Introducción a la Geometría
Analítica del Plano

Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Leónidas Antonio Cerda Romero
Martha Ximena Dávalos Villegas

2022

Introducción a la Geometría Analítica del Plano

©2022

Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Leonidas Antonio Cerda Romero
Martha Ximena Dávalos Villegas

Introducción a la Geometría Analítica del Plano

© 2022 Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Leonidas Antonio Cerda Romero
Martha Ximena Dávalos Villegas

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)
Riobamba – Ecuador
Panamericana Sur Km. 1½
Teléfono: 593 (03) 2998-200
Código Postal EC0600155

2022
Publicado por acuerdo con los autores.
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego *(peer review)*

Prohibido la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa autorización por escrito de los propietarios del *Copyright*.

El copyright estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva

Corrección y Diseño
Índice Científico, Editorial
Respaldado por:
La Caracola Editores

Introducción a la Geometría Analítica del Plano
Riobamba, Ecuador
Dirección de Publicaciones Científicas, 2022
ISBN: 978-9942-42-436-5
Fecha de Publicación: 2022-07-01

Prólogo

El libro "Introducción a la Geometría Analítica del Plano" aborda los principales tópicos de las líneas de primer y segundo orden, a través del estudio de las coordenadas de un punto en el eje y en el plano, la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares y viceversa, la solución de algunos problemas elementales como son la distancia entre dos puntos y la división de un segmento según una razón dada.

Además, se estudia la transformación de coordenadas cartesianas cuando se realiza una traslación, una rotación o las dos; es decir, se trabajan con sistemas primitivos y sistemas nuevos de coordenadas, lo que permitirá en lo posterior poder determinar las ecuaciones de líneas de mayor complejidad.

Así mismo, se determinan las diferentes ecuaciones de una recta a partir de condiciones preestablecidas, se analiza las líneas de segundo orden: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola, mediante la obtención de las ecuaciones de un lugar geométrico y su representación gráfica. La comprensión de todos estos contenidos permitirá al lector en lo posterior poder abordar los temas de la geometría analítica en el espacio.

Introducción

La Geometría Analítica tiene un enfoque hipotético-deductivo y su valor didáctico y formativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje se basa principalmente en el desarrollo de destrezas de pensamiento abstracto referentes a la percepción y visualización; constituyéndose en una herramienta importante para diferentes áreas del conocimiento como: astronomía, física, negocios; entre otras. Con esta perspectiva ha sido diseñado el libro "Introducción a la geometría analítica del plano".

El presente libro ha sido elaborado con el fin de proporcionar una herramienta útil para docentes y estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de geometría analítica del plano. Las demostraciones de proposiciones y teoremas desarrolladas en el texto constituyen procedimientos generales para la resolución de ejercicios particulares; las mismas, incluyen la argumentación de la validez de los razonamientos realizados; lo que sin duda facilitará a los estudiantes de las carreras de ingeniería y matemática la solución analítica y gráfica de problemas prácticos de manera eficiente.

El texto utiliza un lenguaje matemático formal; y ha sido desarrollado de tal forma que los lectores comprendan definiciones, teoremas y proposiciones; para lo cual se han incluido modelos gráficos, procesos de razonamiento deductivo y analítico, ejemplos y notas explicativas de cada uno de los teoremas demostrados. La obra ha sido desarrollada en cinco capítulos; en cada uno de ellos se realiza un estudio completo de los diferentes tópicos.

En el capítulo I se estudian las coordenadas de los puntos tanto en la recta como en el plano, se demuestran las relaciones entre coordenadas rectangulares y polares. Se demuestran las expresiones que permiten determinar la distancia entre puntos en un eje. Además, se desarrollan algunos ejercicios de aplicación.

El capítulo II trata algunos problemas básicos de la geometría analítica plana, se demuestra las expresiones para la distancia entre puntos, división de un segmento y para la transformación de coordenadas cartesianas por traslación y rotación; además, se estudia la proyección de un segmento sobre un eje arbitrario a partir de la información de la longitud del segmento y el ángulo formado entre el eje y el segmento.

El capítulo III aborda el problema de la determinación de ecuaciones de líneas, dadas sus características principales y el problema contrario, que consiste en determinar el lugar geométrico dada su ecuación; esta tarea se la desarrolla tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas polares. Los ejercicios resueltos refuerzan los contenidos expuestos en este capítulo.

En el capítulo IV se realiza un estudio pormenorizado de las líneas de primer orden, se determinan las ecuaciones de la recta a partir de condiciones dadas y se obtiene la ecuación de un haz de rectas. Se desarrollan algunos ejemplos que aclaran los temas tratados.

Finalmente en el capítulo V se estudian la líneas de segundo orden como la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. También se estudia la trasformación de la ecuación general a ecuación canónica y viceversa; los contenidos tratados en este capítulo son reforzados con ejemplos.

Índice General

Capítulo I

1. Coordenadas en la recta y en el plano

En este capítulo se hace un estudio pormenorizado de las coordenadas en un eje y en el plano; así mismo, se establece las relaciones entre coordenadas cartesianas rectangulares y coordenadas polares.

1.1 Eje y segmentos en el eje

Sea una recta arbitraria a la que la que se la dota de dos direcciones opuestas entre sí, se elige a una de estas como la dirección positiva, y la otra como la negativa. La recta dotada de estas dos direcciones se denomina *eje*, gráficamente se representa la dirección positiva mediante una flecha como en la Figura 1.1

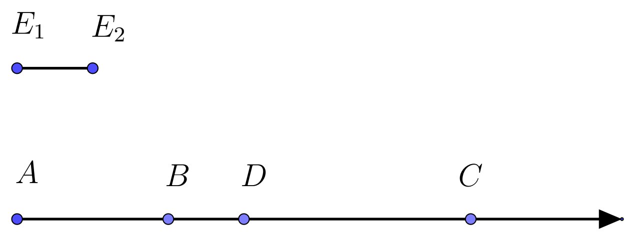


Figura 1.1: Eje a

Definición 1.1. Se denomina *segmento unidad* de un eje cualquiera, a un segmento de cualquier longitud, que sirve como referencia para definir la longitud de un segmento arbitrario; en la Figura 1.1, podría considerarse como segmento unidad al segmento que va de E_1 a E_2.

Definición 1.2. Sean A y B dos puntos arbitrarios en un eje dado. El segmento limitado por dichos puntos se llama *segmento dirigido* si se ha convenido cuál de estos puntos se toma como origen y cuál como extremo del segmento. Como dirección del segmento se toma la dirección del origen al extremo.

Ejemplo. $\overline{AB}$ denota el segmento dirigido limitado por los puntos A y B, cuyo origen está en el punto A; mientras que $\overline{BA}$ denota el segmento dirigido limitado por los puntos A y B, cuyo origen está en el punto B.

Nota. De aquí en adelante se llamará simplemente segmento a los segmentos dirigidos en un eje.

Definición 1.3. Se denomina *magnitud* del segmento del eje $\overline{AB}$, al número igual a su longitud, tomado con signo más, si la dirección del segmento coincide con el sentido positivo del eje, y con signo menos, si la dirección coincide con el sentido negativo del mismo. La magnitud del segmento $\overline{AB}$ se representará mediante AB.

Notas.

1. Dado el segmento $\overline{AB}$, si el punto A coincide con el punto B obtenemos un segmento de longitud 0, en cuyo caso diremos que $\overline{AB}$ es un segmento nulo.

2. La longitud de un segmento es igual al valor absoluto de su magnitud, para representarla usaremos la simbología $|AB|$, luego se cumple que $|AB| = |BA|$.

3. Las magnitudes de AB y BA se diferencian en el signo, es decir:

$$AB = -BA$$

4. En la Figura 1.1 se representa el eje a en el cual se encuentran los puntos A, B, C, D; el segmento unidad es E_1E_2. Se supone que los puntos A, B, C y D están situados de tal modo, que la distancia entre A y B es igual a dos, y entre C y D es igual a tres. La dirección de A a B coincide con el sentido positivo del eje, la dirección de C a D es opuesta al sentido positivo del eje. Por tanto, tenemos en este caso:

   $AB = 2$, $CD = -3$,

   por tanto,

   $BA = -2$, $DC = 3$.

   Además, se cumple

   $|AB| = 2$, $|CD| = 3$.

Teorema 1.1. *Cualquiera que sea la posición de los puntos A, B y C en el eje, las magnitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ están sujetas a la relación*

$$AB + BC = AC$$

a esta relación la llamaremos identidad fundamental.

Demostración. La demostración la realizaremos por casos

Caso I Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen la misma dirección y ninguno de ellos tiene magnitud igual a 0.

$$AB + BC = AC \quad \Big| \quad \text{el todo es igual a la suma de sus partes}$$

Caso II Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen dirección contraria y ninguno de ellos tiene magnitud igual a 0.

$$\begin{array}{r|l} AC + CB = AB & \text{el todo es igual a la suma de sus partes} \\ AC - BC = AB & \text{ya que } CB = -BC \\ AB + BC = AC & \text{transponiendo términos.} \end{array}$$

Caso III Uno de los segmentos tiene magnitud igual a 0 (supongamos $AB = 0$)

$$AB + BC = AA + AC = AC \quad \Big| \quad \text{hipótesis}$$

El caso en el que $BC = 0$ es análogo al anterior. □

1.2 Coordenadas en la recta. Eje numérico

Existe un método que permite determinar, mediante números, la posición de puntos en una recta s dada. Para ello se considera un segmento cualquiera como unidad; además, se indica la dirección positiva de la recta s, y se representa mediante O un punto arbitrario de esta (Figura 1.2).

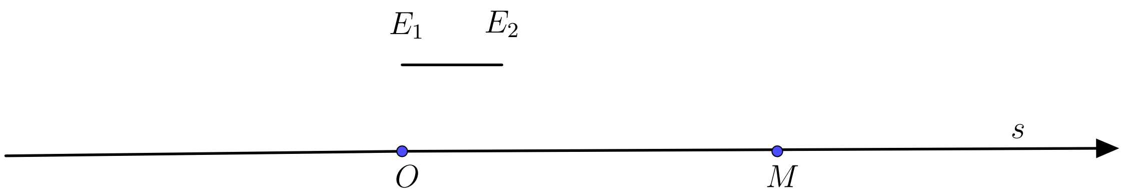


Figura 1.2: Coordenadas de los puntos de un eje

Definición 1.4. Sea M un punto cualquiera del eje, llamamos *coordenada* del punto M, a la magnitud del segmento $\overline{OM}$ (Figura 1.2). El punto O se denomina origen de coordenadas, y su coordenada es igual a 0.

Notas.

1. La coordenada del punto M determina completamente la posición del punto.

2. El valor absoluto de la magnitud de $\overline{OM}$ representa la distancia del punto M al punto O.

3. El signo de OM determina hacia qué lado del punto O se ubica el punto M. Si la coordenada es positiva, el punto M está ubicado en la dirección positiva respecto a O; si es negativa, M estará ubicado en la dirección negativa, finalmente si la coordenada es 0, entonces M coincide con O.

4. Si la recta s es horizontal y su dirección positiva es hacia la derecha, entonces los puntos ubicados a la derecha del origen de coordenadas tendrán coordenadas positivas, mientras que los puntos que están a la izquierda del origen de coordenadas tendrán coordenadas negativas.

5. La coordenada de un punto se representa generalmente mediante la letra x, y cuando se consideran varios puntos, estos se representan mediante la misma letra, diferenciándolos por medio de subíndices, por ejemplo, $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$; sus coordenadas también se diferencian mediante subíndices, por ejemplo, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.

6. Para representar el punto y su coordenada se escribe $A(x)$, en caso de ser un solo punto; si son varios se escribe $A_1(x_1), A_2(x_2), A_3(x_3), \cdots, A_n(x_n)$

Teorema 1.2. *Dados los puntos $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ del eje, se cumple $M_1M_2 = x_2 - x_1$*

Demostración.

1)	$OM_1 + M_1M_2 = OM_2$	debido a $AB + BC = AC$ (Identidad fundamental)
2)	$M_1M_2 = OM_2 - OM_1$	despejando de 1)
3)	$M_1M_2 = x_2 - x_1$	ya que $OM_2 = x_2$ y $OM_1 = x_1$

□

Teorema 1.3. *Dados los puntos $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ del eje, la distancia d, entre ellos está dada por*

$$d = |x_2 - x_1|$$

Demostración.

1)	$M_1M_2 = x_2 - x_1$	teorema 1.2
2)	$\|M_1M_2\| = \|x_2 - x_1\|$	sacando valor absoluto de 1)
3)	$d = \|x_2 - x_1\|$	ya que $\|M_1M_2\| = d$

□

Nota. Por definición de valor absoluto se tiene que $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$, entonces para determinar la distancia entre dos puntos del eje se restan sus coordenadas en cualquier orden y de ese resultado se calcula su valor absoluto.

Ejemplos. Resolver

1. Dados los puntos $A(-2)$, $B(3)$, $C(4)$, $D(-7)$. Determinar las magnitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$

   $AB = 3 - (-2) = 5$

   $CD = -7 - 4 = -11$

   $DB = 3 - (-7) = 10$

2. Determinar la distancia entre los puntos $P(-2)$ y $Q(7)$

   $d = |7 - (-2)| = 9$

Cada punto de un eje tendrá una coordenada real y viceversa, cada número real representa un punto del eje.

Definición 1.5. Se denomina *eje numérico*, al eje en el que se ha asociado a cada punto con un número real y viceversa (Figura 1.3).

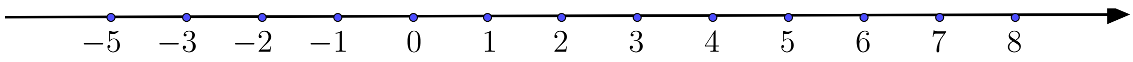


Figura 1.3: Eje numérico

1.3 Coordenadas cartesianas rectangulares en el plano

Un *sistema de coordenadas* permite determinar la posición de los puntos del plano mediante números. A continución, se estudia el sistema de coordenadas llamado *cartesiano rectangular*.

Definición 1.6. Se denomina *sistema de coordenadas cartesiano rectangular* a dos ejes numéricos perpendiculares entre sí (Figura 1.4), distinguidos por un orden; es decir, se conoce cuál es el primero y cuál es el segundo. La intersección de los ejes se denomina *origen del sistema* y los ejes se denominan *ejes coordenados*; además, el primero se llama *eje de las abscisas* y el segundo *eje de las ordenadas*.

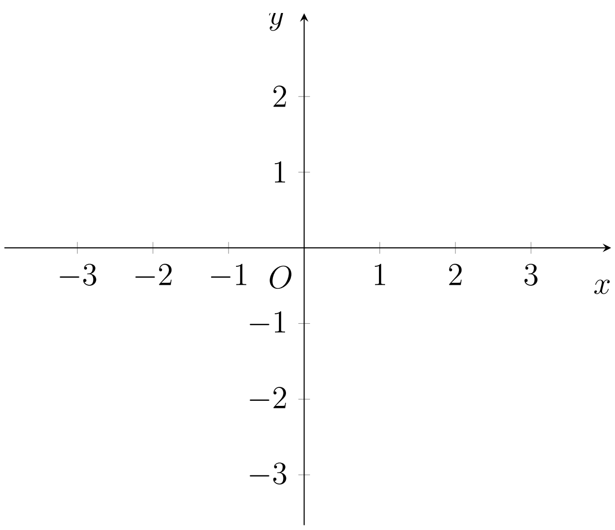


Figura 1.4: Sistema de coordenadas cartesiano rectangular

Nota. El origen de coordenadas se representa con la letra O; el eje de las abscisas mediante Ox y el eje de las ordenadas mediante Oy.

Definición 1.7. Sea M un punto cualquiera del plano, sean M_x y M_y las proyecciones del punto M sobre los ejes coordenados Ox y Oy, se llama *coordenadas del punto* M, y se representan mediante x y y respectivamente, a los números $x = OM_x$ y $y = OM_y$ (Figura 1.5).

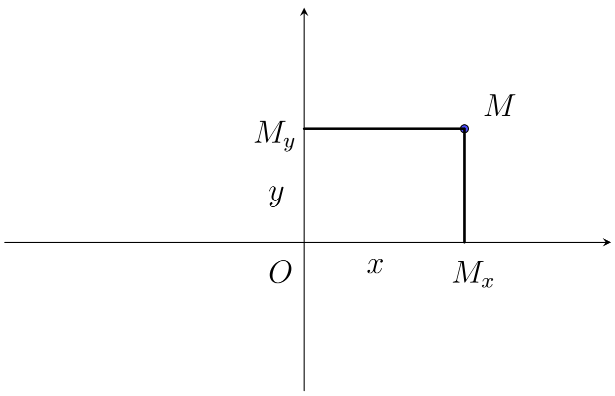


Figura 1.5: Coordenadas del punto M

Notas.

1. OM_x y OM_y representan las magnitudes de los segmentos $\overline{OM_x}$ y $\overline{OM_y}$ respectivamente.

2. El número x se denomina primera coordenada o abscisa y el número y segunda coordenada u ordenada del punto.

3. Se usa la notación $M(x, y)$ para indicar abreviadamente las coordenadas del punto M.

4. Si se tiene varios puntos $M_1, M_2, \cdots, M_n$,entonces, para representar sus coordenadas se usa la notación $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \cdots, M_n(x_n, y_n)$.

5. Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales.

6. Para ubicar en el plano un punto M conocidas sus coordenadas x e y, se ubican los segmentos OM_x de magnitud x sobre el eje Ox y OM_y de magnitud y sobre el eje Oy, luego por M_x se traza una paralela al eje Oy y por M_y una paralela al eje Ox, el punto intersección de las rectas anteriores corresponde al punto M.

Definición 1.8. Se llama *semiplano derecho e izquierdo* a los semiplanos en que queda dividido el plano debido al eje Oy. Así mismo, se llama *semiplano superior e inferior* los semiplanos en que queda dividido el plano debido al eje Ox.

Notas.

1. Los puntos ubicados en el semiplano derecho tienen abscisas positivas $x > 0$ y aquellos que están a la izquierda abscisas negativas $x < 0$. Los puntos ubicados en el semiplano superior tienen ordenadas positivas $y > 0$ y los puntos ubicados en el semiplano inferior, ordenadas negativas $y < 0$. Las coordenadas del origen O son las dos iguales a 0.

2. Los ejes coordenados en conjunto dividen al plano en cuatro partes, llamados *cuadrantes*, y se los nombra como *primero, segundo, tercero* y *cuarto* a los que están ubicados en los semiplanos derecho y superior, izquierdo y superior, izquierdo e inferior, y, derecho e inferior, respectivamente.

Definición 1.9. Si los ejes que forman el sistema de coordenadas cartesianas forman un ángulo diferente a un ángulo recto, entonces el sistema se denomina *sistema de coordenadas cartesianas oblicuo* y las coordenadas de un punto en el plano se ubican trazando paralelas a los ejes (Figura 1.6).

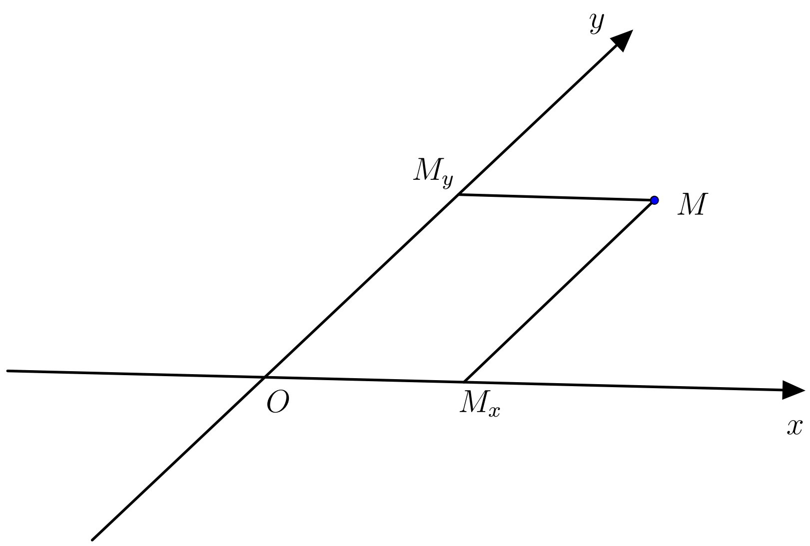


Figura 1.6: Sistema de coordenadas cartesianas oblicuo

Las coordenadas del punto M en este sistema son los números

$$x = OM_x$$

y

$$y = OM_y$$

1.4 Coordenadas polares

Definición 1.10. Se denomina *sistema de coordenadas polares* al conjunto determinado por un punto O del plano al que se denomina *polo*, un rayo OA que tiene su origen en O, denominado *eje polar* y una unidad para la medida de longitudes.

Además, se considera la dirección positiva de rotación del eje al rededor de O en sentido antihorario (Figura 1.7).

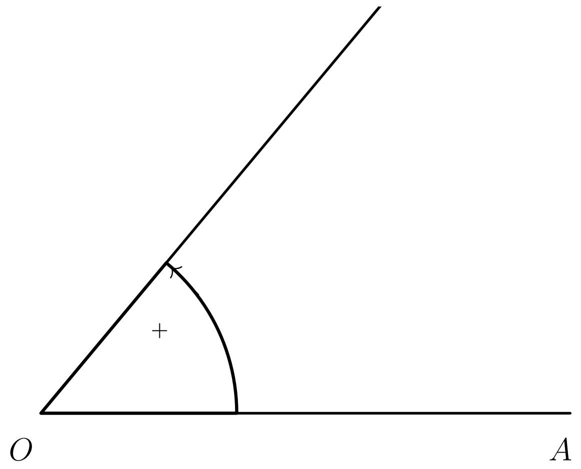


Figura 1.7: Sistema de coordenadas polares

Definición 1.11. Sean M un punto cualquiera del plano, ρ su distancia al punto O y θ el ángulo que debe girar el rayo OA para coincidir con el rayo OM. Los números así definidos se denimonan *coordenadas polares del punto* M. El número ρ se llama *coordenada primera o radio polar*, el número θ, *coordenada segunda o ángulo polar* (Figura 1.8).

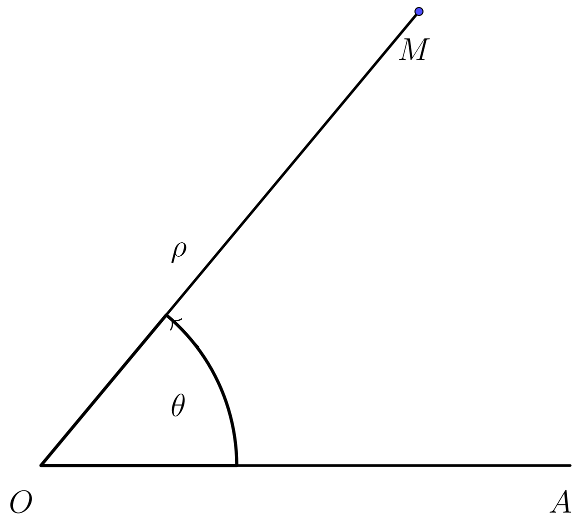


Figura 1.8: Coordenadas polares del punto M

Notas.

1. Los puntos del plano son representados por coordenadas polares mediante (ρ, θ), donde ρ como se dijo es el radio polar y θ el ángulo polar.

2. Un punto determinado por las coordenadas polares (ρ, θ) está también determinado por las coordenadas $(\rho, \theta + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

3. El valor θ debe cumplir con lo siguiente: $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (aunque también se acepta que $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

4. Se conviene en aceptar que $\rho \geq 0$; sin embargo, otros autores aceptan que ρ tome también valores negativos, en este caso, el punto de coordenadas polares $(-r, \theta)$ donde $r \geq 0$, se representa de tal manera que primero se mide el ángulo polar de forma ordinaria, y después se toma el radio polar en la prolongación de r.

5. Si M coincide con O se tiene que $\rho = 0$, y por tanto, el ángulo polar θ puede ser cualquiera.

Ejemplo. Graficar el punto cuyas coordenadas polares son $M = \left(5, \frac{2\pi}{3}\, rad\right)$

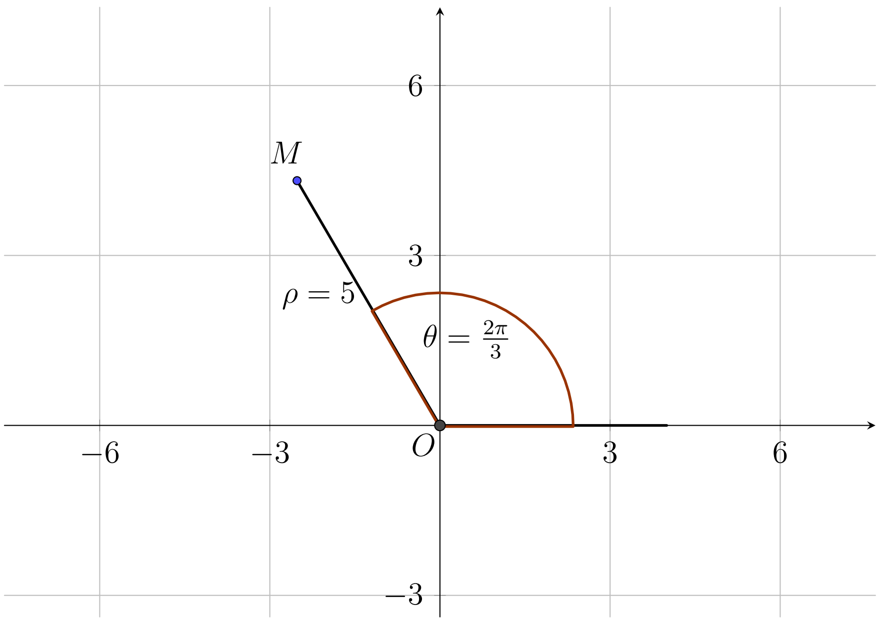


Figura 1.9: Coordenadas polares del punto $\left(5, \frac{2\pi}{3}\, rad\right)$

1.5 Transformación de coordenadas cartesianas a polares y viceversa

En este estudio se supone que el polo del sistema polar coincide con el origen de las coordenadas cartesianas rectangulares, y que el eje polar, coincide con el semieje positivo de las abscisas (Figura 1.10).

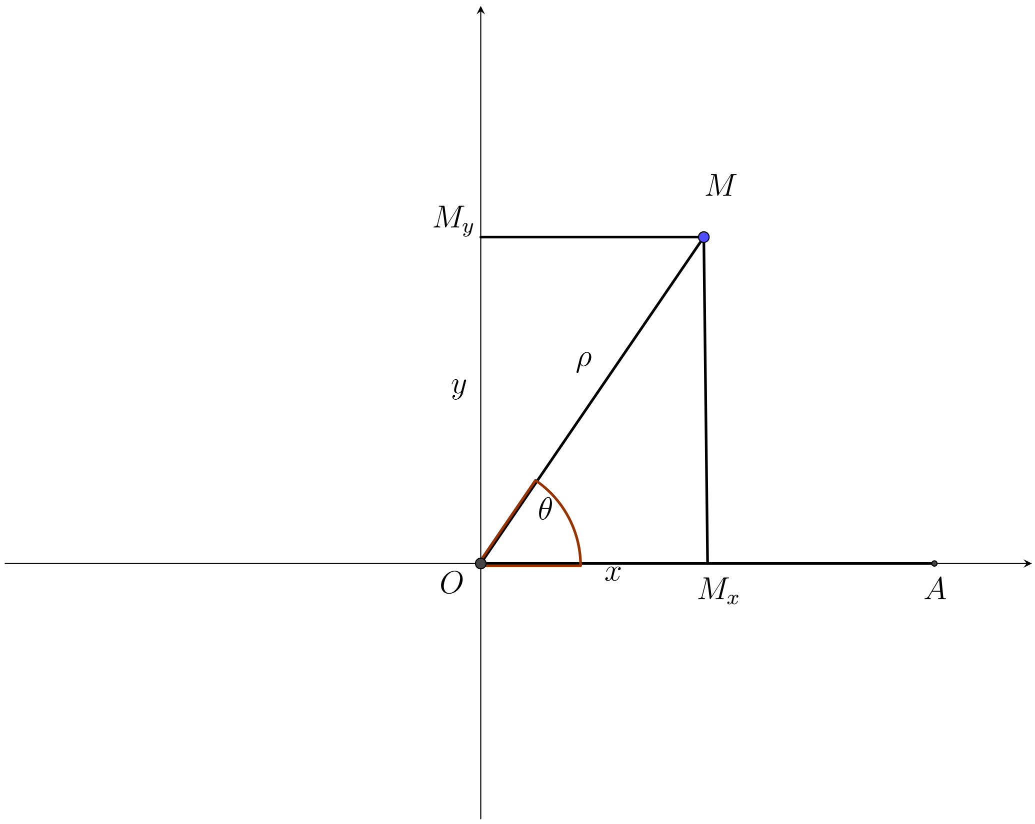


Figura 1.10: Coordenadas polares y cartesianas del punto M

Proposición 1.1. *Sean (ρ, θ) y (x, y) las coordenadas polares y cartesianas, respectivamente de punto M. Las relaciones que transforman las coordenadas polares en cartesianas son:*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \tag{1.1}$$

Demostración. Sean las proyecciones M_x y M_y del punto M sobre los ejes O_x y O_y respectivamente.

1)	$OM_x = OM\cos\theta$	relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo $\triangle OMM_x$
2)	$x = \rho\cos\theta$	ya que $OM = \rho$ y $OM_x = x$
3)	$OM_y = OM\,\mathrm{sen}\,\theta$	relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo $\triangle OMM_x$
4)	$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$	ya que $OM = \rho$ y $OM_y = y$

□

Proposición 1.2. *Sean (ρ, θ) y (x, y) las coordenadas polares y cartesianas, respectivamente del punto M. Las relaciones que transforman las coordenadas cartesianas en polares son:*

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases} \tag{1.2}$$

Demostración.

1)	$\rho^2 = x^2 + y^2$	Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo $\triangle OMM_x$ Figura 1.10
2)	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	extrayendo la raíz cuadrada
3)	$\tan\theta = \frac{y}{x}$	relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo $\triangle OMM_x$

□

Nota. La expresión $\tan\theta = \frac{y}{x}$ no determina completamente el valor del ángulo θ, para precisarlo, es necesario conocer el cuadrante en el que se encuentra el radio polar.

Ejemplos.

1. Dadas las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto $A(-5, 5)$, determine sus coordenadas polares (suponiendo que el polo coincide con el origen del sistema cartesiano, y que el eje polar coincide con el semieje positivo de las abscisas). Elabore un gráfico.

   Solución. Mediante la aplicación de las ecuaciones 1.2 se tiene:

$\rho = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(-\frac{5}{5}) = -45^o$

$\theta = 135^o$

por tanto, las coordenadas polares son: $(5\sqrt{2}, 135^o)$

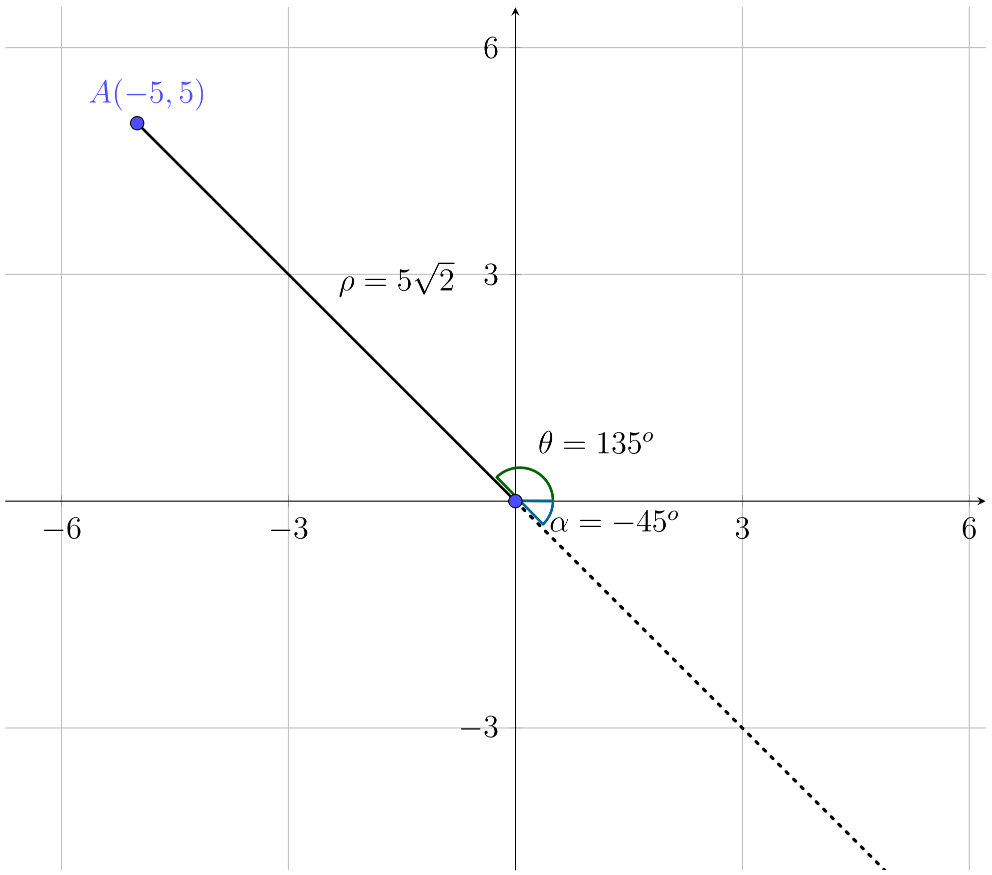


Figura 1.11: Transformación de coordenadas cartesianas a polares del punto $(-5, 5)$

2. Dadas las coordenadas polares de un punto $A(\rho, \theta) = A(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi rad)$, determine sus cordenadas cartesianas rectangulares. Elabore un gráfico.

