.6),

$$AQ + BP < AC + CQ + BQ + PQ$$

Restando a los dos lados de la desigualdad PQ

$$AQ - PQ + BP < AC + CQ + BQ + PQ - PQ$$

como $AQ - PQ \cong AP$ y $CQ + BQ \cong BC$ se obtiene:

$$AP + BP < AC + BC$$

□

5. En un triángulo, la suma de los tres segmentos que une un punto interno con los tres vértices es menor que el perímetro y mayor que el semiperímetro del triángulo.

   Hipótesis: P un punto interno del $\triangle ABC$

   Tesis: $AP + BP + CP < AB + AC + BC$ y

   $AP + BP + CP > \frac{AB+AC+BC}{2}$

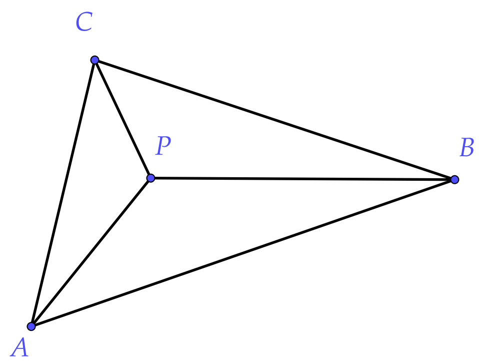

Figura 3.28. Suma de segmentos formados por un punto interno a un triángulo.

   Demostración. Utilizando la proposición anterior, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$AP + BP < AC + BC \tag{3.7}$$

$$BP + CP < AB + AC \tag{3.8}$$

$$CP + AP < BC + AB \tag{3.9}$$

   Sumando las desigualdades (3.7), (3.8) y 3.9) se obtiene

$$2AP + 2BP + 2CP < 2AB + 2BC + 2AC$$

   de donde se concluye que:

$$AP + BP + CP < AB + BC + AC$$

   Para demostrar la segunda desigualdad consideramos los triángulos internos y aplicamos el teorema que indica que la suma de dos lados de un triángulo es mayor al tercero.

$$AP + BP > AB \tag{3.10}$$

$$AP + CP > AC \tag{3.11}$$

$$CP + BP > CB \tag{3.12}$$

Sumando las desigualdades (3.10), (3.11) y 3.12) se obtiene

$$2AP + 2BP + 2CP > AB + AC + CB$$

Por lo que se puede concluir que:

$$AP + BP + CP > \frac{AB + AC + BC}{2}$$

□

6. Dados los ángulos convexos $A\widehat{B}C$ y $D\widehat{E}F$, es válida una y sólo una de las siguientes relaciones: $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$, $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$ o $A\widehat{B}C > D\widehat{E}F$.

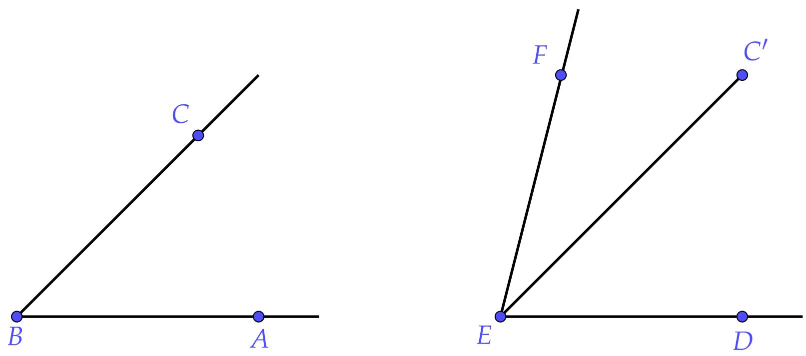

Figura 3.29. Ángulos $A\widehat{B}C$ y $D\widehat{E}F$.

Hipótesis: $A\widehat{B}C$ y $D\widehat{E}F$

Tesis: $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$ o $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$ o $A\widehat{B}C > D\widehat{E}F$.

Demostración. Por el axioma de transporte de ángulos, dada la semirecta ED de origen E que contiene a D, existe una única semirecta (de origen E) sobre el semiplano de origen ED que contiene al punto F; llamenos a esta semirecta EC', tal que el $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}C'$. Esta semirecta puede ser interior al $D\widehat{E}F$ o puede coincidir con la semirecta EF, o puede ser exterior al $D\widehat{E}F$; pero, no pueden ocurrir las tres posibilidades simultáneamente. Las tres posibilidades anteriores muestran que solo puede ocurrir una sola de las siguientes relaciones $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$ o $A\widehat{B}C < D\widehat{E}F$ o $A\widehat{B}C > D\widehat{E}F$. □

3.9 Ejercicios propuestos

1. Dado un $\triangle ABC$, demuestre que la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en dos partes, cada una menor al lado adyacente.

2. Si en un $\triangle ABC$ se cumple que $AB < AC$, la bisectriz AM divide al lado opuesto en dos partes BM y MC tales que $BM < MC$.

3. En un triángulo cada mediana es menor que la semisuma de los dos lados concurrentes a ella y mayor que su semidiferencia.

4. Si en un triángulo dos medianas no son congruentes, a la mediana mayor le corresponde el lado menor.

5. La suma de dos ángulos opuestos en un cuadrilátero es menor que dos ángulos planos.

6. En un cuadrilátero convexo cada diagonal es menor que el semiperímetro.

7. Si dos lados de un triángulo no son congruentes, la mediana trazada de su vértice común forma con el lado opuesto ángulos no congruentes y al ángulo mayor se opone el lado mayor.

8. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es mayor que la semisuma de los catetos.

9. Si en un triángulo una mediana es congruente con la mitad del lado donde ésta recae, entonces el triángulo es rectángulo y aquel lado es la hipotenusa.

10. Si en un triángulo rectángulo un ángulo agudo es el doble del otro, entonces la hipotenusa es el doble del cateto menor.

11. En un triángulo rectángulo, el ángulo formado por la mediana y la altura relativa a la hipotenusa es congruente a la diferencia de los dos ángulos agudos del triángulo.

12. Si dos triángulos tienen congruentes sus ángulos y el perímetro, entonces los triángulos son congruentes.

4

Transformaciones geométricas elementales: Simetría central, traslaciones

4.1 Isomorfismos

Supondremos la existencia de al menos dos planos α y β.

Definición 4.1

Una correspondencia biunívoca f (biyección) entre puntos de dos planos α y β, tal que a rectas de un plano le hace corresponder rectas del otro plano, se llama *isomorfismo entre* α *y* β.

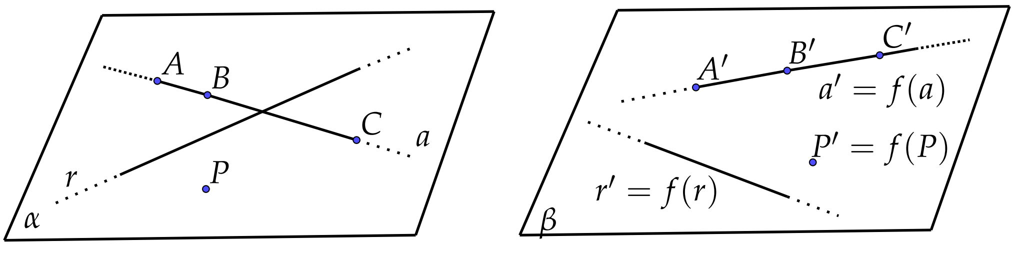

Figura 4.1. Isomorfismo de α en β.

En otras palabras, el isomorfismo f hace corresponder a los puntos del plano α los puntos de β; además, cuando se dice que f hace corresponder rectas de α con rectas de β, se quiere decir que f mantiene la alineación de los puntos, es decir, que si tres puntos A, B y C de α, pertenencientes a la recta a, sus correspondientes que indicamos con A', B' y C', pertenecen a la recta a' correspondiente a a según f (Fig. 4.1). Se indicará el isomorfismo mediante

$$f : \alpha \to \beta$$

Si la recta $r' \subset \beta$ es la correspondiente de $r \subset \alpha$, se escribirá $r' = f(r)$ (se lee "r prima es igual a f de r ")(Fig. 4.1). Observemos que, ya que f transforma rectas en rectas, f conserva la relación de orden entre los puntos, por tanto, si C está entre A y B, también C' deberá estar entre A' y B'. Esto implica que f hace corresponder un segmento con un segmento.

Teorema 4.1

Si f es un isomorfismo entre α y β; f transforma un semiplano de α de origen r en un semiplano de β de origen $r' = f(r)$.

Demostración. Sean A y B dos puntos del plano α que no pertenecen a la recta r origen de un semiplano α' de α (Fig. 4.2). Por definición de semiplano, si $A \in \alpha'$ y $B \in \alpha'$, se tiene que la intersección del segmento AB con la recta r es el conjunto vacío; pero f es una aplicación biyectiva; por tanto, todo conjunto vacío se corresponde por f con un conjunto vacío; por tanto, si A', B' y r' son los correspondientes de A, B y r en el isomorfismo indicado, se tiene que la intersección entre el segmento $A'B'$ y r' es el conjunto vacío. Esto significa que A' y B' están en el mismo semiplano de origen r'. Además, tomando dos puntos C y D situados en partes opuestas respecto a r, el segmento CD tiene un punto P sobre r. Se tiene, por la correspondencia biunívoca, que además el segmento $C'D'$ debe tener un punto de intersección con r', y por tanto, C' y D' pertenecen a semiplanos opuestos de β (Fig. 4.2). Pero si los correspondientes de los puntos del semiplano α' están del mismo lado respecto a r', esto significa que al semiplano α de origen r le corresponde un semiplano de origen r'. $\square$

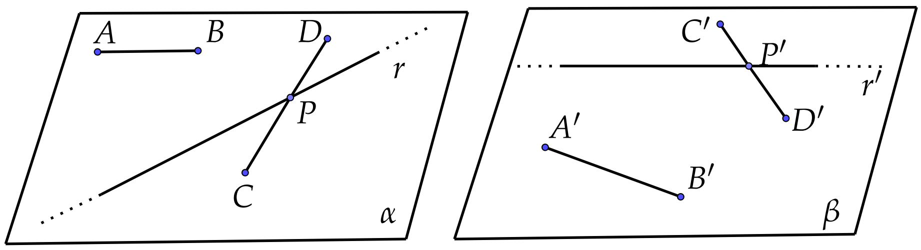

Figura 4.2. Transformación de un semiplano mediante un isomorfismo.

Teorema 4.2
Un isomorfismo f hace corresponder a rectas incidentes de α, rectas incidentes de β; a rectas paralelas de α, rectas paralelas de β.

Demostración. En efecto, si $r \cap s = \{P\}$, el correspondiente de P es el punto P', tal que $P' \in r' \cap s'$, esto último debido a que el correspondiente P' de P debe pertenecer a la recta $r' = f(r)$, y también debe pertenecer a la recta $s' = f(s)$ (Fig. 4.3). Además, el punto P' es el único punto de la intersección de r' y s', dado que estas rectas son distintas.

Supongamos ahora que $r||t$ con $r \cap t = \emptyset$; supongamos por reducción al absurdo que $f(r) \cap f(t) \neq \emptyset$, por tanto, tendrá al menos un elemento; sea este el punto Q', como f es una correspondencia biunívoca que conserva la pertenencia, debería existir en α un punto $Q = f^{-1}(Q')$ tal que $Q \in r \cap t$; pero esto es absurdo, pues r y t son paralelas (Fig. 4.3). $\square$

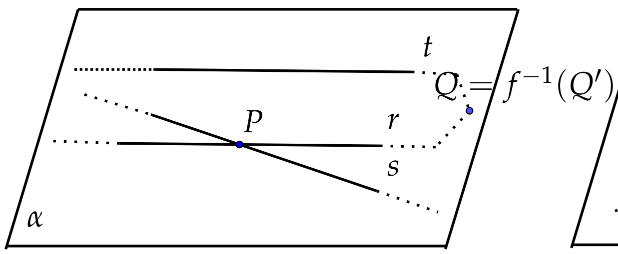

Figura 4.3. Transformación de rectas incidentes y rectas paralelas mediante un isomorfismo.

Teorema 4.3
El isomorfismo entre dos planos hace corresponder a un ángulo convexo de α un ángulo convexo de β

4.2 Isomorfismo de un plano en sí mismo

Si en lugar de considerar dos planos distintos α y β consideramos dos planos coincidentes, entonces el isomorfismo envía los puntos de α en puntos de α mismo (Fig. 4.4). Las consideraciones anteriores, por tanto, pueden ser útiles para este estudio.

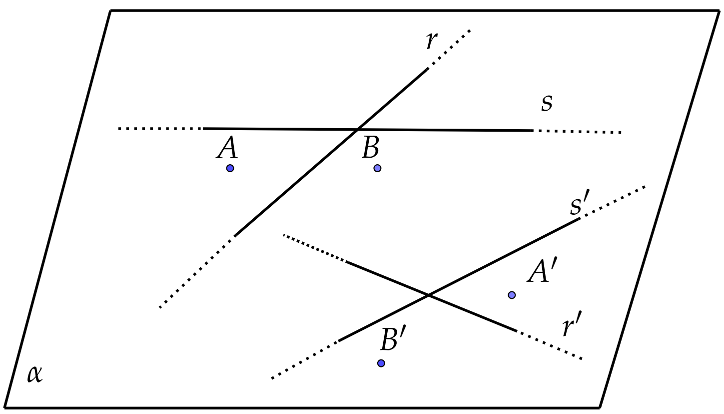

Figura 4.4. Isomorfismo de un plano en si mismo.

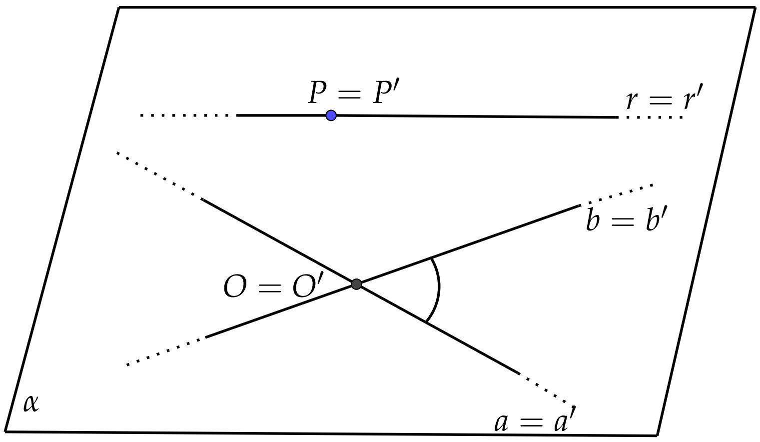

Figura 4.5. Isomorfismo Identidad.

El isomorfismo de un plano sobre sí mismo es un caso particular de isomorfismo entre planos; por tanto son válidas las propiedades hasta ahora vistas. En particular el isomorfismo "envía" puntos del plano α en puntos de α, rectas incidentes de α en rectas incidentes de α, rectas paralelas de α en rectas paralelas de α, ángulos convexos de α en ángulos convexos de α. Entre todos los isomorfismos de α sobre si mismo se considera uno particular: el isomorfismo idéntidad. Tal isomorfismo envía cada punto de α en el mismo punto; es decir, para cada P se tiene $f(P) = P$. Cada figura se corresponde a si misma en este isomorfismo (Fig. 4.5). De ahora en adelante consideraremos solamente isomorfismos de un plano en si mismo.

Definición 4.2
Se dice que un isomorfismo f de un plano en si mismo es una *isometría* si , para cada par de puntos A y B del plano, se tiene que los segmentos AB y $f(A)f(B)$ son congruentes: $AB \cong f(A)f(B)$ (Fig. 4.6)

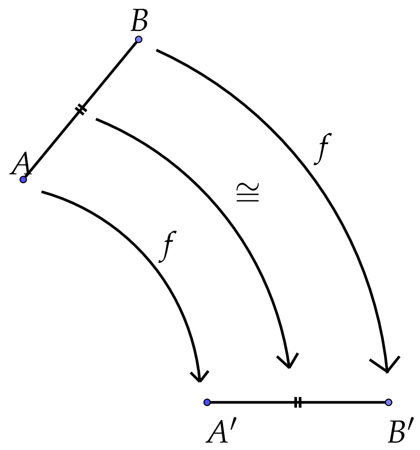

Figura 4.6. Isometría f.

Teorema 4.4
La aplicación (función) inversa de una isometría es una isometría.

Demostración. (En toda correspondencia biunívoca entre dos conjuntos A y B, si representamos con f la correspondencia de A en B y con f^{-1}, la correspondencia inversa de B en A se verifica que si $P \in A$, $P' \in B$ y $f(P) = P'$, entonces $f^{-1}(P') = P$). Sean A y B dos puntos cualesquiera de α (Fig. 4.6), por la isometría f se tiene que si $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ entonces $AB \cong A'B'$. Pero $f^{-1}(A') = A$ y $f^{-1}(B') = B$. La congruencia de segmentos goza de la propiedad simétrica y por tanto $A'B' \cong AB$, por tanto f^{-1} es una isometría. □

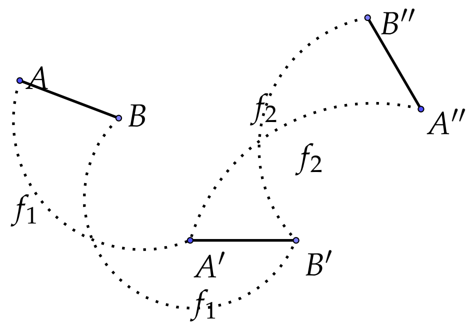

Figura 4.7. Composición de isometrías $f_2 \circ f_1$

Teorema 4.5
La composición de dos isometrías es una isometría.

Demostración. Consideremos dos isometrías en α, sean f_1 y f_2 (Fig. 4.7). Consideremos dos puntos A y B, por definición de isometría se tiene de $f_1(A) = A'$, $f_1(B) = B'$ que $AB \cong A'B'$. Consideremos la isometría f_2, por definición se debe tener que si $f_2(A') = A''$ y $f_2(B') = B''$, entonces $A'B' \cong A''B''$. Por la propiedad transitiva de la relación de congruencia de segmentos se tiene que $AB \cong A''B''$. Representando, como de costumbre $f_2 \circ f_1$ la correspondencia biunívoca que envía A en A'' y B en B'', se tiene que $f_2 \circ f_1$ es una isometría pues $AB \cong A''B''$. $\square$

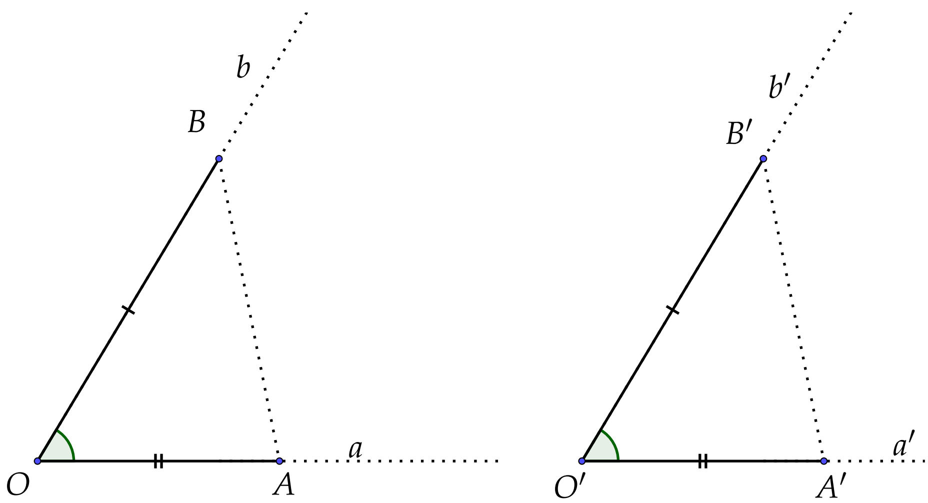

Figura 4.8. Ángulos correspondientes en una isometría

Teorema 4.6
Los ángulos que se corresponden en una isometría son congruentes (Fig. 4.8).