   Solución. Empleando las ecuaciones 1.1 se tiene:

   $x = 1\cos(-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi) \approx -0,24$

   $y = 1\,\text{sen}(-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi) \approx -0,97$

   por tanto, las coordenadas cartesianas son: $A(-0,24, -0,97)$

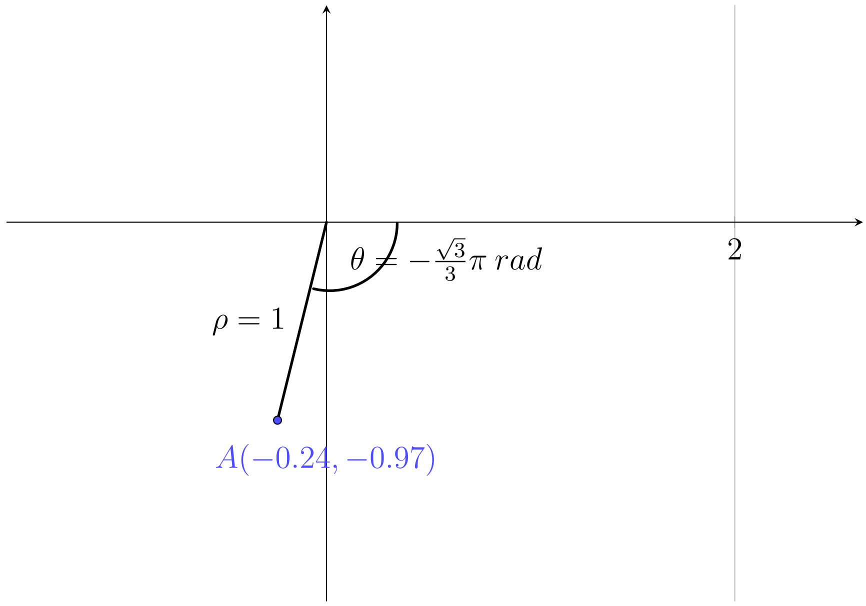


Figura 1.12: Transformación de coordenadas polares a cartesianas del punto $(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\ rad)$

1.6 Ejercicios resueltos

1. Las coordenadas cartesianas oblícuas de un punto son $A(-3, 7)$ donde el ángulo que se forman los ejes es $\frac{\pi}{3}\ rad$, determine las coordenadas cartesianas rectangulares del punto A.

   Solución. Se puede demostrar que las siguientes, son las relaciones entre las coordenadas cartesianas y oblícuas de un punto, donde x e y representan las coordenadas cartesianas y x' e y' representan las coordenadas oblícuas del mismo punto.

$$\begin{cases} y = y' \operatorname{sen} \alpha \\ x = x' + y' \cos \alpha \end{cases}$$

   reemplazando x e y

$$\begin{cases} y = 7 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \\ x = -3 + 7 \cos \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

calculado las funciones

$$\begin{cases} y = 7\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -3 + 7\frac{1}{2} \end{cases}$$

reduciendo

$$\begin{cases} y = \frac{7\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

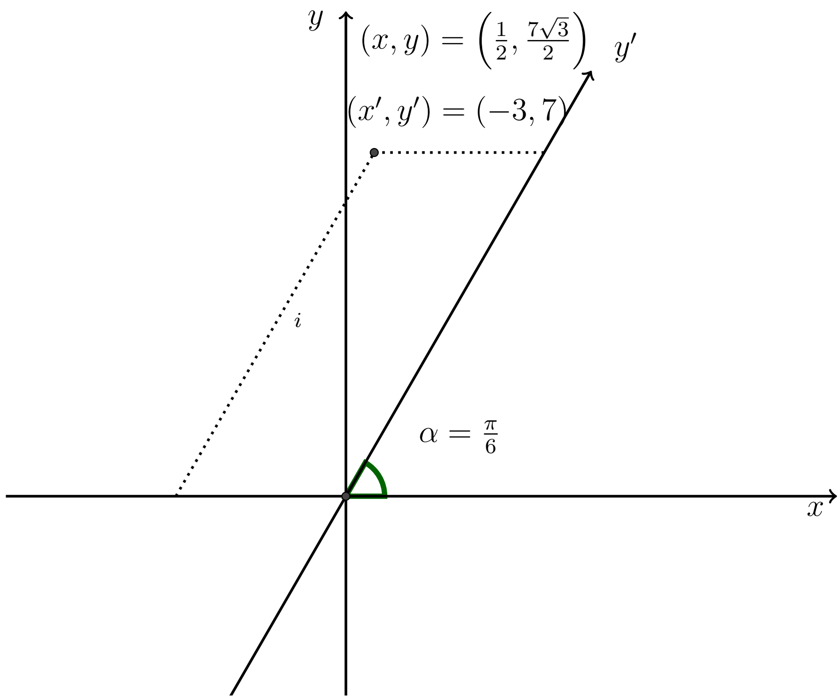


Figura 1.13: Transformación de coordenadas oblícuas a cartesianas

2. Las coordenadas polares de un punto son $(-3, \frac{\pi}{6}\,rad)$, determine las coordenadas oblícuas cuando el ángulo α entre los ejes es $\frac{\pi}{6}\,rad$.

   Solución. Las coordenadas cartesianas del punto están dadas por

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

reemplazando

$$\begin{cases} x = -3\cos\frac{\pi}{6} \\ y = -3\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

resolviendo

$$\begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \tag{1.3}$$

ahora se transforma a coordenadas oblícuas usando las fórmulas

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} \\ x' = x - \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}} \\ x' = x - \frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\frac{1}{2}} \\ x' = x - \frac{y}{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

resolviendo

$$\begin{cases} y' = 2y \\ x' = x - \sqrt{3}y \end{cases}$$

reemplazando la expresiones de 1.3 se tiene

$$\begin{cases} y' = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3 \\ x' = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

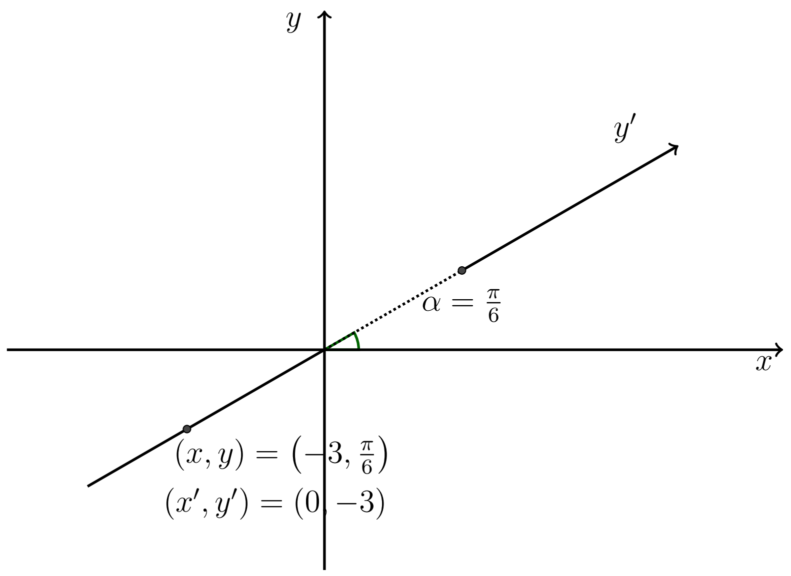


Figura 1.14: Transformación de coordenadas polares a oblícuas

3. Escriba usando la notación (ρ, θ) con $\rho \geq 0$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$ los siguientes puntos $(-3, -4)$, $(4, 6)$, $(-5, 6)$.

   a) (x,y)=(-3,-4)

   Se tiene que $\rho = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

   Además $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ por tanto $\alpha \approx 53.13^o$

   Como θ pertenece al tercer cuadrante, se tiene que

   $\theta \approx -(180^o - 53.13^o) = -126.87^o$

   $(\rho, \theta) = (5, -126.86^o)$

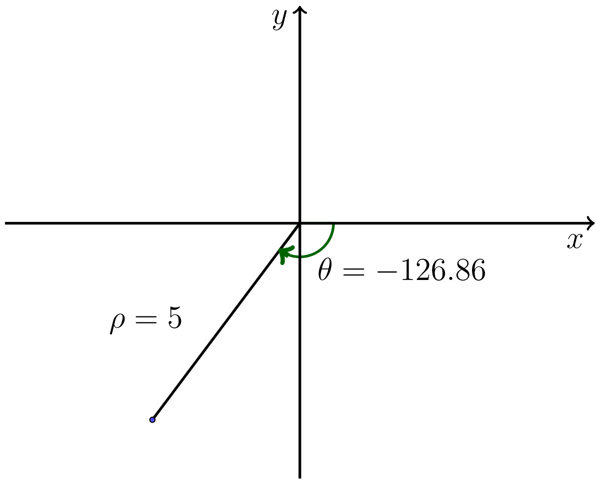


Figura 1.15: Transformación de coordenadas cartesianas a polares, $(-3,-4) = (5, -126.86^o)$

b) (x,y)=(4,6)

Se tiene que $\rho = \sqrt{(4)^3 + (6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

Además $\tan\theta = \frac{6}{4}$ por tanto $\theta \approx 56.31^o$

$(\rho, \theta) = (2\sqrt{13}, 56.31^o)$

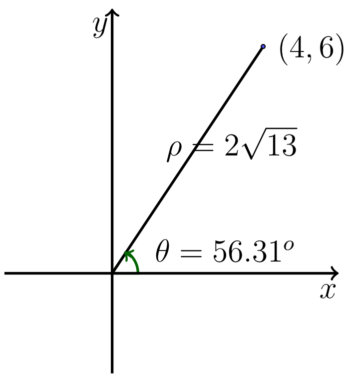


Figura 1.16: Transformación de coordenadas cartesianas a polares, $(4,6) = (2\sqrt{13}, 56.31^o)$

c) (x,y)=(-5,6)

Se tiene que $\rho = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2} = \sqrt{61}$

Además $\tan\alpha = -\frac{6}{5}$ por tanto $\alpha \approx -50.19^o$

Como θ pertenece al segundo cuadrante, se tiene que

$\theta \approx (180^o - 59.19^o) = 129.81^o$

$(\rho, \theta) = (\sqrt{61}, 129.81^o)$

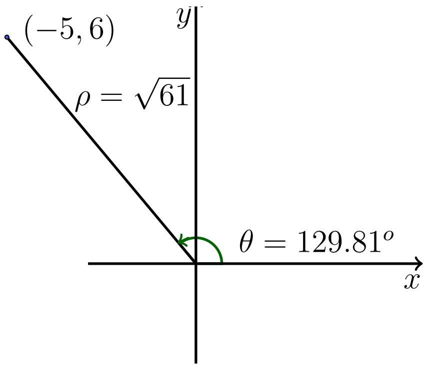


Figura 1.17: Transformación de coordenadas cartesianas a polares, $(-5, 6) = (2\sqrt{13}, 129.81^o)$

4. Determine las coordenadas cartesianas de los puntos $P_1(5, \frac{\pi}{5})$, $P_2(-4, \frac{3}{4}\pi)$, $P_3(5, \frac{4}{3}\pi)$. Grafique.

   a) $P_1(5, \frac{\pi}{5})$

   Se tiene que $x = \rho\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{5} \approx 4.05$

   Se tiene que $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = 5\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5} \approx 2.94$

   $(x, y) = (4.05, 2.94)$

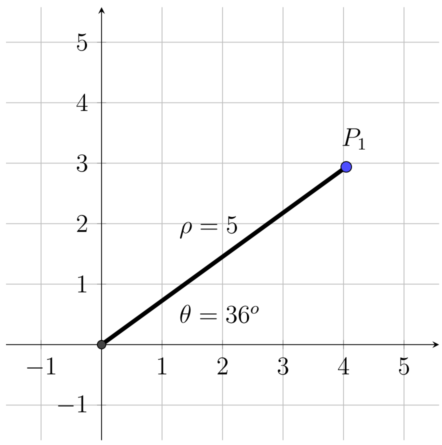


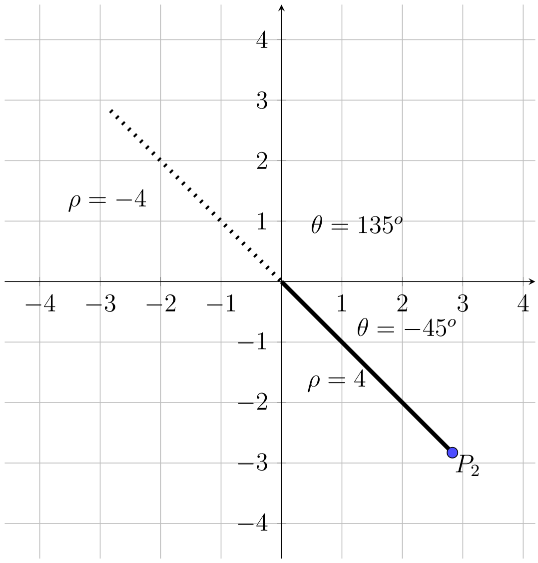
Figura 1.18: Ejercicio 4.a)

b) $P_2(-4, \frac{3\pi}{4})$

Se tiene que $x = \rho\cos\theta = -4\cos\frac{3\pi}{4} = -4(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$

Se tiene que $y = \rho\,\text{sen}\,\theta = -4\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = -4(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2}$

$(x, y) = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

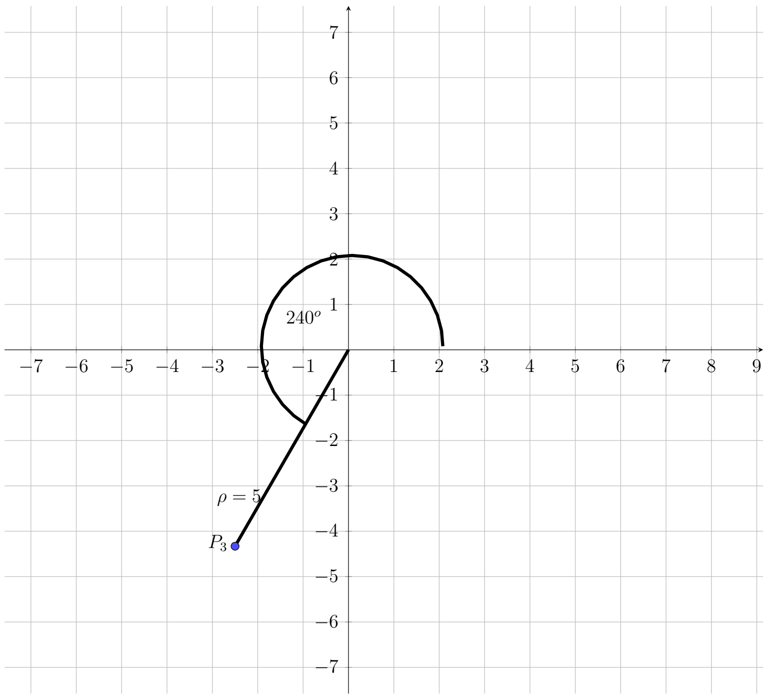


c) $P_2(5, \frac{4\pi}{3})$

Se tiene que $x = \rho\cos\theta = 5\cos\frac{4\pi}{3} = -2.5$

Se tiene que $y = \rho\,\text{sen}\,\theta = 5\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} \approx -4.33$

$(x, y) = (-2.5, -4.33)$



1.7 Ejercicios propuestos

1. Transforme a coordenadas polares usando la notación (ρ, θ) con $\rho \geq 0$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$, las coordenadas de los siguientes puntos, $A(3, -6)$, $B(-4, -5)$ y $C(-5, 8)$.

2. Transforme a coordenadas cartesianas las coordenadas de los siguientes puntos, $P(-2, -30^o)$, $Q(5, 125^o)$ y $R(7, -\frac{2\pi}{3})$.

3. Un cuadrado tiene su centro en el polo de un sistema de coordenadas polares, la longitud del lado es a, determine las coordenadas polares de los cuatro vértices.

4. Dos vértices de un triángulo equilátero son $A(0, 23^o)$ y $B(1, \pi)$, determine las coordenadas polares del tercer vértice.

   Nota. Dos soluciones.

5. Un hexágono regular tiene su centro en el polo de un sistema de coordenadas polares y dos de sus lados son paralelos al eje polar, si la longitud de los lados en igual a cinco unidades, determine las coordenadas cartesianas y polares de los vértices del hexágono.

6. Demuestre que las siguientes ecuaciones relacionan las coordenadas cartesianas rectangulares con las coordenadas cartesianas oblícuas, con ángulo entre los ejes α.

$$\begin{cases} y = y' \operatorname{sen} \alpha \\ x = x' + y' \cos \alpha \end{cases}$$

   donde x e y, representan las coordenadas rectangulares y x' e y' representan las coordenadas oblícuas.

7. Determine las relaciones entre las coordenadas polares y las coordenadas oblícuas.

Capítulo II

2. Estudio de algunos problemas básicos de la geometría analítica plana

En este capítulo se estudia los principales problemas de la geometría analítica plana, como son: División de un segmento en una razón dada, la distancia entre puntos y las relaciones entre coordenadas cartesianas por rotación y traslación.

2.1 Proyección de un segmento sobre los ejes coordenados

Definición 2.1. Dado el segmento $\overline{M_1M_2}$ y las proyecciones P_1 y P_2 del origen y extremo del segmento sobre un eje u respectivamente (Figura 2.1). La magnitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ se denomina *proyección del segmento* $\overline{M_1M_2}$ *sobre el eje* u y se representa mediante

$$Pr_u\overline{M_1M_2} = P_1P_2$$

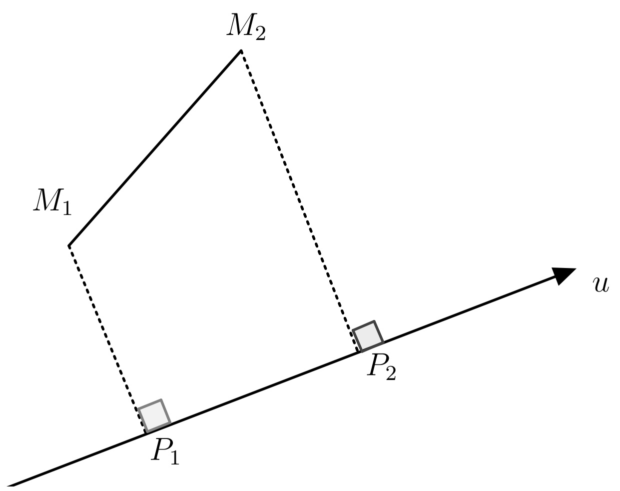


Figura 2.1: Proyección de un segmento sobre un eje

Notas.

1. De acuerdo a la definción, la proyección de un segmento sobre un eje es un

número que puede ser positivo, negativo o cero.

2. Las proyecciones que interesan, son aquellas sobre los ejes coordenados Ox y Oy, a las que se simboliza mediante X y Y, respectivamente.

Teorema 2.1. *Cualquiera que sean los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$, las proyecciones del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes coordenados están dadas por las fórmulas:*

$X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$

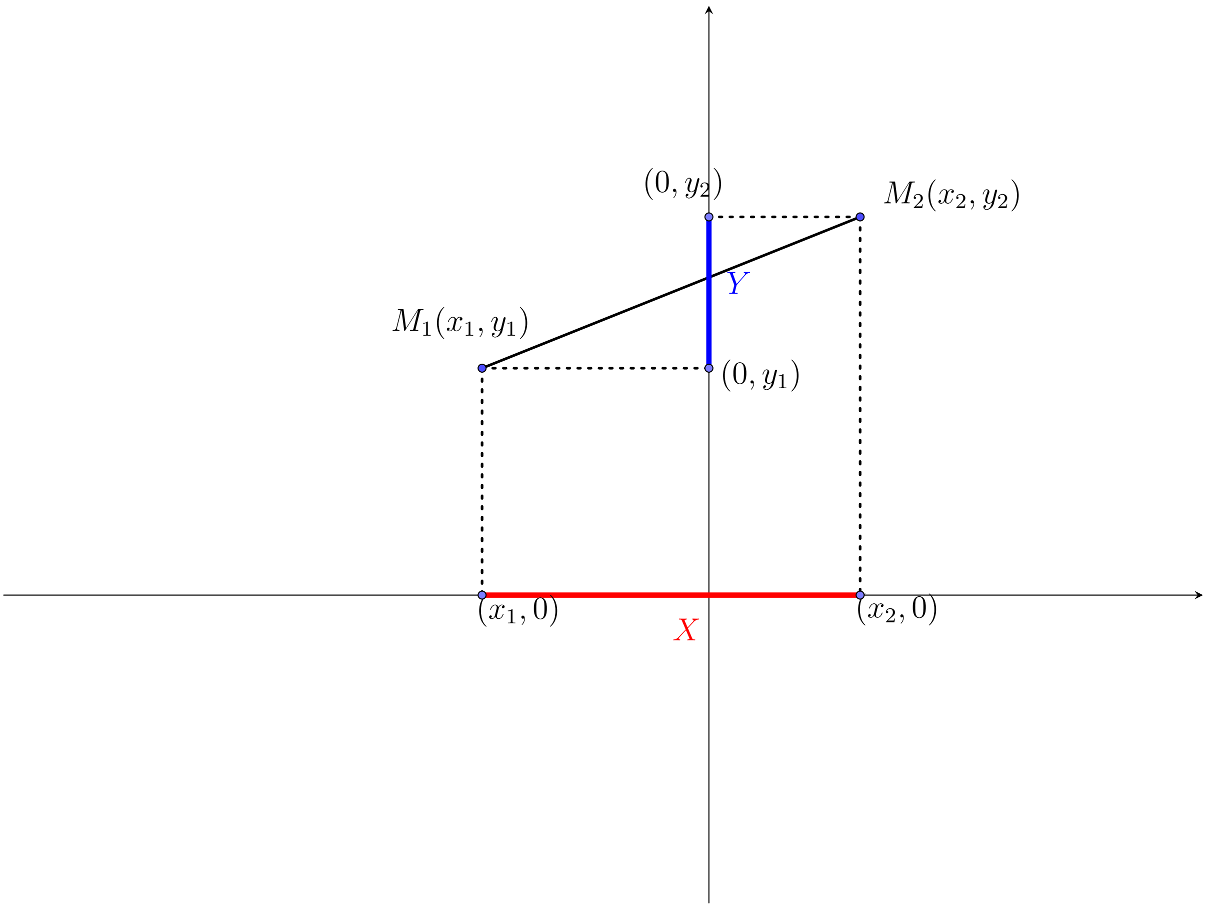


Figura 2.2: Proyección de un segmento sobre los ejes coordenados

Demostración.

1) x_1 es la abscisa del pie de la perpendicular de M_1 sobre el eje Ox	x_1 es la abscisa del punto M_1.
2) x_2 es la abscisa del pie de la perpendicular de M_2 sobre el eje Ox	x_2 es la abscisa del punto M_2.
3) $Pr_{Ox}\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1$	def. proyección.
4) $X = x_2 - x_1$	def. X.

De igual manera se puede probar lo mismo para Y:

5) y_1 es la ordenada del pie de la perpendicular de M_1 sobre el eje Oy	y_1 es la ordenada del punto M_1.
6) y_2 es la ordenada del pie de la perpendicular de M_2 sobre el eje Oy	y_2 es la ordenada del punto M_2.
7) $Pr_{Oy}\overline{M_1M_2} = y_2 - y_1$	def. proyección.
8) $Y = y_2 - y_1$	def. Y.

$\square$

Nota. Si el origen M_1 del segmento coincide con el origen de coordenadas O, y el extremo del segmento es el punto $M(x, y)$, entonces las proyecciones del segmento $\overline{M_1M} = \overline{OM}$ sobre los ejes coordenados están dadas por

$X = x$ y $Y = y$

Lo anterior es verdadero ya que las coordenadas del origen son $(0, 0)$.

Ejemplo. Determine la proyección del segmento sobre los ejes coordenados conociendo su punto origen $M_1(-3, 5)$ y extremo $M_2(-8, -3)$.

$X = x_2 - x_1 = -8 - (-3) = -5$

y

$Y = y_2 - y_1 = -3 - 5 = -8$

2.2 Distancia entre puntos

Teorema 2.2. *Cualquiera que sea la posición de los puntos* $M_1(x_1, y_1)$ *y* $M_2(x_2, y_2)$ *en el plano, la distancia* d *entre ellos se determina por la fórmula*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo. Determine la distancia entre los puntos $M_1(-3, 4)$ y $M_2(4, 8)$

Se aplica la fórmula de la distancia, obteniéndose

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4+3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

2.3 Proyección de un segmento sobre un eje arbitrario

Proposición 2.1. *Sea un segmento* $\overline{M_1M_2}$*, de longitud* d*. Las proyecciones del segmento* $\overline{M_1M_2}$ *sobre los ejes coordenados* Ox *y* Oy *están dadas por:*

$$Pr_{Ox}\overline{M_1M_2} = d\cos\theta$$

y

$$Pr_{Oy}\overline{M_1M_2} = d\operatorname{sen}\theta$$

respectivamente. Donde θ *es el ángulo formado entre un eje* μ*, paralelo al eje* Ox*, que pasa por* M_1*, y el segmento* $\overline{M_1M_2}$*.* θ *se denomina ángulo polar del segmento* $\overline{M_1M_2}$*.*

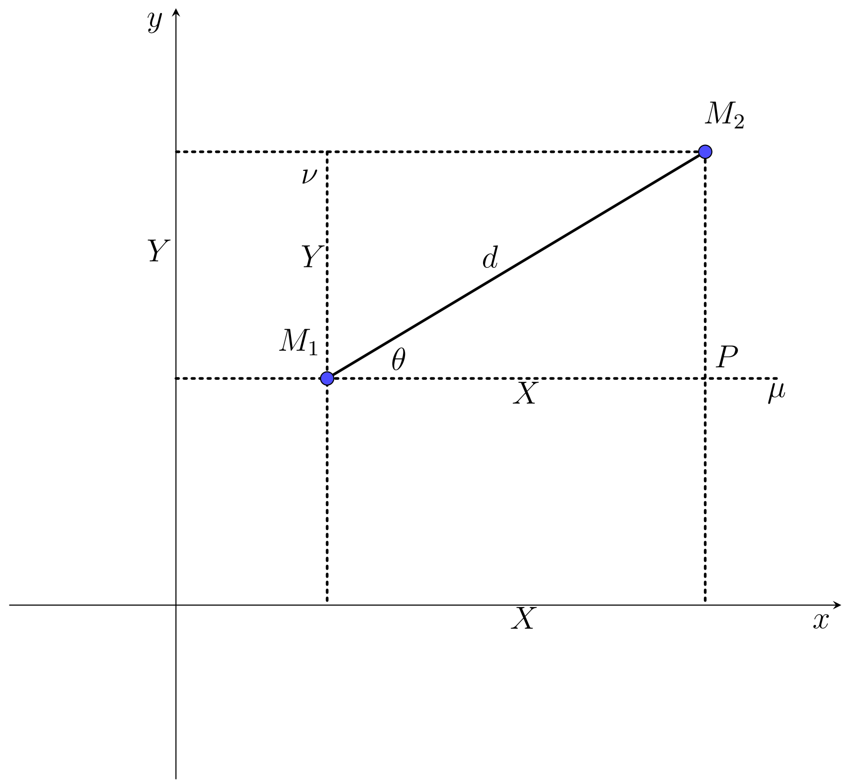


Figura 2.3: Proyección de un segmento sobre los ejes

Demostración.

Sea el sistema cartesiano de origen el punto M_1 con ejes μ y ν paralelos a los ejes Ox y Oy respectivamente (Figura 2.3), las coordenadas polares del punto M_2 son (d, θ). Sean (X, Y) las coordenadas cartesianas del punto M_2 en este sistema, se tiene:

1)	$X = d\cos\theta$	transformación de coordenadas polares a cartesianas
2)	$Y = d\,\mathrm{sen}\,\theta$	transformación de coordenadas polares a cartesianas
3)	$X = Pr_{Ox}M_1M_2$	ya que μ es paralela a Ox y ν es paralela a Oy
4)	$Y = Pr_{Oy}M_1M_2$	ya que μ es paralela a Ox y ν es paralela a Oy
5)	$Pr_{Ox}\overline{M_1M_2} = d\cos\theta$	por transitividad de 1) y 3)
6)	$Pr_{Oy}\overline{M_1M_2} = d\,\mathrm{sen}\,\theta$	por transitividad de 2) y 4)

$\square$

Por un lado, la proyección de un segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes, conocidas las coordenadas de M_1 y M_2 están dadas por $X = x_2 - x_1$ y $Y = y_2 - y_1$ como se vio en el teorema 2.1. Por otro lado, de acuerdo a la proposición 2.1, la proyección del segmento $\overline{M_1M_2}$ está dada por $X = d\cos\theta$ y $Y = d\,\mathrm{sen}\,\theta$, igualando éstas expresiones se tiene que:

$$x_2 - x_1 = d \cos \theta$$

y

$$y_2 - y_1 = d \operatorname{sen} \theta$$

despejando las anteriores se obtiene

$$\cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{d}$$

y

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y_2 - y_1}{d}$$

Las últimas igualdades relacionan el ángulo polar del segmento $\overline{M_1 M_2}$ con la longitud y las coordenadas del origen y extremo del segmento. Además, puede usarse la igualdad

$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

.

Ejemplo. Determine el ángulo polar del segmento que tiene la dirección del punto $M_1 = (-6, 7)$ al punto $M_2 = (7, 1)$

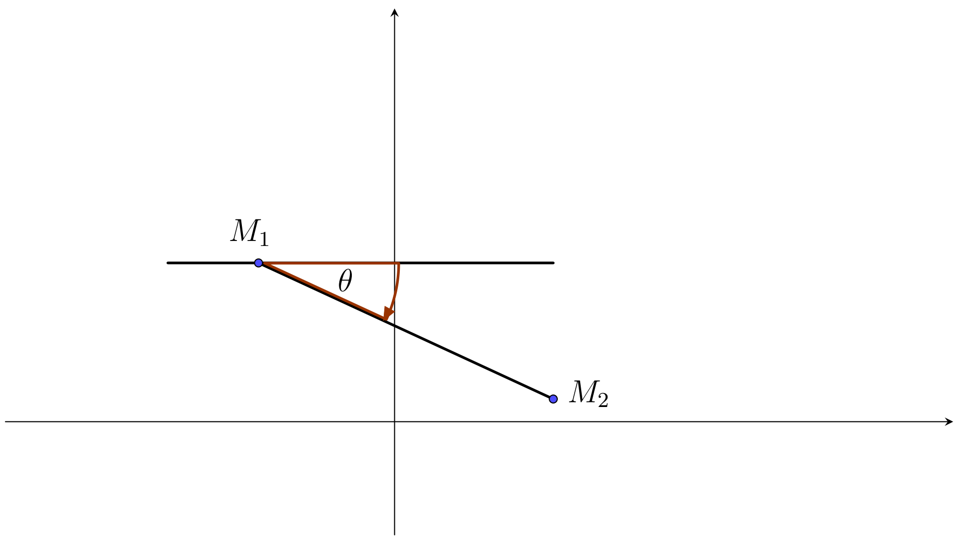


Figura 2.4: Ángulo polar del segmento $\overline{M_1 M_2}$

Usando la expresión $\tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se tiene que $\tan\theta = -\frac{6}{13}$; es decir $\theta \approx -24.78^o$.

Proposición 2.2. *Dados el segmento $\overline{M_1M_2}$, μ un eje cualquiera, la proyección de $\overline{M_1M_2}$ sobre μ está dada por*

$$Pr_\mu \overline{M_1M_2} = d\cos\phi$$

donde d es la longitud del segmento $\overline{M_1M_2}$ y ϕ es el ángulo que debe girar el eje μ para que su dirección coincida con la dirección del segmento $\overline{M_1M_2}$ (Figura 2.5).

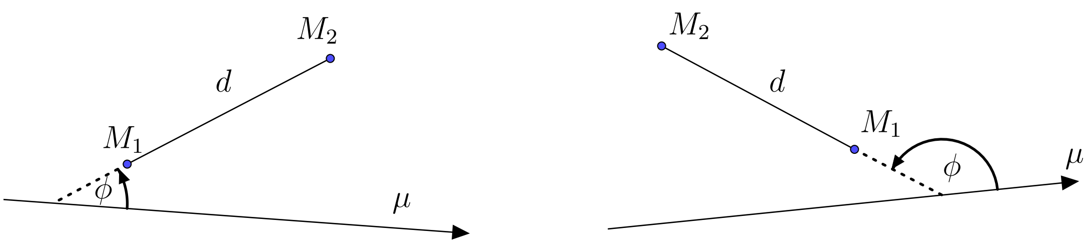


Figura 2.5: Proyección de $\overline{M_1M_2}$ sobre el eje μ

La demostración de la proposición 2.2 queda como ejercicio.

Proposición 2.3. *Sean los puntos M_1, M_2, A y B; la proyección del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre el eje μ que pasa por los puntos A y B, en la dirección de A a B está dada por*

$$Pr_{\overline{AB}} \overline{M_1M_2} = \frac{XX' + YY'}{d'}$$

donde X y Y son las proyecciones del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes coordenados y X' y Y' son las proyecciones del segmento $\overline{AB}$ sobre los mismos ejes; d y d' son las longitudes de los segmentos $\overline{M_1M_2}$ y $\overline{AB}$ respectivamente (Figura 2.6).