Demostración. Sea f una isometría que asocia el ángulo $\widehat{ab}$ con el ángulo $\widehat{a'b'}$. Se quiere probar que $\widehat{ab} \cong \widehat{a'b'}$. Sea O el vértice de $\widehat{ab}$. Tomemos dos puntos $A \in a$ y $B \in b$. Sean O', A' y B' los correspondientes de O, A y B según la isometriá f.

Entonces, por la definición de isometría, se tiene que $AB \cong A'B'$, $OA \cong O'A'$ y $OB \cong O'B'$. Luego, por el tercer criterio de congruencia de triángulos se tiene que $\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$. Por tanto, son congruentes los ángulos correspondientes $\widehat{ab}$ y $\widehat{a'b'}$. □

Corolario 4.1
Los triángulos que se corresponden en una isometría son congruentes.

Definición 4.3
Dos figuras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ se dicen congruentes (y se escribe $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$) si existe una isometría f tal que $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$.

Consideremos dos polígonos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ que se corresponden en una isometría; estos son congruentes. Se vió que en una isometría los segmentos y los ángulos que se corresponden son congruentes; por tanto, si dos polígonos son correspondientes en una isometría, entonces tienen congruentes los lados y ángulos correspondientes (Fig. 4.9).

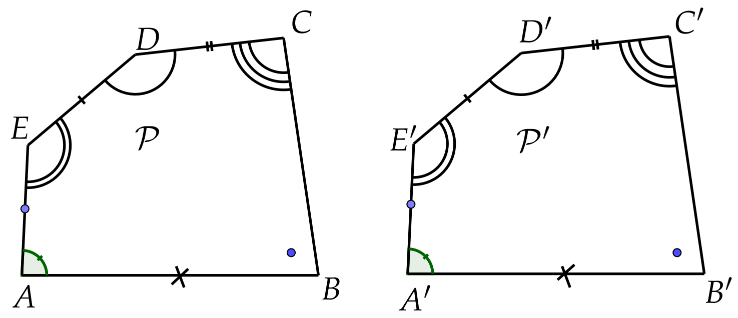

Figura 4.9. Polígonos congruentes

Definición 4.4
Sea P un punto del plano y sea f una isometría definida en el plano; si $P = f(P)$, es decir, P se corresponde a sí mismo en la isometría, entonces P se

> dice unido. Si todos los puntos de una recta son unidos, la recta se dice lugar de puntos unidos, si todos los puntos de una recta tienen su correspondiente sobre la misma recta, la recta se dice unida.

4.3 Simetría central

En esta sección se estudiarán particulares isometrías, a saber las simetrías centrales, porque los puntos que se corresponden los llamaremos simétricos respecto a un punto llamado centro de la simetría. Primero se define tal simetría, se debe decir qué se entiende por puntos simétricos y por centro de una simetría.

Se definió el centro de un segmento en la sección 2.4, pero no se dijo en esa ocasión, algo al respecto de su existencia; podemos sin embargo demostrar que:

Teorema 4.7
El centro de un segmento existe y es único.

Demostración. Para la demostración, comenzaremos con la construcción del centro de un segmento dado AB.

Sea dado un segmento AB (Fig. 4.10). A partir de A se traza una semirecta AC (con C externo a la recta AB). En el semiplano que tiene como origen la semirecta AB y no contiene a C, se traza a partir de B una semirecta BD, paralela a AC, haciendo que $AC \cong BD$. Si unimos los puntos C y D, la recta CD interseca a la recta AB en un punto O. Se demuestra que $AO \cong OB$ (Segundo criterio de congruencia), por tanto, O es el centro de AB .

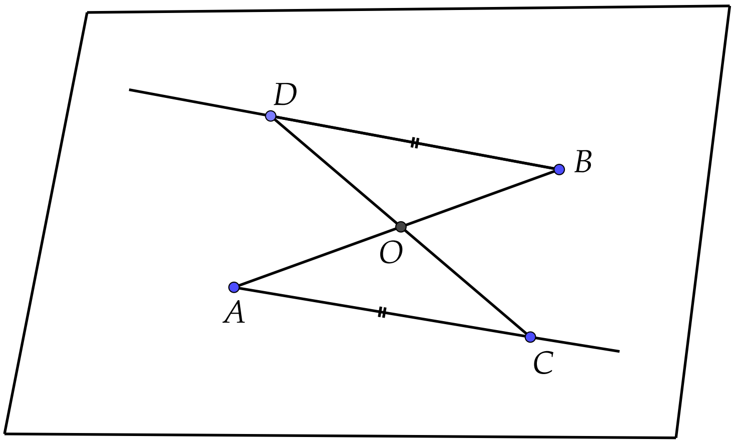

Figura 4.10. Construcción del centro de un segmento

Ahora probemos que este centro es único. Suponiendo por absurdo, que un segmento AB tiene dos centros distintos O y P.

Pueden presentarse dos casos:

1. O está entre A y P, y P está entre O y B (Fig. 4.11);

2. P está entre A y O, y O está entre P y B (Fig. 4.12).

Se demuestra que el caso 1 es absurdo. En base a la defininción de centro, se debe tener que $AO \cong OB$ y $AP \cong PB$. Como P está entre O y B se tiene que $PB < OB$. Además, ya que O está entre A y P, se tiene que $AO < AP$. Como $AP \cong PB$, se tiene que $AO < PB$, y como $AO \cong OB$, $OB < PB$, lo que es un absurdo (teorema 3.1).

Análogamente se demuestra que el caso 2 es absurdo. $\square$

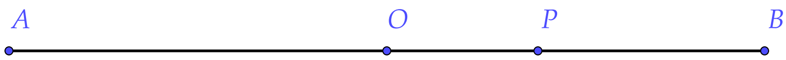

Figura 4.11. Caso 1.

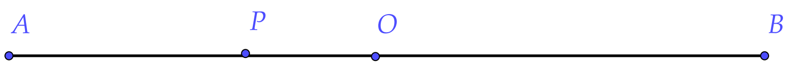

Figura 4.12. Caso 2.

Definición 4.5
Se dice que dos puntos A y B son *simétricos respecto a* O, si O es el centro del segmento AB.

Definición 4.6
Se llama *simetría central respecto al "centro"* O (la indicaremos mediante σ_O que se lee "sigma sub O") a la correspondencia biunívoca que cada punto del plano le hace corresponder su simétrico respecto al punto O. O se llama centro de la simetría σ_O.

Por tanto σ_O es la correspondencia que a un punto A hace corresponder un punto B tal que O es el centro de AB.

Ejercicio. En un papel milimetrado, dibuje un punto O que será el centro de la σ_O. Luego dibuje un punto A (distinto de O) y halle el simétrico respecto a O usando una regla no graduada y un compaz. Luego trace un punto B (distinto de O, A y del simétrico de A) y halle su simétrico. Si A y B son distintos, ¿puede suceder que sus simétricos coincidan? Llamando A' y B' los simétricos de A y B respectivamente. Trace el segmento AB y halle los simétricos de algunos puntos de él. ¿Puede suceder que los puntos hallados no estén alineados?

En base al resultado del ejercicio anterior, es fácil verificar que la figura correspondiente a una recta, en un asimetría central, es también una recta.

Consideremos ahora figuras más complejas, por ejemplo el $\triangle ABC$ de la Fig. 4.13. Sea O un punto del plano; se observa que A', B', C' son los puntos simétricos de A, B, C, respectivamente, respecto a O. El $\triangle A'B'C'$, así construido, se dice simétrico de $\triangle ABC$ respecto a O.

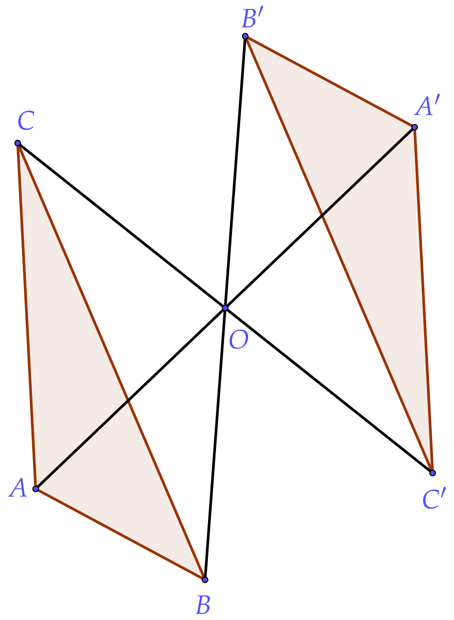

Figura 4.13. Triángulos simétricos respecto al punto O.

Ejercicio. En una hoja de papel milimetrado hallar el simétrico de un triángulo rectángulo, de un triángulo isósceles, de un triángulo equilátero, de un cuadrado, de un rectángulo. ¿Son sus simétricos la misma figura respectivamente?

Definición 4.7
Considerada una simetría σ_O, un punto del plano se dice unido en σ_O si coincide con su simétrico.

Definición 4.8
Una recta r del plano se dice unida en la simetría σ_O si los puntos simétricos de los puntos de r son también puntos de r.

Hay que notar que si una recta es unida, no todos sus puntos son unidos. Por ejemplo en una simetría de centro O, los simétricos de los puntos de una recta que pasa por O son puntos de la misma recta, pero como cada punto (excepto O) tienen su simétrico en un punto distinto de él mismo, no es unido (Fig. 4.14).

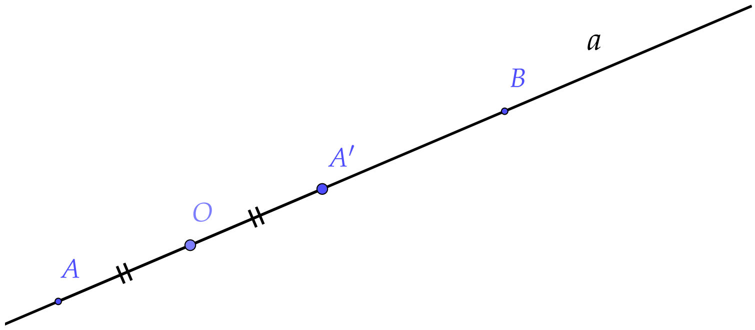

Figura 4.14. Recta unida a.

Ejercicio. En una simetría central, ¿existen rectas que pueden pensarse como lugares de puntos unidos?

Ahora nos preguntamos: ¿cuántos elementos correspondientes entre sí deben conocerse para poder decir que se conoce una simetría central? De lo anterior, queda claro que basta conocer el centro O de la simetría. Con O, la simetría también queda determinada en el sentido de que podemos determinar el simétrico de cada entidad geométrica del plano.

Teorema 4.8

Una pareja de puntos correspondientes A , A', individualiza una simetría central.

Demostración. Si A y A' son distintos, entonces a partir de la construcción del centro visto en la demostración teorema 4.7, podemos decir que O es el centro del segmento AA'; luego la simetría buscada es juntamente σ_O. Si los puntos A y A' coinciden, entonces el centro de simetría es este mismo punto. En los dos casos A y A' y individualizan una simetría central. □

Teorema 4.9
El único punto unido en una simetría central es el centro.

Demostración. La demostración la hacemos por reducción al absurdo, sea σ_O la simetría de centro O, supongamos que existe otro punto P distinto del centro O que sea un punto unido, P tiene su simétrico P' mediante la simetría σ_O; por tanto, O es el centro del segmento PP', consecuentemente, P debería ser distinto de P' (si fuesen iguales, P sería igual a O, que supusimos en un inicio que no lo son), lo que indicaría que P no es un punto unido, en contradicción con lo que supusimos de que P es un punto unido. □

Teorema 4.10
En una simetría central σ_O son unidas las y solo las rectas que pasan por el centro O.

Teorema 4.11
Dos rectas a y a' que se corresponden en una simetría central de centro O, tienen la misma dirección.

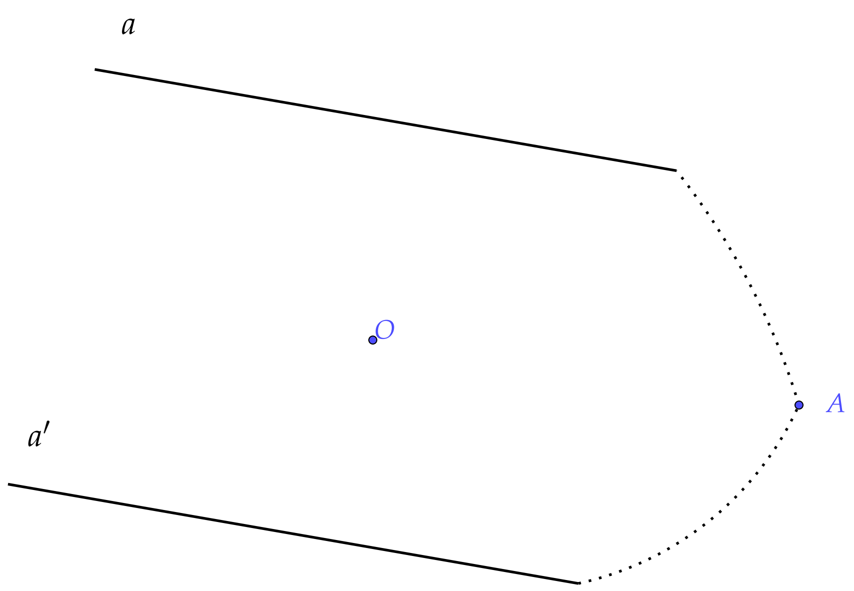

Figura 4.15. Rectas correspondientes en una simetría central.

Demostración. Analicemos dos casos:

1. $O \in a$

   En este caso a y a' coinciden, pues a es una recta unida, por tanto, a y a' tienen la misma dirección.

2. $O \notin a$

   Este caso, lo demostraremos por reducción al absurdo, suponiendo que a y a' tienen un solo punto común A.

1)	$A \in a$	$A \in a \cap a'$;
2)	$\sigma_O(A) \in a'$	a y a' se corresponden;
3)	$A \in a'$	$A \in a \cap a'$;
4)	$\sigma_O(A) \in a$	a y a' se corresponden;
5)	$\sigma_O(A) \in a \cap a'$	de 2) y 4);
6)	$\sigma_O(A) = A$	se supuso que a y a' tiene en común solo A;
7)	A es un punto unido	debido a 6);
8)	$A = O$	en una simetría central el único punto unido es O;
9)	$O \in a$	ya que $A \in a$ y 8);

el resultado 9) es una contradicción pues habíamos dicho que $O \notin a$.

□

Teorema 4.12
Las simetrías centrales son isometrías.

Demostración. Para demostrar esto, será suficiente mostrar que si dos figuras son simétricas también son congruentes. Se simplifica la demostración haciendo ver que segmentos simétricos son también congruentes y que los ángulos que se corresponden en una simetría también son congruentes.

Considérese los puntos A y B distintos y sus simétricos A' y B' respecto a un centro O (Fig. 4.16). El segmento $A'B'$ es el simétrico del segmento AB (es decir, ellos se corresponden en la simetría central de centro O. Sean los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle A'O'B'$, estos son congruentes por el primer criterio de congruencia ($AO \cong A'O'$, $BO \cong B'O'$, $A\widehat{O}B \cong A'\widehat{O'}B'$); por tanto, $AB \cong A'B'$.

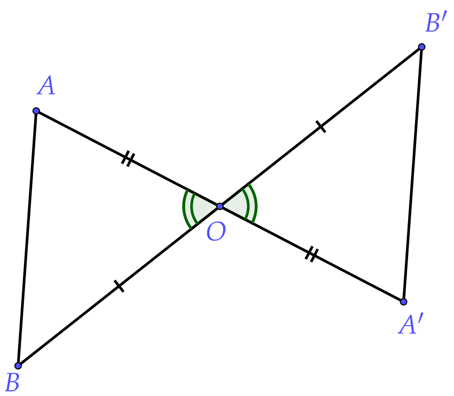

Figura 4.16. Segmentos simétricos respecto al punto O.

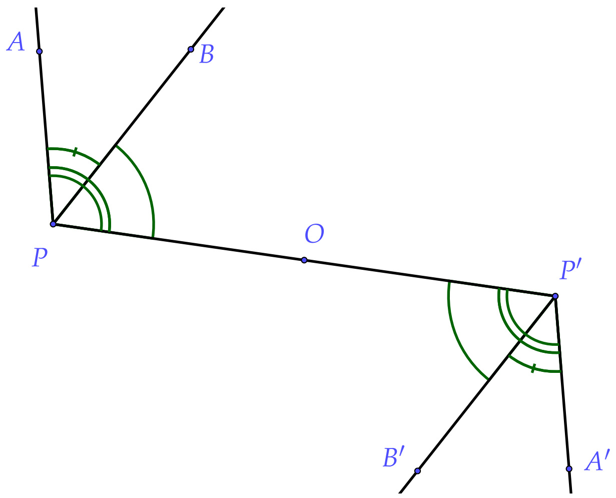

Figura 4.17. Ángulos simétricos respecto al punto O.

Se demuestra que los ángulos que se corresponden son congruentes; en efecto, sean $A\widehat{P}B$ y $A'\widehat{P'}B'$ ángulos correspondientes en la simetría (Fig. 4.17).

Las rectas PB y $P'B'$ se corresponden en la simetría, entonces por el teorema 4.11 son paralelas, y también PA y $P'A'$. De esto y del teorema 2.20 se puede concluir que $A\widehat{P}O \cong A'\widehat{P'}O'$. Análogamente se demuestra que $B\widehat{P}O \cong B'\widehat{P'}O'$, y de aquí se deduce que $A\widehat{P}B \cong A'\widehat{P'}B'$ por la diferencia de ángulos congruentes. □

Definición 4.9

Sea σ_O una simetría central de centro O; supongamos que por cada punto P de una figura $\mathcal{F}$ el correspondiente de P mediante σ_O es un punto de $\mathcal{F}$, en este caso, O se dice *centro de simetría de la figura*.

4.4 Composición de simetrías centrales. Las traslaciones

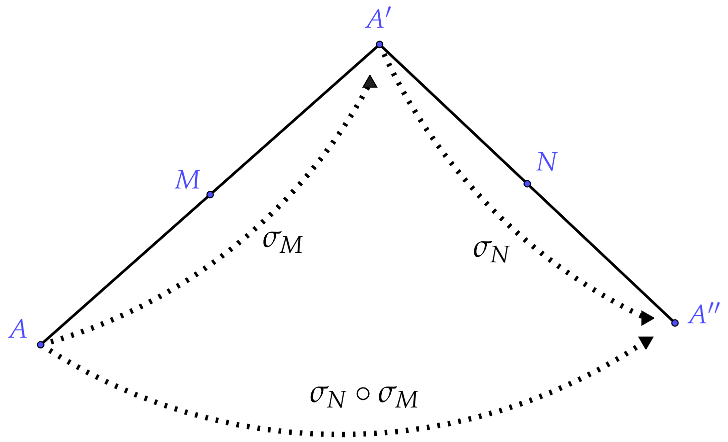

Figura 4.18. Composición de simetrías centrales.

Se estudiará la composición de simetrías. Sean σ_M y σ_N dos simetrías (con M distinto de N para evitar casos banales). Sean A y A' simétricos respecto a M; sea A'' el simétrico de A' respecto a N (Fig. 4.18). En base a la definición de composición de correspondencias, A'' es el punto que le corresponde a A mediante la correspondencia $\sigma_N \circ \sigma_M$. Se procede de forma análoga para segmentos (Fig. 4.19) y para triángulos (Fig. 4.20). En la Fig. 4.19, nótese que las rectas AB , $A'B'$, $A''B''$ son paralelas (debido a la transitividad del paralelismo). En la Fig. 4.20 nótese que $\sigma_N \circ \sigma_M$ es una nueva correspondencia.

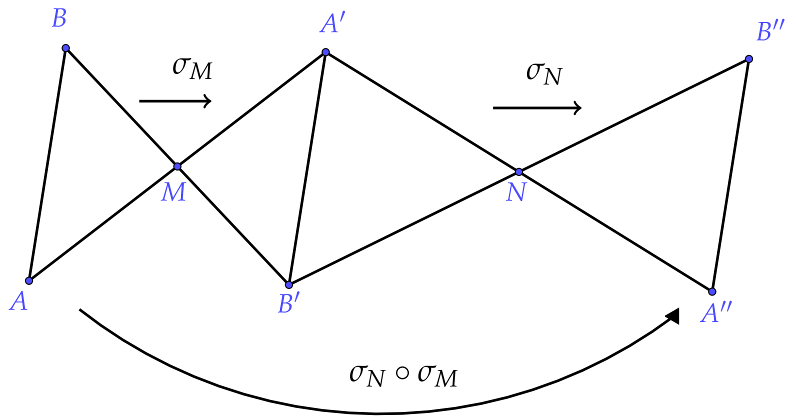

Figura 4.19. Composición de simetrías centrales para segmentos.

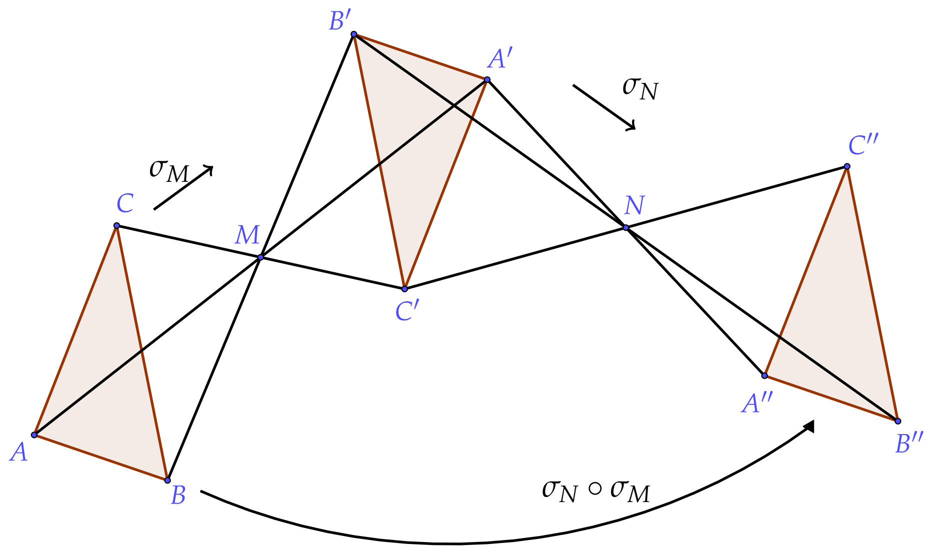

Figura 4.20. Composición de simetrías centrales para triángulos.

Ahora es oportuno cambiar el nombre de la transformación que se obtiene como composición de dos simetrías centrales.

Definición 4.10
La transformación geométrica que se obtiene como composición de simetrías centrales se llama *traslación*.

Se llama τ a una traslación genérica y se verá algunas propiedades de este tipo de transformación.

Una recta se corresponde por una traslación con otra recta que conserva la dirección.

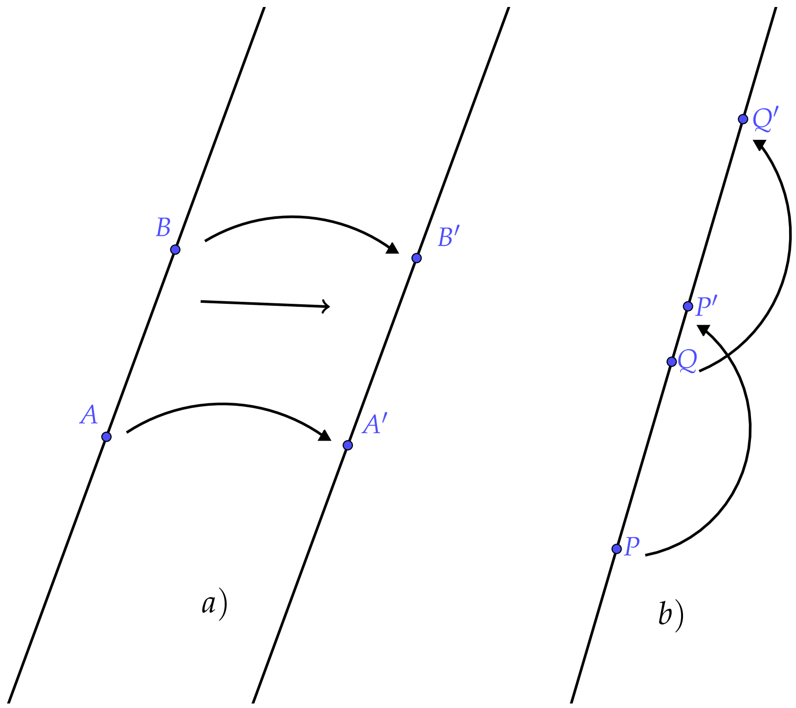

Figura 4.21. Rectas correspondientes en una traslación.

La Fig. 4.21 ilustra dos casos posibles $a)$ y $b)$. En $a)$ las rectas correspondientes mediante τ son diferentes. En $b)$ las dos rectas coinciden.

Por lo tanto, en el caso $b)$ la recta PQ es unida (ya que los puntos correspondientes pertenecen a la misma recta).

Teorema 4.13
La identidad, es decir, la correspondencia biunívoca o trasformación que a cada punto del plano le hace corresponder el mismo punto, es una traslación.

Teorema 4.14
La única traslación que tiene puntos unidos es la identidad.

Teorema 4.15
La recta que une dos puntos correspondientes en una traslación diferente a la identidad $\tau = \sigma_Q \circ \sigma_P$ es paralela a la recta PQ.

Demostración. Supongamos sea $A'' = \tau(A)$ (Fig. 4.22). La demostración se hace por reducción al absurdo; supongamos que las dos rectas (distintas) AA'' y PQ tienen en común un punto B. Mediante τ, B tiene un correspondiente B'' que pertenece también a la recta AA''; mediante σ_P, B tiene como correspondiente a B' que pertenece a la recta BP (es decir, a la recta PQ); mediante σ_Q, B' tiene como correspondiente a B'' que pertenece a la recta $B'Q$ (es decir a la recta PQ); por tanto, mediante $\sigma_Q \circ \sigma_P$ a B le corresponde B'' que está sobre PQ; por lo tanto, B'' está tanto sobre AA'' como sobre PQ; dos rectas distintas tendrían dos puntos diferentes en común, lo que es un absurdo. Luego $AA''||PQ$. $\square$

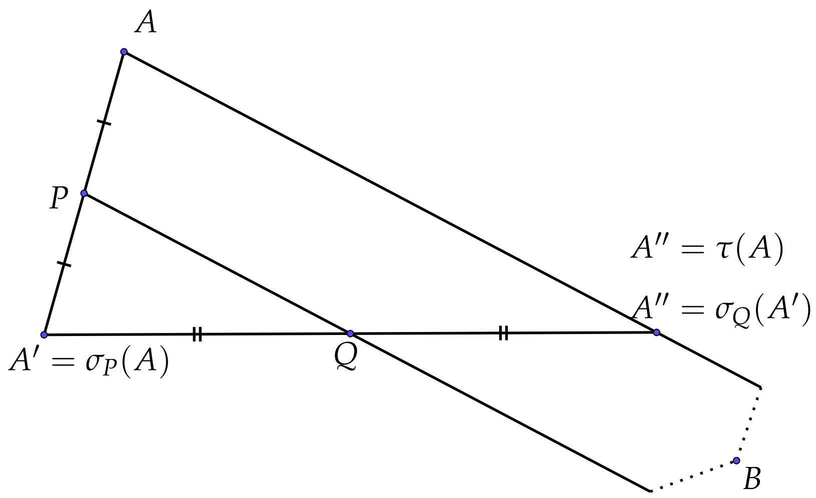

Figura 4.22. Rectas por un punto y su trasladado.

En base a este teorema, se puede dar una definición de traslación, sin tomar en cuenta a la composición de simetrías centrales.

Definición 4.11
Llamamos traslaciones a los isomorfismos (del plano sobre si mismo) que hacen corresponder a rectas paralelas con rectas paralelas y tal que rectas que unen parejas de puntos correspondientes son paralelas.

En base al teorema 4.15, es fácil localizar, dados dos puntos correspondientes en una traslación, los otros puntos correspondientes. Por ejemplo, con un $\triangle ABC$. Se sabe que el correspondiente en la traslación de A es el punto A'; se va a indicar una construcción que permita determinar los correspondientes de B y C. Desde B y C se trazan las paralelas a la recta AA'; desde A' se trazan las paralelas respectivamente a las rectas AB y AC; éstas intersecan a las precedentes (en orden) respectivamente en B' y C'.

Esta construcción sugiere que:

Dos puntos correspondientes en una traslación, determinan esta traslación.

Definición 4.12
Consideremos la traslación τ determinada por una pareja de puntos correspondientes A y A'; consideremos además la transformación geométrica que asocia las rectas correspondientes de τ y que hace corresponder al punto A' el punto A. Tal transformación se dice inversa de τ y se representa medieante τ^{-1}.

Teorema 4.16
La transformación inversa de una traslación es también una traslación.

En base al teorema 4.16 podemos definir la traslación inversa τ^{-1} de una tralación dada τ. Se observa que, dado τ_0 la traslación identidad, se tiene que $\tau^{-1} \circ \tau = \tau_0$. En efecto, aplicando primero τ y después τ^{-1} cada elemento se corresponde a si mismo.

Teorema 4.17
Las traslaciones son isometrías.

Demostración. Como las traslaciones son una composición de simetrías centrales y estas últimas son isometrías, además la composición de isometrías es una isometría, se tiene que las traslaciones son isometrías. □

4.5 La correspondencia de Tales

El propósito de esta sección es dar a conocer una correspondencia biunívoca particular entre los puntos de pares de rectas, que conduce a enunciar diversas propiedades de las figuras en un modo muy simple.

Teorema 4.18
Sea dado un $\triangle ABC$ y sean P, Q respectivamente los centros de los lados AB y BC, entonces la recta PQ es paralela a la recta AC (Fig. 4.23).

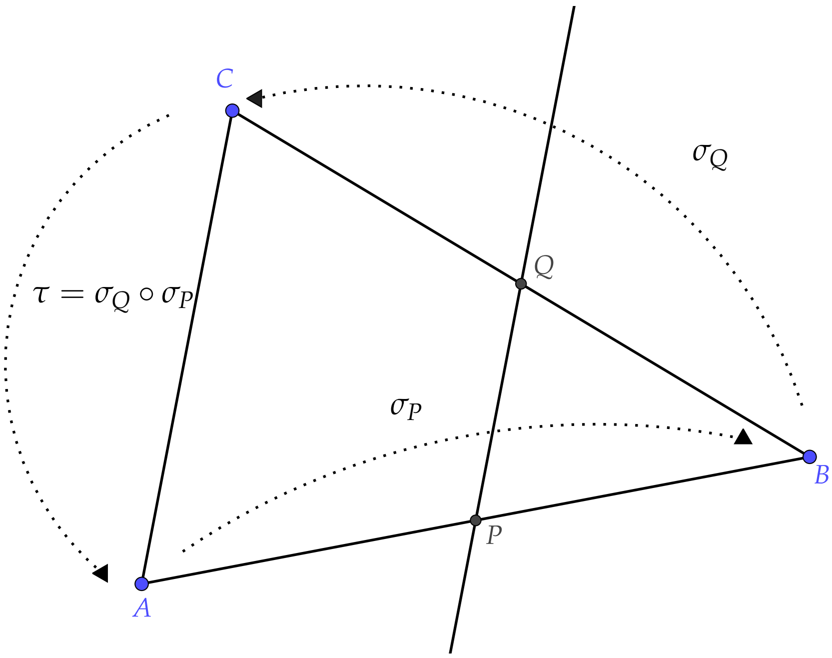

Figura 4.23. Recta por dos centros de dos lados de un triángulo.

Demostración. Pensemos en P y Q como centros de dos simetrías centrales σ_P y σ_Q; según la primera, B es el correspondiente de A; por la segunda C es correspondiente de B; en definitiva, C es el correspondiente de A según la correspondencia $\sigma_Q \circ \sigma_P$, es decir, según una traslación τ. Ahora se sabe (teorema 4.15) que la recta que une puntos distintos correspondientes en una traslación producto de dos simetrías es paralela a la recta que une los centros de dos simetrías. Por tanto $AC||PQ$. □

Teorema 4.19
Sea un $\triangle ABC$ y sea P el centro del segmento AB. Sea a la recta que pasa por P y es paralela a AC, entonces a interseca a BC en el punto Q, centro del segmento BC.

Definición 4.13
El conjunto de todas las rectas paralelas entre sí se dice haz impropio.

Definición 4.14
Sean dadas dos rectas a y b (distintas). Sea dado un haz impropio tal que cada una de las rectas del haz impropio intesecan tanto a la recta a como a la recta b (Fig. 4.24). Cada punto B_i de b se puede pensar como el correspondiente de un determinado punto A_i de la recta a, de esta manera A_i y B_i individualizan las rectas r_i del haz de rectas. Es fácil notar que esta correspondencia entre los puntos de las dos rectas es biounívoca; ésta es la llamada *correspondencia paralela* o *de Tales*.

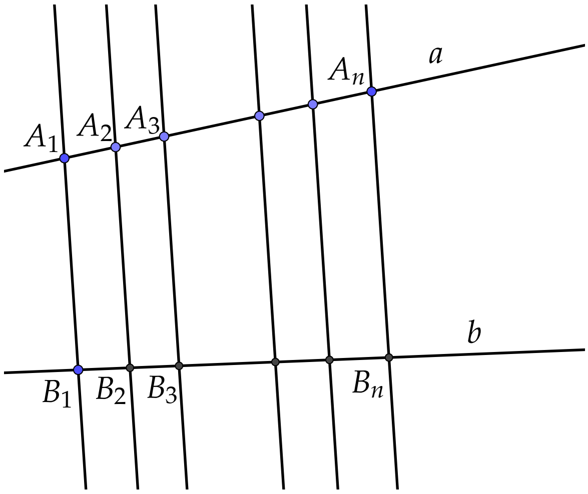

Figura 4.24. Correspondencia de Thales.

Teorema 4.20
Sean dadas dos rectas a y b y una correspondencia paralela entre los puntos de a y los de b. Sean A_i y A_j dos puntos de a; sean B_i y B_j sus correspondientes sobre b (correspondientes mediante la correspondencia parelela). Sea A el punto medio A_i y A_j; sea B el punto medio entre B_i y B_j, entonces B es el correspondiente de A en la correspondencia paralela.

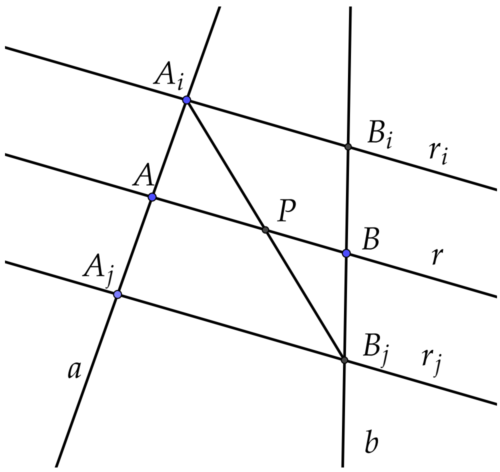

Figura 4.25. Correspondencia paralela.

Demostración. Para la demostración, basta limitarse al caso ilustrado en la Fig. 4.25, y demostrar que la recta r que pasa por A y es paralela a r_i (o a r_j, lo que es lo mismo), también pasa por B. Tracemos la recta A_iB_j: debido a que la recta r que pasa por A es paralela a r_j, en el $\triangle A_iA_jB_j$, P es el punto medio de A_iB_j (por el teorema 4.19). La misma recta AP es paralela a al recta r_i; por tanto, debido al mismo teorema 4.19), B es el centro de B_iB_j. $\square$

Teorema 4.21

Dada una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos rectas a y b, representando por A_i y A_j dos puntos cualesquiera de a y con B_i y B_j sus correspondientes en b, si al centro de A_iA_j le corresponde el centro de B_iB_j, entonces la correspondencia considerada es la correspondencia de Tales entre a y b.

La demostración del teorema se deja como ejercicio.

Ejercicio.

1. Sea dado un cuadrilátero $ABCD$ (Fig. 4.26); sean P y Q los centros de dos lados opuestos. El segmento PQ se dice mediana del cuadrilátero. En base a la definición de mediana de un cuadrilátero, demuestre que la mediana de un trapecio relativa a los lados no paralelos es paralela a las bases (Fig. 4.27). ¿La Fig. 4.27 sugiere un procedimiento?

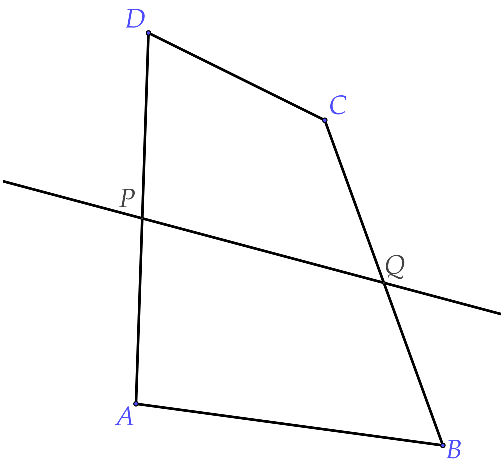

Figura 4.26. PQ mediana del cuadrilátero $ABCD$.