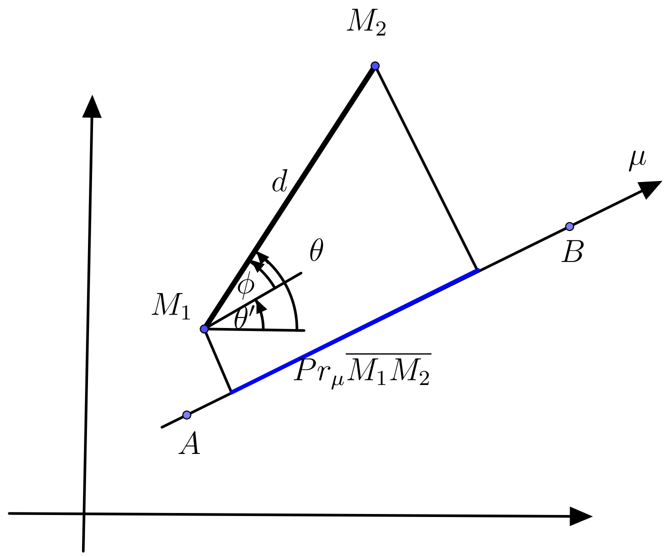


Figura 2.6: Proyección de un segmento sobre un eje que pasa por dos puntos

Demostración. Sean θ y θ' los ángulos polares de $\overline{M_1M_2}$ y μ respectivamente; además, sea ϕ el ángulo entre μ y $\overline{M_1M_2}$, se tiene:

1)	$Pr_{\overline{AB}}\overline{M_1M_2} = d\cos\phi$	proposición 2.2
2)	$d\cos\phi = d\cos(\theta-\theta')$	hipótesis
3)	$d\cos(\theta-\theta') = d(\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta')$	coseno de suma de ángulos
4)	$\cos\theta = \frac{X}{d}$, $\cos\theta' = \frac{X'}{d'}$	proposición 2.1
5)	$\operatorname{sen}\theta = \frac{Y}{d}$, $\operatorname{sen}\theta' = \frac{Y'}{d'}$	proposición 2.1
6)	$d\cos(\theta-\theta') = d\left(\frac{XX'}{dd'} + \frac{YY'}{dd'}\right)$	reemplazo de 4) y 5) en 3)
7)	$d\cos(\theta-\theta') = \frac{XX'+YY'}{d'}$	simplificando 6)
8)	$Pr_{\overline{AB}}\overline{M_1M_2} = \frac{XX'+YY'}{d'}$	transitividad

□

Ejemplo. Determine la proyección del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre el segmento que pasa por los puntos $A(-2,5)$ y $B=(6,-3)$ en la dirección de A a B, tal que $M_1=(2,2)$ y $M_2=(7,4)$.

Utilizando la fórmula

$$Pr_{\overline{AB}}\overline{M_1M_2} = \frac{XX'+YY'}{d'}$$

como $X = 7-2 = 5$, $Y = 4-2 = 2$, $X' = 6-(-2) = 8$, $Y' = -3-5 = -8$ y

$d' = \sqrt{(6+2)^2 + (-3-5)^2} = 8\sqrt{2}$

se tiene

$pr_{\overline{AB}}\overline{M_1M_2} = \frac{5(8)+2(-8)}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

2.4 Área de un triángulo

Teorema 2.3. *Cualquiera que sean los tres puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$, no situados en una misma recta, el área del trinágulo ABC se da por la fórmula.*

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

El segundo miembro de esta fórmula es igual a $+S$, si la rotación más corta del segmento AB al segmento AC es positiva, e igual a $-S$, si esta rotación es negativa.

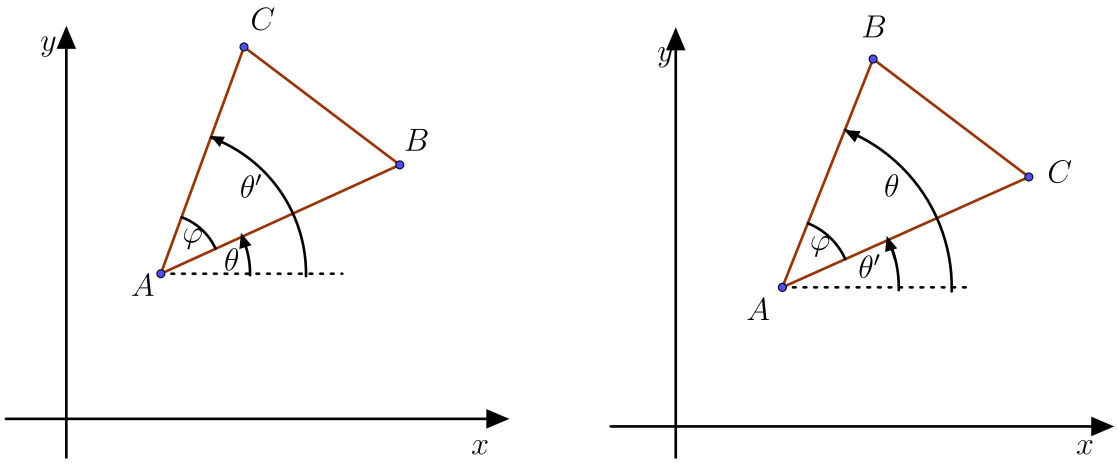


Figura 2.7: Área de un triángulo

Demostración.

Sean $AB = d$, $AC = d'$, φ el ángulo comprendido entre los lados AB y AC, θ el ángulo polar del segmento AB y θ' el ángulo polar del segmento AC.

1)	$S = \frac{1}{2}dd' \operatorname{sen}\varphi$	fórmula del área de un tríangulo conocidas las longitudes de dos lados y el ángulo comprendido.
2)	$\varphi = \theta' - \theta$	si la rotación más corta de $\overline{AB}$ al segmento $\overline{AC}$ es positiva.
3)	$-\varphi = \theta' - \theta$	si la rotación más corta de $\overline{AB}$ al segmento $\overline{AC}$ es negativa.
4)	$\varphi = \pm(\theta' - \theta)$	de 2) y 3).
5)	$S = \pm\frac{1}{2}dd' \operatorname{sen}(\theta' - \theta)$	reemplazando φ en 1).
6)	$S = \pm\frac{1}{2}dd'(\operatorname{sen}\theta' \cos\theta - \cos\theta' \operatorname{sen}\theta)$	resolviendo el seno de la suma.
7)	$S = \pm\frac{1}{2}(XY' - X'Y)$	por las igualdades: $X = d\cos\theta$, $Y = d\operatorname{sen}\theta$ $X' = d'\cos\theta'$, $Y' = d'\operatorname{sen}\theta'$.
8)	$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$	def. de X, Y, X', Y'
9)	$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$	def. de determinante.

□

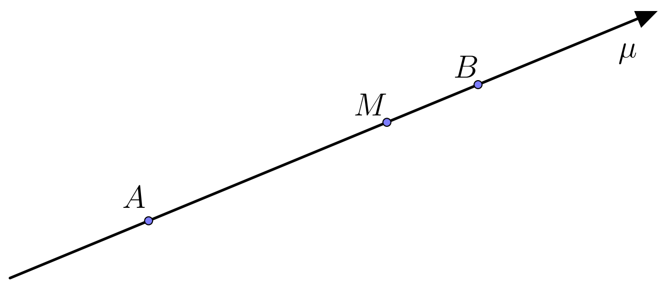


Figura 2.8: División de un segmento en una razón dada

2.5 División de un segmento según una razón dada

Definición 2.2. Sea un eje μ (Figura 2.8) sobre el cual se encuentran dos puntos A y B tal que A precede a B en la dirección del eje, sea M un punto del eje diferente de B y λ un número real; se dice que el punto M divide al segmento dirigido $\overline{AB}$ en la razón λ si se cumple que:

$$\lambda = \frac{AM}{MB}$$

Notas.

1. El número λ no depende de la manera en que se ha elegido la dirección positiva del eje μ, ya que, si se cambia la dirección positiva del eje por la opuesta, también cambia los signos de las magnitudes AM y MB.

2. El valor λ no depende de la unidad de medida elegida para medir las longitudes, ya que, si se cambia la unidad de medida, las magnitudes AM y MB quedan multiplicadas por un mismo factor, por tanto, la razón no se altera.

3. Si el punto M coincide con el punto B, se tiene que $MB = 0$ por tanto λ no está definida.

4. Si λ es un número positivo, entonces el punto M está entre los puntos A y B.

5. Si λ es un número negativo, entonces el punto M no pertenece al segmento $\overline{AB}$.

6. Si λ es igual a 0, entonces $M = A$.

Teorema 2.4. *Si el punto $M(x, y)$ divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón λ, las coordenadas de este punto se expresan mediante las fórmulas*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

donde $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

La demostración del teorema 2.4 se deja como ejercicio.

Ejemplo. Determine las coordenadas del punto M que divide al segmento dirigido $\overline{AB}$ según la razón $\lambda = -\frac{3}{5}$.

Se tienen que $-\frac{3}{5} = \frac{AM}{MB}$

luego $x = \frac{x_1 - \frac{3}{5}x_2}{1 - \frac{3}{5}}$ y $y = \frac{y_1 - \frac{3}{5}y_2}{1 - \frac{3}{5}}$

Proposición 2.4. *Las coordenadas del punto medio del segmento* $\overline{AB}$ *están dadas por*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

donde $A(x_1, y_1)$ *y* $B(x_2, y_2)$.

La demostración de la proposción 2.4 se deja como ejercicio.

Ejemplo. Dados los vértices del triángulo $A(7, -2)$, $B(-4, 6)$, $C(5, -9)$, si representamos por M_1 y M_2, los puntos medios de los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, compruebe que la longitud de $\overline{M_1M_2}$ es la mitad de la longitud $\overline{BC}$.

Se tiene que las coordenadas de M_1 están dadas por

$x' = \frac{x_2+x_1}{2} = \frac{3}{2}$, $y' = \frac{y_2+y_1}{2} = 2$

las coordenadas de M_2 son

$x'' = \frac{x_3+x_1}{2} = 6$, $y'' = \frac{y_3+y_1}{2} = -\frac{11}{2}$

la longitud de $\overline{M_1M_2}$ es

$M_1M_2 = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{225}{4}} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

la longitud de $\overline{BC}$ es

$BC = \sqrt{81 + 225} = 3\sqrt{34}$

es decir $BC = 2M_1M_2$

2.6 Transformación de coordenadas por traslación de ejes

Se pretende determinar las coordenadas de un punto en el plano de acuerdo a diferentes sistemas coordenados, tales que, los ejes sean paralelos; se denominará al sistema de ejes Ox y Oy como *sistema primitivo* de coordenadas. Cualquier otro sistema se denominará *sistema nuevo* de coordenadas y se lo representará mediante $O'x'$ y $O'y'$.

Proposición 2.5. *Dados los sistemas de coordenadas* Ox, Oy *y* $O'x'$, $O'y'$ *cuyo origen es el punto* $O'(a,b)$ *según el sistema primitivo (Figura 2.9), entonces las relaciones entre las coordenadas de un punto* M *en el plano están dadas por*

$$x = x' + a, \quad y = y' + b$$

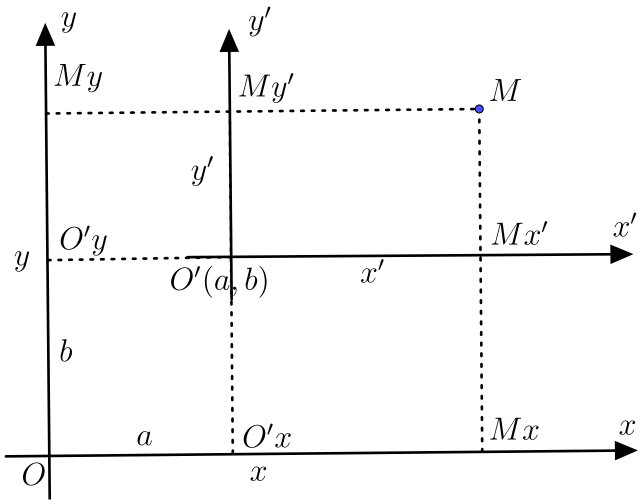


Figura 2.9: Sistema primitivo y sistema nuevo

Demostración. Sean $O'x$ y Mx las proyecciones de O' y M sobre el eje Ox respectivamente, así mismo, sean $O'y$ y My las proyecciones de O' y M sobre el eje Oy respectivamente.

1)	$OMx = OO'x + O'xMx$	teorema 1.1
2)	$x = a + x'$	ya que $OMx = x, OO'x = a, O'xMx = x'$
3)	$OMy = OO'y + O'yMy$	teorema 1.1
4)	$y = b + y'$	ya que $OMy = y, OO'y = b, O'yMy = y'$

□

Las fórmulas de la proposición 2.5 pueden expresarse como

$$x' = x - a \quad y' = y - b$$

Nota. La proposición 2.5 puede expresarse de la siguiente manera: si se hace un traslado paralelo del sistema cartesiano de coordenadas en una magnitud a, en dirección del eje Ox, y en una magnitud b, en dirección del eje Oy, las abscisas de todos los puntos disminuyen una magnitud a, y las ordenadas, en una magnitud b.

2.7 Transformación de coordenadas por rotación de ejes

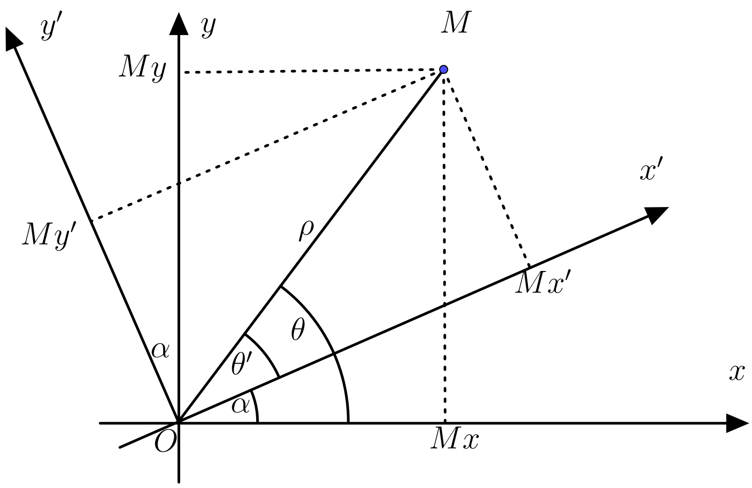


Figura 2.10: Rotación de coordenadas

Si hacemos girar tanto el eje Ox como el eje Oy un mismo ángulo α dejando fijo el origen O de coordenadas (Figura 2.10), se dice que el sistema de coordenadas cartesianas ha rotado un ángulo α. Lo que se busca es determinar relaciones entre las coordenadas de un punto M en el nuevo sistema Ox', Oy' con sus coordenadas en el sistema primitivo Ox, Oy.

Proposición 2.6. *Sea Ox', Oy' el nuevo sistema que se obtiene haciendo girar un ángulo α el sistema primitivo Ox, Oy, sea un punto del plano M con coordenadas (x, y) y (x', y') en el sistema primitivo y nuevo respectivamente. Las relaciones entre* *estas coordenadas están dadas por:*

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

Demostración. Se tiene que $x = OMx$, $y = OMy$, $x' = OMx'$, $y' = OMy'$ (Figura 2.10). Además

1)	$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta$	proposición 1.1
2)	$x' = \rho\cos\theta', \quad y' = \rho\operatorname{sen}\theta'$	proposición 1.1
3)	$x = \rho\cos(\theta' + \alpha)$	de 1) y $\theta = \theta' + \alpha$
4)	$x = \rho\cos\theta'\cos\alpha - \rho\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\alpha$	de 3) y coseno de suma de ángulos
5)	$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$	de 2) y 4)
6)	$y = \rho\operatorname{sen}(\theta' + \alpha)$	de 1) y $\theta = \theta' + \alpha$
7)	$y = \rho\operatorname{sen}\theta'\cos\alpha + \rho\cos\theta'\operatorname{sen}\alpha$	de 6) y seno de suma de ángulos
8)	$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$	de 2) y 7)

□

Proposición 2.7. *Las relaciones entre coordenadas del sistema nuevo y primitivo, después de una rotación de un ángulo α son:*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Demostración. Si se considera como primitivo el sistema nuevo, y se hace girar un ángulo $-\alpha$, utilizando las fórmulas de la proposición 2.6, se tiene

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

□

2.8 Transformación de coordenadas cartesianas rectangulares por traslación y rotación

Ahora se busca la relación entre las coordenadas primitivas y nuevas cuando se realiza una traslación seguida de una rotación de ejes.

La traslación en la dirección del eje Ox será en una magnitud a y en la dirección del eje Oy una magnitud b, mientras que la rotación será con un ángulo α. Para determinar las relaciones entre las coordenadas primitivas y nuevas se empleará un sistema auxiliar $O'x''$, $O'y''$.

Resumiendo, si M es un punto de coordenadas primitivas (x, y), luego del traslado sus coordenadas se transforman en (x'', y''), y posterior a la rotación sus coordenadas en el nuevo sistema se transforman en (x', y') (Figura 2.11).

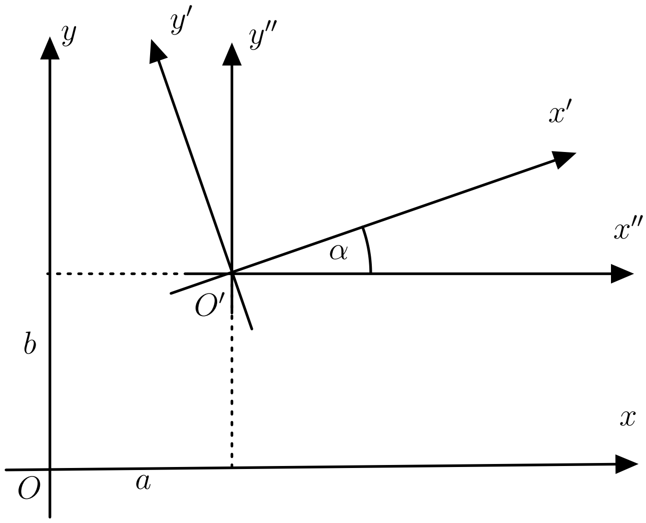


Figura 2.11: Traslación seguida de una rotación

Proposición 2.8. *Las expresiones que relacionan las coordenadas cartesianas primitivas con las coordenadas nuevas de un punto, luego de realizar una traslación de magnitud a en la dirección del eje Ox y en una magnitud b en la dirección del eje*

Oy, seguida de rotación de los ejes en un ángulo α, están dadas por:

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b \end{cases}$$

Demostración. Se considera primero la traslación del sistema primitivo a un nuevo sistema cuyos ejes se denominarán mediante $O'x''$ y $O'y''$. Sea M un punto del plano, cuyas coordenadas en el sistema primitivo sean $M(x, y)$, se tiene

1)	$x = x'' + a, \quad y = y'' + b$	proposición 2.5

Ahora se considera el sistema de ejes $O'x''$ y $O'y''$ como primitivo, y como nuevo sistema, el que se consigue al hacer girar al primitivo un ángulo α, este nuevo sistema tendrá nuevos ejes que se denominarán $O'x'$, $O'y'$, se tiene

2)	$x'' = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \quad y'' = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$	proposición 2.6
3)	$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a, \quad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b$	reemplazando 2) en 1)

□

Proposición 2.9. *Las expresiones que relacionan las coordenadas nuevas con las coordenadas primitivas en una traslación seguida de una rotación son:*

$$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -(x - a)\operatorname{sen}\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}$$

La demostración de la proposicción 2.9 queda como ejercicio.

Ejemplo. Escribir las fórmulas de transformación de coordenadas que corresponden a un traslado del origen al punto $O'(4, -5)$ y una rotación de los ejes en un ángulo de 60^o. Determine las coordenadas en el nuevo sistema de coordenadas del punto $M(10, 15)$.

Usando las fórmulas

$$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -(x - a)\operatorname{sen}\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}$$

con los datos $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $a = 4$ y $b = -5$, se tiene

$$\begin{cases} x' = (x-4)\cos\frac{\pi}{3} + (y+5)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ y' = -(x-4)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + (y+5)\cos\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

las coordenadas de punto M en el nuevo sistema están dadas por:

$$\begin{cases} x' = (10-4)\frac{1}{2} + (15+5)\frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 10\sqrt{3} \\ y' = -(10-4)\frac{\sqrt{3}}{2} + (15+5)\frac{1}{2} = -3\sqrt{3} + 10 \end{cases}$$

2.9 Ejercicios resueltos

1. Determine la relación entre las coordenadas cartesianas rectangulares (coordenadas primitivas))y las coordenadas cartesianas oblícuas (coordenadas nuevas)) cuando el origen de las coordenadas oblícuas se ha traslado a un punto (a, b) y el ángulo entre los ejes del sistema oblícuo es α. Debe encontrar las coordenadas primitivas en términos de las coordenadas oblícuas y viceversa.

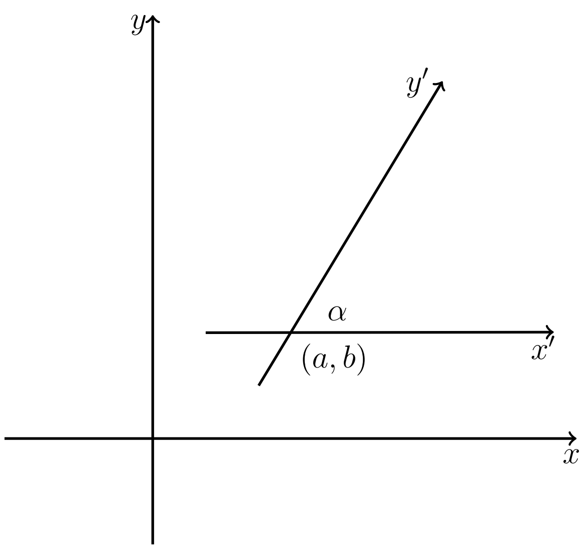


Figura 2.12: Coordenadas cartesianas rectangulares y oblícuas

Solución. Las siguientes fórmulas permiten pasar de coordenadas nuevas (sistema oblícuo) a primitivas (sistema rectangular).

$$\begin{cases} y = y' \operatorname{sen}\alpha \\ x = x' + y' \cos\alpha \end{cases} \tag{2.1}$$

Las siguientes fórmulas permiten pasar de coordenadas primitivas (sistema rectangular) a nuevas (sistema oblícuo).

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} \\ x' = x - \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha \end{cases} \tag{2.2}$$

Las siguientes fórmulas permiten pasar de sistema primitivo a un nuevo sistema después de una traslación del origen al punto de coordenadas (a, b).

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \tag{2.3}$$

Lo que primero se va a realizar es una traslación del origen al punto de coordenadas (a, b) llamando a los ejes nuevos $O'x''$ y $O'y''$, por tanto las fórmulas que permiten determinar las coordenadas nuevas de un punto $M(x, y)$ son:

$$\begin{cases} x'' = x - a \\ y'' = y - b \end{cases} \tag{2.4}$$

Ahora considerando como primitivas las coordenadas x'' e y'' (coordenadas rectangulares) y como nuevas x' e y' (coordenadas oblícuas) se reemplaza las ecuaciones 2.4 en las ecuaciones 2.1 y 2.2 (x'' se reemplazará en x mientras que y'' se reemplazará en y), obteniéndose:

$$\begin{cases} y = y' \operatorname{sen}\alpha + b \\ x = x' + y' \cos\alpha + a \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{y-b}{\operatorname{sen}\alpha} \\ x' = (x-a) - \frac{y-b}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha \end{cases} \tag{2.6}$$

2. Dado el lugar geométrico $x + y - 3 = 0$, determine la ecuación del lugar geométrico cuando se ha realizado una traslación del origen al punto $A(3, -2)$.

Solución. Para resolver este problema se tiene que utilizar las ecuaciones de transformación de coordenadas

$$x' = x - a \quad y' = y - b$$

por tanto se tiene que

$$x = x' + a \quad y = y' + b$$

$$x = x' + 3 \quad y = y' - 2$$

posteriormente se reemplaza las coordenadas x e y en la ecuación de la recta, obteniéndose

$$x' + 3 + y' - 2 - 3 = 0$$

reduciendo

$$x' + y' - 2 = 0$$

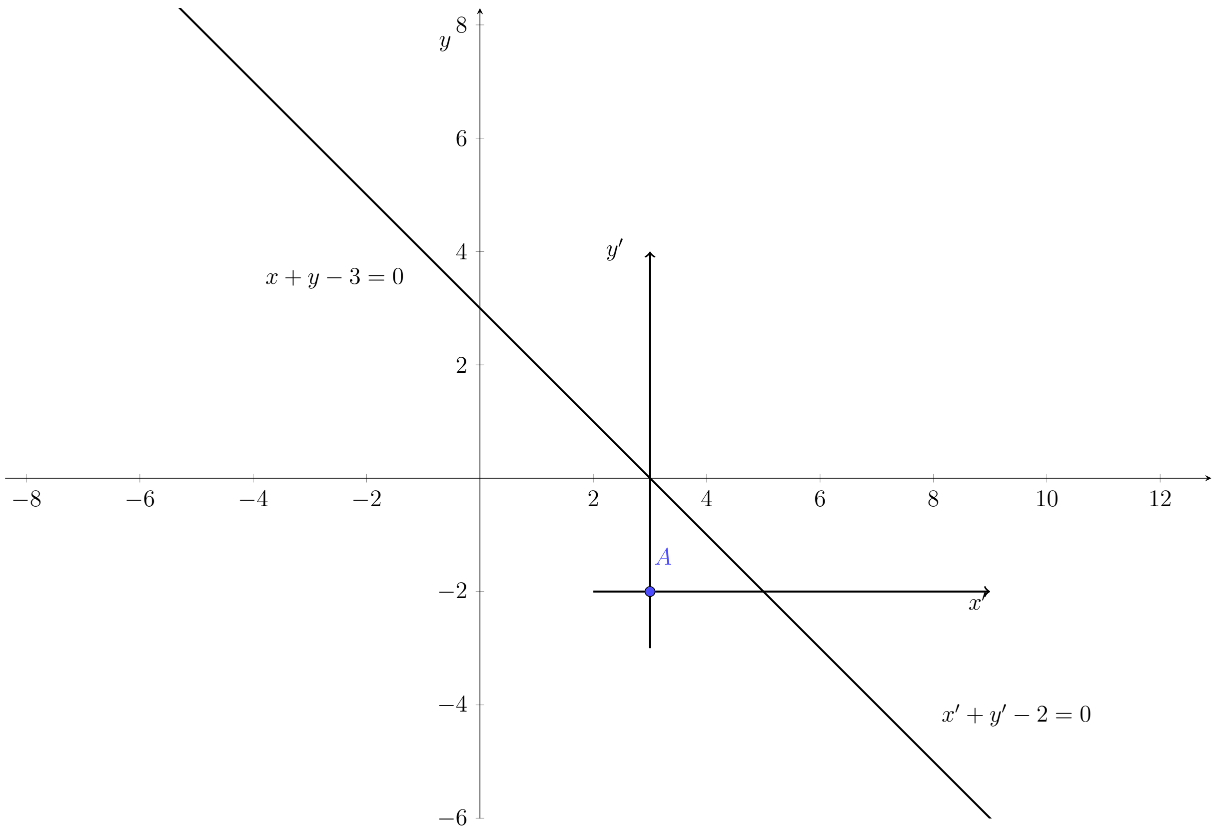


Figura 2.13: Ecuaciones de lugares geométricos en coordenadas nuevas y primitivas

3. Dado el lugar geométrico $x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0$, determine la ecuación de este lugar geométrico cuando se ha realizado una traslación del origen al punto $O'(-3, 2)$ y una rotación de ejes de $\frac{1}{6}\pi$.

   Solución. Para resolver este ejercicio se debe usar las ecuaciones de transformación de coordenadas

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b \end{cases}$$

   es decir se deben emplear las igualdades

$$\begin{cases} x = x' \cos\frac{1}{6}\pi - y' \operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi - 3 \\ y = x' \operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi + y' \cos\frac{1}{6}\pi + 2 \end{cases}$$

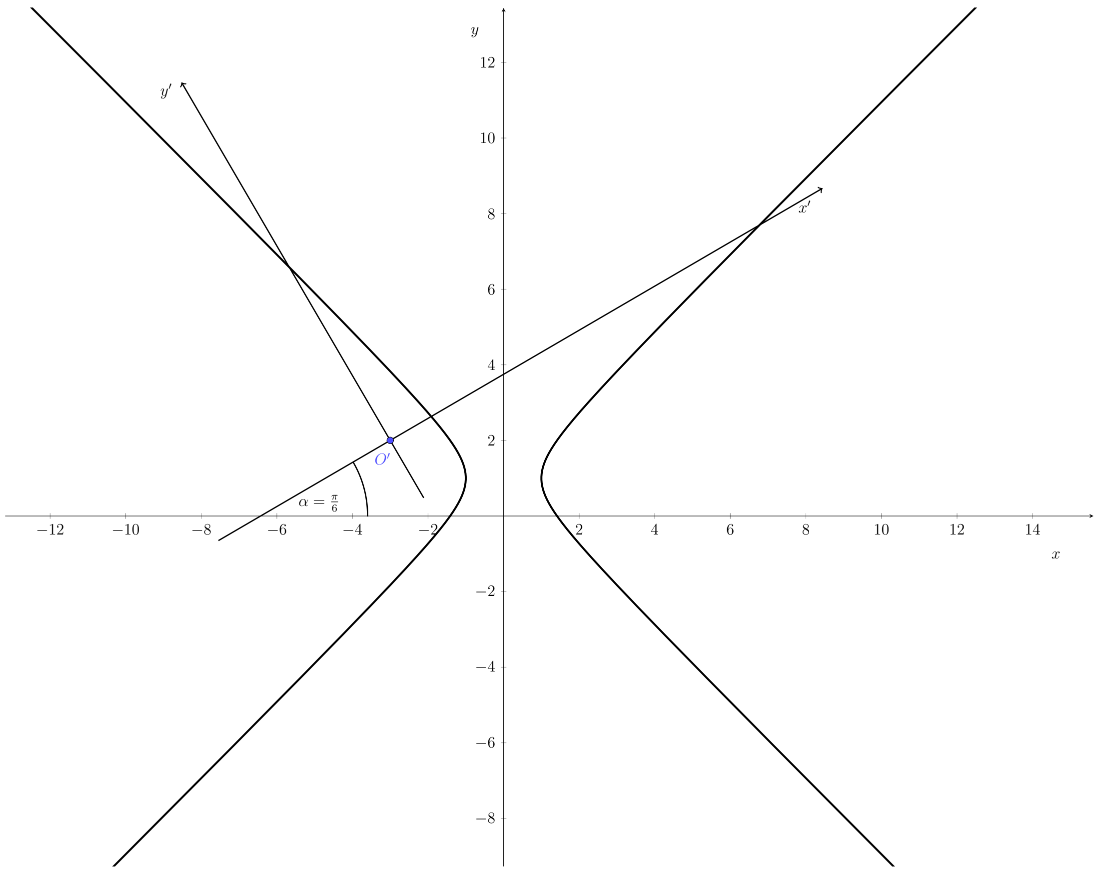


Figura 2.14: Ecuaciones de lugares geométricos en coordenadas nuevas y primitivas

resolviendo

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' - 3 \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 2 \end{cases}$$

por tanto la ecuación del lugar geométrico respecto al nuevo sistema está dada por

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' - 3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 2\right) - 2 = 0$$

resolviendo las potencias

$$\frac{3}{4}x'^2+\frac{1}{4}y'^2+9-\frac{\sqrt{3}}{2}x'y'-3\sqrt{3}x'+3y'-\frac{1}{4}x'^2-\frac{3}{4}y'^2-4-\frac{\sqrt{3}}{2}x'y'-2\sqrt{3}y'-2x'+x'+\sqrt{3}y'+4-2=0$$

reduciendo términos semejantes se obtiene la ecuación del lugar geométrico luego de la traslación y rotación indicadas en el ejercicio.

$$\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2-\sqrt{3}x'y'-(3\sqrt{3}+1)x'+(3-\sqrt{3})y'+7=0$$

4. Un navío tiene coordenadas polares $N(1200, \frac{3}{4}\pi)$ respecto a un puerto que lo representamos por el punto A, además el puerto B tiene coordenadas cartesiana $(-500, 1000)$ respecto al puerto A, ¿Cuáles son las coordenadas polares del navío respecto al puerto B?

   Nota: Considere las coordenadas polares (ρ, θ) tal que $-\pi \leq \theta \leq \pi$ y $\rho \geq 0$

   Solución. Puede considetarse el punto A como el origen del sistema primitivo de coordenadas cartesianas, por tanto las coordenadas cartesianas del navío según este sistema son

$$\begin{cases} x = \rho\cos\frac{3}{4}\pi = -1200 * \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi = 1200 * \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{2.7}$$

   de acuerdo al enunciado del ejercicio, puede considerarse el punto B como el origen del nuevo sistema de coordenadas cartesianas, es decir $a = -500$ y $b = 1000$

   ahora vamos a determinar las coordenadas del navío respecto al sistema nuevo, por tanto usamos las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \tag{2.8}$$

   por tanto

$$\begin{cases} x' = -1200 * \frac{1}{\sqrt{2}} + 500 \approx -348.53 \\ y' = 1200 * \frac{1}{\sqrt{2}} - 1000 \approx -151.47 \end{cases} \tag{2.9}$$

Las coordenadas polares son

$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2} \approx 380.02$

$\tan\alpha = \frac{y'}{x'}$

por tanto $\alpha \approx 23.50^o$

es decir $\theta \approx -180^o + 23.50^o = -156.51^o$

luego las coordenadas polares son $(380.02, -156.51^o)$

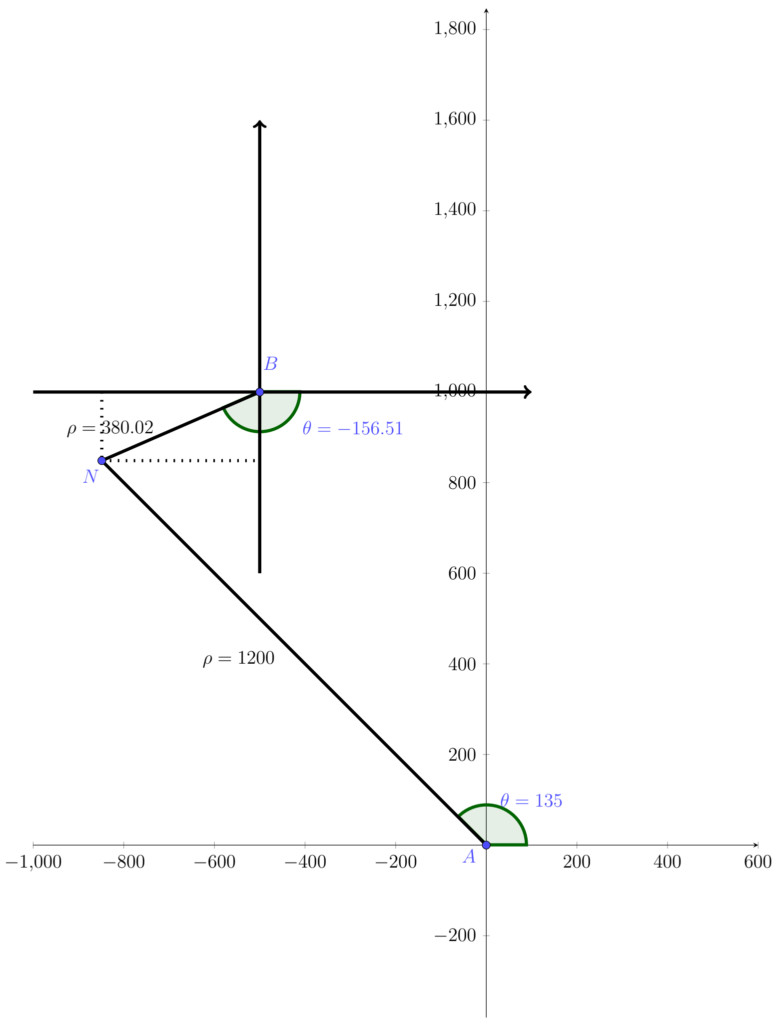


Figura 2.15: Aplicaciones de cambio de coordenadas

5. Las coordenadas cartesianas de un los vértices de un triángulo son $A(-2, 3)$, $B(-3, -4)$ y $C(3, 0)$. Determine el área del triángulo que une los puntos que dividen los lados AB, BC y AC en una razón $\lambda = \frac{2}{3}$. Interprete el signo del determinante.(Llame a los puntos P, Q, R respectivamente).

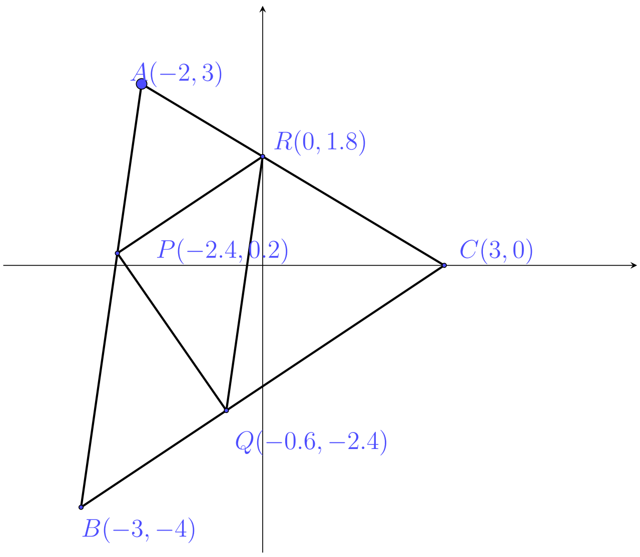


Figura 2.16: Área de un triángulo

Solución. Las coordenadas de P, Q, R son

$$\begin{cases} P_x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-2+\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{12}{5} \\ P_y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{3+\frac{2}{3}(-4)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-3+\frac{2}{3}(3)}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{3}{5} \\ Q_y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-4+\frac{2}{3}(0)}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-2+\frac{2}{3}(3)}{1+\frac{2}{3}} = 0 \\ R_y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{3+\frac{2}{3}(0)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9}{5} \end{cases}$$

Calculemos el área del triángulo $\triangle PQR$ mediante la fórmula

$$\pm S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

reemplazando

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{3}{5}+\frac{12}{5} & -\frac{12}{5}-\frac{1}{5} \\ 0+\frac{12}{5} & \frac{9}{5}-\frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{13}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{8}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{72}{25}+\frac{156}{25}\right) = \frac{228}{50} = \frac{114}{25}$$

el área del triángulo es $A = \frac{228}{50}$, la interpretación del signo es: la rotación más corta del segmento PQ al segmento PR es positiva.

6. Determine las coordenadas de los puntos P, Q, R anteriores si los ejes se trasladan de forms rígida al nuevo origen $(5, 6)$ y luego giran un ángulo $\alpha = 60^o$

Solución. se emplea las fórmulas

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

reemplazando

$$\begin{cases} x' = (x-5)\frac{1}{2} + (y-6)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = -(x-5)\frac{\sqrt{3}}{2} + (y-6)\frac{1}{2} \end{cases}$$

esta última fórmula se emplea para las transformaciones de los puntos P, Q, R

transformando las coordenadas de P

$$\begin{cases} x' = (-\frac{12}{5}-5)\frac{1}{2} + (\frac{1}{5}-6)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-37-29\sqrt{3}}{10} \\ y' = -(-\frac{12}{5}-5)\frac{\sqrt{3}}{2} + (\frac{1}{5}-6)\frac{1}{2} = \frac{37\sqrt{3}-29}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (-\frac{3}{5}-5)\frac{1}{2} + (-\frac{12}{5}-6)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-14-21\sqrt{3}}{5} \\ y' = -(-\frac{3}{5}-5)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{12}{5}-6)\frac{1}{2} = \frac{14\sqrt{3}-21}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (0-5)\frac{1}{2} + (\frac{9}{5}-6)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-25-21\sqrt{3}}{10} \\ y' = -(0-5)\frac{\sqrt{3}}{2} + (\frac{9}{5}-6)\frac{1}{2} = \frac{25\sqrt{3}-21}{10} \end{cases}$$

7. Demuestre analíticamente que la suma de los valores absolutos de las

proyecciones de dos lados de un triángulo sobre el lado de mayor longitud, es igual a la longitud de este último.

Solución. Se utiliza la fórmula que proporciona la proyección de un segmento sobre un eje, hay que recordar que esta proyección puede ser negativa.

$$Pr_{\overline{AB}}\overline{M_1M_2} = \frac{XX' + YY'}{d'}$$

Llámese a los puntos del triángulo y sus coordenadas $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, supóngase que el lado mayor sea $\overline{AB}$.

Primero se debe determinar la proyección de cada uno de los lados sobre los ejes coordenados:

Sean X'' e Y'' la proyección de AB sobre el eje Ox y Oy respectivamente

$$\begin{cases} X'' = x_2 - x_1 \\ Y'' = y_2 - y_1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Sean X' e Y' la proyección de AC sobre el eje Ox y Oy respectivamente

$$\begin{cases} X' = x_3 - x_1 \\ Y' = y_3 - y_1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Sean X e Y la proyección de CB sobre el eje Ox y Oy respectivamente

$$\begin{cases} X = x_2 - x_3 \\ Y = y_2 - y_3 \end{cases} \tag{2.12}$$

Sean d, d', d'' las longitudes CB, AC, AB respectivamente. Se tiene por tanto

$$d'' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$Pr_{\overline{AB}}\overline{AC} = \frac{X'X'' + Y'Y''}{d''} = \frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

y

$$Pr_{\overline{AB}}\overline{CB} = \frac{XX'' + YY''}{d''} = \frac{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

sumando se tiene

$$\begin{aligned} Pr_{\overline{AB}}\overline{AC} + Pr_{\overline{AB}}\overline{CB} &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB \end{aligned}$$

8. Demostrar que los puntos $(2, -2)$, $(-8, 4)$ y $(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y calcular su área.

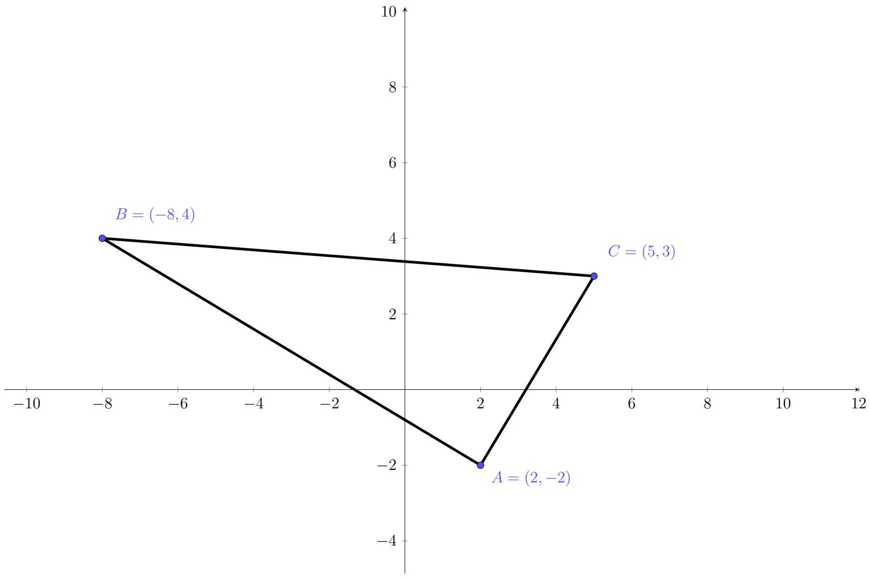


Figura 2.17: Área de un triángulo rectángulo

Demostración. Si se llama a los puntos de coordenadas $(2, -2)$, $(-8, 4)$, $(5, 3)$, $A.B, C$ respectivamente, se tiene que :

1)	$AB = \sqrt{136}$	fórmula de distancia
2)	$AC = \sqrt{34}$	fórmula de distancia
3)	$BC = \sqrt{170}$	fórmula de distancia
4)	$BC^2 = AB^2 + AC^2$	relación que satisfacen AB, BC y AC

la expresión 4) demuestra que el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo. $\square$

Ahora se calcula el área usando la ecuación

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

por tanto

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -34$$

luego el área es $S = 34$, el signo negativo significa que el segmento $\overline{AB}$ debe girar en sentido horario para coincidir con el segmento $\overline{AC}$.

9. Sean A, B, C los vértices de un triángulo, determine las proyecciones sobre los ejes coordenados de los lados del triángulo $\triangle ABC$. $A(2,3)$, $B(-2,5)$, $C(6,-8)$. Además determine las proyecciones sobre los ejes coordenados de un sistema oblícuo cuyo eje Ox' forma un ángulo 30^o con el eje Ox y 35^o con el eje Oy. Los orígenes de los sistema rectangular y oblícuo coinciden.

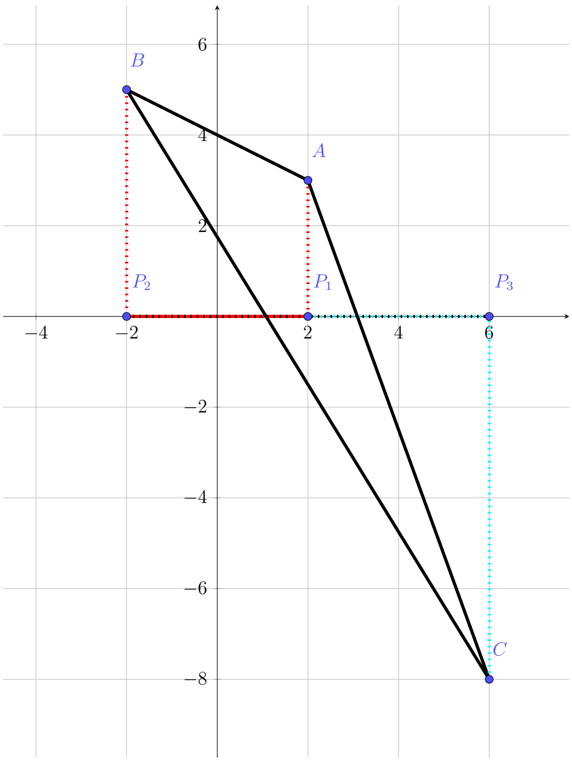


Figura 2.18: Proyecciones de los lados de un triángulo sobre los ejes coordenados

Solución. Las proyecciones sobre los ejes coordenados están dadas por las expresiones

$$X = x_2 - x_1$$

y

$$Y = y_2 - y_1$$

considerando que se van a proyectar tres segmentos se tiene que

a) Las proyecciones del segmento $\overline{AB}$ son:

$$X = x_2 - x_1 = -2 - 2 = -4$$

y

$$Y = y_2 - y_1 = 5 - 3 = 2$$

b) Las proyecciones del segmento $\overline{AC}$ son:

$$X = x_3 - x_1 = 6 - 2 = 4$$

y

$$Y = y_3 - y_1 = -8 - 3 = -11$$

c) Las proyecciones del segmento $\overline{BC}$ son:

$$X = x_3 - x_2 = 6 - (-2) = 8$$

y

$$Y = y_3 - y_3 = -8 - 5 = -13$$

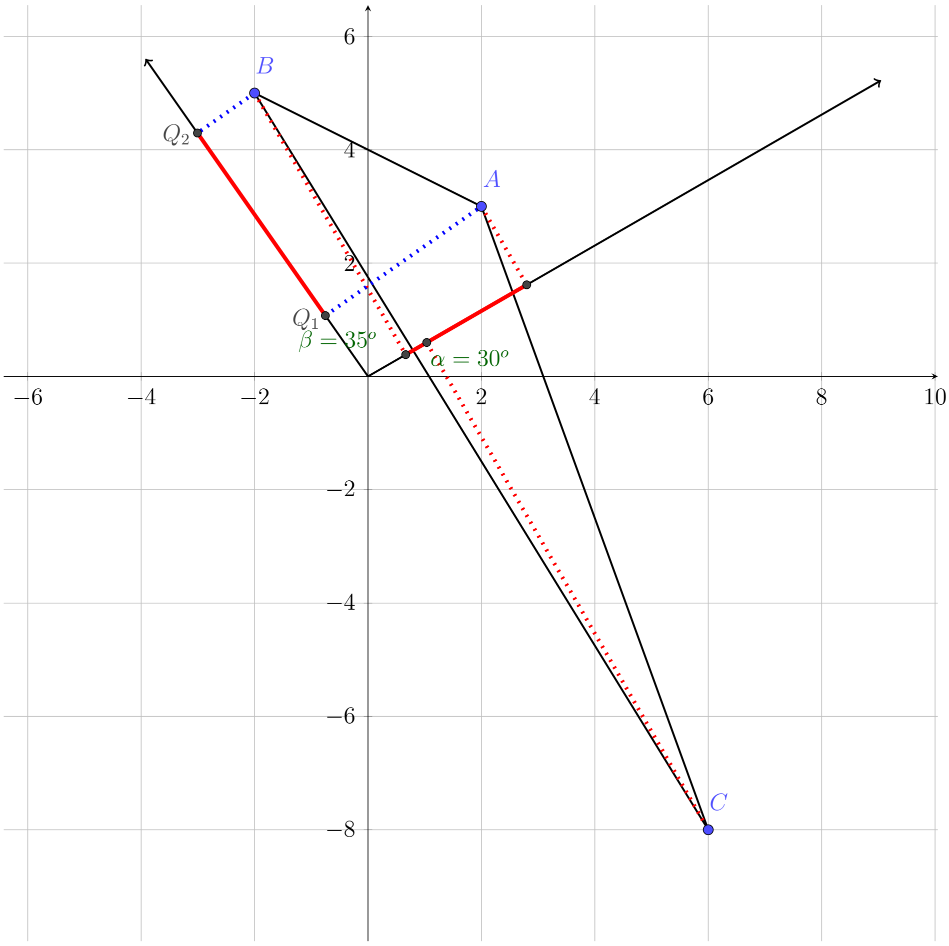


Figura 2.19: Proyecciones de los lados de un triángulo sobre ejes oblícuos

Ahora para determinar las proyecciones de los lados del triángulo sobre los ejes oblícuos se emplea la expresión

$$Pr_{\mu}\overline{M_1M_2} = d\cos\phi$$

para ello primero se determina las longitudes de los lados

$$|AB| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{16+121} = \sqrt{137}$$

$$|BC| = \sqrt{64+169} = \sqrt{233}$$

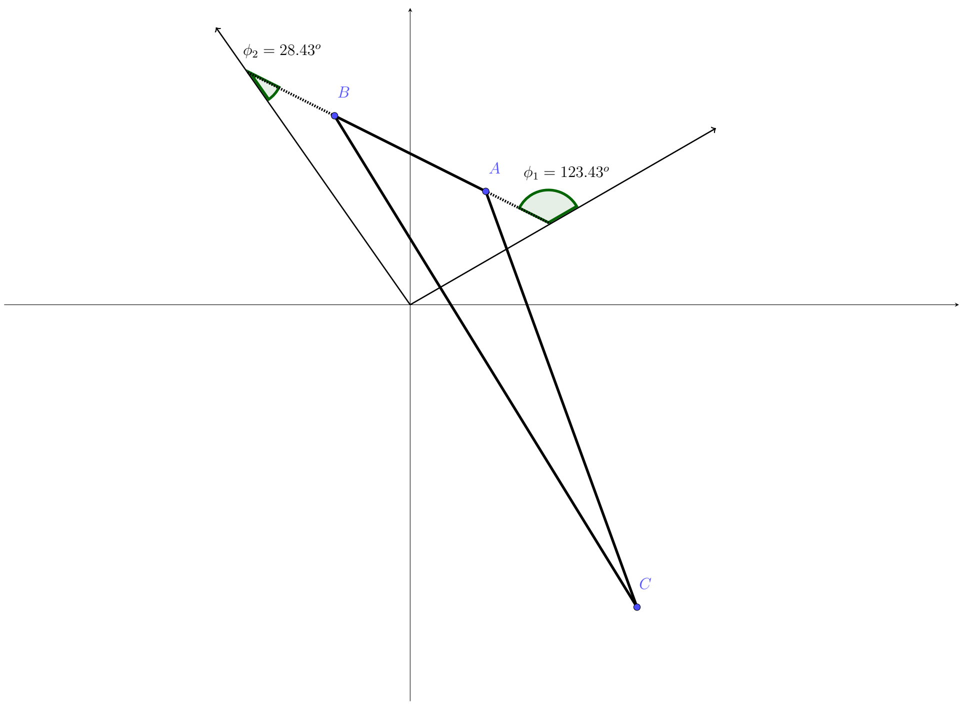


Figura 2.20: Ángulos que forma el segmento AB con los ejes oblícuos

Ahora se calculan los ángulos que forman cada uno de los segmentos con los ejes oblícuos.

El ángulo que forma AB con el eje Ox (Figura 2.20) oblícuo es

$$\phi_1 = 180^o - 30^o - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 123.43^o$$

El ángulo que AB con el eje Oy (Figura 2.20) oblícuo es

$$\phi_2 = 90^o - 35^o - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 28.43^o$$

El ángulo que forma AC con el eje Ox oblícuo (Figura 2.21) es

$$\phi_3 = 30^o + \arctan\left(-\frac{11}{4}\right) = 100.02^o$$

El ángulo que forma AC con el eje Oy oblícuo (Figura 2.21) es

$$\phi_4 = 90^o - 35^o + \arctan\left(-\frac{11}{4}\right) = 164.98^o$$

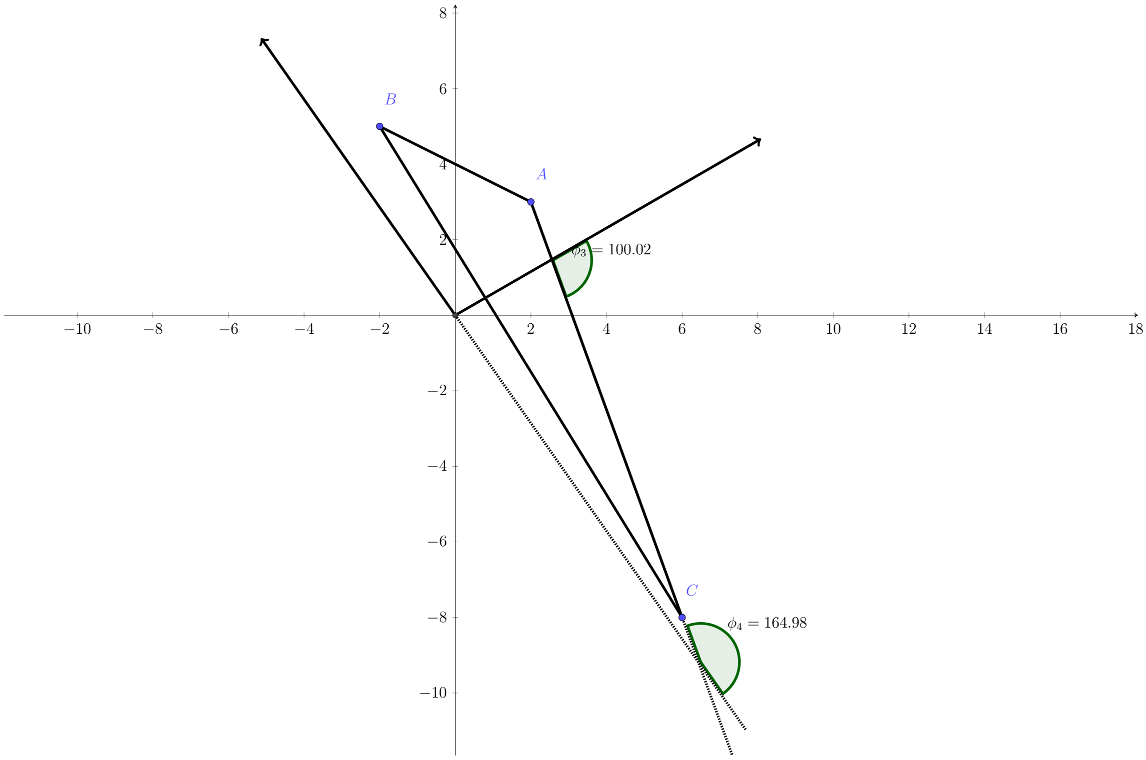


Figura 2.21: Ángulos que forma el segmento AC con los ejes oblícuos

El ángulo que forma BC con el eje Ox oblícuo (Figura 2.22) es

$$\phi_5 = 30^o + \arctan\left(-\frac{13}{8}\right) = 88.39^o$$

El ángulo que BC con el eje Oy oblícuo (Figura 2.22) es

$$\phi_6 = 90^o - 35^o + \arctan\left(-\frac{13}{8}\right) = 176.61^o$$

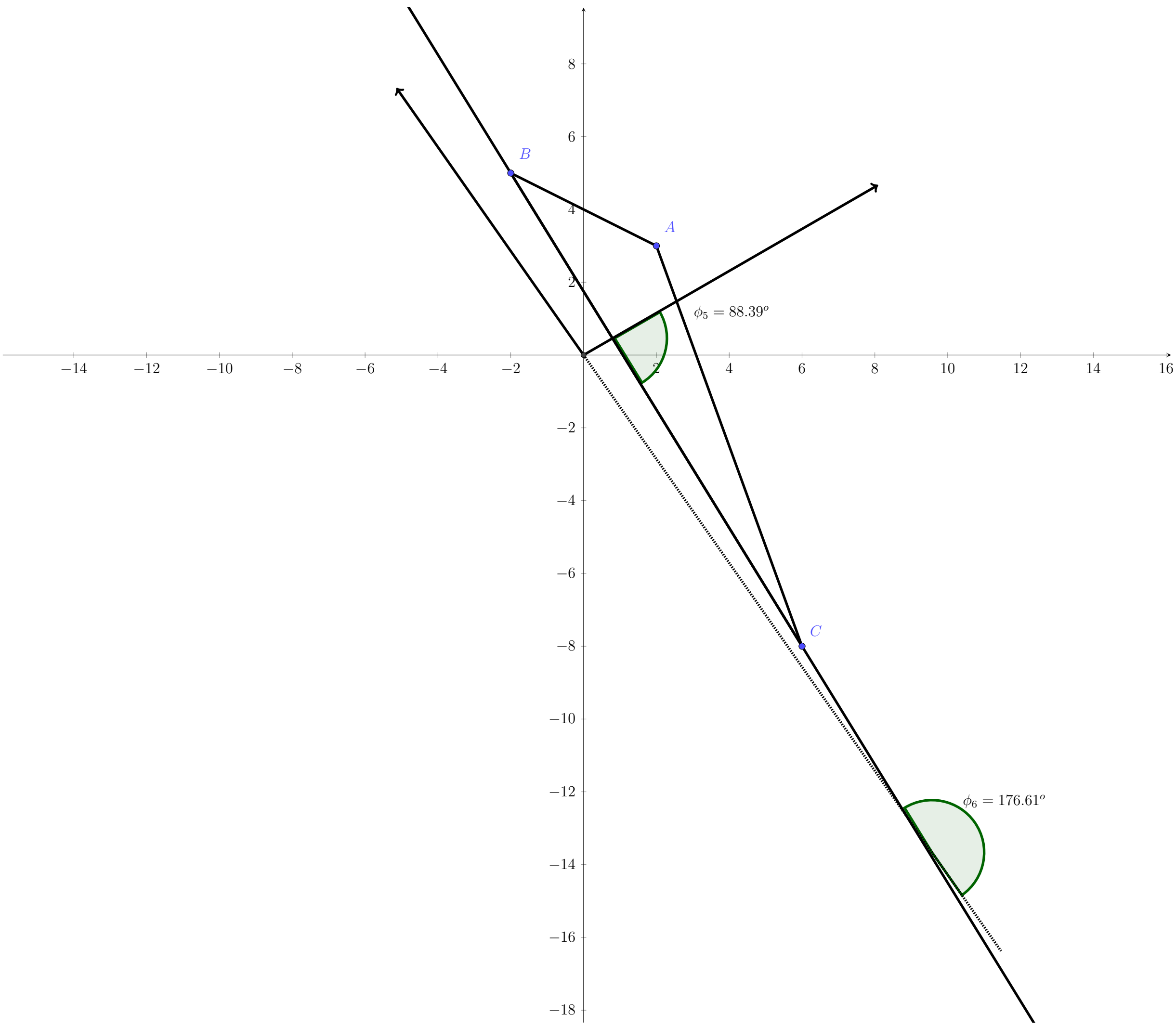


Figura 2.22: Ángulos que forma el segmento BC con los ejes oblícuos

con los valores encontrados, se aplica la fórmula para determinar la proyección de un segmento sobre un eje cualquiera

Llamando μ al eje oblícuo Ox, y ν al eje oblícuo Oy, se tiene

$$Pr_{\mu}\overline{AB} = d\cos\phi_1 = 2\sqrt{5}\cos 123.43^o = -2.46$$

$$Pr_{\mu}\overline{AC} = d\cos\phi_3 = \sqrt{137}\cos 100.02^o = -2.04$$

$$Pr_{\mu}\overline{BC} = d\cos\phi_5 = \sqrt{233}\cos 88.39^o = 0.43$$

$$Pr_{\nu}\overline{AB} = d\cos\phi_2 = 2\sqrt{5}\cos 28.43^o = 3.93$$

$$Pr_{\nu}\overline{AC} = d\cos\phi_4 = \sqrt{137}\cos 164.98^o = -11.30$$

$$Pr_{\nu}\overline{BC} = d\cos\phi_6 = \sqrt{233}\cos 176.61^o = -15.24$$

2.10 Ejercicios propuestos

1. El origen de un sistema de coordenadas se ha trasladado al punto de coordenadas $O'(-11, 1)$. ¿Cuáles son las coordenadas en el sistema nuevo de un punto, cuyas coordenadas primitivas son $A\left(-\frac{3}{5}, 7\right)$?

2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto $B(12, 6)$ en un sistema nuevo, obtenido luego de una traslación del origen al punto $O'(-5, 6)$ seguida de una rotación de un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

3. Las coordenadas de un punto según un sistema primitivo son $M(-7, -10)$ y las coordenadas según un sistema nuevo por traslación son $M(3, 7)$. Determine las coordenadas del origen del sistema nuevo.

4. Las coordenadas de un punto en un sistema primitivo son $P(-8, 5)$, y las coordenadas según un sistema nuevo por rotación son $P(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{13\sqrt{2}}{2})$. Determine el ángulo de rotación del sistema.

5. Determine las coordenadas del punto que divide al segmento AB según la razón $\lambda = -\frac{4}{3}$. Grafique.

6. Determine las coordenadas de los puntos que trisecan un segmento de extremos $A(-5, -4)$ y $B(10, 12)$. Grafique.

7. Demueste por inducción que si se da un sistema de masas m_1, m_2, $\cdots$, m_k situadas en los puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\cdots$, $M_k(x_k, y_k)$, las coordenadas del centro de gravedad

$$x = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_km_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}$$

$$y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \cdots + y_km_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}$$

Capítulo III

3. Ecuación de líneas

En este capítulo se aborda temas relacionados con la determinación de las ecuaciones de líneas en el plano a partir de su definición, tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas polares.

3.1 Conceptos básicos

Definición 3.1. Una relación de la forma $F(x, y) = 0$ donde x e y representan variables reales arbitrarias, se dice *ecuación de dos variables* x, y, si no es válida para todo par de números reales x e y. En cambio se dice *identidad* si es válida para todo par de números reales x e y.

Ejemplo. La relación $2x + 3y + 4 = 0$ es una ecuación de dos variables, pues es válida únicamente para algunos (infinitos, pero no todos) pares de números reales. No es válida cuando $x = 2$ e $y = 1$.

Ejemplo. La relación $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$ es una identidad, pues es válida para cualquier par de números reales.

Definición 3.2. Dada una ecuación de dos variables, además de x e y pueden figurar otras letras como $a, b, c, \cdots$; estas representan números fijos a los que se los denomina *parámetros* constantes de la ecuación.

Ejemplo. En la ecuación $ax^2 + by^2 + c = 0$, son parámetros a, b y c.

Definición 3.3. Se dice que dos números $x = x_0$, $y = y_0$ *satisfacen* a una ecuación de dos variables $F(x, y) = 0$, si al reemplazar x_0 y y_0 en la ecuación, en lugar de las variables, da como resultado una igualdad verdadera.

Nota. Dada una ecuación $F(x, y) = 0$, sean x e y números que satisfacen la ecuación, se puede decir que x e y no pueden variar arbitrariamente, pues cada valor de x da lugar a posibles valores de y; es decir, que existe una dependencia funcional entre las variables x e y.

Definición 3.4. Una *línea o lugar geométrico* es un conjunto no vacío de puntos del plano que cumplen una o más propiedades.

Ejemplo. Son líneas: rectas, parábolas, circunferencias, elipses, etc.

Definición 3.5. Dada una línea en el plano, la ecuación de dos variables $F(x, y) = 0$ se dice ecuación de la línea si las coordenadas de todo punto de la línea sarisface la ecuación, y los demás puntos del plano no la satisfacen.

Nota. El objetivo de la geometría analítica es determinar la ecuación de una línea dada y viceversa; dada una ecuación determinar la línea que representa en el plano.

3.2 Ejemplos de líneas

1. La ecuación $-2x + y = 0$, puede expresarse en forma funcional como $y = 2x$, se puede observar que, los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación son todos aquellos y solo aquellos cuya ordenada es el doble de su abscisa. Viceversa, los puntos del plano cuya ordenada es el doble de su abscisa satisfacen la ecuación $-2x + y = 0$ (Figura 3.1).

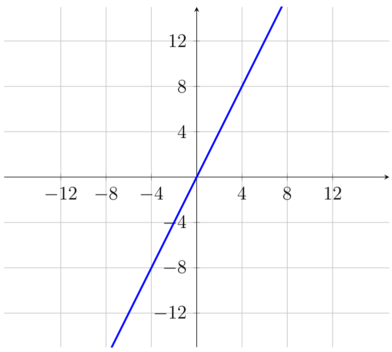


Figura 3.1: Línea $-2x + y = 0$

2. La ecuación $2x + y = 0$, se puede expresar como $y = -2x$, es decir, los puntos que pertenecen a esta línea son todos y únicamente aquellos cuya ordenada es igual al opuesto del doble de su abscisa. Viceversa, los puntos cuya ordenada es igual al opuesto del doble de su abscisa, satisfacen la ecuación $2x + y = 0$ (Figura 3.2).

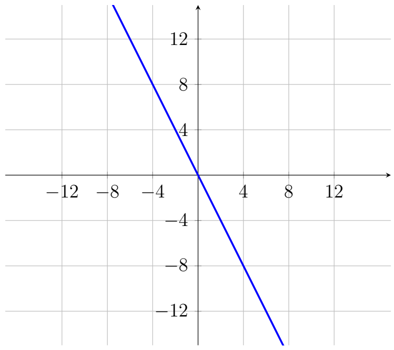


Figura 3.2: Línea $2x + y = 0$

3. La ecuación $4x^2 - y^2 = 0$ puede expresarse como $(2x + y)(2x - y) = 0$; es decir, los puntos que pertenecen a esta línea son todos y solo aquellos cuya ordenada es el doble de su abscisa $(2x + y = 0)$ o es igual al opuesto del doble de su abscisa $(2x - y = 0)$. Viceversa, los puntos cuya ordenada es igual al doble de su abscisa o es igual al opuesto del doble de su abscisa, satisfacen la ecuación $4x^2 - y^2 = 0$ (Figura 3.3).

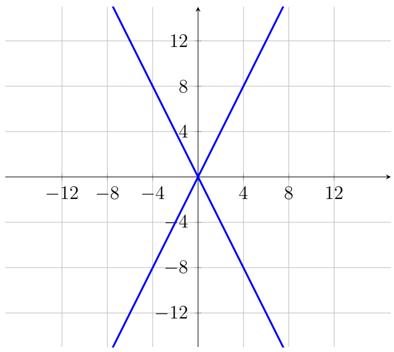


Figura 3.3: Línea $4x^2 - y^2 = 0$

4. La ecuación $x^2 + y^2 = 0$ representa únicamente el punto de coordenadas $(0, 0)$, ya que, para números reales, tanto x^2 como y^2 son números no negativos y por lo tanto no se anulan, excepto cuando $x = 0$ e $y = 0$. Este es el caso que se se denomina *línea degenerada*, ya que consta de un solo punto.

5. La ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$, no representa línea alguna, ya que $x^2 + y^2$ es siempre no negativo, si a esta expresión se suma 1 queda como resultado una

cantidad positiva, obviamente esta cantidad no puede ser igual a 0, por tanto, no existen valores que satisfagan la ecuación.