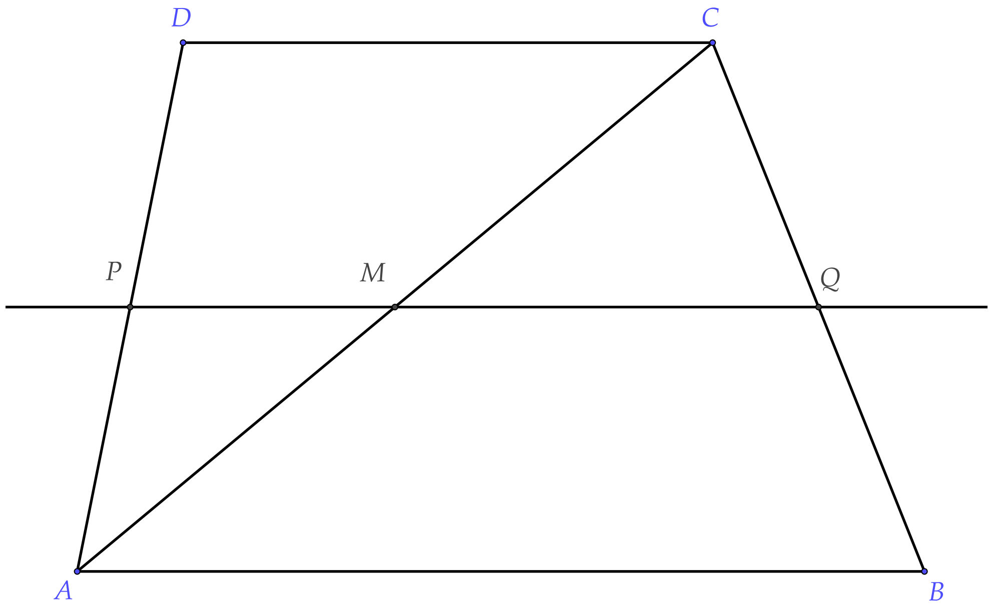

Figura 4.27. Mediana relativa a los lados no paralelos de un trapecio $ABCD$.

Demostración. Consideraremos el trapecio $ABCD$ y una de sus diagonales, AC (Fig. 4.27). Además sea M el punto medio de la diagonal AC.

1)	La recta QM es paralela a AB	pues une los puntos medios de dos lados del $\triangle ABC$;
2)	$CD \| \| AB$	definición de trapecio;
3)	$QM \| \| CD$	transitividad del paralelismo;
4)	$P \in QM$	la recta paralela a uno de los lados de un triángulo ($\triangle ACD$) que pasa por el punto medio de uno de los lados (AC), también pasa por el punto medio del tercer lado (AD);
5)	$PQ \| \| AB$	por 1) y 4).

$\square$

4.6 Paralelogramos

En la sección 1.10 se dio una definición de paralelogramo, aprovechando los medios que se tenían disponibles, pero no se estudiaron sus propiedades; ahora lo hacemos.

Definición 4.15
Sea dado un cuadrilátero $ABCD$ tal que las diagonales AC y BD tienen el centro en común. Este cuadrilátro se llama paralelogramo (Fig. 4.28).

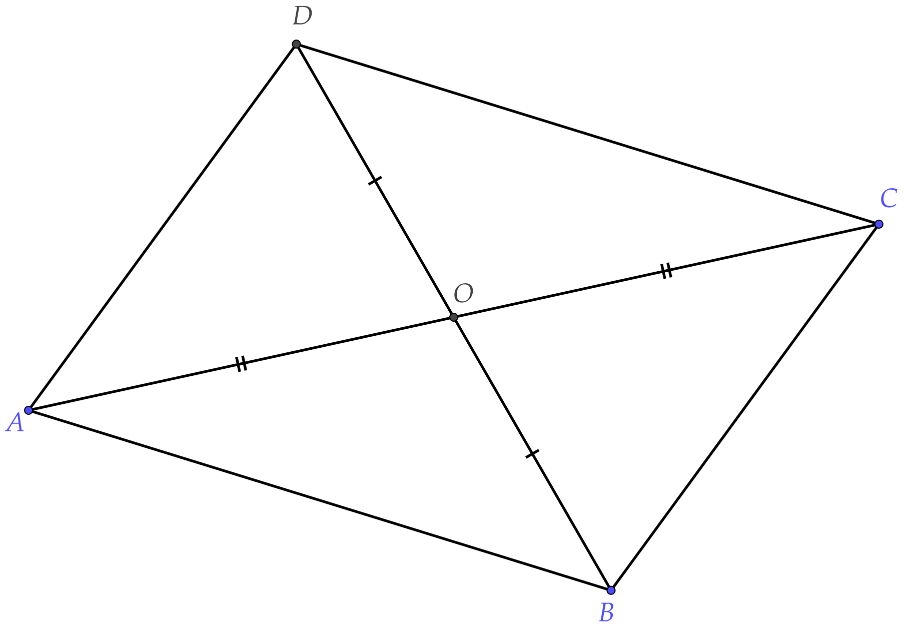

Figura 4.28. Cuadrilátero con centros de diagonales coincidentes.

Teorema 4.22
En un paralelogramo los lados opuestos son congruentes y paralelos.

Demostración. Debido a que O es el centro de AC (Fig. 4.28), esto significa que A y C son simétricos respecto a O; análogamente B y D son simétricos respecto a O. Por lo tanto en la simetría central σ_O, AD y BC se corresponden, y por tanto, por el teorema 4.11, son paralelas (análogas consideraciones son válidas para AB y BC); además, $AB \cong CD$, $BC \cong CD$ (primer criterio de congruencia). $\square$

Teorema 4.23
Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.

Teorema 4.24
Un cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos es un paralelogramo.

Teorema 4.25
En un paralelogramo los ángulos consecutivos son suplementarios y los ángulos opuestos son congruentes.

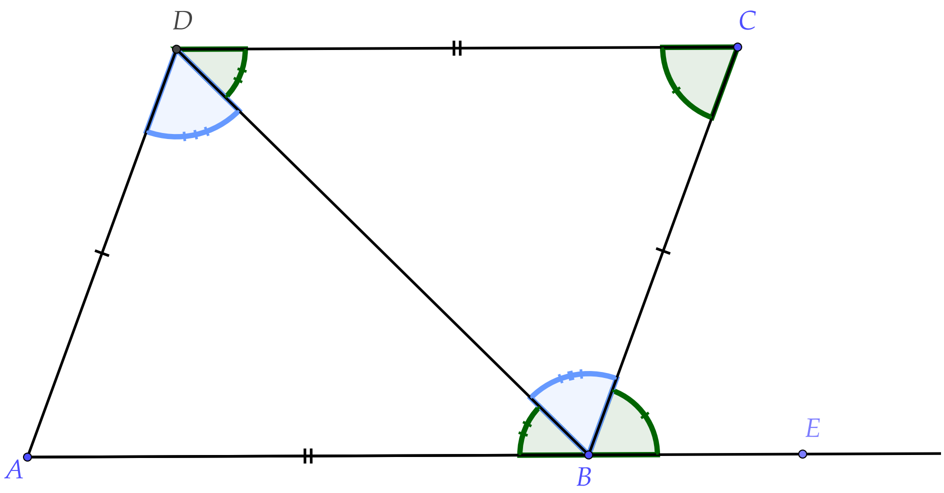

Figura 4.29. Paralelogramo $ABCD$.

Demostración. Basta considerar el paralelogramo $ABCD$ (Fig. 4.29), las dos rectas paralelas AD y BC y la transversal DB; del teorema 2.20 se tiene que $C\widehat{B}D \cong A\widehat{D}B$. Consideremos ahora las dos rectas paralelas AB y CD y la transversal BD; resulta que $A\widehat{B}D \cong B\widehat{D}C$. Aplicando el axioma C5, en vista de que $A\widehat{B}C$ es el ángulo suma de $A\widehat{B}D$ y $D\widehat{B}C$, mientras $A\widehat{D}C$ es el ángulo suma de $A\widehat{D}B$ y $B\widehat{D}C$, se concluye la segunda parte del teorema. La primera parte del teorema se demuestra considerando las rectas paralelas AB y CD y la transversal BC y observando que

$D\widehat{C}B \cong C\widehat{B}E$, ya que son ángulos alternos internos, y además que $A\widehat{B}C$ y $C\widehat{B}E$ son adyacentes y por lo tanto suplementarios, por tanto son suplementarios $D\widehat{C}B$ y $A\widehat{B}C$. □

Teorema 4.26
Si un cuadrilátero tiene los lados opuestos congruentes, entonces es un paralelogramo.

Ejercicio. Demuestre que:

Sea $ABCD$ un paralelogramo, escojamos sobre el lado AB un punto E, sobre BC un punto F, sobre CD un punto G, sobre AD un punto H, tales que $AE \cong BF \cong CG \cong DH$. El cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo.

El teorema que se demuestra a continuación, llamado teorema del haz de rectas paralelas, es una aplicación de la correspondencia de Tales y se utiliza en la demostración del Teorema de Tales.

Teorema 4.27
Una correspondencia de Tales entre dos rectas t y t' no paralelas, hace corresponder segmentos congruentes con segmentos congruentes, y a la suma de dos longitudes con la suma de las longitudes correspondientes.

Demostración. La demostración se divide en dos partes:

1. Si $AB \cong DE$, entonces también $A'B' \cong D'E'$, es decir, los segmentos que corresponden a segmentos congruentes entre sí son congruentes entre sí.

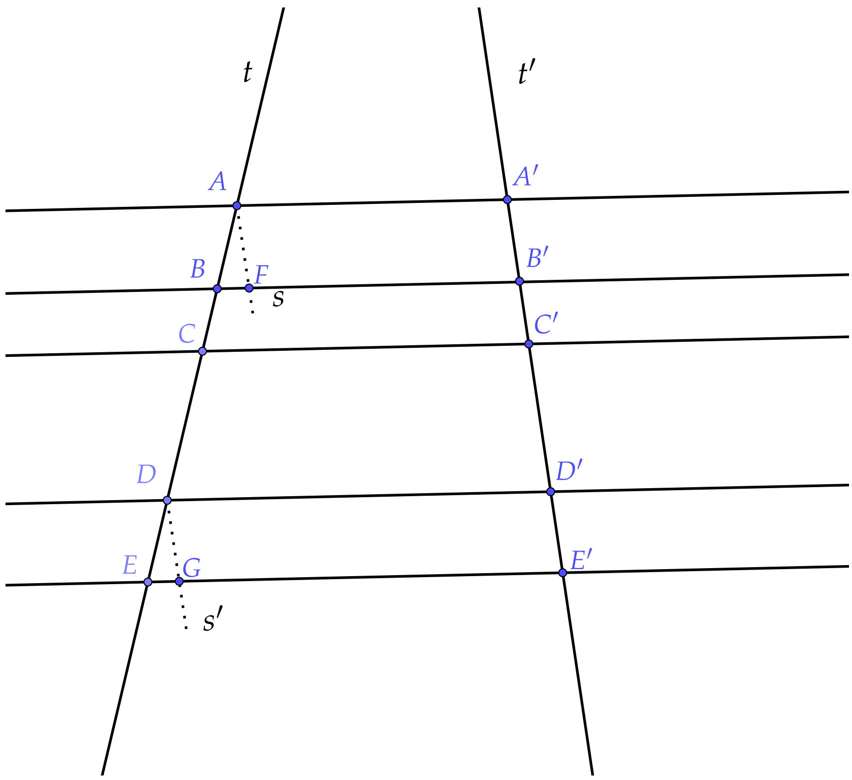

Figura 4.30. Correspondencia de Thales entre las rectas t y t'.

Para demostrar esta parte, considérense las semirectas s y s' de origen A y D (Fig. 4.30) paralelas a la recta t', y por tanto paralelas entre sí. Sean F y G los dos puntos de intersección de s y s' respectivamente con BB' y EE'. Los triángulos $\triangle ABF$ y $\triangle DEG$ son congruentes debido al segundo criterio de congruencia de triángulos: en efecto, tienen $AB \cong DE$ por hipótesis, $B\widehat{A}F \cong E\widehat{D}G$ y $A\widehat{B}F \cong D\widehat{E}G$ porque son ángulos correspondientes formados por las rectas AF y DG los primeros, BF y EG los segundos y en ambos casos con la recta AE. En particular, tenemos $AF \cong DG$. Consideremos los paralelogramos $AFB'A'$ y $DGE'D'$, en estos los lados opuestos son congruentes; entonces $AF \cong A'B'$ y $DG \cong D'E'$, pero se demostró que $AF \cong DG$, por tanto, por la propiedad transitiva de la congruencia es también $A'B' \cong D'E'$.

2. Si $|AB| + |DE|$ es la suma de dos longitudes, a esta le corresponderá, en la correspondencia considerada, la longitud suma de las longitudes correspondientes.

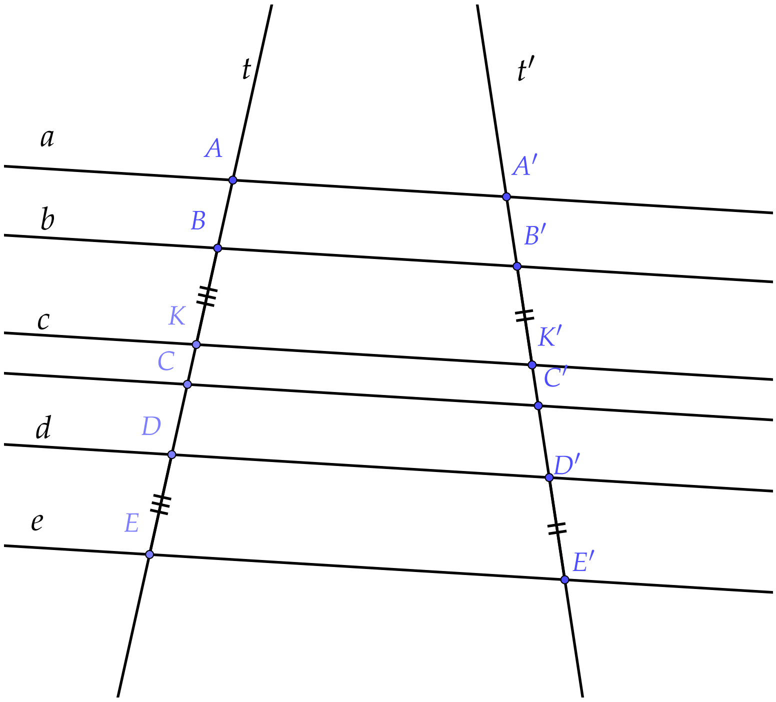

Figura 4.31. Correspondencia de Thales entre las rectas t y t'.

Considérese sobre t un punto K de modo que B esté entre A y K y tal que $BK \cong DE$ (tal punto existe por el axioma de transporte de los segmentos) (Fig. 4.31). Entonces tenemos que $|AB| + |BK| = |AB| + |DE|$. El correspondiente de K, es decir K', es colocado sobre t' de manera que B' está entre A' y K', y además, por la primera parte de este teorema, debe ser $B'K' \cong D'E'$; se tiene entonces que a AK le corresponde $A'K'$ y $|A'K'| = |A'B'| + |B'K'| = |A'B'| + |D'E'|$.

□

4.7 Otras aplicaciones de la simetría

En geometría, según el criterio utilizado, es posible dar definiciones de un mismo objeto o de la misma propiedad de diferentes formas, así como es posible demostrar el mismo resultado de formas completamente distintas. Por tanto, el lenguaje que decidamos adoptar es fundamental: los conceptos son los mismos, los teoremas son los mismos, pero la demostración de los teoremas cambia según los principios de los que se parte. Por ejemplo, algunos de los teoremas dados en el capítulo dos pueden volver a probarse en este punto basándose en las simetrías centrales y las traslaciones.

Teorema 4.28
Sean a y b dos rectas distintas y sea c una secante a ellas. Si los ángulos alternos internos son congruentes, entonces a y b son paralelas. Viceversa: si las rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

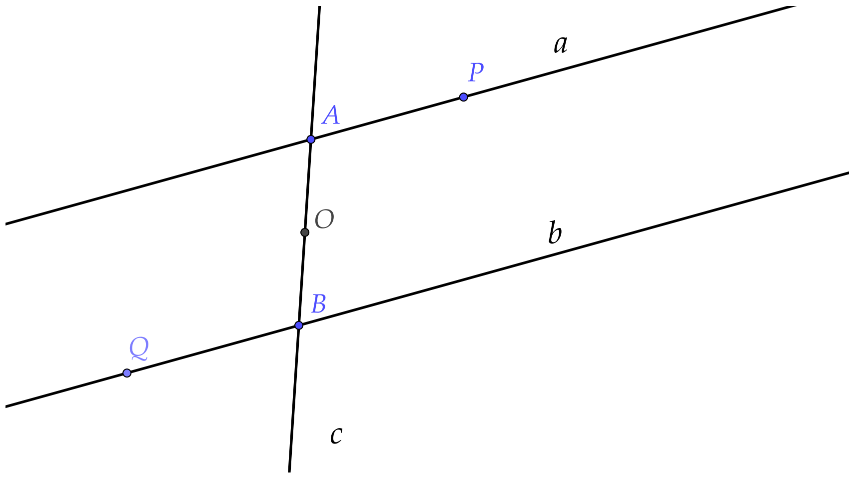

Figura 4.32. Rectas paralelas a y b cortadas por la transversal AB.

Demostración. De acuerdo con la Fig. 4.32, sea O el centro del segmento AB (A es el punto común de a y c, B es el punto común de b y c). Demostremos la segunda parte: por hipótesis $a||b$, entonces en la simetría central de centro O, a la recta a le corresponde la recta b y al $P\widehat{A}O$ el $Q\widehat{B}O$. En base a lo demostrado en la segunda parte del teorema 4.12, los ángulos son congruentes. Demostremos la primera parte: suponiendo que los ángulos (alternos internos) son congruentes. La recta AB es unida en la simetría central, dado que pasa por el centro. Tenemos que la recta AP debe corresponder BQ (dado que los dos ángulos son congruentes y se corresponden en la simetría). Pero las rectas correspondientes en una simetría son paralelas: por tanto $AP||BQ$ (es decir $a||b$). □

Teorema 4.29
Si a y b son rectas perpendiculares a la recta c, entonces a y b son paralelas entre sí.

Teorema 4.30
Sean a y b dos rectas paralelas y c una perpendicular a la recta a; entonces c es perpendicular también a la recta b.

Demostración. Por el teorema 1.4 se tiene que c interseca a la recta B, aplicando el teorema 4.28 (dos rectas paralelas cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes), se tiene que c es perpendicular a b. □

4.8 Ejercicios resueltos

1. Demuestre que los puntos medios de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

   Solución.

   Hipótesis: $ABCD$ cuadrilátero; H centro de AB; G centro de BC; F centro de CD; E centro de AD.

   Tesis: EL cuadrilátero $EFGH$ es paralelogramo.