6. La ecuación $\rho = a\cos\theta$, donde a es un número real diferente de 0 y las variables ρ y θ son las coordenadas polares de un punto del plano, representa una circunferencia. En efecto, sea $M(\rho, \theta)$ un punto de la línea determinada por esta ecuación, además los puntos $A(a, 0)$, $O(0, \pi/2)$, satisfacen la ecuación, luego, son otros puntos de la línea. El triángulo $\triangle OAM$ es rectángulo (Figura 3.4), debido a que $\rho = a\cos\theta$, en consecuencia, la ecuación dada representa una circunferencia.

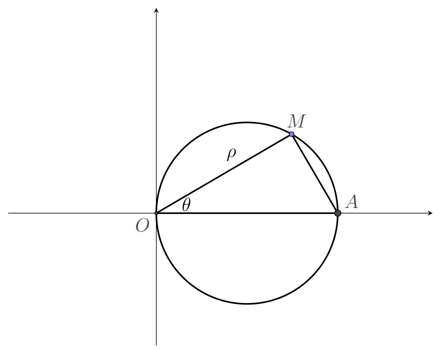


Figura 3.4: Línea $\rho = a\cos\theta$

7. La ecuación $\rho = a\theta$, donde a es un número real diferente de 0, representa una espiral que gira en sentido antihorario partiendo del origen del sistema de coordenadas. Si a es positivo esta tiene su trayectoria a partir del primer cuadrante (Figura 3.5): si a es negativo, su trayectoria parte del tercer cuadrante (Figura 3.6). Esta espiral se denomina, *Espiral de Arquímides*.

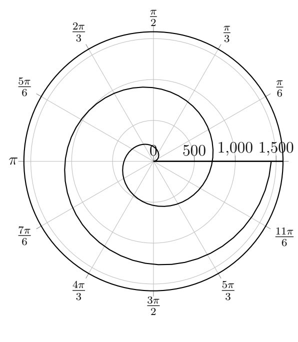


Figura 3.5: Espiral de Arquímides $a > 0$

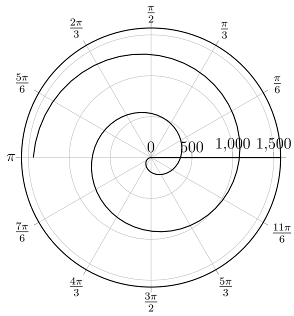


Figura 3.6: Espiral de Arquímides $a < 0$

8. La ecuación $\rho = \frac{a}{\theta}$, donde a es diferente de 0, representa una línea similar a la anterior, difiere de esta, pues al incrementar el ángulo θ, el cociente $\frac{a}{\theta}$ se aproxima a 0, mientras que al disminuir θ, aproximándose a 0, el cociente $\frac{a}{\theta}$ se aproxima a infinito. La línea determinada por esta ecuación se denomina *espiral hiperbólica.* Se presenta la espiral hiperbólica en los casos, cuando $a > 0$ (Figura 3.7) y $a < 0$ (Figura 3.9).

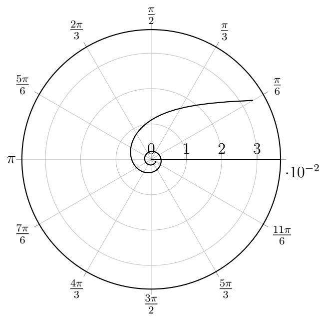


Figura 3.7: Espiral hiperbólica $a > 0$

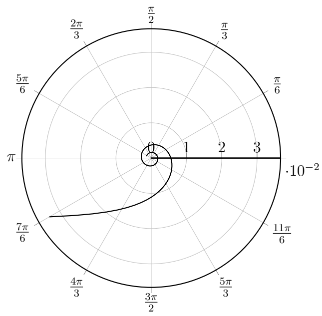


Figura 3.8: Espiral hiperbólica $a < 0$

9. La ecuación $\rho = a^\theta$, donde $a > 0$ y diferente de 1, representa una espiral, denominada *espiral logarítmica*. Si $0 < a < 1$ entonces la potencia a^θ se aproxima a 0 cuando θ tiende al infinito positivo (Figura 3.9), mientras que cuando θ tiende al infinito negativo, la potencia a^θ se aproxima al infinito positivo (Figura 3.10).

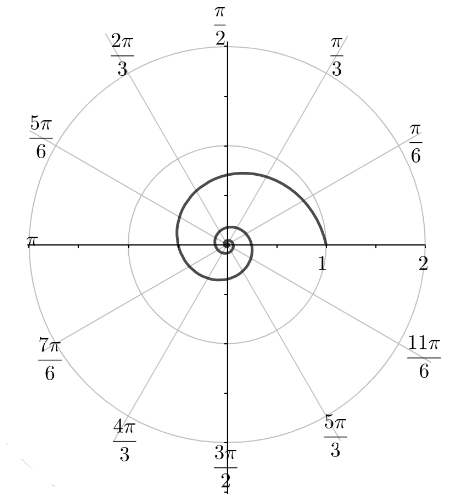


Figura 3.9: Espiral logarítmica con $0 < a < 1$ y $\theta > 0$

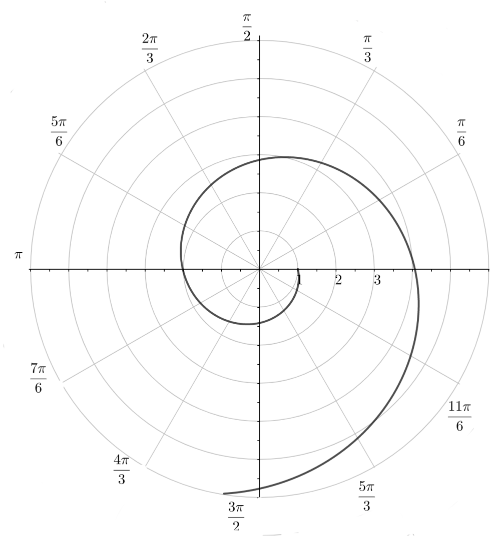


Figura 3.10: Espiral logarítmica con $0 < a < 1$ y $\theta < 0$

Si $a > 1$, entonces la potencia a^θ tiende a infinito positivo; si θ tiende a infinito positivo (Figura 3.11), en cambio a^θ tiende a 0 cuando θ tiende a infinito negativo (Figura 3.12).

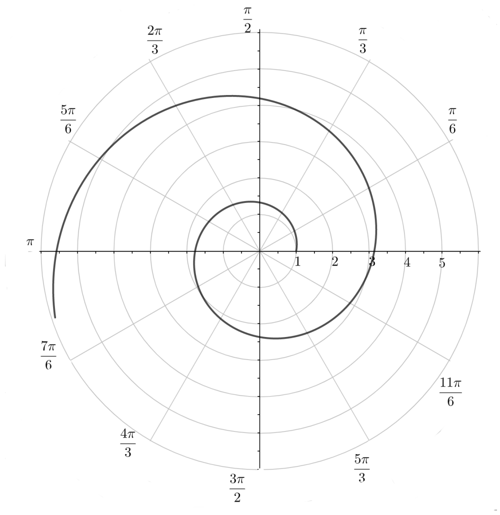


Figura 3.11: Espiral logarítmica con $a > 1$ y $\theta > 0$

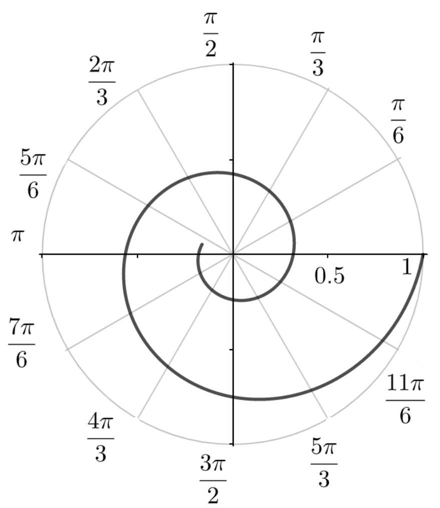


Figura 3.12: Espiral logarítmica con $a > 1$ y $\theta < 0$

Ejemplo. Grafique la ecuación $\rho = a\cos\theta$, con $a = 4$, ¿qué lugar geométrico representa esta ecuación?

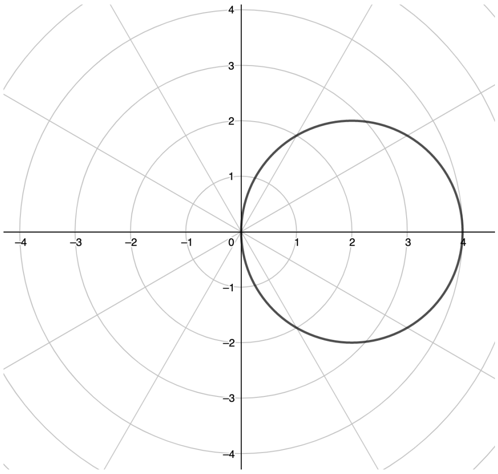


Figura 3.13: Circunferencia de ecuación $\rho = 4\cos\theta$

Solución. Representa una circunferencia de diámetro cuatro que tiene como tangente al eje y.

Ejemplo. Grafique la espiral de Arquímides para $a = 2$ y $a = -2$ ¿qué diferencia puede observarse?

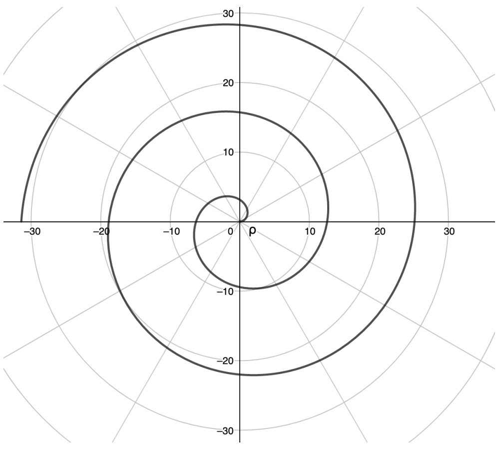


Figura 3.14: Espiral de Arquímides para $a = 2$

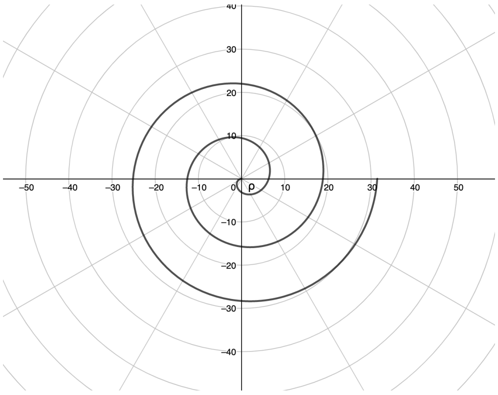


Figura 3.15: Espiral de Arquímides para $a = -2$

Solución. El gráfico de la espiral de Arquímides para $a = 2$ es simétrica respecto al origen de la gráfica de la espiral de Arquímides para $a = -2$.

3.3 Deducción de ecuaciones de líneas dadas

Se pretende a partir de la definición de la línea, determinar su ecuación. Los siguientes son ejemplos, en los que se determina la ecuación de una línea, conocida su definición.

1. En un sistema cartesiano rectangular de coordenadas, determinar la ecuación del lugar geométrico que describen los puntos cuya distancia a un punto fijo del plano $C(h, k)$ es constante e igual a r.

   Si se representa mediante $M(x, y)$ a cualquier punto del lugar geométrico, se tiene que

   $$|CM| = r$$

   además

   $$\begin{array}{ll|l} 1) & |CM| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} & \text{teorema 2.2} \\ 2) & \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r & \text{hipótesis y de 1)} \\ 3) & (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 & \text{elevando al cuadrado 2)} \end{array}$$

   Por tanto, la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ representa el lugar geométrico buscado.

Nota. El lugar geométrico anterior representa una circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r.

2. Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre un punto $M(x,y)$ tal que en su trayectoria está dos veces más próximo al punto $A(1,0)$ que al punto $B(4,0)$.

   Se tiene que

1)	$2\lvert AM\rvert = \lvert BM\rvert$	hipótesis
2)	$2\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$	reemplazo de coordenadas
3)	$2\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$	operación con 0
4)	$4[(x-1)^2+y^2] = (x-4)^2+y^2$	elevando al cuadrado 3)
5)	$4x^2-8x+4+4y^2 = x^2-8x+16+y^2$	resolviendo operaciones
6)	$x^2+y^2=4$	transponiendo términos

   El lugar geométrico es por tanto una circunferencia de centro el origen de coordenadas cartesianas $C(0,0)$ y el radio es 2.

3. Determine la ecuación de la recta a en coordenadas polares, conociendo la distancia p del polo a la recta y el ángulo ψ medido del eje polar al rayo dirigido, que va desde el polo y es perpendicular a la recta (Figura 3.16).

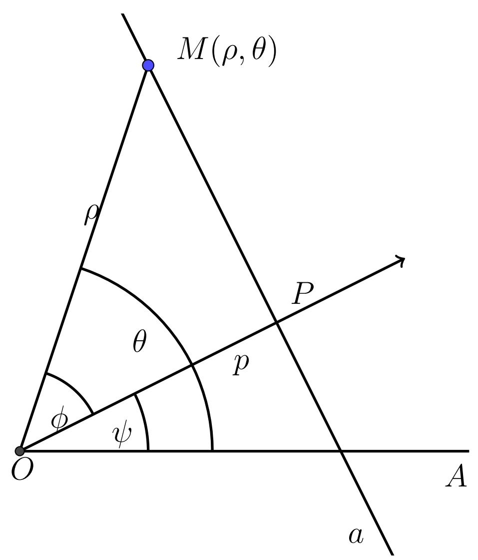


Figura 3.16: Recta a

Sea $M(\rho, \theta)$ un punto de la recta a, sea P la intersección entre la recta a y su perpendicular que pasa por O. Se tiene

1)	$\theta = \psi + \phi$	hipótesis
2)	$\triangle MOP$ es rectángulo	OP es perpendicular a la recta a
3)	$\cos\phi = \cos(\theta - \psi)$	por 1)
4)	$p = \rho\cos(\theta - \psi)$	por 2) y $p = \rho\cos\phi$

por tanto, la ecuación de la recta solicitada es $p = \rho\cos(\theta - \psi)$.

Ejemplo. Deduzca la ecuación de la trayectoria del punto M, que durante su movimiento está a la misma distancia de los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, 3)$.

Sea $M(x, y)$ el punto general de la línea buscada:

$$
\begin{aligned}
|AM| &= |MB| \\
\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} \\
x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 \\
-6x + 9 - 4y + 4 &= -10x + 25 - 6y + 9 \\
-6x + 10x - 4y + 6y + 4 - 25 &= 0 \\
4x + 2y - 21 &= 0
\end{aligned}
$$

3.4 Intersección entre líneas

El objetivo de esta sección es determinar la intersección de dos líneas $F(x, y) = 0$ y $G(x, y) = 0$. Este propósito se consigue resolviendo el sistema de ecuaciones

$$
\begin{cases}
F(x, y) = 0 \\
G(x, y) = 0
\end{cases}
$$

Ejemplo. Dadas las circunferencias $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ y $x^2 + (y-4)^2 = 16$, determine los puntos de intersección entre ellas.

Solución. Se debe resolver el sistema

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=9\\ x^2+(y-4)^2=16\end{cases}$$

que es equivalente a los siguientes sistemas:

$$\begin{cases}x^2-4x+4+y^2-6y+9=9\\ x^2+y^2-8y+16=16\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-4x+4+y^2-6y=0\\ x^2+y^2-8y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-4x+4+y^2-6y=0\\ x^2=-y^2+8y\end{cases}$$

$$\begin{cases}-y^2+8y-4x+4+y^2-6y=0\\ x^2=-y^2+8y\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y-4x+4=0\\ x^2=-y^2+8y\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}y+1\\ x^2=-y^2+8y\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}y+1\\ (\frac{1}{2}y+1)^2=-y^2+8y\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}y+1\\ \frac{1}{4}y^2+y+1=-y^2+8y\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}y+1\\ \frac{5}{4}y^2-7y+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1 \\ y_1 = \frac{14}{5} + \frac{4\sqrt{11}}{5} \quad y_2 = \frac{14}{5} - \frac{4\sqrt{11}}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{5} + \frac{2\sqrt{11}}{5} \quad x_2 = \frac{12}{5} - \frac{2\sqrt{11}}{5} \\ y_1 = \frac{14}{5} + \frac{4\sqrt{11}}{5} \quad y_2 = \frac{14}{5} - \frac{4\sqrt{11}}{5} \end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas de los puntos de intersección son: $(\frac{12}{5} + \frac{2\sqrt{11}}{5}, \frac{14}{5} + \frac{4\sqrt{11}}{5})$ y $(\frac{12}{5} - \frac{2\sqrt{11}}{5}, \frac{14}{5} - \frac{4\sqrt{11}}{5})$ (Figura 3.17).

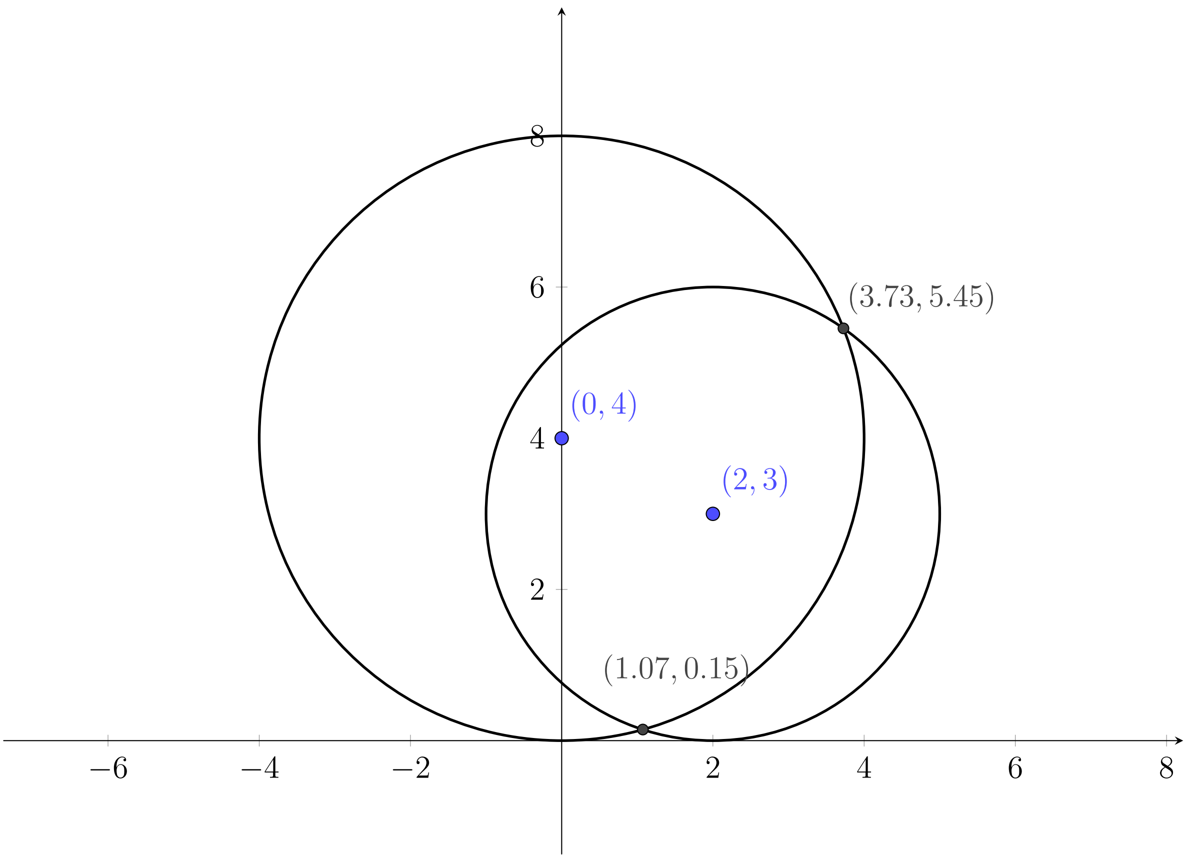


Figura 3.17: Intersección entre dos líneas

Ejemplo. Determine la intersección entre las líneas $(x-2)^2+(y-5)^2 = 9$ y $x = 2y+1$

Solución. Reemplazando en la primera ecuación la expresión que nos da x, se tiene:

$$\begin{aligned}(2y+1-2)^2+(y-5)^2 &= 9\\(2y-1)^2+(y-5)^2 &= 9\\4y^2-4y+1+y^2-10y+25 &= 9\\5y^2-14y+26-9 &= 0\\5y^2-14y+17 &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$y=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4(5)(17)}}{10}$$

por tanto

$$\begin{aligned}y &= \frac{14\pm 12i}{10}\\y &= \frac{7}{5}\pm\frac{6}{5}i\end{aligned}$$

lo que indica que no hay intersección entre las líneas.

3.5 Ecuaciones paramétricas de una línea

Definición 3.6. Sea $M(x,y)$ un punto de una línea dada, tal que sus coordenadas x e y se pueden expresar como

$$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$$

donde t es un número real que se denomina *parámetro*, entonces las ecuaciones del sistema dado se denominan *ecuaciones paramétricas de la línea.*

Nota. Dadas las ecuaciones paramétricas de una línea, el proceso que permite transformar estas ecuaciones a la forma $F(x,y)=0$ se denomina *eliminación de parámetro.*

Ejemplo. Determine la línea en la forma $F(x,y)=0$ e indique cuál es el lugar geométrico , dadas sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases}$$

Solución. Las ecuaciones paramétricas dadas son equivalentes a

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2 t \\ y^2 = r^2\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones se tiene

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)$$

equivalente a

$$x^2 + y^2 = r^2$$

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas dadas corresponden a una circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio igual a r.

Ejemplo. Determine las ecuaciones paramétricas de la circunferencia

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$$

Solución. De acuerdo con el ejemplo anterior, las ecuaciones paramétricas de una circunferencia con centro el origen, están dadas por $x = r\cos t$ y $y = r\operatorname{sen} t$, donde r representa el radio de la circunferencia.

Como la circunferencia de este ejemplo tiene radio $r = 5$ y las coordenadas de su centro son $(4, -2)$, entonces para determinar las ecuaciones parámetricas de esta circunferencia basta sumar a x la cantidad de 4 y a y la cantidad de -2; resultando las ecuaciones parámetricas las siguientes:

$$\begin{cases} x = 5\cos t + 4 \\ y = 5\operatorname{sen} t - 2 \end{cases}$$

3.5.1 Transformación de ecuación en coordenadas polares a coordenadas cartesianas

Definición 3.7. Dada la ecuación de una línea en la forma polar $\rho = f(\theta)$, esta línea puede determinarse en coordenadas cartesianas mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Ejemplo. La ecuación de la circunferencia $\rho = a\cos\theta$, dada en coordenadas polares, puede expresarse en coordenadas cartesianas mediante las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos^2\theta \\ y = a\cos\theta\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Ejemplo. La ecuación de la espiral de Arquímides $\rho = a\theta$, dada en coordenadas polares, puede expresarse en coordenadas cartesianas mediante las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = a\theta\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

3.6 Ejercicios resueltos

1. Determine el lugar geométrico del punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto $A(-2,-2)$ es el triple que su distancia al punto $B(-5,-5)$. Transforme la ecuación a coordenadas polares.

Solución. Sea $M(x, y)$ un punto de este lugar geométrico, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|MA| &= 3|MB| \\
\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} &= 3\sqrt{(x+5)^2 + (y+5)^2} \\
x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 &= 9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 + 90y + 225 \\
8x^2 + 8y^2 + 86x + 86y + 442 &= 0 \\
4x^2 + 4y^2 + 43x + 43y + 221 &= 0
\end{aligned}$$

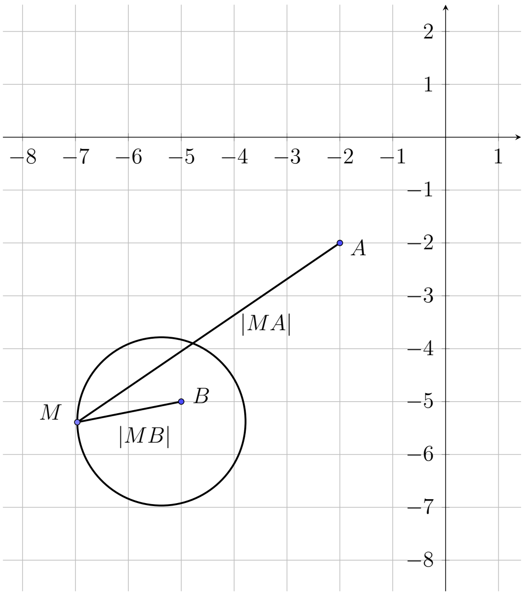


Figura 3.18: Lugar geométrico $|MA| = 3|MB|$

Usando la transformación de coordenadas cartesianas a polares se tiene que

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

reemplazando se tiene:

$$4\rho^2 \cos^2\theta + 4\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + 43\rho\cos\theta + 43\rho\operatorname{sen}\theta + 221 = 0$$

además

$$(4\cos^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta)\rho^2 + (43\cos\theta + 43\,\mathrm{sen}\,\theta)\rho + 221 = 0$$

$$4\rho^2 + (43\cos\theta + 43\,\mathrm{sen}\,\theta)\rho + 221 = 0$$

2. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(5,4)$ es siempre igual al doble de su distancia al eje Oy.

   Solución. Sea $M(x,y)$ un punto del lugar geométrico, sea P la proyección de M sobre el eje Oy, se tiene que $P(0,y)$, por tanto

$$\begin{array}{ll|l}
1) & |MA| = 2|MP| & \text{hipótesis} \\
2) & \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2} = 2\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2} & \text{definición de distancia} \\
3) & \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2} = 2\sqrt{x^2} & \text{resolviendo} \\
4) & x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 4x^2 & \text{elevando al cuadrado} \\
5) & 3x^2 - y^2 + 10x + 8y - 41 = 0 & \text{resolviendo}
\end{array}$$

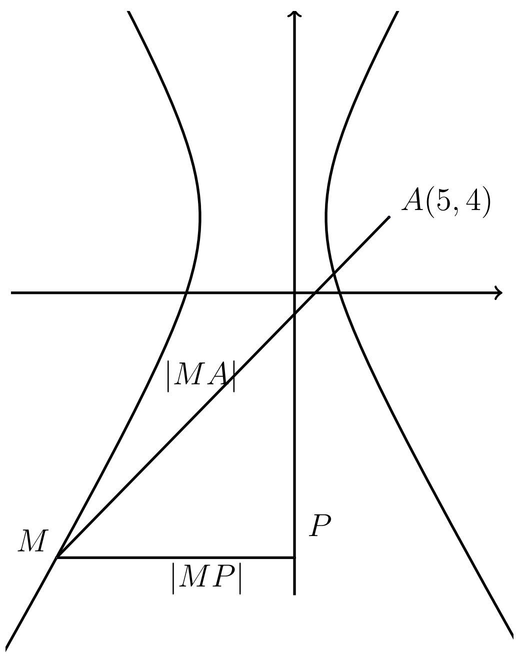


Figura 3.19: Lugar geométrico $|MA| = 2|MP|$

3. Un segmento rectilíneo de longitud 5 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje Ox y el otro permanece siempre

sobre el eje Oy. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento.

Solución. Sea $M(x, y)$ un punto del lugar geométrico buscado, se tiene que los extremos del segmento, tal que M es su punto medio son $A(2x, 0)$ (pues uno de los extremos pertenece al eje Ox) y $B(0, 2y)$ (el otro extremo pertenece al eje Oy). Por tanto

1)	$\|MA\| = \frac{5}{2}$	pues M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$
2)	$\sqrt{(x-2x)^2 + (y-0)^2} = \frac{5}{2}$	reemplazando las coordenadas
3)	$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{5}{2}$	resolviendo
4)	$x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$	elevando al cuadrado

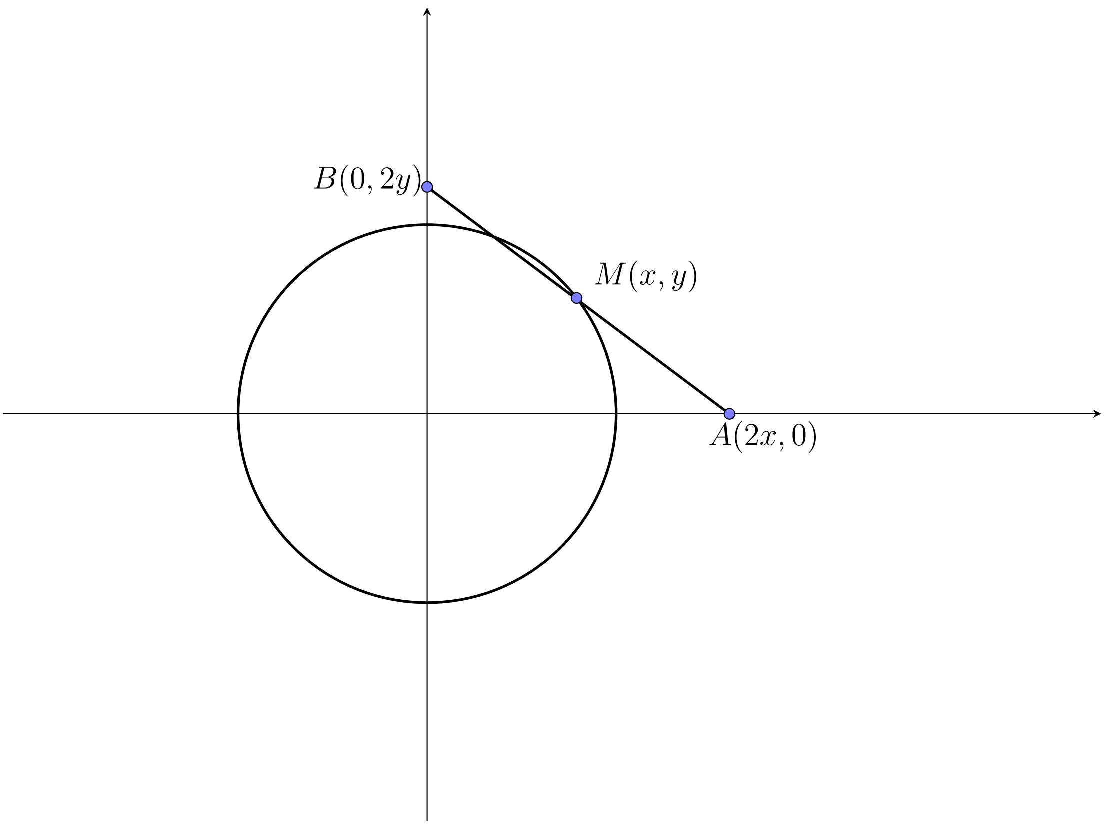


Figura 3.20: Lugar geométrico $|MA| = \frac{5}{2}$

4. Deduzca la ecuación de la trayectoria del punto M, que durante su movimiento está a la misma distancia de los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, 3)$.

Solución. Sea $M(x, y)$ el punto general de la línea buscada, se cumple:

$$\begin{aligned}
|AM| =& |MB| \\
\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} =& \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
x^2-6x+9+y^2-4y+4 =& x^2-10x+25+y^2-6y+9 \\
-6x+9-4y+4 =& -10x+25-6y+9 \\
-6x+10x-4y+6y+4-25 =& 0 \\
4x+2y-21 =& 0
\end{aligned}$$

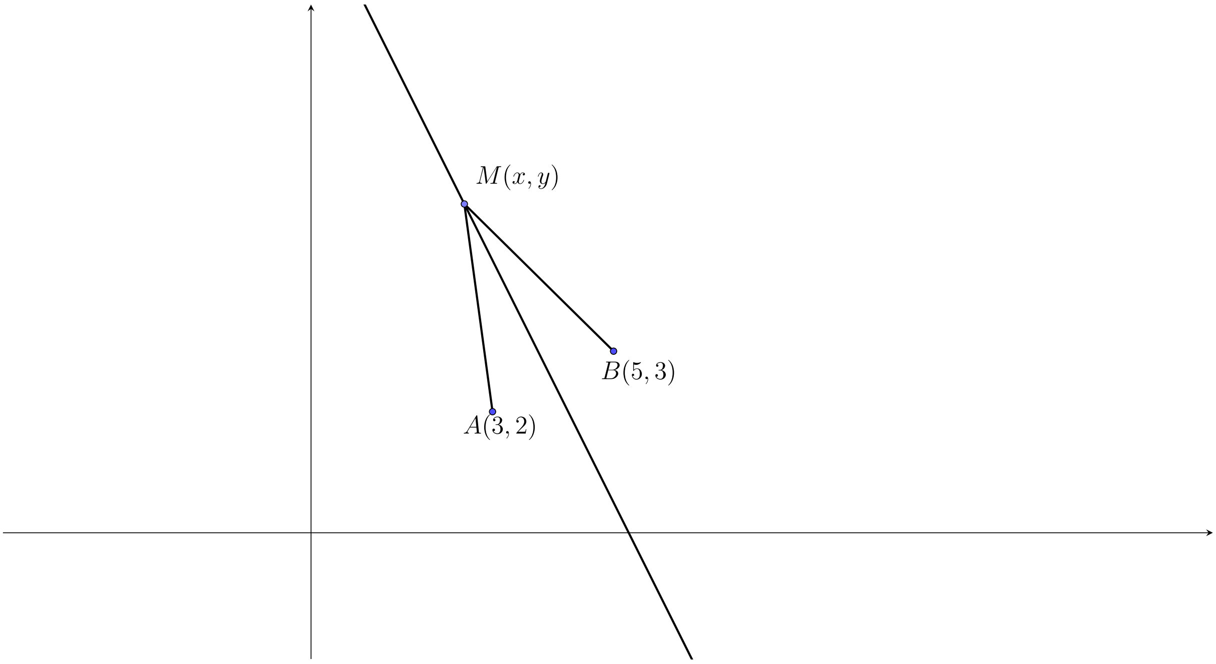


Figura 3.21: Lugar geométrico $|MA| = |MB|$

5. En un triángulo de vértices $A(0,1)$, $B(0,5)$ y $C(x,y)$, el vértice C se mueve de tal manera que el ángulo $C\widehat{A}B$ es igual al doble del ángulo $C\widehat{B}A$. Determine la ecuación del lugar geométrico que describe C. Determine la ecuación del lugar geométrico, si el origen se traslada al punto $O'(-2,2)$.

   Solución. Sea $C(x,y)$, por hipótesis se cumple que $C\widehat{A}B = 2(C\widehat{B}A)$; si se llama al ángulo $C\widehat{B}A$ como α, se tiene que $C\widehat{A}B = 2\alpha$. Se cumple:

$$\tan 2\alpha = \frac{x}{y-1}$$

y

$$\tan\alpha = \frac{x}{5-y}$$

con $5-y>0$ además, se conoce que

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

reemplazando se tiene

$$\frac{x}{y-1} = \frac{2\left(\frac{x}{5-y}\right)}{1-\left(\frac{x}{5-y}\right)^2}$$

si $x \neq 0$

$$\frac{1}{y-1} = \frac{\frac{2}{5-y}}{1-\frac{x^2}{(5-y)^2}}$$

$$\frac{1}{y-1} = \frac{\frac{2}{5-y}}{\frac{25-10y+y^2+x^2}{(5-y)^2}}$$

con $5-y \neq 0$

$$\frac{1}{y-1} = \frac{10-2y}{25-10y+y^2-x^2}$$

$$25-10y+y^2-x^2 = 10y-10-2y^2+2y$$

$$3y^2-x^2-22y+35=0$$

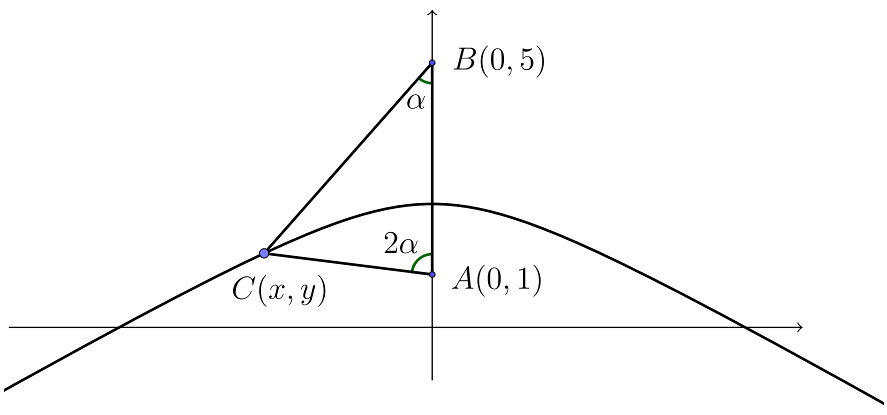


Figura 3.22: Lugar geométrico $C\widehat{A}B = 2A\widehat{B}C$

En lo que se refiere a la segunda pregunta, hay que utilizar las fórmulas de traslación por lo que se usa

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x = \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

luego la ecuación queda

$$3(y' + 2)^2 - (x' - 2)^2 - 22(y' + 2) + 35 = 0$$

6. Determine las ecuaciones de las mediatrices de los lados de un triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(-2, 6)$ y $C(5, -2)$. Demuestre que esta se intersecan en un solo punto.

Solución. La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de puntos que equidistan de sus extremos; por tanto, si llamamos $M(x, y)$ a un punto de la mediatriz del segmento AB, se tiene que $|AM| = |BM|$. Ahora, se determina las ecuaciones de la mediatrices de los tres lados del triángulo.

a) Mediatriz del lado AB

$$|AM| = |BM|$$
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-6)^2}$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 12y + 36$$
$$-4x + 4 - 6y + 9 = 4x + 4 - 12y + 36$$
$$8x - 6y + 27 = 0$$

b) Mediatriz del lado AC

$$|AM| = |CM|$$
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}$$
$$x^2-4x+4+y^2-6y+9 = x^2-10x+25+4y^2+y+4$$
$$-4x+4-6y+9 = -10x+25+4y+4$$
$$3x-5y-8=0$$

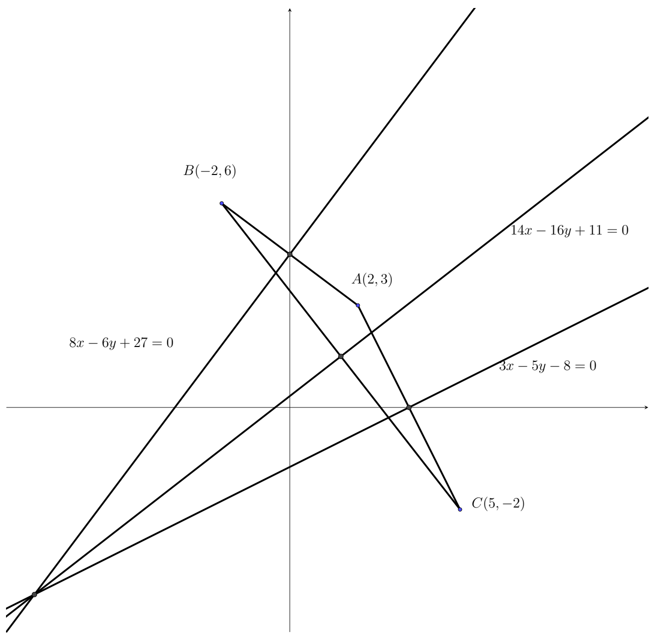


Figura 3.23: Intersección de las mediatrices de un triángulo

c) Mediatriz del lado BC

$$|BM| = |CM|$$
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}$$
$$x^2+4x+4+y^2-12y+36 = x^2-10x+25+y^2+4y+4$$
$$4x+4-12y+36 = -10x+25+4y+4$$
$$14x-16y+11=0$$

Ahora se prueba que las rectas se intersecan en un sólo punto resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 8x - 6y + 27 = 0 \\ 3x - 5y - 8 = 0 \\ 14x - 16y + 11 = 0 \end{cases}$$

en este caso se lo resuelve por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & -27 \\ 3 & -5 & 8 \\ 14 & -16 & -11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 8 \\ 8 & -6 & -27 \\ 14 & -16 & -11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 8 & -6 & -27 \\ 14 & -16 & -11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{145}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{145}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{145}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{145}{22} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{183}{22} \\ 0 & 1 & -\frac{145}{22} \end{array}\right)$$

7. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos $A(1,0)$ y $B(5,0)$. Determine la ecuación de la línea que recorre el tercer vértice C, si se mueve de tal manera que la diferencia entre las longitudes de los lados AC y BC es

siempre igual a la mitad de la longitud del lado AB.

Solución. Sea el punto $C(x,y)$ perteneciente al lugar geométrico buscado, entonces

$$\begin{aligned}
|AC|-|BC| =& \frac{1}{2}|AB| \\
\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2} =& \frac{1}{2}\cdot 4 \\
\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2} =& 2 \\
x^2-2x+1+y^2+x^2-10x+25+y^2- \\
-2\sqrt{x^4-12x^3+46x^2+2x^2y^2-60x-12xy^2+25+26y^2+y^4} =& 4 \\
2\sqrt{x^4-12x^3+46x^2+2x^2y^2-60x-12xy^2+25+26y^2+y^4} =& 2x^2-12x+22+2y^2 \\
\sqrt{x^4-12x^3+46x^2+2x^2y^2-60x-12xy^2+25+26y^2+y^4} =& x^2-6x+11+y^2 \\
12x^2-72x+96-4y^2 =& 0 \\
3x^2-18x+24-y^2 =& 0
\end{aligned}$$

3.7 Ejercicios propuestos

1. Determine la ecuación del lugar geométrcio del punto que se mueve de tal manera que su distancia al punto $O(-2,3)$ se constante.

2. Determine la ecuación del lugar geométrico del punto que se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(3,1)$ es igual a la mitad de su distancia al eje Oy. Grafique.

3. Determine la ecuación del lugar geométrico del punto que se mueve de tal manera que la suma de distancias los puntos $P(0,5)$ y $Q(0,10)$ sea siempre igual a 10.

4. Determine la ecuación del lugar geomético de un punto que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los $A(-4,0)$ y $B(10,0)$ es igual a 8.

5. Determine la ecuación del lugar geométrico de punto que se mueve en el plano de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $A(4,1)$ es siempre igual a su distancia al eje Oy.

6. Determine los puntos comunes de las líneas de ecuaciones $x^2 + 5y^2 = 1$ y $y = 2x - 1$

7. Determine en coordenadas cartesianas los puntos de intersección entre las líneas de ecuaciones
$$\rho = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$
y
$$2x + y - 1 = 0$$

8. Determine del valor de k para que las líneas de ecuaciones
$$5x^2 - 2x - ky - 8 = 0$$
y
$$y = 18x - 28$$
tengan un solo punto en común. Determine el punto común y grafique.

Capítulo IV

4. Líneas de primer orden

En este capítulo se estudia las ecuaciones de la recta en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares, así como la ecuación de un haz de rectas.

4.1 Coeficiente angular de una recta

Definición 4.1. Dado un sistema de coordenadas cartesiano rectangular y una recta en el plano, se demomina *ángulo de inclinación* de la recta al ángulo que tiene que girar el eje Ox en sentido antihorario para coincidir con la recta dada (Figura 4.1 y 4.2).

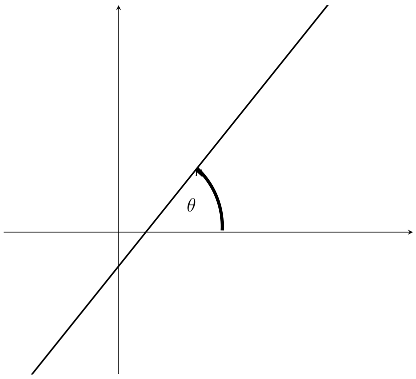


Figura 4.1: Ángulo de inclinación $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

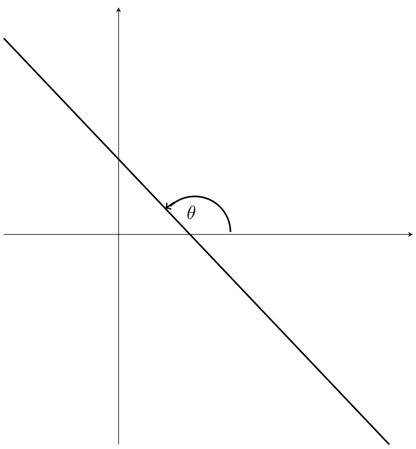


Figura 4.2: Ángulo de inclinación $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Nota. Si la recta es paralela al eje Ox, se supone que el ángulo de inclinación es igual a 0.

Definición 4.2. Dada una recta r en el plano, con ángulo de inclinación θ, se denomina *coeficiente angular* de r y se representa mediante k, a la tangente del ángulo de inclinación; es decir, $k = \tan\theta$.

Notas.

1. Si el ángulo de inclinación es 0, entonces su coeficiente angular es $k = 0$; mientras que si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces se dice que la recta carece de coeficiente angular.

2. El ángulo de inclinación θ está comprendido entre 0 y π.

3. El coeficiente angular es un número que puede ser positivo, negativo o 0. Si el ángulo es agudo, su coeficiente angular es positivo; si el ángulo es obtuso, su coeficiente angular es negativo.

4.1.1 Coeficiente angular conocidos dos puntos de la recta

Proposición 4.1. *Dada una recta r y dos puntos de ella $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el coeficiente angular de r está dado por:*

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

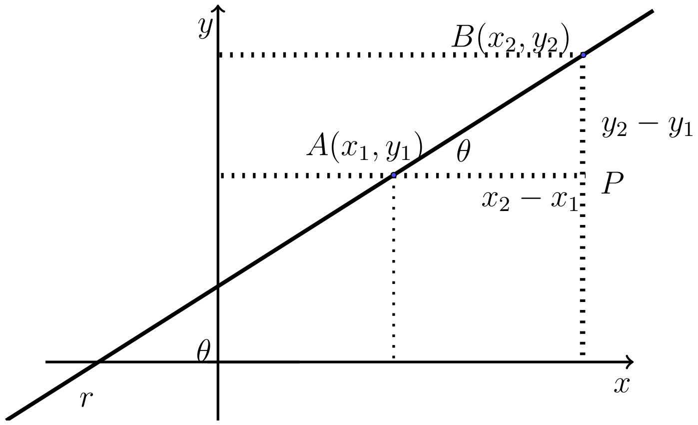


Figura 4.3: Recta por los puntos A y B

Demostración. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos de la recta r (Figura 4.3), entre las rectas que proyectan sobre los ejes a los puntos A y B se forma el triángulo rectángulo $\triangle ABP$, se tiene que:

1)	$\tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	por ángulos correspondientes y relaciones trigonométricas en $\triangle ABP$
2)	$k = \tan\theta$	definición de coeficiente angular
3)	$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	por transitividad

$\square$

4.2 Ecuaciones de la recta

4.2.1 Ecuación de la recta dados su coeficiente angular y su intersección con el eje Oy

Proposición 4.2. *Dada la recta r con coeficiente angular k, cuya intersección con el eje Oy es el punto $A(0, b)$, entonces su ecuación es:*

$$y = kx + b$$

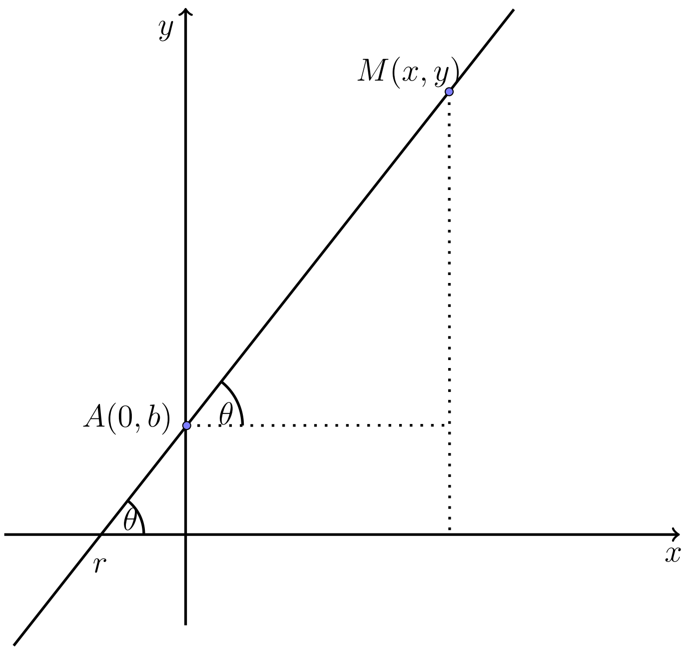


Figura 4.4: Recta conocido su coeficiente angular y la intersección con el eje Oy

Demostración. Sea un punto de la recta $M(x, y)$ (Figura 4.4) y su intersección con el eje Oy el punto $A(0, b)$, se tiene

1)	$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	por proposición 4.2
2)	$k = \frac{y-b}{x-0}$	reemplazando las coordenadas de M y A en 1)
3)	$y = kx + b$	despejado y de 2)

□

Nota. En la ecuación de la recta $y = kx + b$, si $b = 0$ se tiene que la ecuación se transforma en $y = kx$; en este caso, las variables y y x son proporcionales, con coeficiente de proporcionalidad igual a k.

4.2.2 Ecuación de la recta conocidos su coeficiente angular y las coordenadas de uno de sus puntos

Proposición 4.3. *Dada una recta r con coeficiente angular k, tal que el punto $A(x_0, y_0)$ le pertenece, entonces la ecuación de r está dada por*

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

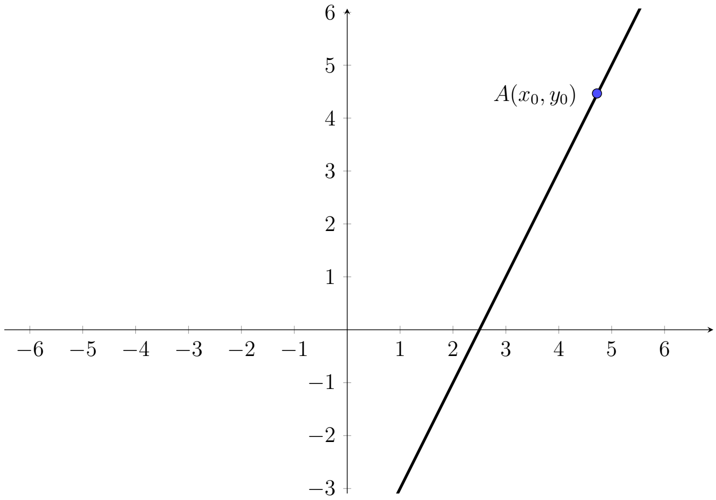


Figura 4.5: Recta conocidos un punto y el coeficiente angular

La demostración de la proposición 4.3 queda como ejercicio.

4.2.3 Ecuación de la recta conocidos dos puntos de ella

Proposición 4.4. *Dada la recta r y dos puntos de ella $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces la ecuación de la recta r está dada por*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

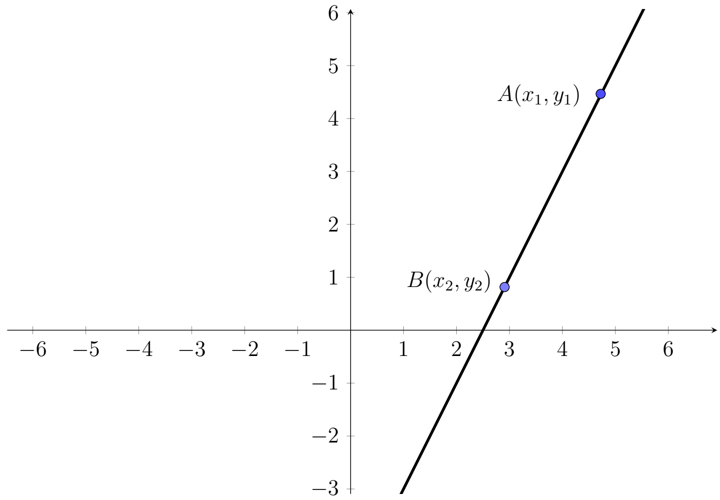


Figura 4.6: Recta conocidos dos puntos

Demostración. El coeficiente angular k de una recta puede calcularse a partir de las coordenadas de dos puntos de ella. Sea $P(x, y)$ un punto de la recta r, entonces se tiene:

1)	$k = \frac{y-y_1}{x-x_1}$	por proposición 4.1
2)	$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	por proposición 4.1
3)	$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	igualando 1) y 2)

□

4.3 Ángulo formado entre dos rectas

El objetivo de esta sección es determinar el ángulo entre dos rectas a partir de sus coeficientes angulares; una vez hecho esto, se determina las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

Definición 4.3. Dadas dos rectas r_1 y r_2 cualesquiera, con coeficientes angulares k_1 y k_2 respectivamente, se llama ángulo ϕ entre r_1 y r_2 al ángulo más pequeño que tiene que girar la recta r_1 para coincidir con r_2.

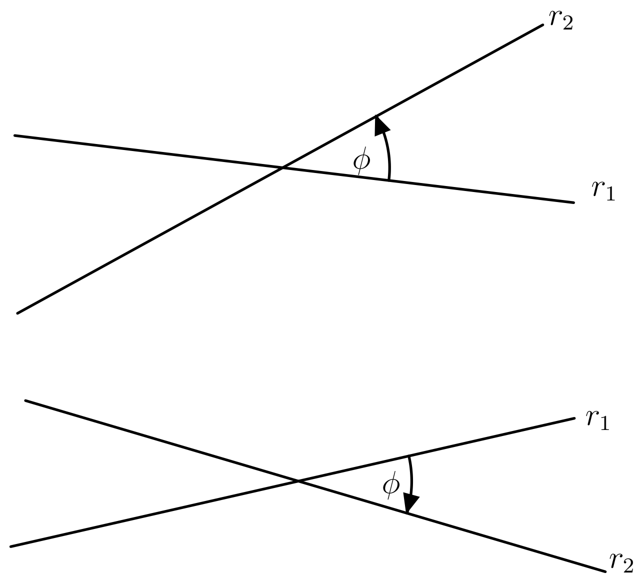


Figura 4.7: Ángulo medido desde r_1 hasta r_2

Nota. El ángulo entre dos rectas puede ser positivo o negativo, según la orientación del giro; si la orientación es en sentido antihorario, entonces el ángulo es positivo, si es en sentido horario, el ángulo es negativo.

Proposición 4.5. *El ángulo ϕ entre las rectas r_1 y r_2 con coeficientes angulares k_1 y k_2 respectivamente (Figura 4.8), está dado por la relación*

$$\tan\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

donde $k_1 k_2 \neq -1$

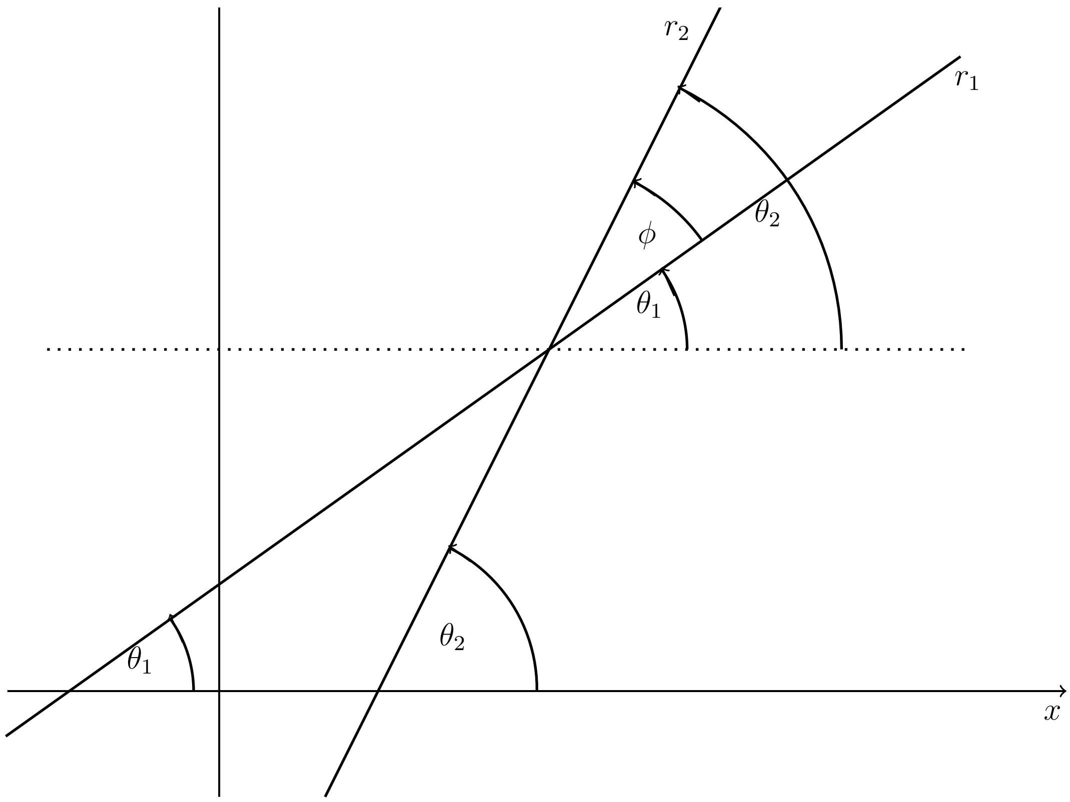


Figura 4.8: Ángulo entre rectas

Demostración. Sean θ_1 y θ_2 los ángulos de inclinación de las rectas r_1 y r_2 respectivamente, se tiene:

1)	$\theta_2 = \theta_1 + \phi$	ángulos correspondientes y suma de ángulos
2)	$\phi = \theta_2 - \theta_1$	de 1)
3)	$\tan\phi = \tan(\theta_2 - \theta_1)$	sacando la función tangente a 2)
4)	$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$	por tangente de diferencia de ángulos
5)	$\tan\phi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$	def. de coeficiente angular, 3) y 4)

□

4.3.1 Rectas paralelas

Proposición 4.6. *Dos rectas son paralelas si y solo si sus coeficientes angulares son iguales.*

La demostración de la proposición 4.6 queda como ejercicio.

4.3.2 Rectas perpendiculares

Proposición 4.7. *Dos rectas r_1 y r_2 con coeficientes angulares iguales a k_1 y k_2 respectivamente son perpendiculares si y solo si cumplen*

$$k_1 k_2 = -1$$

La demostración de la proposición 4.7 queda como ejercicio.

Ejemplo. Determine la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, sabiendo las coordenadas de $A(-4, 7)$ y de $B(8, -13)$. Grafique.

Solución. Recordando que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por su punto medio, necesitamos:

a) Punto medio M

$$x = \frac{-4+8}{2} = 2$$
$$y = \frac{7-13}{2} = -3$$

en consecuencia, $M(2, -3)$

b) Coeficiente angular de la recta que pasa por A y B

$$k_1 = \frac{7+13}{-4-8} = \frac{20}{-12} = -\frac{5}{3}$$

c) Coeficiente angular de la mediatriz

$$k = \frac{3}{5}$$

d) Ecuación de la mediatriz

$$\begin{aligned} y+3 &= \frac{3}{5}(x-2) \\ y &= \frac{3}{5}(x-2)-3 \\ y &= \frac{3}{5}x-\frac{6}{5}-3 \\ y &= \frac{3}{5}x-\frac{21}{5} \end{aligned}$$

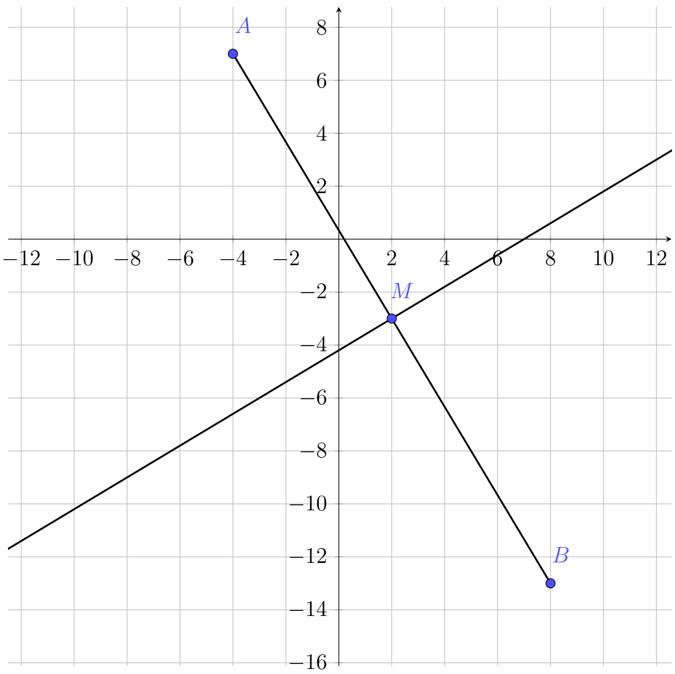


Figura 4.9: Mediatriz de un segmento

Ejemplo. Determine las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(-3,2)$, $B(10,15)$ y $C(8,10)$. Grafique.

Solución. Es suficiente encontrar dos alturas del triángulo y posterirormente su intersección:

a) Altura desde el vértice A al lado BC

El coeficiente angular del lado BC está dada por

$k=\frac{5}{2}$

por tanto, la ecuación de la altura está dada por

$$
\begin{aligned}
y - 2 =& - \frac{2}{5}(x+3) \\
y =& - \frac{2}{5}(x+3) + 2 \\
y =& - \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} + 2 \\
y =& - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

b) Altura desde el vértice C al lado AB

El coeficiente angular del lado AB está dada por $k = 1$

por tanto, la ecuación de la altura está dada por

$$
\begin{aligned}
y - 10 =& - 1(x-8) \\
y =& - x + 18
\end{aligned}
$$

c) Intesección de las dos rectas

Igualando las y se tiene

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{5}x + \frac{4}{5} =& - x + 18 \\
\frac{3}{5}x =& \frac{86}{5} \\
x =& \frac{86}{3}
\end{aligned}
$$

mientras que $y = -\frac{32}{3}$

por tanto, el ortocentro es el punto $\left(\frac{86}{5}, -\frac{32}{3}\right)$

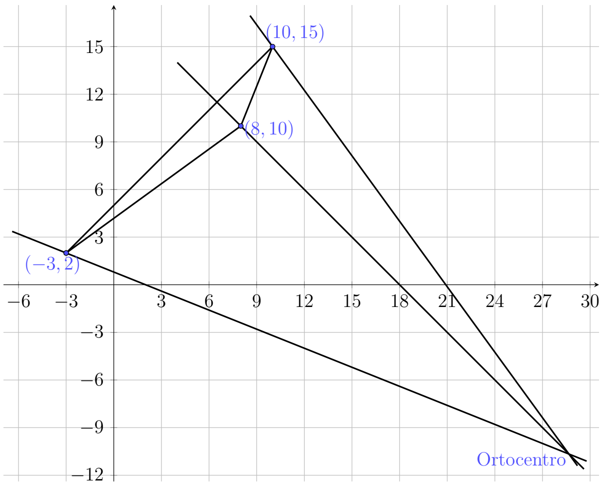


Figura 4.10: Ortocentro de un triángulo

Ejemplo. Calcular las amplitudes de los ángulos internos del triángulo anterior y realizar el gráfico.

Solución. Hay que calcular los coeficientes angulares de cada lado y posteriormente los ángulos entre las rectas que pasan por los vértices

a) Coeficiente angular de la recta que pasa por AB

$$k_1 = 1$$

b) Coeficiente angular de la recta que pasa por AC

$$k_2 = \frac{8}{11}$$

c) Coeficiente angular de la recta que pasa por BC

$$k_3 = \frac{5}{2}$$

d) Ángulo en A

$$\begin{aligned}\tan A =& \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\\ =& \frac{\frac{8}{11} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{8}{11}}\\ =& -\frac{\frac{3}{11}}{\frac{19}{11}}\\ =& -\frac{3}{19}\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}A =& \tan^{-1}\left(-\frac{3}{19}\right)\\ \approx& -8.97^o\end{aligned}$$

luego $A \approx 8,97$

e) Ángulo en B

$$\begin{aligned}\tan B =& \frac{k_3 - k_1}{1 + k_3 k_1}\\ =& \frac{\frac{5}{2} - 1}{1 + \frac{5}{2} \cdot 1}\\ =& \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}\\ =& \frac{3}{7}\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}B =& \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)\\ \approx& 23.2^o\end{aligned}$$

f) Ángulo en C

$$\begin{aligned}\tan C =& \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}\\ =& \frac{\frac{8}{11} - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{11}}\\ =& \frac{-\frac{39}{22}}{\frac{31}{11}}\\ =& -\frac{39}{62}\end{aligned}$$

por tanto

$$C = \tan^{-1}\left(-\frac{39}{62}\right)$$
$$\approx 147.83^o$$

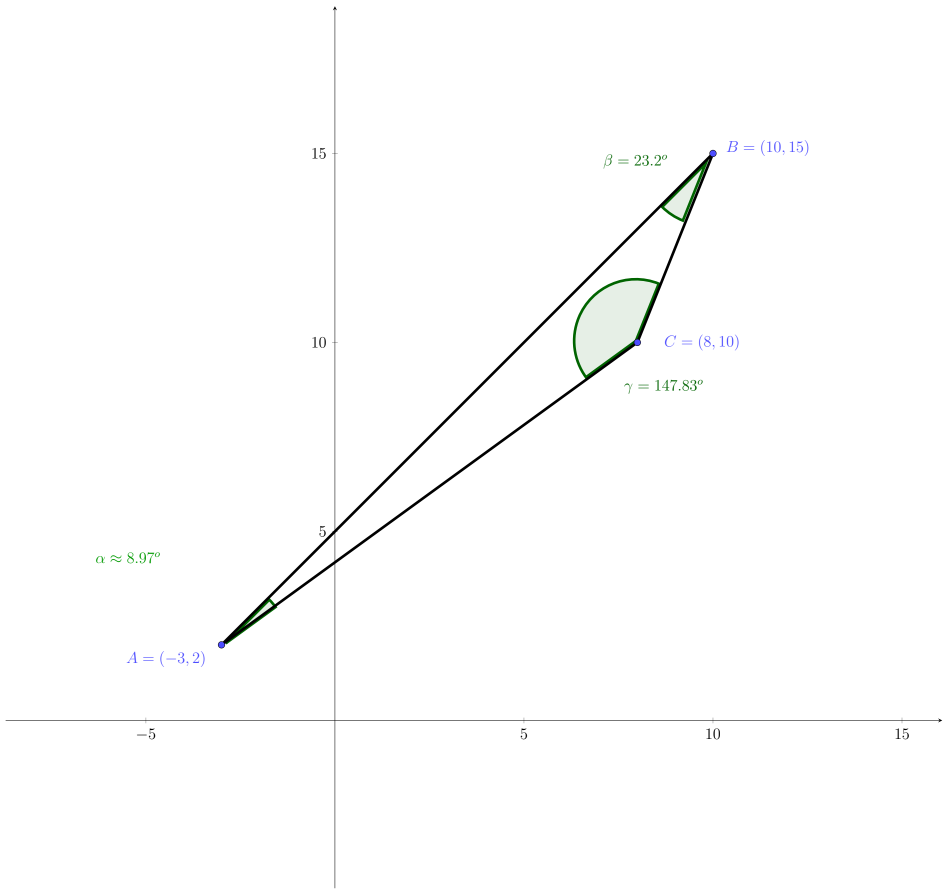


Figura 4.11: Ángulos internos de un triángulo

4.4 La recta una línea de primer orden

Teorema 4.1. *Una ecuación de primer grado en las variables x e y representa una recta y viceversa una recta está determinada por una ecuación de primer grado.*

Demostración. Para la primera implicación se supone tener una ecuación de primer grado $Ax + By + C = 0$, con A y B números reales no iguales a 0 al mismo tiempo, entonces

1) $\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$ suponiendo que $B \neq 0$

2) $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ despejando y

esta es la ecuación de una recta con coeficiente angular $k = -\frac{A}{B}$ e intersección con el eje Oy en el punto $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

La demostración anterior supone que $B \neq 0$, para $B = 0$ debe suceder que $A \neq 0$, en este caso se obtiene la ecuación $x = -\frac{C}{A}$; es decir se obtiene la ecuación de la recta paralela al eje Oy.