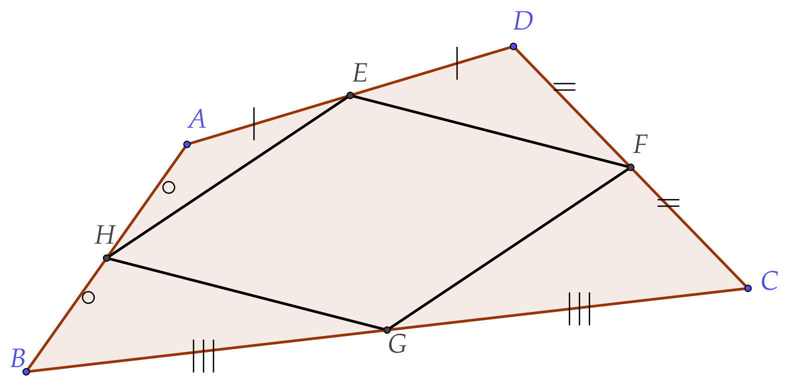

Figura 4.33. Cuadrilátero formado por los centros de los lados de otro cuadrilátero.

Demostración. Consideremos la diagonal BD; el segmento HE es paralelo a la diagonal BD, ya que $(\sigma_H \circ \sigma E)(D) = B$ y la recta que une los correspondientes en una composición de simetrías centrales es paralela a la recta que une los centros. Análogamente FG es paralelo a la diagonal BD; luego, por transitividad de paralelismo HE es paralelo a FG. Así mismo, resulta ser que EF es paralelo a GH; por tanto, $EFGH$ es un paralelogramo por tener lados opuestos paralelos. $\square$

2. Dado el $\triangle ABC$ y sean P y N los centros de AB y AC respectivamente; considere el simétrico C' de C respecto a P y el simétrico B' de B respecto a N. Demuestre que $A, B'C'$ están alineados.

Solución.

Hipótesis: $\triangle ABC$; P centro de AB; N centro de AC; $\sigma_N(B) = B'$; $\sigma_N(C) = C'$.

Tesis: A, B', C' están alineados.

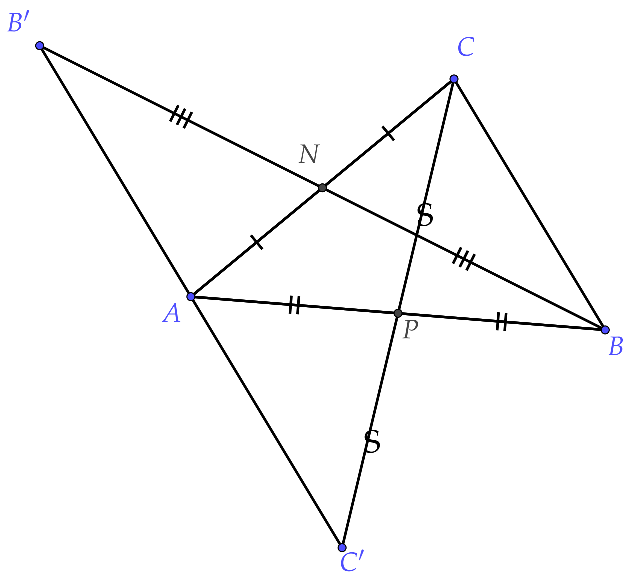

Figura 4.34. $\triangle ABC$.

Demostración. $\triangle AC'P \cong \triangle BCP$ por el criterio lado, ángulo, lado; luego, AC es paralela a CB. Así mismo $\triangle ANB' \cong \triangle NBC$; luego, AB' es paralela a CB. Por el axioma de la paralela se tiene que las rectas AC' y AB' son la misma recta; por tanto, A, B', C' están alineados. □

3. Considere el triángulo $\triangle ACB$, y su simétrico respecto al punto A, el $\triangle A'B'C'$. Demuestre que el cuadriátero $BCB'C'$ es un paralelogramo.

Solución.

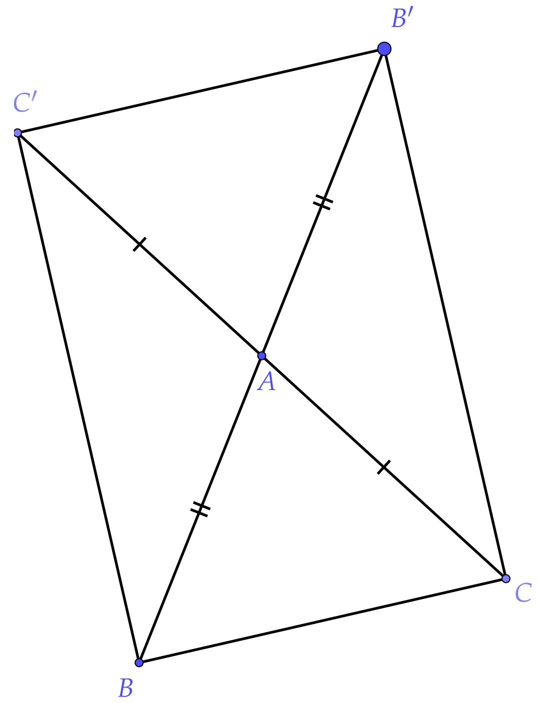

Figura 4.35. $\triangle ABC$ y su simétrico respecto al punto A.

Demostración. En efecto, el cuadrilátero $BCB'C'$ tiene diagonales cuyos centros coinciden, lo que por definición es un paralelogramo. □

4. Sea $ABCD$ un paralelogramo; por A y C trace las perpendiculares AE y CF a la diagonal BD; por B y D trace las perpendiculares BG y DH a AC. Demuestre que $EFGH$ es un paralelogramo.

Solución.

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo; AD y FC perpendiculares a DB; DH y BG perpendiculares a AC.

Tesis: $EHFG$ es un paralelogramo

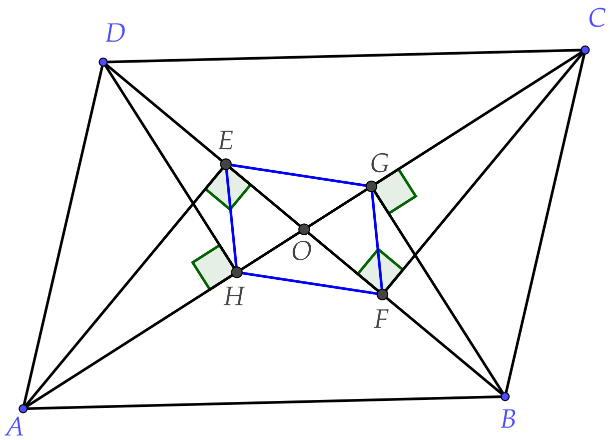

Figura 4.36. Paralelogramo $ABCD$.

Demostración. Los triángulos $\triangle AOE$ y $\triangle COF$ son congruentes por ser triángulos rectángulos con un ángulo agudo y la hipotenusa congruentes; por tanto $EO \cong OF$. Así mismo los triángulos $\triangle DHO$ y $\triangle OBG$ son congruentes; por tanto, $HO \cong OG$. Luego el cuadrilátero $EHFG$ tiene diagonales con centro congruentes, por tanto, $EHFG$ es un paralelogramo. □

5. La recta que une los centros de dos lados opuestos de un paralelogramo pasa por el centro común de las diagonales.

   Solución.

   Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo; E centro de DC; F centro de AB; G centro común de las diagonales de $ABCD$.

   Tesis: FE contiene a G.

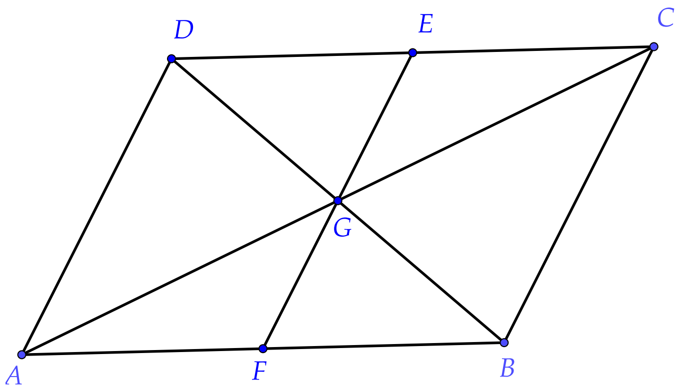

Figura 4.37. Paralelogramo $ABCD$.

Demostración. $(\sigma_G \circ \sigma_E)(C) = B$; por tanto EG es paralela a BC. Además, $(\sigma_G \circ \sigma_F)(B) = C$, por tanto FG es paralela a BC. Por el axioma de la paralela, las rectas FG y GE coinciden; por tanto, la recta FE contiene al punto G. $\square$

6. Las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo forman un rectángulo.

Solución.

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo; AL bisectriz del ángulo $\widehat{A}$; BJ bisectriz del ángulo $\widehat{B}$; CK bisectriz del ángulo $\widehat{C}$; DI bisectriz del ángulo $\widehat{D}$; $E, F, G; H$ intersecciones de las bisectrices.

Tesis: $EFGH$ paralelogramo.

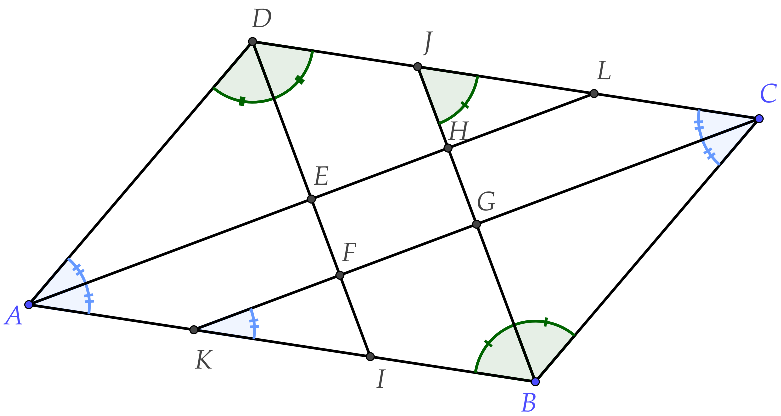

Figura 4.38. Paralelogramo $ABCD$ y sus bisectrices.

Demostración. $F\widehat{K}I \cong D\widehat{C}K$ por ser alternos internos; por tanto, AL es paralela a KC por formar ángulos correspondientes congruentes con la transversal AB. Así mismo, $C\widehat{J}G \cong A\widehat{B}J$ por ser alternos internos; por tanto, DI es paralela a BJ por formar ángulos correspondientes congruentes con la transversal DC. Consecuentemente, el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo por tener lados opuestos paralelos. □

4.9 Ejercicios propuestos

1. Dadas dos rectas paralelas y una transversal a las dos, demuestre que:

   a) las bisectrices de dos ángulos alternos internos o alternos externos o correspondientes son paralelas;

   b) las bisectrices de dos ángulos conjugados internos o externos son perpendiculares.

2. Dado un paralelogramo. $ABCD$, prolongue AB y CD tal que se construyan dos segmentos congruentes BM y DP; prolongue BC y DA de tal manera que se construyan dos segmentos congruentes CN y AQ. Demuestre que $MNPQ$ es un paralelogramo.

3. Dados tres puntos A, B, C, trace por C una recta tal que resulten congruentes los segmentos desde C a los pies de las perpendiculares trazados sobre esta recta desde los puntos A y B.

4. Dos rectas r y s, paralelas a la diagonal BD de un paralelogramo $ABCD$ de centro O, tal que r interseca respectivamente a los lados AB y AD en E y F y s intersecan a BC y CD en H y G respectivamente. Demuestre que $EFGH$ es un paralelogramo si y solo si $AE \cong CG$.

5. Tres semirectas a, b, c de origen en el punto O; además, la semirecta c es interna al $\widehat{ab}$. Determine sobre c un punto P, de tal manera que el paralelogramo que tiene un vértice en O otro vértice en P y dos lados sobre a y b tenga un perímetro dado p.

6. Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero se encuentran en sus puntos medios.

7. Demuestre que dos paralelogramos que tienen congruentes los lados y una diagonal son congruentes.

5

Transformaciones geométricas elementales: Simetría axial, rotaciones

5.1 La simetría axial

Definición 5.1
Decimos que dos puntos A y A' son simétricos respecto a la recta s (Fig. 5.1), si AA' es perpendicular a la recta s y esta última interseca al segmento en el centro.

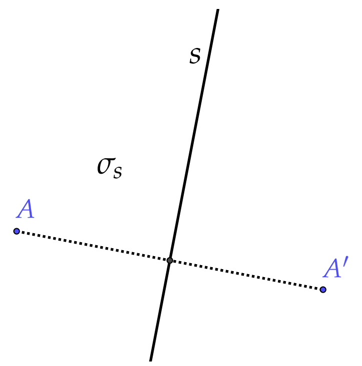

Figura 5.1. A y A' simétricos respecto a s.

Definición 5.2
Se dice simetría axial de eje s (la representaremos mediante σ_s) a una transformación que asocia a cada punto del plano su simétrico respecto a s.

En base a la definición 5.1, es fácil concluir que los extremos de un segmento son simétricos respecto a su mediatriz (también llamado eje del segmento). Puntos, segmentos, semirectas y más en general, figuras que se corresponden en una simetría axial de eje s, se dicen simétricos respecto al eje s. Para construir la recta simétrica de una recta dada AB, respecto de un eje dado, bastará hallar los simétricos de dos puntos distintos de la recta AB (Fig. 5.2). Naturalmente, esta última observación presupone que la figura correspondiente de una recta en una simetría axial es también una recta.

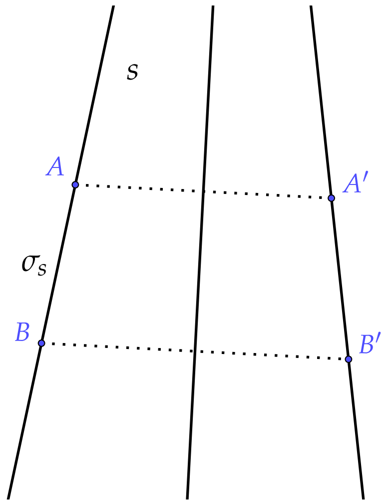

Figura 5.2. Recta AB y su simétrica $A'B'$.

Ejercicio.

1. Demostrar que en una simetría axial, rectas se corresponden con rectas.
2. Encontrar al menos diez ejemplos de simetría axial en las ciencias naturales e historia del arte.

De la definición de simetría axial σ_s se deduce que esta transforma los puntos de un semiplano de origen s, en puntos del semiplano opuestos a él.

Teorema 5.1
En una simetría axial σ_s, son unidos únicamente los puntos del eje s.

Demostración. En efecto, un punto P que no pertenezca a s no puede coincidir con su correspondiente P' que, por definición, pertenecen a semiplanos opuestos. □

Teorema 5.2
Dos rectas simétricas en una simetría axial σ_s, si se intersecan, lo harán en el eje s.

Demostración. Sean r y r' dos rectas simétricas respecto a s y sea P su punto de intrersección. Como P es un punto de r, entonces su simétrico es un punto de r', y como P es un punto de r', entonces, su simétrico es un punto de r, pero el único punto que las dos rectas tienen en común es P, por lo tanto, el simétrico de P es P mismo. Pero los únicos puntos unidos son los puntos del eje, por tanto P pertenece al eje. □

Teorema 5.3
Sean a y a' dos rectas que se corresponden en una simetría axial de eje s tal que a no es paralela a s, entonces, la bisectriz de uno de los ángulos $\widehat{aa'}$ es el eje s. Viceversa, si la bisectriz de $\widehat{aa'}$ es la recta s, las dos rectas a y a' se corresponden en una simetría axial de eje s.

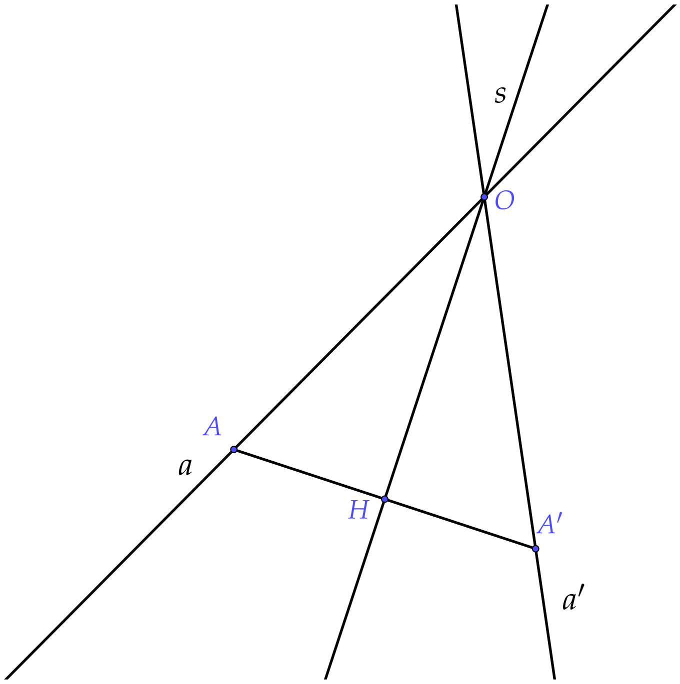

Figura 5.3. Eje de simetría y bisectriz de un ángulo.

Demostración. Para demostrar la primera parte, supongamos que la recta a se interseca con el eje s en el punto O (Fig. 5.3); sea A un punto de la recta a, diferente de O, y A' su simétrico respecto a s; sea H la intersección entre AA' y s. Ahora consideremos los triángulos $\triangle AHO$ y $\triangle OHA'$; estos triángulos son congruentes por el primer criterio de congruencia. Por tanto, se tiene que $A\widehat{O}H \cong H\widehat{O}A'$, por tanto, s es bisectriz del $A\widehat{O}A'$. Para demostrar la segunda parte, supongamos que $A\widehat{O}A'$ es un ángulo y OH su bisectriz, tomando a OH como eje de simetría, a OA le debe corresponder una recta, llamémosla OX, de modo que $H\widehat{O}X \cong A\widehat{O}H$. Pero entonces, OX coincide con OA' por el axioma $C4$, por tanto, OA y OA' se corresponden en una simetría, y OH es el eje de simetría. $\square$

Definición 5.3

Se dice eje de simetría de un $\widehat{ab}$ de vértice O a una recta que pasa por O, y es eje de una simetría en la cual se corresponden las dos rectas a y b.

Corolario 5.1
La bisectriz de un ángulo es su eje de simetría.

Teorema 5.4
Si a y a' son dos rectas que se corresponden en una simetría de eje s paralelo a la recta a, entonces las rectas a y a' son paralelas.

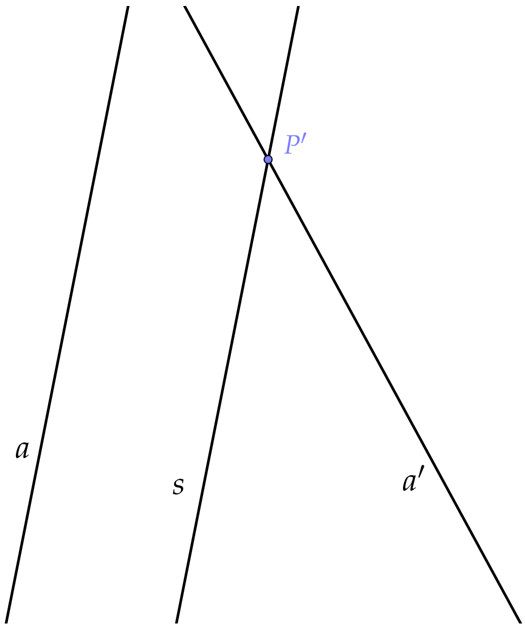

Figura 5.4. Simetría axial de eje s.