Ahora, para la demostración de la segunda implicación, se supone tener una recta no paralela al eje Oy, entonces esta se determina por la ecuación de la forma $y = kx + b$; es decir, por una ecuación de primer grado. Si la recta fuese paralela al eje Oy con intersección con eje Ox en el punto $(a, 0)$, entonces la ecuación de la recta es de la forma $x = a$, que también es una ecuación de primer grado. $\square$

Notas.

1. La ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ se denomina *ecuación general de la recta.*

2. Si $A = 0$ y $B \neq 0$ entonces la ecuación general de la recta se convierte en $y = -\frac{C}{B}$ que representa una recta paralela al eje Ox, que corta al eje Oy en el punto $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

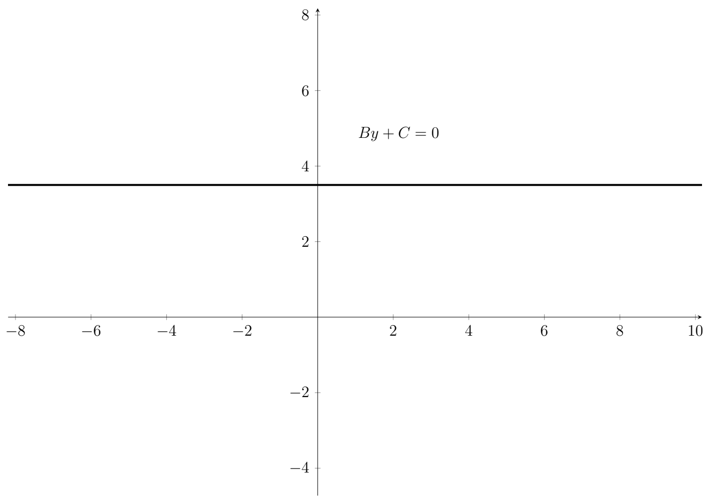


Figura 4.12: Recta de ecuacón $Ax + By + C = 0$ con $A = 0$

3. Si $C = 0$, $A \neq 0$ y $B \neq 0$ en la ecuación general de la recta, entonces la ecuación se convierte en $Ax + By = 0$ que representa una recta que pasa por el origen de coordenadas.

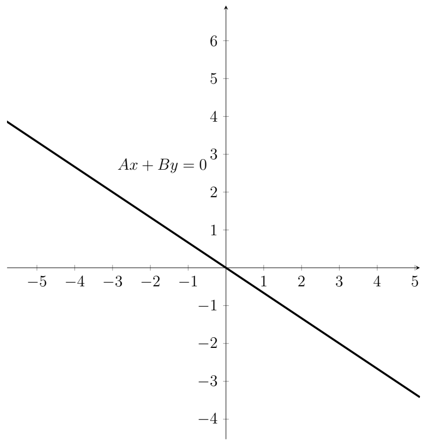


Figura 4.13: Recta de ecuacón $Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$

4.4.1 Ecuación segmentaria de una recta

Proposición 4.8. *Dada la recta r de ecuación general $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son diferentes de 0, entonces esta ecuación se puede transformar en otra de la forma*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a y b representan los valores de las intersecciones de la recta con los ejes Ox y Oy respectivamente.

Demostración. Dada la ecuación general $Ax + By + C = 0$ se tiene:

1) $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C} = 1$ por transposición de términos y división para $-C \neq 0$

2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ haciendo $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Si $x = 0$ entonces la ecuación 2) se convierte en $y = b$; es decir la recta interseca al eje Oy en el punto $(0, b)$. Si $y = 0$ entonces la ecuación 2) se convierte en $x = a$; es decir la recta interseca al eje Ox en el punto $(a, 0)$ (Figura 4.14). $\square$

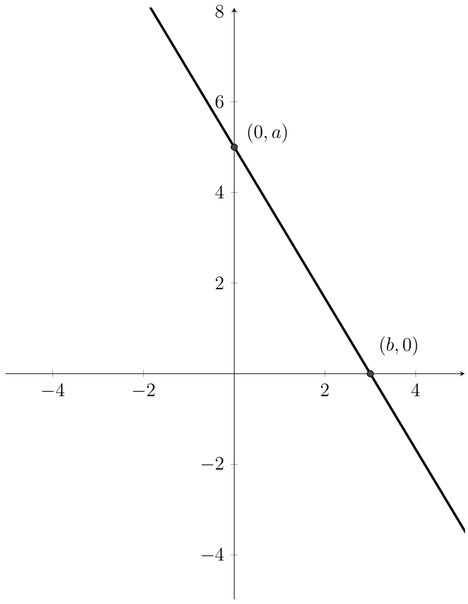


Figura 4.14: Intersección de la recta con los ejes

4.5 Intersección de rectas

Definición 4.4. Dadas dos rectas $r_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$ y $r_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$. Las coordenadas de los puntos que satisfacen a las dos ecuaciones al mismo tiempo, se determinan resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Las coordenadas de los puntos que satisfacen el sistema se denominan *soluciones* del sistema.

Notas.

1. Si las rectas del sistema 4.1 son paralelas no coincidentes entonces sus pendientes son iguales; es decir, $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$, por tanto $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = l$ pero $\frac{C_1}{C_2} \neq l$. Luego, el sistema 4.1 no tiene solución si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = l$ y $\frac{C_1}{C_2} \neq l$ (Figura 4.15).

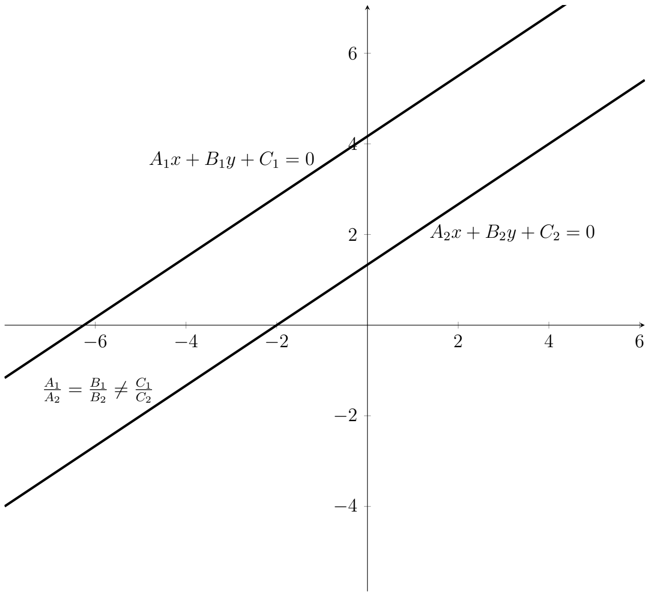


Figura 4.15: Rectas paralelas no coincidentes

2. Si las rectas del sistema 4.1 son coincidentes entonces $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = l$, luego el sistema tiene infinitas soluciones.

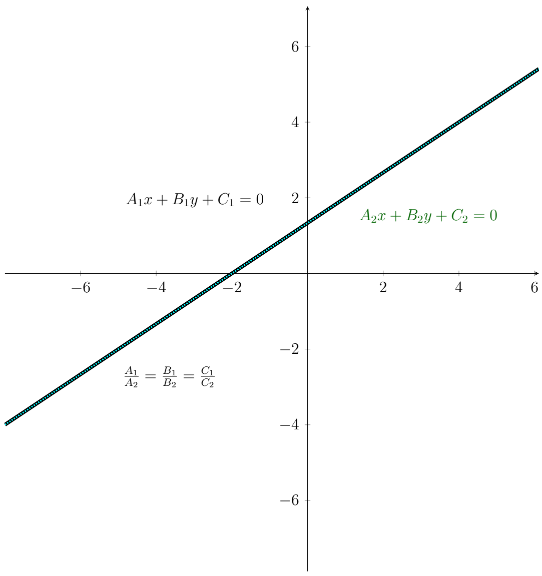


Figura 4.16: Rectas paralelas coincidentes

3. Si las rectas del sistema tienen un solo punto en común entonces el sistema tiene una sola solución, por tanto $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

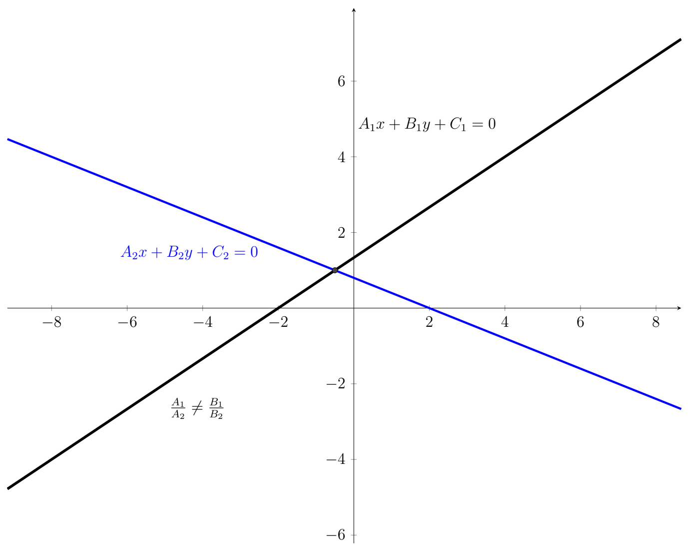


Figura 4.17: IRectas incidentes

Ejemplo. Calcule, si existe, la intersección de las siguientes rectas. Grafique.

$$5x + 2y - 3 = 0$$
$$2x + \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

Solución. Las dos rectas son coincidentes por tanto, todos los puntos de la recta satisfacen las dos ecuaciones.

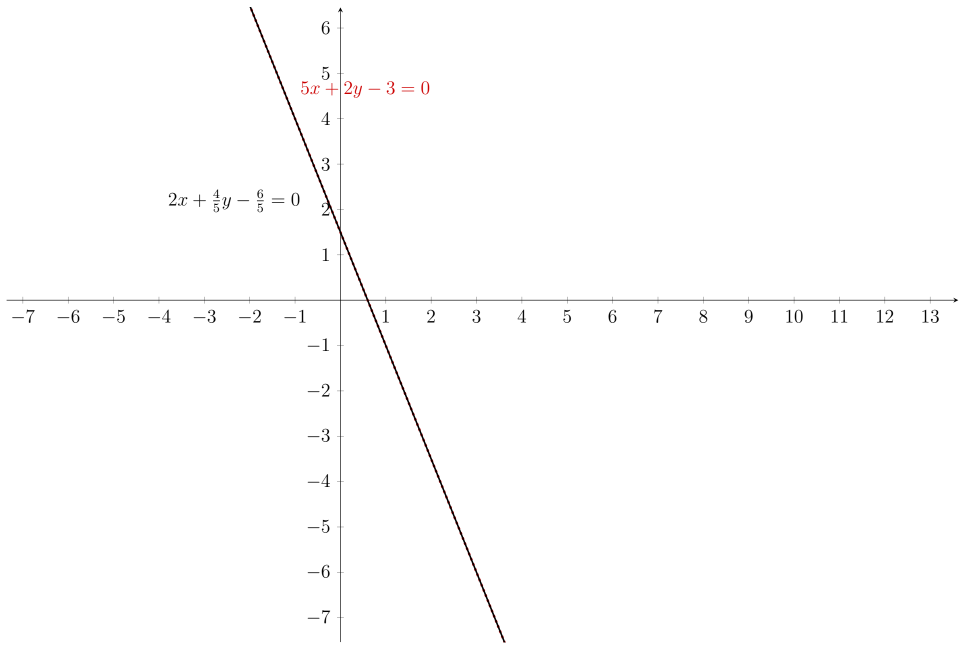


Figura 4.18: Rectas coincidentes

4.6 Ecuación normal de la recta

Definición 4.5. Dada una recta r, la recta n que pasa por el origen y es perpendicular en el punto P a la recta r, se denomina *recta normal* a r (Figura 4.19), la dirección positiva de la normal coincide con la dirección del punto O al punto P.

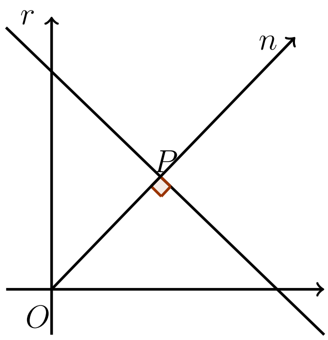


Figura 4.19: Recta normal a r

Nota. Si la recta r pasa por el origen de coordenadas, entonces la dirección positiva de la normal se elige arbitrariamente.

Proposición 4.9. *Dada la recta r y su normal n, tal que P es el punto de intersección entre las dos rectas, sea ϕ el ángulo más pequeño entre el eje Ox y la dirección positiva de la recta n (llamado* ángulo polar *de n), sea p la longitud del segmento $\overline{OP}$; si $M(x, y)$ es un punto de la recta r, entonces la ecuación de la recta r está dada por.*

$$x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi - p = 0 \tag{4.2}$$

la ecuación 4.2 se denomina ecuación normal *de la recta r (Figura 4.20).*

Demostración. Sea el triángulo rectángulo $\triangle MOP$ y $OP = p$ se tiene

1)	$p = \rho\cos\psi$	relaciones trigonométricas en el triángulo $\triangle MOP$
2)	$\cos\psi = \cos(\theta - \phi)$	$\theta = \phi + \psi$
3)	$p = \rho\cos\theta\cos\phi + \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$	de 1) y 2)
4)	$x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi - p = 0$	$x = \rho\cos\theta$ y $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$

□

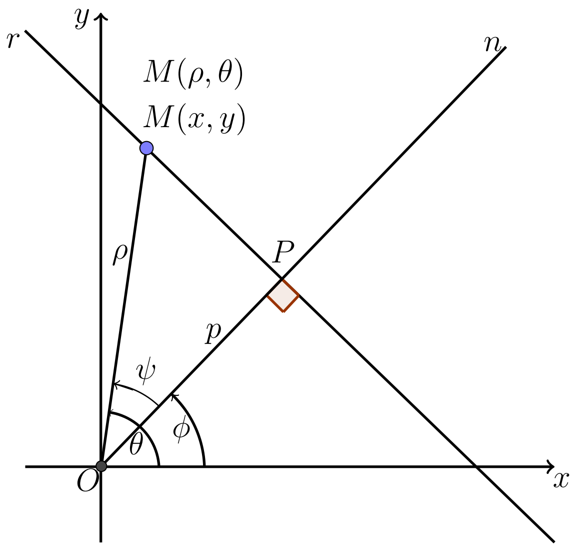


Figura 4.20: Recta r y recta normal n.

4.6.1 Distancia de un punto a una recta

Para determinar la distancia de un punto a una recta dada, puede emplearse la ecuación normal de la recta en la siguiente manera.

Definición 4.6. Dada una recta r y un punto Q, por Q se traza el segmento perpendicular a r con intersección el punto Q' (Figura 4.21), sea d la longitud del segmento $\overline{QQ'}$, se denomina *distancia dirigida* del punto Q a la recta r al número d si el punto Q y el origen están en lados contrarios respecto a la recta r, o $-d$ si el punto Q y el origen están del mismo lado respecto a la recta r.

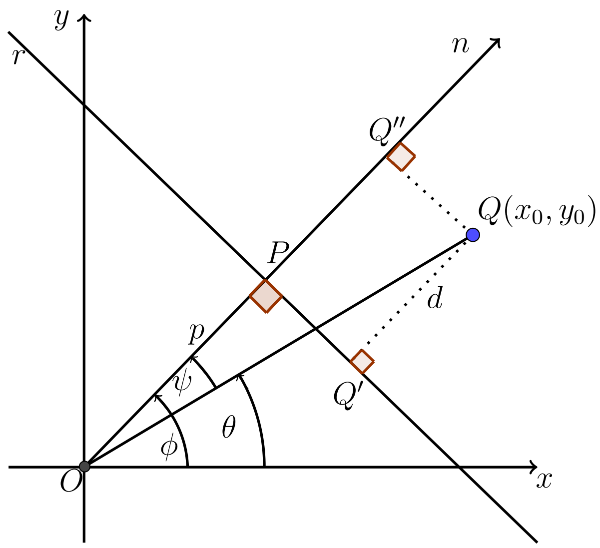


Figura 4.21: Distancia d de un punto a una recta

Notas.

1. Si el punto Q pertenece a la recta r entonces la distancia dirigida de Q a r es 0.

2. Se donomina simplemente *distancia* del punto Q a la recta r al valor d.

3. La distancia dirigida se representa mediante δ y es igual a $\pm d$,

Teorema 4.2. *Si las coordenadas del punto Q son (x_0, y_0) y la ecuación normal de la recta es*

$$x \cos\phi + y \operatorname{sen}\phi - p = 0$$

entonces, la distancia dirigida del punto Q a la recta está dada por

$$\delta = x_0 \cos\phi + y_0 \operatorname{sen}\phi - p \tag{4.3}$$

Demostración. Sea Q'' la proyección del punto Q sobre la recta normal n, se tiene:

1) $\delta = PQ'' = OQ'' - OP$	derivado del teorema 1.1
2) $OQ'' = \lvert OQ\rvert \cos\psi$	relaciones trigonométricas en $\triangle OQQ''$
3) $\cos\psi = \cos(\phi - \theta)$	$\phi = \psi + \theta$
4) $\cos(\phi-\theta) = \cos\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$	coseno de la suma de ángulos
5) $\lvert OQ\rvert \cos\psi = x_0\cos\phi + y_0 \operatorname{sen}\phi$	$x_0 = \lvert OQ\rvert\cos\theta$ y $y_0 = \lvert OQ\rvert \operatorname{sen}\theta$
6) $OQ'' = x_0\cos\phi + y_0\operatorname{sen}\phi$	de 2)y 5)
7) $OP = p$	hipótesis
8) $\delta = x_0\cos\phi + y_0\operatorname{sen}\phi - p$	de 1) y 7)

□

4.6.2 Transformación de la ecuación general de la recta a la ecuación normal

Proposición 4.10. *El factor por el que se multiplica a la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ para transformarla en ecuación normal es*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{4.4}$$

El factor μ de la ecuación 4.4 se denomina factor normalizador.

Demostración. Dada la ecuación general $Ax+By+C = 0$ y normal $x\cos\phi+y\operatorname{sen}\phi-p = 0$ de la misma recta, se tiene que las ecuaciones son equivalentes, es decir, sus coeficiente son proporcionales, por tanto, existe un número real μ que

1) $\mu A = \cos\phi$, $\mu B = \operatorname{sen}\phi$, $\mu C = -p$	hipótesis
2) $\mu^2A^2 = \cos^2\phi$, $\mu^2B^2 = \operatorname{sen}^2\phi$	elevando al cuadrado las igualdades 1)
3) $\mu^2A^2 + \mu^2B^2 = \cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi$	sumando las primeras igualdades de 2)
4) $\mu^2 = \frac{1}{A^2+B^2}$	despejando μ^2
5) $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$	extrayendo la raíz cuadrada

□

Notas.

1. El signo del factor normalizador de la ecuación 4.4, es igual al opuesto del signo del coeficiente C, debido a la tercera igualdad de 1) en la demostración anterior. Si $C = 0$ el signo de μ puede tomar cualquier signo.

2. Del teorema 4.2 y la proposición 4.10 se deduce que la distancia dirigida de un punto $M(x_0, y_0)$ a la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$ está dada por la expresión
$$\delta = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

4.7 Ecuación de un haz de rectas

Definición 4.7. Dado un punto del plano $M(x_0, y_0)$, por él pasan infinitas rectas, el conjunto formado por todas estas rectas se denomina *haz de rectas de centro* M.

Proposición 4.11. *Dadas las rectas* $r_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$ *y* $r_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$ *incidentes en el punto* (x_0, y_0)*, la ecuación de cualquier recta que pertenece al haz de centro* (x_0, y_0) *es*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{4.5}$$

donde α *y* β *son números reales no simultáneamente iguales a* 0.

Demostración. Primero se demuestra que la ecuación 4.5 representa la ecuación de una recta, es decir que en la ecuación

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0 \tag{4.6}$$

los coeficientes $(\alpha A_1 + \beta A_2)$ y $(\alpha B_1 + \beta B_2)$ no son simultáneamente iguales a 0, para esta demostración se procede por reducción al absurdo, suponiendo que $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$ y $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$, en este caso

1)	$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ y $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$	por transposición de términos
2)	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	α y β no son simultáneamente igules a 0
3)	las rectas r_1 y r_2 son paralelas o coincidentes	de 2)

lo indicado en 3) es una contradicción, ya que las rectas son incidentes. Esto concluye con la demostración de que la expresión 4.5 representa una recta.

Ahora se demuestra que la recta de la ecuación 4.5 pasa por el punto (x_0, y_0),

4)	$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$	ya que (x_0, y_0) es el punto intersección entre r_1 y r_2
5)	$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$	ya que (x_0, y_0) es el punto intersección entre r_1 y r_2
6)	$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$	de 1) y2)

$\square$

La ecuación 4.5 puede reducirse a la forma

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{4.7}$$

donde $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ y $\alpha \neq 0$

Nota. Dado un haz de rectas de centro el punto $M(x_0, y_0)$, para determinar una recta en particular del haz, se requiere de un dato adicional que se usará en la ecuación 4.5 o ecuación 4.8 para determinar las variables α y β o λ respectivamente.

Ejemplo. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 2)$ y pertenece al haz de rectas que tiene como elementos a las siguientes rectas:

$$\begin{aligned} x + 2y - 4 &= 0 \\ 2x + \frac{1}{5}y - \frac{6}{5} &= 0 \end{aligned}$$

Elabore el gráfico.

Solución. La ecuación de la recta perteneciente al haz de rectas, dado por otras dos rectas es:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

como el punto $P(2,2)$ pertenece a esta recta, debe satisfacer la ecuación, lo que nos permite reemplazar las coordenadas de P en la ecuación del haz.

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) =& 0 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 4 + \lambda\left(2 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 2 - \frac{6}{5}\right) =& 0 \\ 2 + \frac{16}{5}\lambda =& 0 \\ \lambda =& -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación buscada es:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) =& 0 \\ x + 2y - 4 - \frac{5}{8}\left(2x + \frac{1}{5}y - \frac{6}{5}\right) =& 0 \\ x + 2y - 4 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8}y + \frac{3}{4} =& 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{15}{8}y - \frac{13}{4} =& 0 \end{aligned}$$

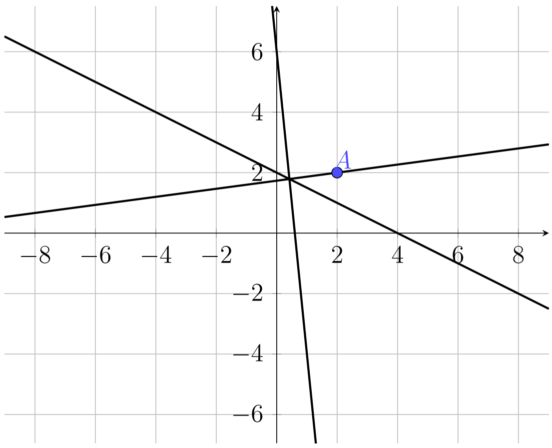


Figura 4.22: Haz de rectas

4.8 Ejercicios resueltos

1. Dada la ecuación de la recta $2x + 3y + C = 0$, con $C \neq 0$, determine su coeficiente angular, ecuación normal y ecuación segmentaria.

   Solución.

   a) Coeficiente angular.

   El coeficiente angular está dado por la expresión $k = -\frac{A}{B}$, luego el coeficiente angular de está recta es $k = -\frac{2}{3}$.

   b) Ecuación normal

   El coeficiente normalizador está dado por $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, en este caso se tiene

   $$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}$$

   luego, la ecuación normal de la recta es

   $$\pm\frac{2x + 3y + C}{\sqrt{13}} = 0$$

   c) Ecuación segmentaria

   Dividiendo la ecuación de la recta dada para C que por hipótesis es diferente de 0, se obtiene

   $$\frac{2}{C}x + \frac{3}{C}y = -1$$

   que se puede reescribir de la forma

   $$-\frac{x}{\frac{C}{2}} - \frac{y}{\frac{C}{3}} = 1$$

2. Dadas las rectas de ecuaciones $4x - y + 1 = 0$ y $2x + By - 2 = 0$, determine los valores de B para que las rectas sean

   a) Paralelas.

$b)$ Incidentes en el punto $A(-1,-3)$.

Solución.

$a)$ Paralelas.

Dos rectas son paralelas si sus coeficientes angulares son iguales. Llamando k_1 y k_2 a sus coeficientes angulares, se tiene que $k_1 = 4$ y $k_2 = -\frac{2}{B}$; por lo tanto, igualando los coeficientes y despejando B se obtiene que $B = -\frac{1}{2}$

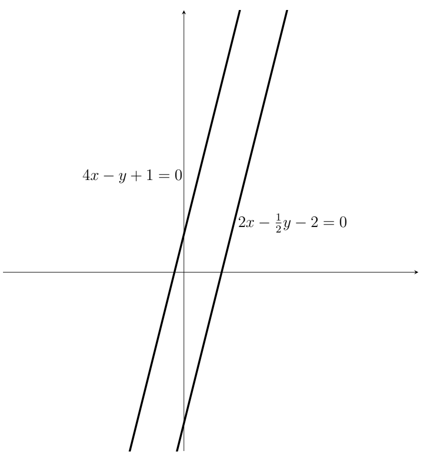


Figura 4.23: Rectas paralelas con $k = 4$

$b)$ Incidentes en el punto $A(-1,-3)$.

Las rectas son incidentes en el punto A, cuando las coordenadas del punto A satisfacen a las dos ecuaciones; por un lado las coordenadas de A satisfacen la primera ecuación; por otro lado, al reemplazar las coordenadas de A en la segunda ecuación se obtiene

$$B = -\frac{4}{3}$$

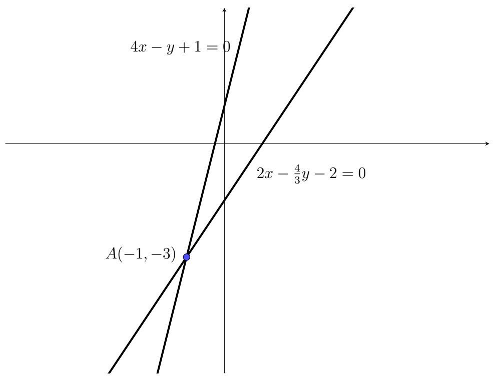


Figura 4.24: Rectas incidentes

3. Determine el valor de A para que la desviación (δ) del punto $P(3, 5)$ a la recta de ecuación $Ax + 3y + 5 = 0$ sea igual a $-\frac{32}{5}$.

   Solución. Recordando que la desviación de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta de ecuación $Ax + By + C = 0$, está dada por

$$\delta = \pm \frac{Ax_0 + by_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

   donde el signo del lado derecho de la ecuación es contrario al signo de C; reemplazando, se obtiene

$$-\frac{32}{5} = -\frac{A3 + 3(5) + 5}{\sqrt{A^2 + 9}}$$

   elevando al cuadrado e igualando a 0, se tiene

$$799A^2 - 3000A - 784 = 0$$

   resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen las soluciones

   $A = 4$ y $A = -\frac{196}{799}$

   por lo que las ecuaciones de las rectas de la forma $Ax + 3y + 5 = 0$ tal que la desviación del punto P a las mismas es igual a $-\frac{32}{5}$, son

$$4x + 3y + 5 = 0$$

y

$$-\frac{196}{799}x + 3y + 5 = 0$$

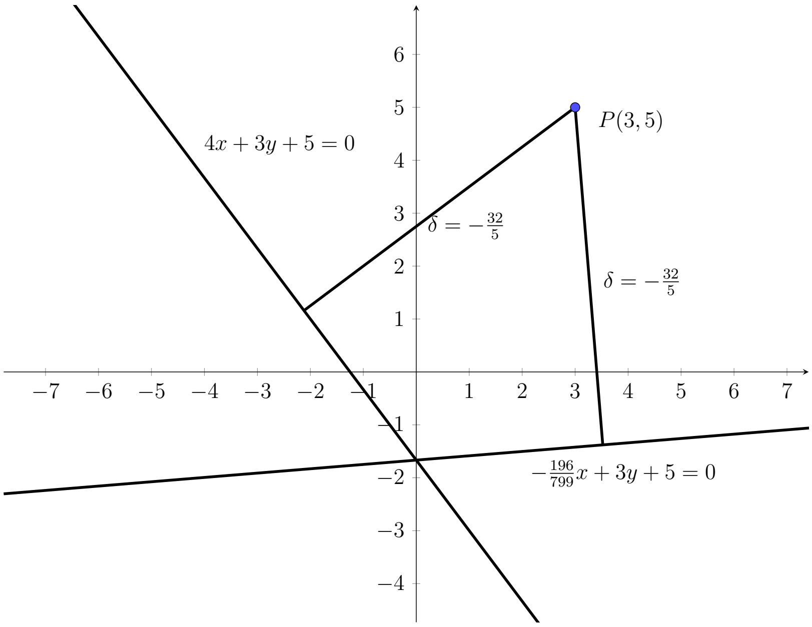


Figura 4.25: Desviación de un punto a una recta

4. Dado el triángulo de vértices $A(2.3)$, $B(-2,5)$ y $C(1,0)$, determine el ángulo entre la altura que sale del vértice del ángulo mayor del triángulo y la recta que pasa por los puntos B y $D(-6,-3)$. Realice todos los cálculos justificando los pasos.

Solución. Se realiza los siguientes pasos

a) Longitud de los lados

$$|AB| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$|BC| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

por tanto el ángulo mayor es $B\widehat{A}C$

b) Pendiente de la recta por B y C

$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-0}{-2-1} = -\frac{5}{3}$

c) Pendiente de la altura desde el vértice A

$$k_2 = \frac{3}{5}$$

d) Pendiente de la recta que pasa por B y D

$$k_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8}{4} = 2$$

e) Ángulo entre la altura y la recta que pasa por B y D

$$\tan\phi = \frac{k_3 - k_2}{1 + k_2 k_3} = \frac{2 - \frac{3}{5}}{1 + 2 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{7}{11}$$

por tanto $\phi = 32.47^o$

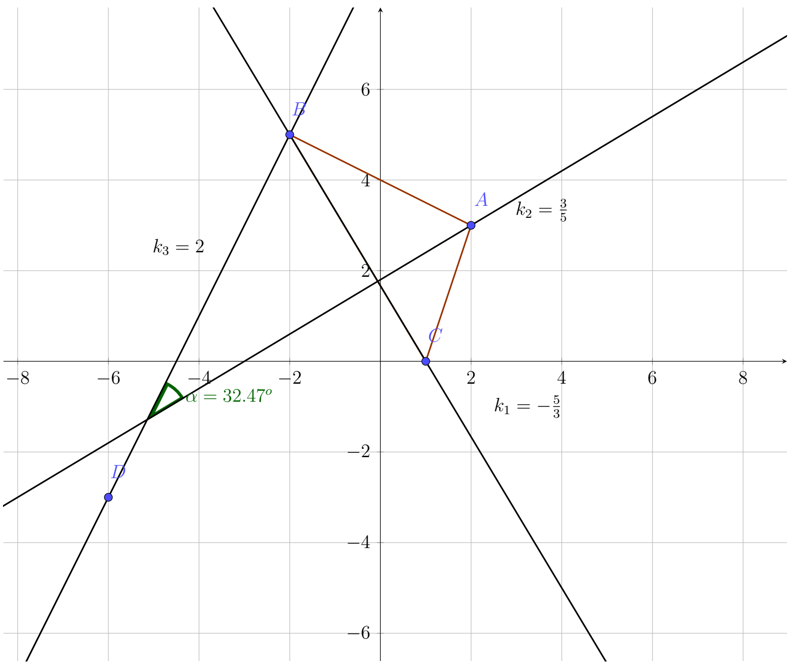


Figura 4.26: Ángulo entre rectas

5. Dadas las rectas de ecuaciones $mx + 2y + 5 = 0$ y $3x - y + 2 = 0$ pertenecientes al haz de rectas de centro el punto $A(a, b)$. Determine la ecuación de la recta que pertenece al haz y es paralela a la recta de ecuación $x + y - 2 = 0$

Solución. Los pasos de la resolución del ejercicio son los siguientes:

a) Intersección de las rectas

$$\begin{cases} mx + 2y + 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

multiplicando la segunda por 2 y sumando las ecuaciones resultantes se tiene

$$(m+6)x + 9 = 0$$

y por tanto

$$x = -\frac{9}{m+6}$$

donde $m \neq -6$

además

$$y = 3\left(-\frac{9}{m+6}\right) + 2$$

es decir

$$y = -\frac{27}{m+6} + 2$$

luego $a = -\frac{9}{m+6}$ y $b = -\frac{27}{m+6} + 2$

por tanto el centro del haz es $(a, b) = \left(-\frac{9}{m+6}, -\frac{27}{m+6} + 2\right)$

b) Coeficiente angular de la recta paralela a la recta buscada $k = -1$

c) Ecuación de la recta

$$y - b = k(x - a)$$

$$y + \frac{27}{m+6} - 2 = -x - \frac{9}{m+6}$$

$$y = -x - \frac{36}{m+6} + 2$$

6. Una recta s con coeficiente angular $k = -2$ pertenece al haz de rectas determinado por las rectas $r_1 : 2ax + 3y - 7 = 0$ y $r_2 : 2x - ay - 3 = 0$,

sabiendo que el centro de este haz es el punto $P(2a, 1)$, determine la ecuación de s.