Demostración. El teorema lo demostramos por reducción al absurdo (Fig. 5.4). Supongamos que a' no es paralela a la recta a, entonces tampoco es paralela al eje s; sea P' la intersección de s con a', entonces, P' sería el correspondiente de algún punto P de a; pero P' es un punto del eje, por tanto es un punto unido. Es decir, P coincide con P', lo que es una contradicción con la hipótesis de que a y s son paralelas; luego, a y a' son paralelas. □

Corolario 5.2
El simétrico de un segmento AB paralelo al eje de simetría es un segmento $A'B'$ paralelo y congruente a AB (Fig. 5.5).

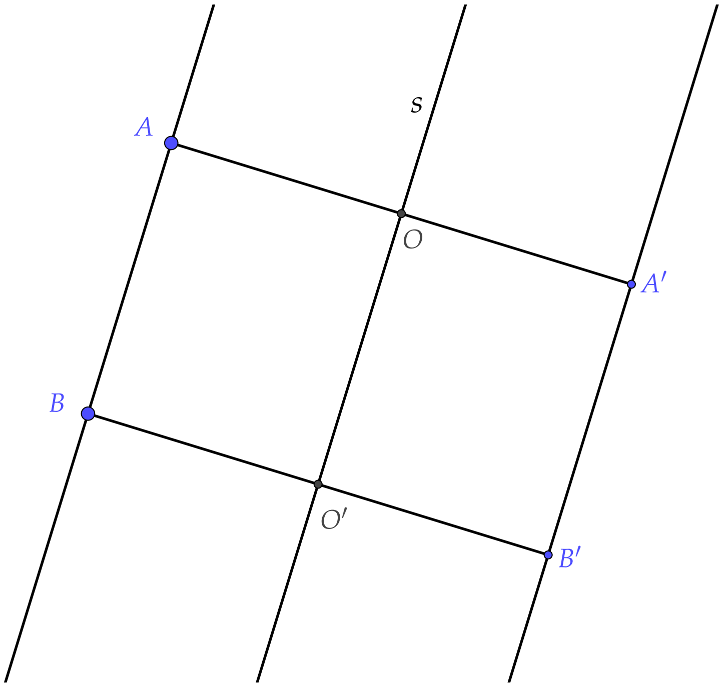

Figura 5.5. Simétrico de un segmento paralelo al eje de simetría.

Ejercicio. Dibuje en una hoja de papel milimetrado un punto, un segmento, un triángulo y una recta, determine entonces sus simétricos respecto a una recta s cualesquiera.

Nótese que en una simetría axial σ_s, el punto P' es el simétrico de P; pero también el simétrico de P' es P. Por tanto, una simetría axial transforma un punto P en P' y el punto P' en P. La inversa de σ_s (σ_s^{-1}) transforma P' en P y P en P'. Por tanto, σ_s coincide con σ_s^{-1}.

Ejercicio. Contestar y justificar su respuesta:

1. ¿Las simetrías centrales respecto a un punto coinciden con su inversa?
2. ¿Las traslaciones de un plano en si mismo coinciden con su inversa?
3. Las rectas perpendiculares al eje de simetría son rectas unidas.

Teorema 5.5
Las simetrías axiales son isometrías (es decir, los polígonos que se corresponden en una simetría axial son congruentes).

Demostración. Para demostrar que las simetrías axiales son isometrías bastará probar que dos polígonos cualesquiera que se corresponden en una simetría axial son congruentes. Esto lo haremos ver demostrando que los segmentos y ángulos correspondientes en una simetría axial son congruentes.

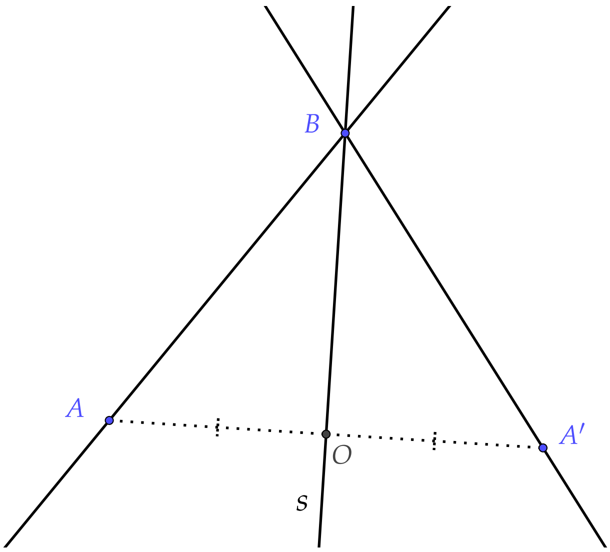

Figura 5.6. Segmentos correspondientes en una simetría axial con un extremo sobre el eje.

Demostremos primero la congruencia de segmentos simétricos no paralelos al eje (la demostración de segmentos paralelos al eje se desprende del corolario 5.2). Sea AB un segmento y su simétrico $A'B'$ respecto al eje s. Si uno de los extremos, por ejemplo el extremo B, está sobre el eje entonces B es unido (Fig. 5.6). Los triángulos $\triangle ABO$ y $\triangle A'BO$ son congruentes, y por tanto $AB \cong A'B'$.

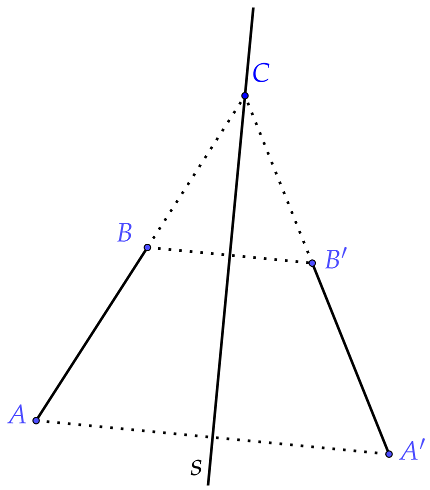

Figura 5.7. Segmentos correspondientes en una simetría axial.

Si los extremos de AB no pertenecen al eje s (Fig. 5.7), prolongando los segmentos AB y $A'B'$, se tiene que se encuentran en un punto C del eje (deben encontrarse sobre el eje por el teorema 5.2, dado que tenemos segmentos no paralelos). Pero por la parte inicial de esta demostración se tiene que $CA \cong CA'$ y $CB \cong CB'$, por tanto, $AB \cong A'B'$ debido a la diferencia de segmentos congruentes.

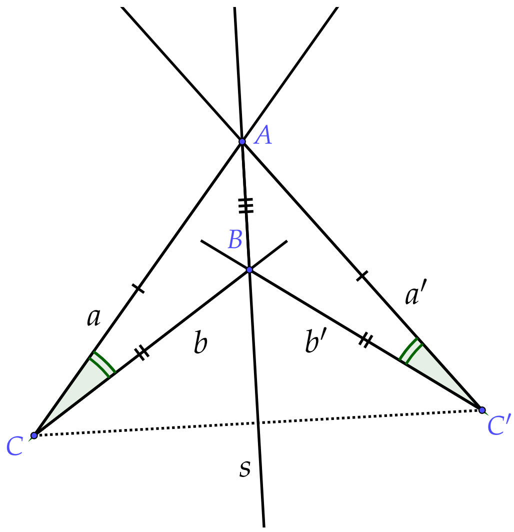

Figura 5.8. Ángulos correspondientes en una simetría axial.

Ahora demostremos la congruencia de ángulos simétricos. Sean $\widehat{ab}$ y $\widehat{a'b'}$ dos ángulos de vértice C y C' simétricos en la simetría σ_s (Fig. 5.8). Se tiene que a' es simétrica de a y b' de b. Comparando los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$, se tiene que son congruentes por el tercer criterio de congruencia de triángulos. En particular será $B\widehat{C}A \cong A\widehat{C'}B$. □

Ejercicio. Represente sobre una hoja de papel milimetrado las siguientes figuras y determine sus simétricos respecto a una recta s cualesquiera.

1. Un triángulo isósceles;
2. Un triángulo rectángulo;
3. Un rectángulo y un paralelogramo.

5.2 Los polígonos y la simetría axial

Recordemos que la mediatriz de un segmento coincide con su eje.

Teorema 5.6
Los puntos que pertenecen al eje de un segmento son los únicos puntos que equidistan de sus extremos.

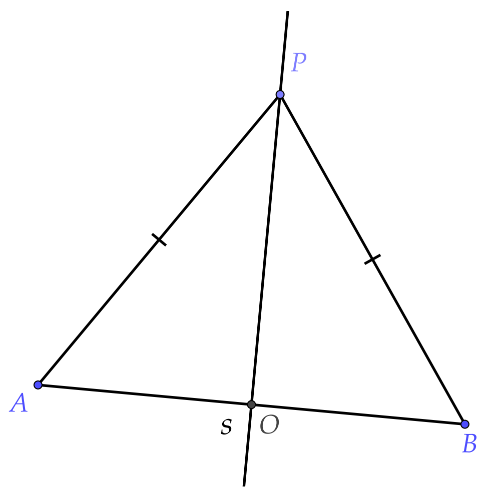

Figura 5.9. P un punto sobre el eje de simetría.

Demostración. En efecto, si se une cualquier punto P del eje s con los extremos del segmento AB (Fig. 5.10) se tiene que P es unido, A y B son puntos simétricos en la simetría axial de eje s, y por tanto $AP \cong PB$. □

A menudo se dice que el eje de un segmento es el lugar de puntos equidistantes de los extremos.

Definición 5.4
Decimos que una recta s es el eje de simetría de una Figura $\mathcal{F}$, si y solo si para cada punto A de la intesección entre $\mathcal{F}$ y uno de los semiplanos individualizados por s, existe uno y solo un punto en la intersección de la Figura $\mathcal{F}$ y el semiplano opuesto, donde está el correspondiente al punto A en la simetría axial de eje s.

Debido a la defininción anterior podemos hablar del eje de un triángulo, eje de un cuadrilátero, etc.

Teorema 5.7
En un triángulo isósceles, el eje de la base es también altura, bisectriz y mediana del triángulo.

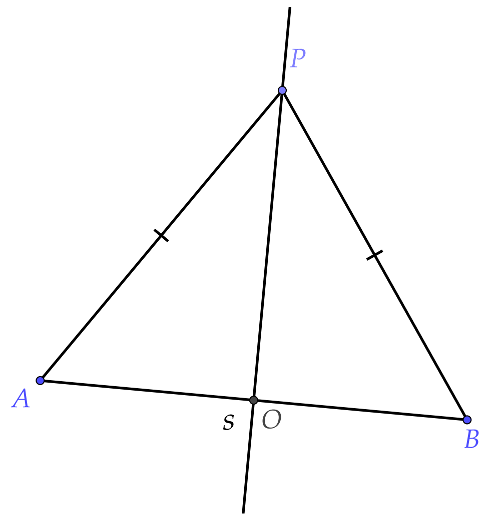

Figura 5.10. $\triangle ABP$ triángulo isósceles.

Demostración. Consideremos el $\triangle ABP$ isósceles de base AB, y O el punto medio de AB, queremos probar que el eje s de AB es altura, bisectriz y mediana del triángulo.

$O \in s$	por definición de eje;
$P \in s$	teorema 5.6 (los puntos del eje de un segmento son los únicos que equidistan de sus extremos) e hipótesis ($AP \cong BP$);
OP es eje de AB	por dos puntos pasa una sola recta;
$\triangle AOP \cong \triangle OBP$	teorema 3.23 (congruencia de triángulos rectángulos CH);
OP es bisectriz	$\triangle AOP \cong \triangle OBP$;
OP es altura	OP es eje de AB;
OP es mediana	OP es eje de AB.

□

Ejercicio. Demostrar las siguientes proposiciones

1. Si en un triángulo el eje de uno de sus lados es también bisectriz del ángulo opuesto, entonces el triángulo es isósceles y tiene como base a aquel lado.
2. En un triángulo equilátero existen tres ejes de simetría.
3. La bisectriz de un ángulo en la base de triángulo isósceles no equilátero no es eje de simetría.

Definición 5.5
Un trapecio $ABCD$ de bases AB, CD y tal que $BC \cong AD$ y tenga ángulos en la base dos a dos congruentes se dice isósceles.

Teorema 5.8
Las dos bases de un trapecio isósceles tienen el mismo eje de simetría, que es además eje de simetría del trapecio.

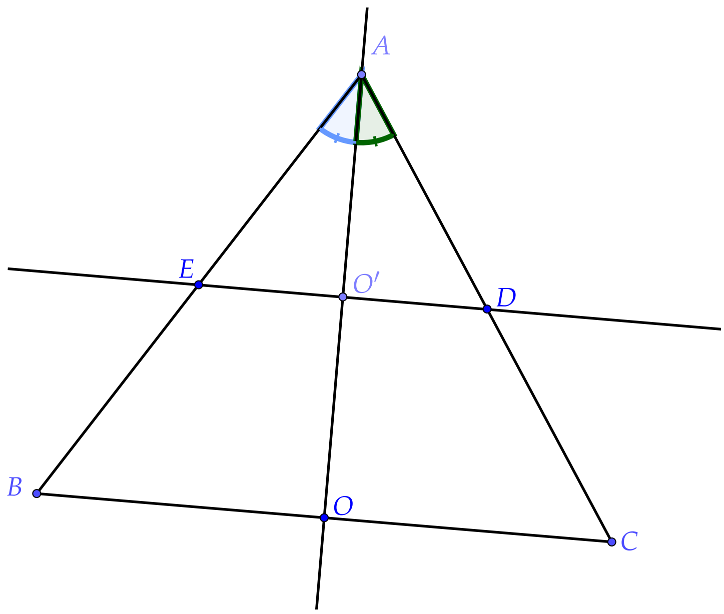

Figura 5.11. Trapecio $BCDE$ y su eje de simetría AO.

Demostración. Sea $BCDE$ un trapecio (Fig. 5.11), con los lados BE y CD congruentes. Prolongando los lados BE y CD se tiene la intersección de dichas prolongaciones en el punto A; el $\triangle ABC$ es isósceles ya que los ángulos en la base son congruentes. Por el teorema 5.7, el eje AO de la base es también altura y bisectriz. Sea O' la intersección de AO y ED. Consideremos los triángulos $\triangle EAO'$ y $\triangle ADO'$; estos son congruentes ya que $E\widehat{A}O' \cong D\widehat{A}O'$, $AE \cong AD$ (la diferencia de lados es congruente) y AO' es lado común, luego $A\widehat{E}O' \cong A\widehat{D}O'$. Se concluye que $E\widehat{O'}A \cong A\widehat{O'}D$, por tanto, AO es también eje del $\triangle AED$, por lo tanto las parejas de puntos B, E y C, D se corresponden en una simetría axial de eje AO, esto es válido para cualquier otro punto de los lados. $\square$

El eje común a las dos bases del trapecio isósceles se dice eje del trapecio.

Corolario 5.3
Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes y se intersecan en un punto del eje.

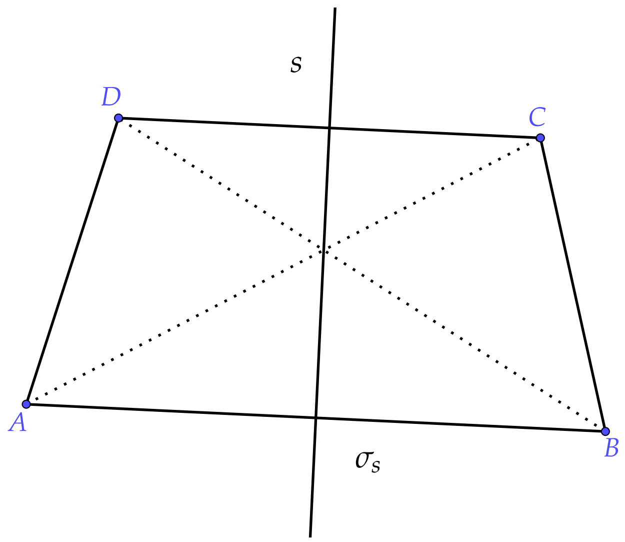

Figura 5.12. Diagonales de un trapecio y su eje.

Demostración. Consideraremos la simetría axial determinada por eje s del trapecio $ABCD$, esto es posible porque el trapecio es isósceles (teorema 5.8).

1) $AC \cong BD$	el segmento AC se corresponde con el segmento BD en la simetría axial de eje s;
2) las rectas AC y BD se intersecan en un punto del eje	ya que rectas correspondientes en una simetría axial se intersecan en un punto del eje (teorema 5.2).

□

Definición 5.6
Se dice rectángulo a un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

Un rectángulo es necesariamente un paralelogramo por cuanto tiene ángulos congruentes dos a dos, por tanto, un rectángulo goza de las propiedades de los paralelogramos (teoremas 4.22 y 4.25).

Teorema 5.9
En un rectángulo cada pareja de lados opuestos tiene el mismo eje de simetría y las diagonales son congruentes.

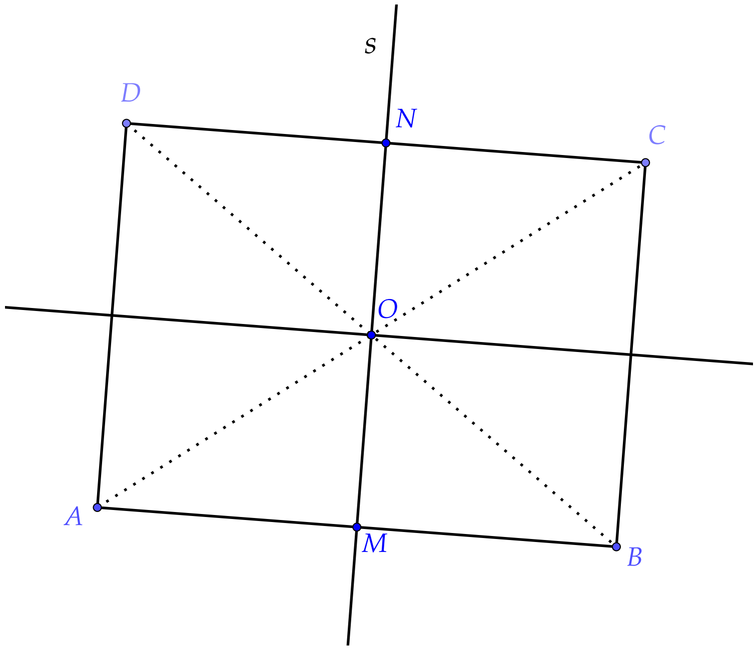

Figura 5.13. Diagonales de un rectángulo y sus ejes de simetría.

Demostración. Consideremos el rectángulo $ABCD$ (Fig. 5.13), y sea s el eje del lado AB y M el centro de AB. En la simetría σ_s al punto A le corresponde B, al ángulo recto $M\widehat{A}D$ le corresponde el ángulo recto $M\widehat{B}C$, al lado AD el lado paralelo y congruente BC, por tanto, al punto D el punto C; es decir, s es también eje del lado CD. Las diagonales son congruentes porque son segmentos que tienen como extremos puntos que se corresponden en la simetría σ_s. □

Definición 5.7
Se dice rombo a un cuadrilátero con lados congruentes.

Teorema 5.10
En un rombo las diagonales son ejes de simetría y son bisectrices de los ángulos del rombo.

Definición 5.8
Se dice cuadrado a un cuadrilátero con los ángulos rectos y los lados congruentes.

Teorema 5.11
En un cuadrado tanto los ejes de los lados como las diagonales son ejes de simetría; las diagonales son congruentes, perpendiculares entre si y bisectrices de los ángulos.

Ejercicio. Demostrar los inversos de los teoremas 5.9, 5.10 y 5.11.

5.3 Desigualdad entre segmentos y ángulos

Sea r una recta y P un punto que no pertenece a r. Se sabe que existe una única recta que pasa por P y es perpendicular a r (teorema 2.14). Sea H el pie de dicha perpendicular. El segmento PH se denomina segmento perpendicular trazado de P a r. Cualquier otro segmento que tiene como extremo a P y un punto cualquiera de r (distinto de H) se dice segmento oblícuo (Fig. 5.14). El punto H se llama también proyección del punto P, y el segmento HA y HB proyección respectivamente de PA y PB.

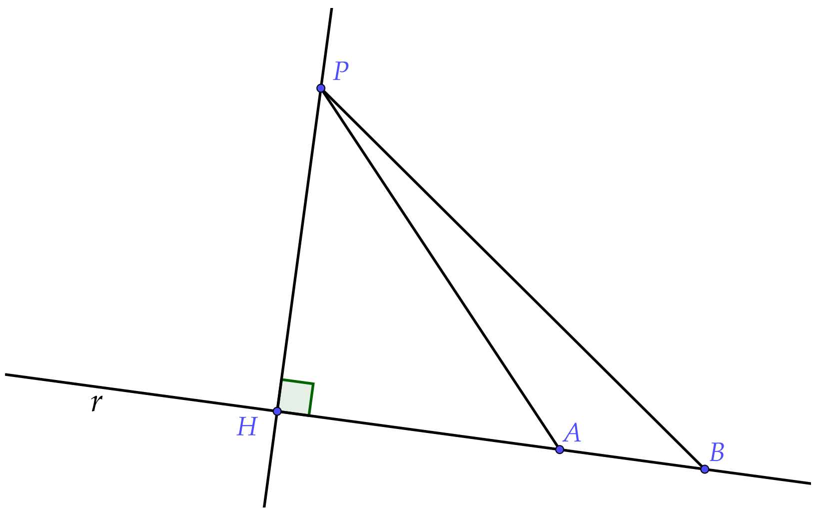

Figura 5.14. Proyecciones de puntos y segmentos sobre una recta.

Teorema 5.12
Dada una recta r y un punto P que no le pertenece, el segmento perpendicular trazado desde P a r es menor que todo segmento oblícuo; dos segmentos oblícuos que tienen proyecciones congruentes son congruentes; entre dos segmentos que tienen proyecciones no congruentes, el mayor es aquel que tiene la proyección mayor.

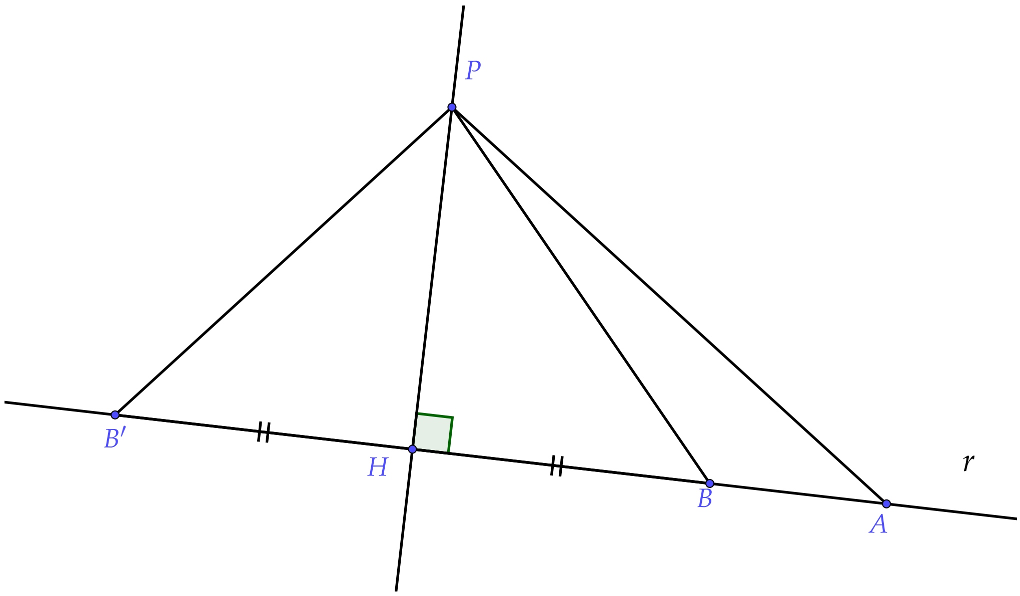

Figura 5.15. Proyecciones de segmentos sobre una recta.

Demostración. Consideremos el segmento PH perpendicular a r y los segmentos oblícuos PA y PB (Fig. 5.15). En el triángulo resctángulo $\triangle APH$, el cateto PH es menor que la hipotenusa AP (corolario 3.2). Supongamos que $BH \cong HB'$, y consideremos los dos segmentos oblícuos PB y PB'. En la simetría axial σ_{PH}, PB y PB' se correponden, por tanto, $PB \cong PB'$. Se tiene $AH > HB$. Observemos que los dos ángulos $P\widehat{A}H$ y $P\widehat{B}H$ son agudos de los triángulos rectángulos $\triangle APH$ y $\triangle PBH$. Por tanto $A\widehat{B}P$ es obtuso porque es adyacente a un ángulo agudo. En el $\triangle APB$ se tiene $B\widehat{A}P < A\widehat{B}P$ por tanto por el teorema 3.18 es $AP > PB$. □

Podemos llamar "distancia" en espera de definirla correctamente, de un punto A a un punto B a la longitud $|AB|$.

Ya que el segmento perpendicular trazado de un punto P a una recta r es el segmento más corto, es también el de “mínima distancia” del punto P a los diferentes puntos de la recta r. Tal longitud se llama distancia del punto P a la recta r.

Teorema 5.13
Segmentos paralelos comprendidos entre dos rectas paralelas son congruentes (Fig. 5.16).

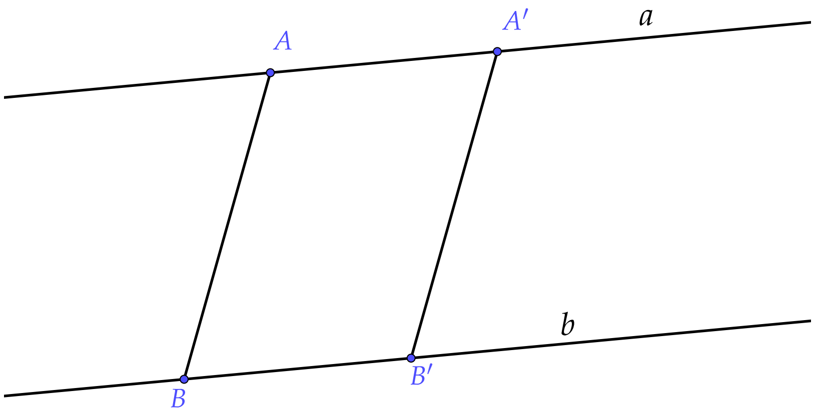

Figura 5.16. Segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas.

Demostración. Consideremos el cuadrilátero $ABA'B'$, este es un paralelogramo (teorema 4.24), por tanto, los lados opuestos son congruentes (teorema 4.22); es decir, $AB \cong A'B'$ □

En particular, si dos segmentos AB y $A'B'$ son perpendiculares a las rectas a y b, su longitud común está dada por la “distancia entre las dos rectas”.

Teorema 5.14
La distancia entre dos rectas paralelas es la mínima distancia entre sus puntos (Fig. 5.17).

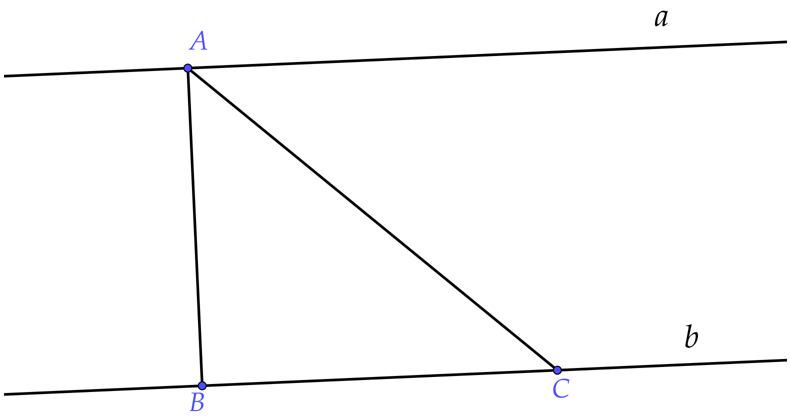

Figura 5.17. Distancia entre rectas.

5.4 Composición de simetrías axiales. Rotaciones

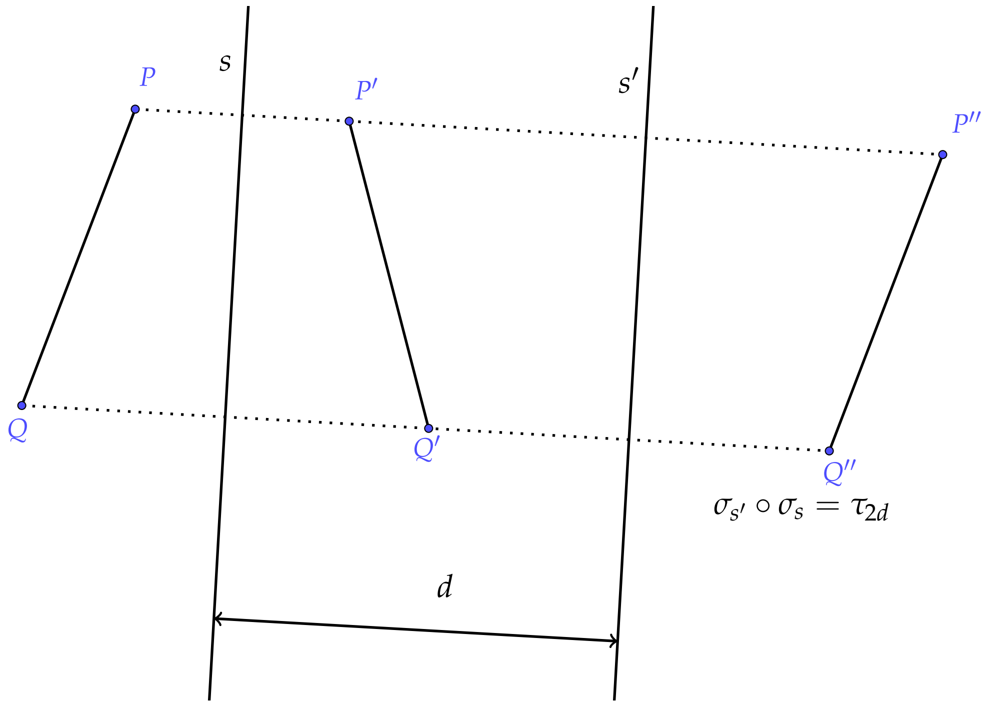

Figura 5.18. Composición de simetrías axiales de ejes paralelos.

Consideremos dos simetrías axiales σ_s y $\sigma_{s'}$ de ejes s y s', diferentes y paralelas (Fig. 5.18). Vamos a demostrar que la composición $\sigma_{s'} \circ \sigma_s$ es una traslación.

Tomando dos puntos P y Q, sean P' y Q' sus simétricos mediante σ_s; sean P'' y

Q'' las transformaciones de P' y Q' mediante $\sigma_{s'}$. La transformación $\sigma_{s'} \circ \sigma_s$ aplica P en P'' y Q en Q''; se tiene que $PQ \cong P'Q'$, además, $P'Q' \cong P''Q''$; por tanto, $PQ \cong P''Q''$. Podemos concluir que la composición de simetrías axiales conserva la congruencia; además, PQ y $P''Q''$ son paralelos (comparando los triángulos $\triangle PQH$ y $P''KQ''$); finalmente PP'' y QQ'' son paralelos y congruentes. Por tanto, la composición de dos simetrás axiales de ejes paralelos es una traslación: $\sigma_{s'} \circ \sigma_s = \tau$; note que la tralación τ tiene módulo $2d$ ($2d$ significa el doble de la distancia entre los ejes s y s').

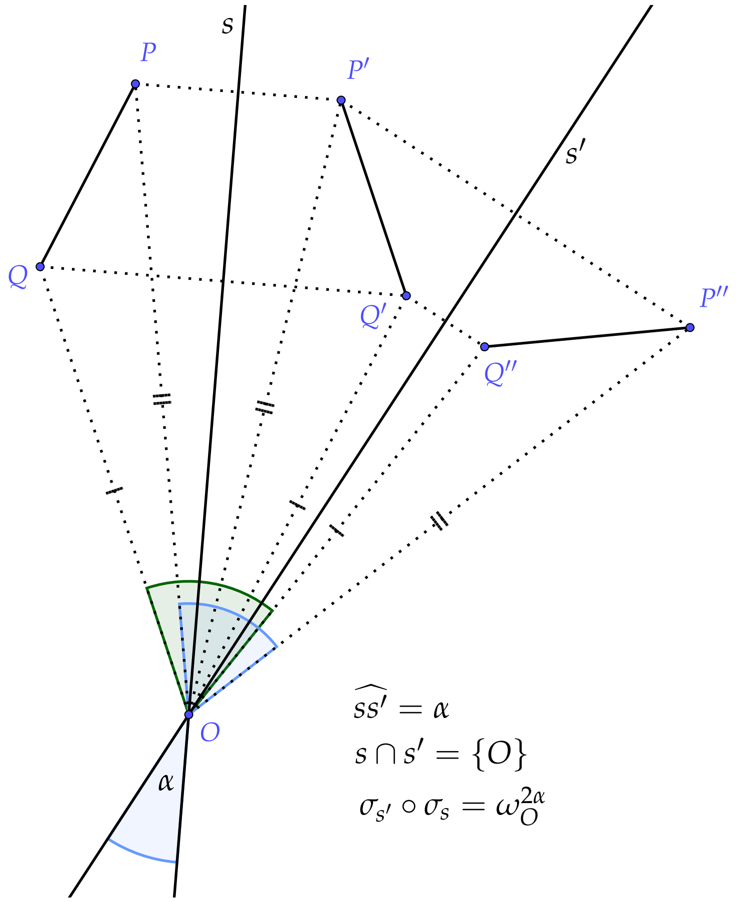

Figura 5.19. Composición de simetrías axiales de ejes incidentes.

Estudiemos ahora la composición de dos simetrías axiales con ejes incidentes en el punto O que forman un ángulo agudo de amplitud α (Fig. 5.19). En la transformación $\sigma_{s'} \circ \sigma_s$, el punto O es unido, por lo tanto, no se trata de una traslación. El correspondiente de PQ mediante σ_s es $P'Q'$; el correspondiente de $P'Q'$ mediante $\sigma_{s'}$ es $P''Q''$. Se verifica que $\triangle OPQ \cong \triangle OP'Q'$, y que $\triangle OP'Q' \cong$

$\triangle OP''Q''$, por tanto, $\triangle OPQ \cong \triangle OP''Q''$.

La transformación geométrica $\sigma_{s'} \circ \sigma_s$, puede interpretarse de manera intuitiva; de acuerdo a la Fig. 5.19; nótese que la a recta OP le corresponde en σ_s la recta OP' y a la OP' le corresponde mediante $\sigma_{s'}$ la recta OP''; lo mismo ocurre para las rectas OQ, OQ' y OQ''. Esto se puede expresar afirmando que la recta OP ha rotado al rededor del punto O un cierto ángulo. Representaremos la transformación que asocia P con P'', Q con Q'', teniendo fijo el punto O, con el símbolo ω_O y la llamaremos rotación al rededor del punto O. Se puede constatar que en una rotación a una recta le corresponde una recta.

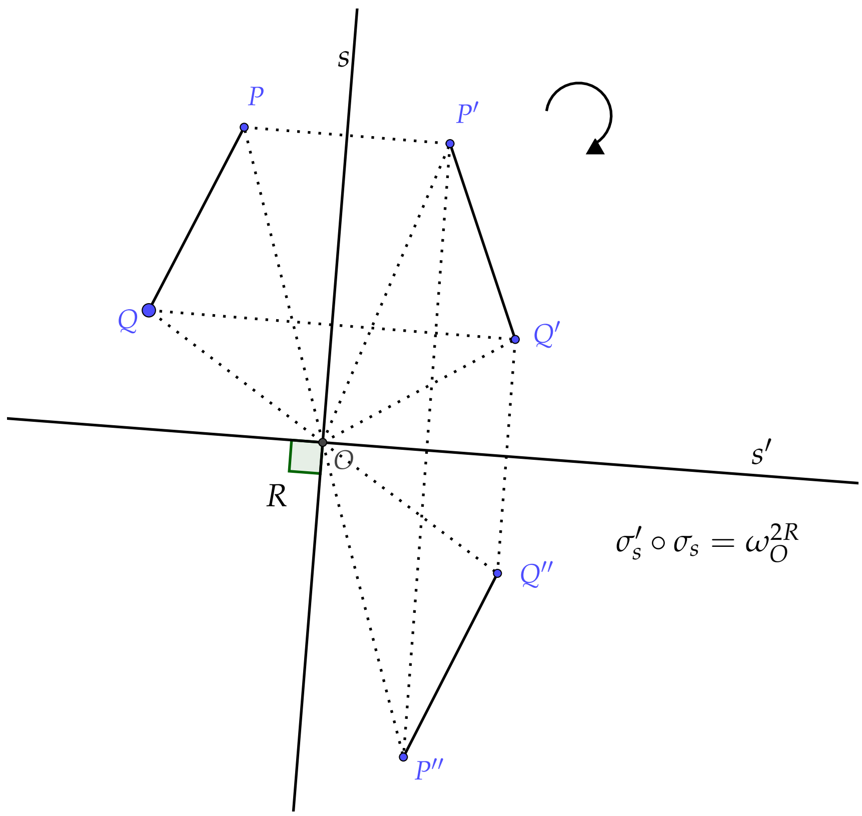

Figura 5.20. Composición de simetrías axiales de ejes perpendiculares.

También observamos que $|Q\widehat{O}Q''| = |P\widehat{O}P''| = 2\alpha$, es decir, la amplitud del ángulo es el doble que el formado por los dos ejes. Una transformación de este tipo, se dice rotación al rededor de O de un ángulo 2α y se representa mediante $\omega_O^{2\alpha}$. En la Fig. 5.20 se representa la rotación de un ángulo plano mientras los dos ejes forman un ángulo recto $\widehat{R}$, por lo tanto, es una rotación $\omega_O^{2\widehat{R}}$.

Definición 5.9
Fijada una dirección de rotación, un punto O (llamado centro de rotación) y un ángulo de amplitud α (llamado ángulo de rotación), la transformación que asocia un punto P con el punto P' obtenido mediante una rotación al rededor de O de un ángulo de amplitud α, se dice rotación y se representa mediante: ω_o^α (Fig. 5.21).

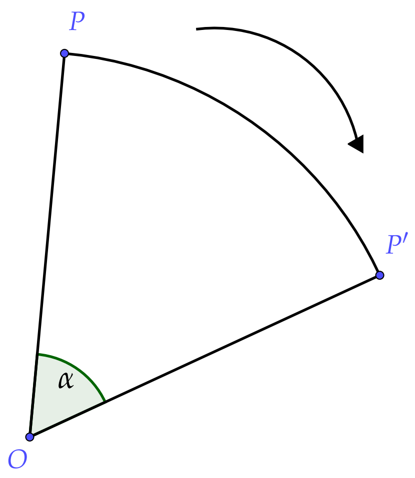

Figura 5.21. Rotación de centro O y ángulo α.

Teorema 5.15
Dada una rotación $\omega_O^{2\alpha}$, siempre es posible encontrar dos ejes s y s' que forman un ángulo de amplitud α y se intersecan en O tal que $\sigma_s \circ \sigma_{s'} = \omega_O^{2\alpha}$.

Demostración. Sea un punto P del plano y O el centro de una rotación $\omega_O^{2\alpha}$, sea P'' el correspondiente de P según la rotación $\omega_O^{2\alpha}$, se quiere demostrar que existen dos rectas s y s' que pasan por O y que forman un ángulo α tal que, considerando las simetrías axiales σ_s y $\sigma_{s'}$, se tiene $(\sigma_{s'} \circ \sigma_s)(P) = P''$.

Por el axioma de transporte de ángulos siempre se pueden determinar dos rectas que formen un ángulo α y tengan como intersección cualquier punto, en este caso el punto O. Ahora si consideramos el punto P, este tendrá su correspondiente por $\sigma_{s'} \circ \sigma_s$ al punto P'', esta composición no es otra cosa que $\omega_O^{2\alpha}$. $\square$

Notemos que las rotaciones son isometrías pues son la composición de dos isometrías.

5.5 Ejercicios resueltos

1. Sea el trapecio $ABCD$ con los lados AB y CD paralelos. Sea r una recta paralela a la recta AB externa al trapecio. Sea s una recta paralela a la recta r, también externa al trapecio. Determine el trapecio $A''B''C''D''$ correspondiente a la transformación $\sigma_s \circ \sigma_r$.

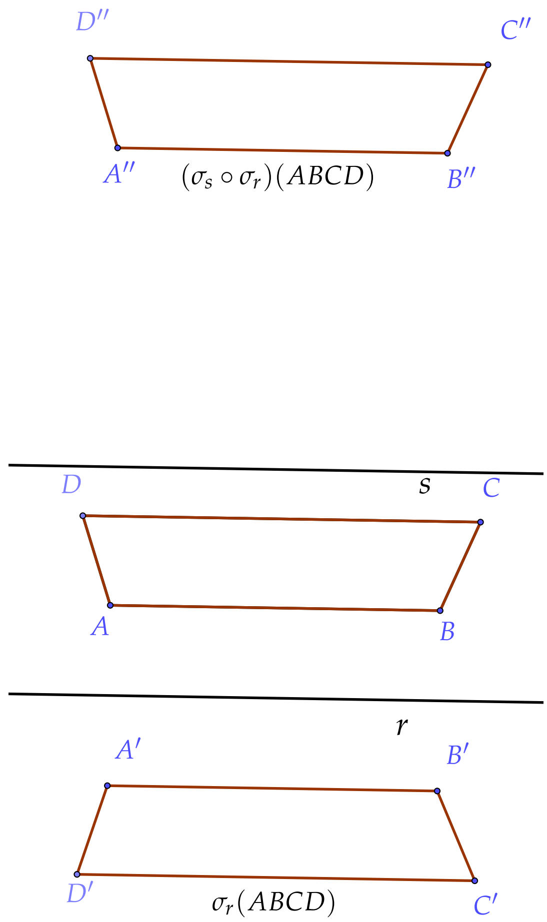

Figura 5.22. Paralelogramo $ABCD$ y sus correspondiente en la composición de simetrías axiales.

Solución. En la Fig. 5.22 se puede observar el cuadriátero $ABCD$ en la parte central, su correspondiente en la simetría axial de eje r en la parte inferior, y en la parte superior su correspondiente en la transformación $\sigma_s \circ \sigma_r$.

2. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles; tomando los centros de los lados, demuestre que si la altura del trapecio es la semisuma de las bases, entonces los centros forman un cuadrado.

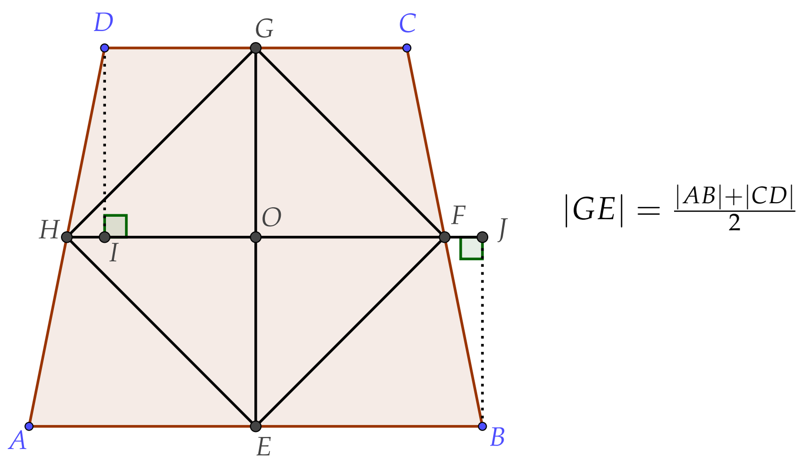

Figura 5.23. Cuadrado formado por los puntos medios de un trapecio isósceles.

Solución. *Demostración.* El cuadrilátero formado por los centros de otro cuadrilátero es un paralelogramo, por lo que el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo. Para que $EFGH$ sea un cuadrado, basta demostrar que sus diagonales son perpendiculares y congruentes. La primera parte está demostrada, ya que HF es paralela a las bases del trapecio (une puntos medios en una correspondencia paralela) y GE es eje del trapecio $ABCD$; es decir, el $O\widehat{E}B$ es recto, luego por ángulos correspondientes también es ángulo recto el $F\widehat{O}G$. Para la demostración de la segunda parte se tiene que:

$$|HF| = |HI| + |IO| + |OF| = |HF| = |IO| + |OF| + |HI| = |DG| + |EB| =$$

$$= \frac{|CD|}{2} + \frac{|AB|}{2} = |GE|$$

□

3. En un cuadrado tanto los ejes de los lados como las diagonales son ejes de simetría; las diagonales son congruentes, perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos.

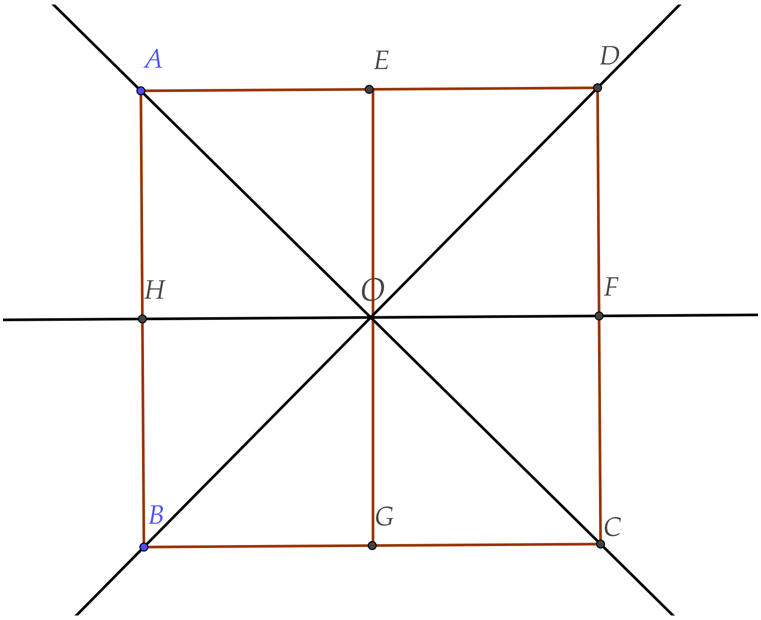

Figura 5.24. Cuadrado $ABCD$.

Demostración. Todo cuadrado es un rectángulo, por tanto, todo lo que es válido para este último, es también válido para los cuadrados; consecuentemente, en un cuadrado cada pareja de lados opuestos tienen el mismo eje de simetría y las diagonales son congruentes (teorema 5.9), luego, EG es eje de los lados AD y BC, mientras que FH es eje de los lados AB y CD.

Los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$ (Fig. 5.24)son congruentes (por LLL); luego se cumple que $A\widehat{D}B \cong B\widehat{D}C$ y $A\widehat{B}D \cong C\widehat{B}D$; así mismo, los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle ABC$ son congruentes (por LLL), por tanto, se cumple que $B\widehat{A}C \cong C\widehat{A}D$ y $A\widehat{C}B \cong A\widehat{C}D$, es decir, las rectas AC y BD son bisectrices de los ángulos del cuadrado.

Recordando que las bisectrices de los ángulos son ejes de simetría axial en la que los lados de los ángulos se corresponden, además, si se considera el $\triangle ACD$ es isósceles por lo que la bisectriz DO es altura, lo que demuestra que las diagonales son perpendiculares.

Las bisectriz DO es también mediana, por lo que $AO \cong OC$, razonando de la misma manera con el $\triangle ABD$ se llega a la conclusión de que $BO \cong OD$; es decir, las diagonales se intersecan en sus puntos medios.

Finalmente, las diagonales son ejes de simetría del cuadrado ya que satisfacen la definición de eje de simetría de una figura. □

4. Sea $A\widehat{O}B$ un ángulo, sea P un punto de su bisectriz; trace las perpendiculares PC y PD desde P respectivamente sobre OA y OB. Demuestre que OP y CD son perpendiculares.

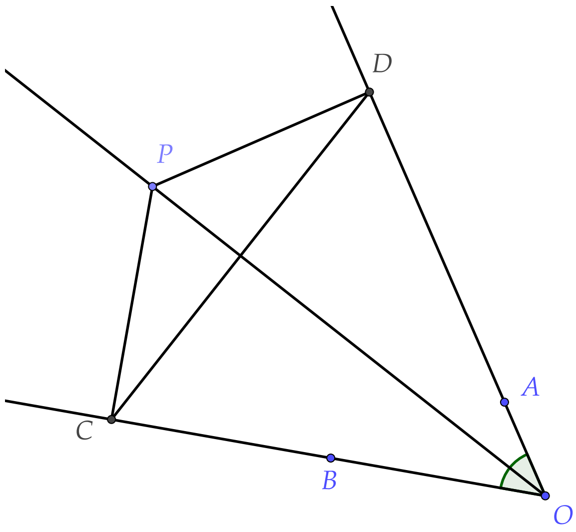

Figura 5.25. OP bisectriz del $A\widehat{O}B$.

Demostración. La bisectriz de un ángulo es el eje de simetría en la cual se corresponden los lados del ángulo. Por hipótesis P pertenece al eje y $O\widehat{C}P \cong O\widehat{D}P$; por tanto, C y D se corresponden en la simetría axial σ_{OP}; consecuentemente, el segmento CD es perpendicular a OP. □

5. Sea el triángulo equilátero $\triangle ABC$; sobre éste, usando los lados como base, forme tres triángulos isósceles congruentes externos al $\triangle ABC$. Demuestre que los trés vértices de los triángulos isósceles forman un triángulo equilátero.

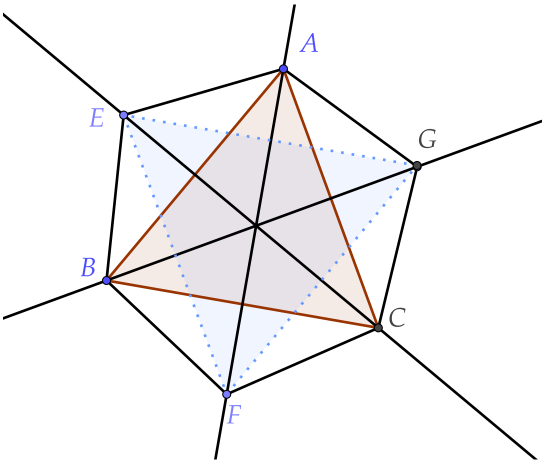

Figura 5.26. Triángulos equiláteros $\triangle ABC$ y $\triangle EFG$.

Demostración. Por hipótesis CE es eje de AB; por tanto, también es bisectriz de $A\widehat{C}B$, consecuentemente $B\widehat{C}E \cong E\widehat{C}A$; análogamente $C\widehat{B}G \cong G\widehat{B}A$. Por hipótesis $\triangle ACG \cong \triangle BCF \cong \triangle ABE$, y además estos son isóscels; luego se cumple que $BA\widehat{E} \cong E\widehat{B}A \cong C\widehat{B}F \cong F\widehat{C}B \cong A\widehat{C}G \cong G\widehat{A}C$. Lo que nos permite, debido a la suma de ángulos congruentes, concluir que $E\widehat{B}F \cong F\widehat{C}G$. Ahora considerando los triángulos $\triangle BEF$ y $\triangle FCG$ se concluye que son congruentes por el primer criterio de congruencia. Luego se cumple que $EF \cong FG$. Análogamente se demuestra que $EG \cong FG$; por tanto, $\triangle EFG$ es equilátero.

$\square$

6. Sea AB un segmento de centro O y sea s una recta no incidente con el segmento AB; demuestre que la distancia de O a la recta s es igual a la semisuma de las distancias desde A y B a la recta s.

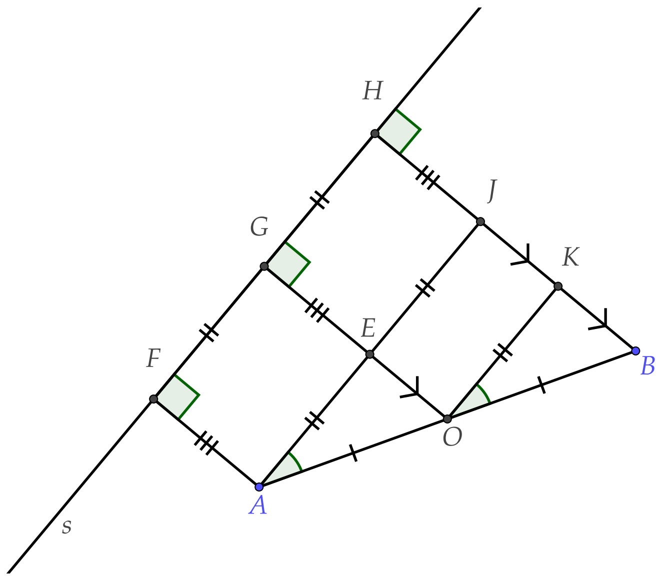

Figura 5.27. Segmento AB y O su centro.

Demostración. Sea s la recta que contiene a los puntos F y H, la distancia de O a la recta s está dada por la longitud del segmento OG perpendicular a la recta s. Así mismo la distancia del punto B a la distancia s es la longitud del segmento BH perpendicular a la recta s; además, la distancia del punto A a la recta s es la longitud del segmento FA perpendicular a la recta s. Por los puntos A y O trazamos paralelas a la recta s; formándose así los rectángulos $AEFG$, $EJHG$ y $OEJK$ y los triángulos $\triangle AEO$ y $\triangle OBK$. Se cumple que $FA \cong GE \cong HJ$, $EO \cong JK$ y $\triangle AEO \cong \triangle OBK$ (por el primer criterio de congruencia), luego $EO \cong KB$. Así $|OG| = \frac{1}{2}(|AF| + |BH|)$. □

5.6 Ejercicios propuestos

1. Sean a y b dos rectas perpendiculares y O la intersección de a y b. Verifique con un ejemplo que $\sigma_a \circ \sigma_O = \sigma_b$.

2. Sea AB un segmento de centro M, sea s el eje del segmento. Demuestre que un punto P está en el semiplano que tiene a s como origen y contiene a B si y solo si el pie H de la perpendicular PH trazada desde P sobre la recta AB está sobre la semirecta MB de origen el punto M.

3. Sean dadas dos rectas r y s incidentes, sea P un punto externo a ellas. Demuestre que las perpendiculares trazadas desde P a las rectas r y s son distintas.

4. Sean A, B, C tres puntos no alineados; sean n y p los ejes de los segmentos AC y AB respectivamente; sea O el punto de intersección de n y p. Sea m el eje del segmento BC. Demuestre que m pasa por O.

5. Sea $ABCD$ un paralelogramo y s una recta externa a él. Demuestre que la suma de distancias de s a los vértices A, B, C, D es el cuádruplo de la distancia de s al punto O, intersección de las diagonales del cuadrilátero.

Bibliografía

[DB] D'Amore, B. De Flora, A. (1983). *Geometria para la escuela media superior*. ZANICHELLI. Italia.

[PJ] Pla, J. (2012). *La Geomtría Euclides Las matemáticas presumen de figura*. Grandes ideas de la ciencia. España.

[PA] Pogorélov, A. V. (1998). *Geometría Elemental*. Instituto Politécnico Nacional. México.

[BO] Byrne, O. (2022). *The first six books of the elements of Euclid*. TASCCHEN BENEDIKT. Alemania.

[LA] Layng, A. E. (2008). *Euclid's Elements of Geometry: Books I. II. III. IV. VI and Portions of Books V. and XI., with Notes, Examples, Exercises, Appendices and a Collection of Examination Papers*. Lyon Press.

[SJ] Sturgeon, J. (2011). *The Elements of Euclid Books I to VI with deductions, appendices and historical notes*. Nabu Press.

[HT] Heath, T. (2015). *Euclid's Elements Book One with Questions for Discussion*. Green Lion Press.

[GK] Goulding, K. (2004). *Euclid's Elements Books I-VI Eith Exercises*. Harvard, Massachusetts.

Índice de figuras

Janneth del Rocío Morocho Yaucán

Doctora en Matemática.
Máster en Estadística Aplicada.
Docente de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo.
https://orcid.org/0000-0002-7286-9042
janneth.morocho@espoch.edu.ec

Martha Ximena Dávalos Villegas

Doctora en Matemática.
Máster en Estadística Aplicada.
Docente de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo.
https://orcid.org/0000-0001-7865-6307
martha.davalos@espoch.edu.ec

Carlos Eduardo Cova Salaya

MgSc. en Matemática.
Lic. en Matemática.
Docente de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo.
https://orcid.org/0009-0003-8232-6206
carlos.cova@espoch.edu.ec

ISBN: 978-9942-44-563-6
9 789942 445636

GEOMETRÍA. Una lectura inicial

Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Martha Ximena Dávalos Villegas
Carlos Eduardo Cova Salaya

Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Doctora en Matemática. Máster en Estadística Aplicada.
Docente de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo (ESPOCH).

Martha Ximena Dávalos Villegas
Doctora en Matemática. Máster en Estadística Aplicada.
Docente de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo (ESPOCH).

Carlos Eduardo Cova Salaya
MgSc en Matemática. Lic. en Matemática.
Docente de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo. (ESPOCH).

ISBN: 978-9942-44-563-6

9 789942 445636

2023