Solución. Primero se calcula el valor de a:

Como el punto $P(2a, 1)$ es el centro del haz de rectas se tiene que éste satisface a las dos ecuaciones; reemplazando en la primera y segunda se tiene respectivamente:

$$\begin{cases} 4a^2 - 4 = 0 \\ 3a - 3 = 0 \end{cases}$$

por tanto $a = 1$

ahora se emplea la ecuación general del haz de rectas:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{4.8}$$

reemplazando las ecuaciones dadas y haciendo que $a = 1$, se tiene

$$2x + 3y - 7 + \lambda(2x - y - 3) = 0$$
$$(2 + 2\lambda)x + (3 - \lambda)y - 7 - 3\lambda = 0$$

el coeficiente angular de la recta buscada está dado por

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{2 + 2\lambda}{3 - \lambda} = -2$$

despejando λ se tiene

$$\lambda = 1$$

por tanto, la ecuación buscada es

$$4x + 2y - 10 = 0$$

7. Dado un triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(-3, 4)$ y $C(3 - 5)$. Determine el tercer vértice Z del triángulo $\triangle XYZ$ tales que $X(-3, 7)$, $Y(12, 4)$, de tal manera los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ sean semejantes. Son proporcionales los lados AB

y XY, BC y XZ, AC y YZ. Elabore el gráfico.

Solución. Recordando que ángulos formados por rectas paralelas y por rectas perpendiculares son congruentes. Se determina los coeficientes angulares de los lados AC y BC.

a) Coeficiente angular AC

$$k_{AC} = -8$$

b) Coeficiente angular BC

$$k_{BC} = -\frac{3}{2}$$

Ahora buscamos las ecuaciones de las rectas paralelas a los lados AC y BC que pasan por los puntos X e Y.

a) Paralela a AC por X

$$y - 7 = -8(x + 3)$$

$$y = -8x - 17$$

b) Paralela a BC por Y

$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 12)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 22$$

c) Paralela a AC por Y

$$y - 4 = -8(x - 12)$$

$$y = -8x + 100$$

d) Paralela a BC por X

$$y - 7 = -\frac{3}{2}(x + 3)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

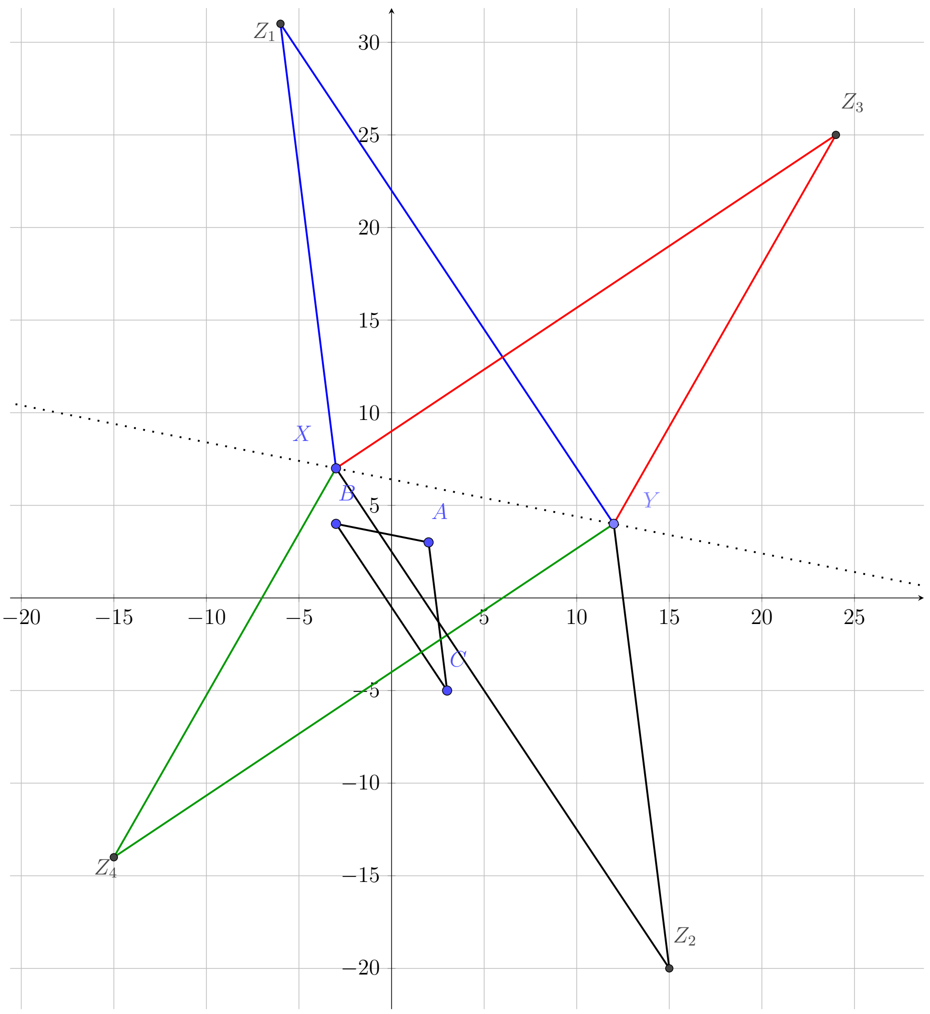


Figura 4.27: Triángulos semejantes

Ahora intersecamos las rectas anteriores

a) Intersección de la recta paralela a AC por X y la recta paralela a BC por Y

$$-8x - 17 = -\frac{3}{2}x + 22$$

luego $x = -6$ y $y = 31$, Por tanto, $Z_1(-6, 31)$

b) Intersección de la recta paralela a AC por Y y la recta paralela a BC por Z

$$-8x + 100 = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

luego $x = 15$ y $y = 20$. Por tanto, $Z_2(15, -20)$

Ahora se busca los triángulos simétricos de $\triangle XYZ$, hasta ahora encontrados, respecto al eje XY, pues estos también son semejantes al triángulo $\triangle ABC$.

Recordando que los puntos simétricos respecto al eje forman un segmento perpendicular al eje, quien lo corta en su punto medio se tiene que:

a) El simétrico de $Z_2(15,-20)$ está sobre la recta que pasa por$Z_2(15,-20)$ y es perpendicular al eje XY,

la pendiente de la recta XY es

$$k_{XY} = -\frac{1}{5}$$

la ecuación de la recta XY es

$$y - 7 = -\frac{1}{5}(x+3)$$

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{32}{5}$$

luego el simétrico de Z_2 está sobre la recta

$$y + 20 = 5(x - 15)$$

es decir sobre la recta

$$y = 5x - 95$$

llamando Z_3 al simétrico de Z_2 se tiene que el segmento Z_2Z_3 interseca al eje XY en el punto medio, por tanto el punto medio está dado por

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{32}{5} \\ y = 5x - 95 \end{cases}$$

la solución es $M(\frac{39}{2}, \frac{5}{2})$

empleando la fórmula de punto medio se tiene que

$$x_M = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$2x_M - x_2 = x_3$$

$$x_3 = 39 - 15 = 24$$

y

$$y_M = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$2y_M - y_2 = y_3$$

$$y_3 = 5 + 20 = 25$$

luego

$$Z_3(24, 25)$$

b) El simétrico de $Z_1(-6, 31)$ está sobre la recta que pasa por $Z_1(-6, 31)$ y es perpendicular al eje XY,

la pendiente de la recta XY es

$$k_{XY} = -\frac{1}{5}$$

la ecuación de la recta XY es

$$y - 7 = -\frac{1}{5}(x + 3)$$

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{32}{5}$$

luego el simétrico de Z_1 está sobre la recta

$$y - 31 = 5(x + 6)$$

es decir sobre la recta

$$y = 5x + 61$$

llamando Z_4 al simétrico de Z_1 se tiene que el segmento Z_1Z_4 interseca al eje XY en el punto medio, por tanto el punto medio está dado por

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{32}{5} \\ y = 5x + 61 \end{cases}$$

la solución es $M(-\frac{21}{2}, \frac{17}{2})$

empleando la fórmula de punto medio se tiene que

$$x_M = \frac{x_1 + x_4}{2}$$

$$2x_M - x_1 = x_4$$

$$x_4 = -21 + 6 = -15$$

y

$$y_M = \frac{y_1 + y_4}{2}$$

$$2y_M - y_1 = y_4$$

$$y_4 = 17 - 31 = -14$$

luego

$$Z_4(-15, -14)$$

4.9 Ejercicios propuestos

1. Determine el coeficiente angular de la recta cuyo ángulo de inclinación es $\alpha = 125^o$.

2. Determine la ecuación de la recta cuyo coeficiente angular es $k = -\frac{2}{3}$ e interseca al eje Oy en el punto $A(0, -5)$.

3. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3, 9)$ y por el punto medio del segmento PQ, donde $P(-6, 2)$ y $Q(4, -10)$.

4. Determine la ecuación de la recta que pasa por $M(-2,2)$ y es perpendicular a la recta que contiene a los puntos $A(-5,7)$ y $B(8,-1)$.

5. Transforme a ecuación normal y ecuación segmentaria la ecuación de la recta $-4x+5y-7=0$

6. Determine la ecuación normal de la recta tal que la distancia del origen a ella 3 y además es perpendicular a la recta $2x-y=0$.

7. Interprete el signo de la desviación del punto $M(-6,7)$ a la recta que pasa por los puntos $A(8,5)$ y $B(3,-6)$.

8. Determine la ecuación de la recta que pertenece al haz determinado por las rectas
$$\begin{cases} 5x+2y-3=0 \\ -4x+y+2=0 \end{cases}$$
y es paralela a la recta de ecuación $-3x+y-10=0$.

Capítulo V

5. Líneas de segundo orden

En este capítulo se aborda el estudio de las líneas de segundo orden como la elipse, parábola e hipérbola; la circunferencia se estudia como un caso particular de elipse; además, se estudia la transformación de ecuación general a ecuación canónica de líneas de segundo orden.

5.1 La elipse

Definición 5.1. Se denomina *elipse* al lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, y representados por F_1 y F_2, es igual a una constante. Esta constante debe ser mayor a la distancia entre los focos y se representa mediante $2a$.

Notas.

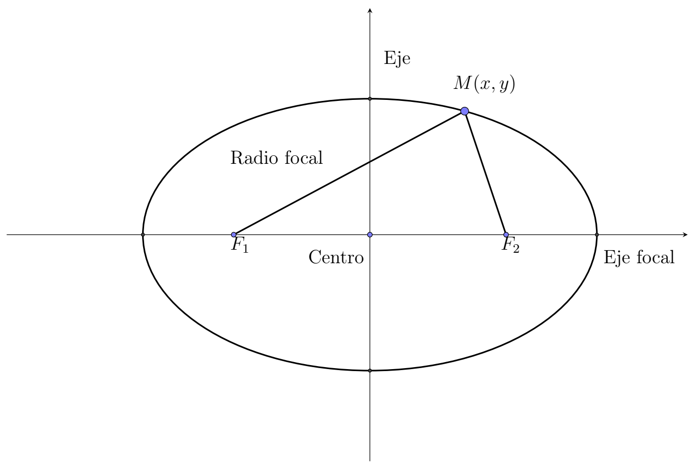


Figura 5.1: Elementos de la elipse

1. Si M es un punto de la elipse, entonces las longitudes de los segmentos $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ se denominan *radios focales*.

2. El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se denomina *centro* de la elipse.

3. Se representa por c la longitud del centro de la elipse a cada uno de los focos; así la distancia entre los focos es $2c$. Por tanto $2a > 2c$, es decir $a > c$.

4. La recta que une los focos de la elipse se denomina *eje focal de la elipse.*

5. La recta perpendicular al eje focal de la elipse se denomina simplemente eje.

Proposición 5.1. *La ecuación de la elipse de centro el origen y eje focal horizontal, es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.1}$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$

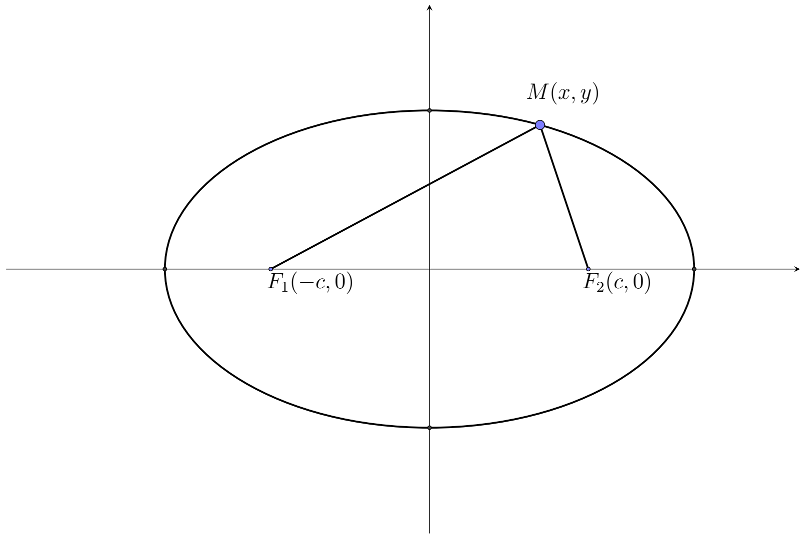


Figura 5.2: Elipse de centro el origen

Demostración. Sean los focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, además sea $M(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse, se tiene

1)	$\lvert F_1M\rvert + \lvert F_2M\rvert = 2a$	definición de elipse
2)	$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$	definición de longitud de segmentos
3)	$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$	reducción de 2)
4)	$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	transposición de términos
5)	$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$	elevando al cuadrado
6)	$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	reduciendo términos
7)	$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$	elevando al cuadrado

8)	$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$	reduciendo términos
9)	$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2$	transponiendo términos
10)	$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$	factorizando
11)	$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$	reemplazando $b^2 = a^2 - c^2$
12)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	dividiendo para a^2b^2

□

5.1.1 Análisis de la ecuación de la elipse

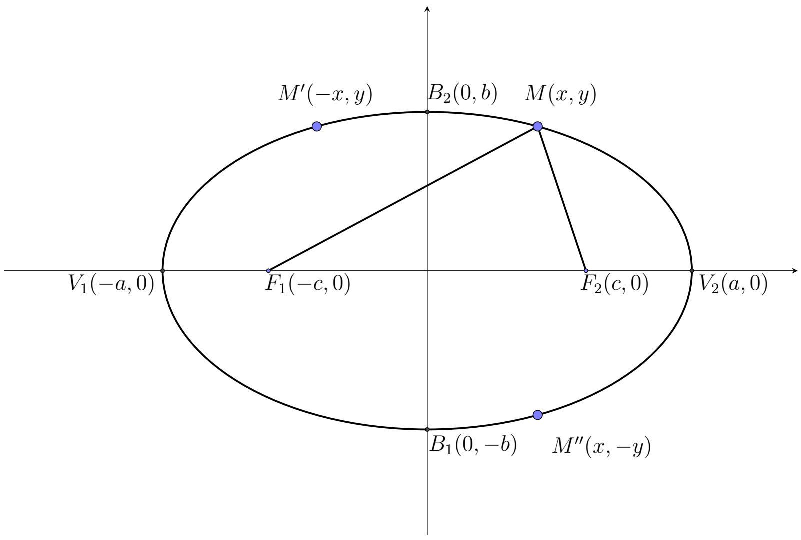


Figura 5.3: Elipse de centro el origen

De acuerdo a la ecuación de la elipse, se puede concluir que:

1. Intersecciones con el eje Oy. Si $x = 0$, entonces $y = \pm b$; es decir, la elipse corta al eje Oy en los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ (Figura 5.3).

2. Intersecciones con el eje Ox. Si $y = 0$, entonces $x = \pm a$; es decir, la elipse corta al eje Ox en los puntos $(-a, 0)$ y (a,0). Estos puntos se denominan *vértices* de la elipse y están alineados con los focos; además, se simbolizan mediante V_1 y V_2 (Figura 5.3).

3. La elipse es simétrica respecto a los ejes; es decir, si el punto $M(x, y)$ pertenece a la elipse, también pertenece a ella los puntos $M'(x, -y)$ y $M''(-x, y)$. Por lo que basta estudiar la elipse en el primer cuadrante (Figura 5.3).

4. Si se despeja y de la ecuación 5.1 se obtiene

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{5.2}$$

   y es un número real siempre y cuando $-a \leq x \leq a$; es decir, los puntos de la elipse de centro el origen son todos aquellos cuya abscisa está comprendida entre los valores $-a$ y a. Análogamente, despejando x se concluye que $-b \leq y \leq b$.

5. A partir de la ecuación 5.2 se concluye que, a medida que x toma valores cercanos a los valores de a o $-a$, el valor de y toma valores cercanos a 0.

Notas.

1. La longitud del segmento $\overline{V_1V_2}$ se denomina *semieje mayor* y es igual a $2a$.

2. Los puntos $B_1(0, -b)$ y $B_2(0, b)$ son también llamados vértices, y la longitud del segmento $\overline{B_1B_2}$ se denomina *semieje menor* y es igual a $2b$.

3. Si $a = b$, la ecuación 5.1 representa una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio igual al valor de a.

4. Si los focos de la elipse están alineados verticalmente tal que $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$, puede seguirse los mismos pasos que en la demostración de la proposición 5.1 con lo que se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{5.3}$$

5.1.2 Ecuación de la elipse de centro diferente al origen

Proposición 5.2. *La elipse de centro $C(h, k)$ y eje focal horizontal (Figura 5.4) está dada por la ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{5.4}$$

donde $2a$ es la longitud del semieje mayor y $2b$ del semieje menor.

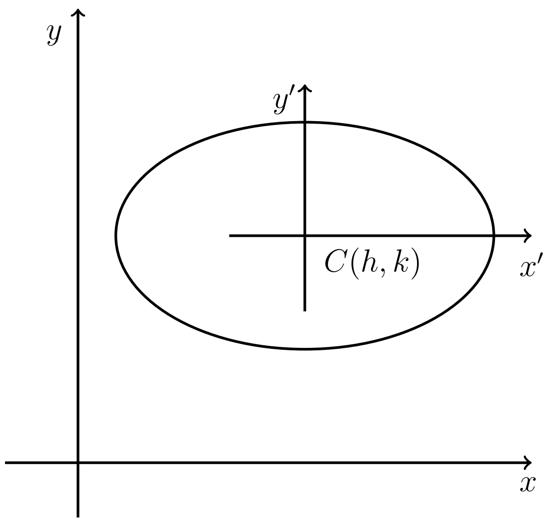


Figura 5.4: Elipse de centro $C(h, k)$ diferente al origen y eje focal paralelo al eje Ox

Demostración. Para la demostración puede considerarse un sistema de referencia alterno de ejes Cx' y Cy' (Figura 5.4) en el que, el centro de la elipse coincide con el origen del sistema. Según este sistema la elipse tiene como ecuación

$$\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{b^2} = 1$$

por tanto, al cambiar al sistema de ejes Ox y Oy, recordando las fórmulas de cambio de sistema $x‘ = x - h$ y $y' = y - k$, se tiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

□

Proposición 5.3. *La ecuación de la elipse de centro el punto $C(h,k)$ y de eje focal paralelo al eje Oy está dada por*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \tag{5.5}$$

donde $2a$ es la longitud del semieje mayor y $2b$ del semieje menor.

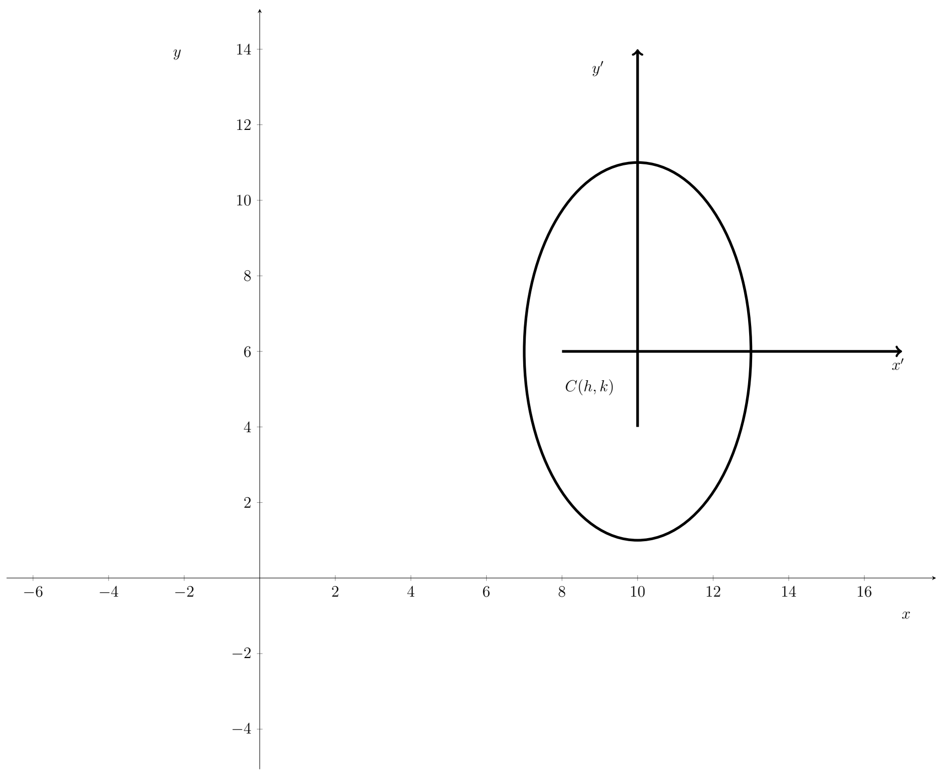


Figura 5.5: Elipse de centro $C(h,k)$ diferente al origen y eje focal paralelo al eje Oy

La demostración de la proposición 5.3 queda como ejercicio.

5.1.3 Excentricidad de la elipse

Definición 5.2. Se denomina *excentricidad* de la elipse a la razón de la distancia entre sus focos y la longitud de su semieje mayor, es decir

$$\epsilon=\frac{c}{a} \tag{5.6}$$

Notas.

1. Debido a que $c < a$, se tiene que $\epsilon < 1$.

2. Como $c^2 = a^2 - b^2$ se tiene que $\epsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$; por tanto,

   $\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ y $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\epsilon^2}$.

   De acuerdo a la primera ecuación, si $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ se aproxima a 1, entonces ϵ se aproxima a 0; eso quiere decir que cuando b se aproxima a a, la excentricidad se aproxima a 0, en otras palabras, si la elipse tiende a ser circunferencia entonces su excentricidad tiende a 0.

   De acuerdo a la segunda ecuación, si la excentricidad tiende a 1, entonces la cantidad $\frac{b}{a}$ tiende a 0; en otras palabras, cuando la excentricidad tiende a 1, la elipse es más alargada.

5.1.4 Radios focales de la elipse

Proposición 5.4. *Los radios focales de una elipse están dados por*

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon x \\ r_2 &= a - \epsilon x \end{aligned} \tag{5.7}$$

Demostración. Dado un punto $M(x, y)$ de la elipse se tiene que los radios focales r_1 y r_2 están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned} \tag{5.8}$$

1)	$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x$	expresión 6) de la demostración de la proposición 5.1 ($a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$)
2)	$r_2 = a - \epsilon x$	de la segunda ecuación de (5.53)
3)	$r_1 = a + \epsilon x$	de 2) y $r_1 + r_2 = 2a$

□

5.1.5 Ecuaciones paramétricas de la elipse

Proposición 5.5. *Dada la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sus ecuaciones paramétricas están dadas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \tag{5.9}$$

Demostración. Dadas las circunferencias de centro el origen de coordenadas y de radios a y b ($a > b$), dada una semirecta l que parte del origen de coordenadas, l forma un ángulo t con el eje Ox; además, interseca a las circunferencias mayor y menor en los puntos P y Q respectivamente (Figura 5.6).

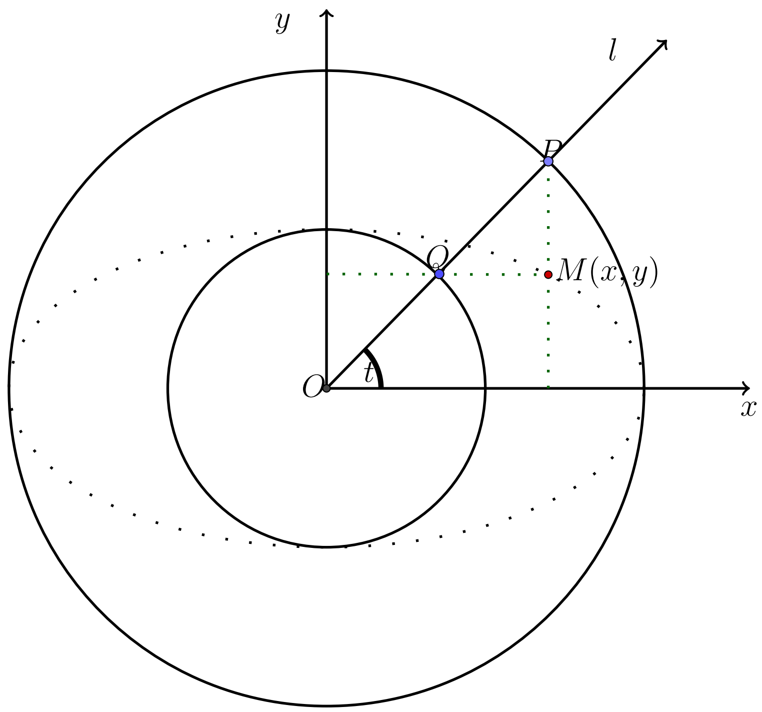


Figura 5.6: Gráfico de elipse a partir de los valores a y b

Sea $M(x, y)$ la intersección entre la recta perpendicular al eje Ox que pasa por P y la perpendicular al eje Oy que pasa por Q. Se cumple

1)	$x = a\cos t$	razón trigonométrica del ángulo t y $\lvert OP\rvert = a$
2)	$y = b\,\mathrm{sen}\, t$	razón trigonométrica del ángulo t y $\lvert OQ\rvert = b$

estas coordenadas satisfacen la ecuación de la elipse 5.1, en efecto,

$$\begin{aligned}\frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\,\mathrm{sen}\, t)^2}{b^2} =& 1\\ 1 =& 1\end{aligned}$$

por tanto, las ecuaciones 5.54 representan las ecuaciones paramétricas de la elipse. □

Nota. La construcción de un punto de la elipse dada en la demostración anterior, puede repetirse de tal forma que se puede obtener más puntos de la misma.

5.1.6 La elipse como proyección de una circunferencia sobre un plano

Proposición 5.6. *La proyección de una circunferencia sobre un plano es una elipse.*

Demostración. Sea una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio a, sobre un plano β, sea el plano α intersecante con el plano β, sobre el que se proyecta la circunferencia $\mathcal{C}$, sea ϕ el ángulo entre los planos, se puede suponer que los planos α y β se intersecan en el eje Ox, sea P un punto de la circunferencia y $M(x, y)$ su proyección sobre el plano α, sea Q la proyección del punto P, sobre el eje Ox (Figura 5.7). Se desea demostrar que las coordenadas de M satisfacen la ecuación de una elipse.

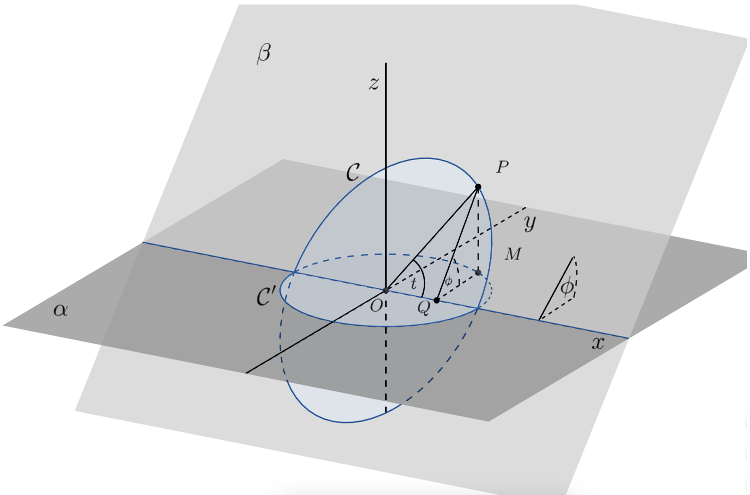


Figura 5.7: Proyección de una circunferencia sobre un plano

1)	$\triangle PMQ$ es rectángulo	por construcción
2)	$\triangle OPQ$ es rectángulo	por construcción
3)	$x = OQ = a\cos t$	relaciones trigonométricas en el $\triangle OPQ$
4)	$PQ = a\,\mathrm{sen}\,t$	relaciones trigonométricas en el $\triangle OPQ$
5)	$y = MQ = PQ\cos\phi =$	relaciones trigonométricas en el $\triangle PQM$ y 4)
	$= a\,\mathrm{sen}\,t\cos\phi$	
6)	$y = b\,\mathrm{sen}\,t$	usando $b = a\cos\phi$

Las ecuaciones 3) y 6) corresponde a las ecuaciones paramétricas de la elipse. □

5.1.7 La elipse como sección transversal de un cilindro circular

Proposición 5.7. *Toda sección de un cilindro circular por un plano no paralelo a su eje es una elipse.*

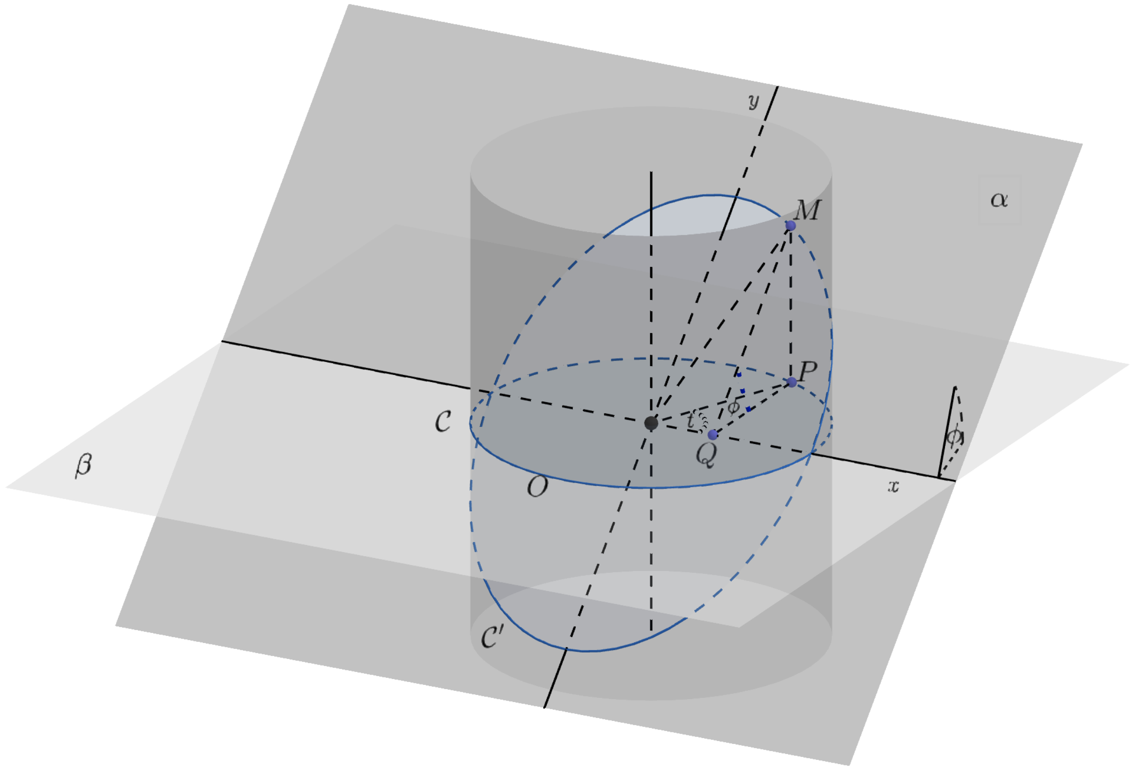


Figura 5.8: Elipse como sección transversal de un cilindro circular

Demostración. Dado un cilindro circular y un plano secante α (Figura 5.9), sea $\mathcal{C}'$ la línea intersección de estos y O el punto intersección del eje del cilindro con el plano α, sea β el plano perpendicular al eje del cilindro que pasa por O, sea $\mathcal{C}$ la circunferencia formada por la intersección entre el cilindro y el plano β, sea b el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$, sea ϕ el ángulo agudo formado por los planos α y β. Puede elegirse los ejes coordenados en el plano α de la siguiente manera, el eje Ox coincide con la intersección de los planos α y β y el eje Oy la perpendicular a Ox por O en el plano α. Sea $M(x, y)$ un punto cualesquiera de la línea $\mathcal{C}'$, se quiere probar que este punto satisface la ecuación de una elipse. Sea P la proyección de M sobre el plano β y Q su proyección sobre el eje Ox, sea t en ángulo formado por OP y el eje Ox, se tiene

1) $x = OQ = OP\cos t = b\cos t$	relaciones trigonométricas en el triángulo $\triangle OPQ$
2) $y = MQ = \frac{PQ}{\cos\phi} = \frac{b\operatorname{sen}\ t}{\cos\phi}$	relaciones trigonométricas en el triángulo $\triangle MPQ$
3) $y = a\operatorname{sen} t$	haciendo $a = \frac{b}{\cos\phi}$

de 1) y 2) se deduce que la sección transversal de un cilindro circular es una elipse.

□

Nota. En la demostración anterior, se ha usado empleado el hecho de que las ecuaciones paramétricas de una elipse con focos alineados en el eje Oy son

$$\begin{cases} x = b\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \end{cases} \tag{5.10}$$

Ejemplo. Un cilindro de radio 5, es intersecado por dos planos, el primero horizontal y el segundo transversal, de modo que dichos planos se intersecan en un punto del eje del cilindro y forman un ángulo de 30^o. Deduzca la ecuación de la elipse cuando el sistema de referencia está localizado sobre el plano transversal y el origen coincide con la intersección de los planos y el eje del cilindro, considere como eje Ox la recta intersección de los dos planos. Calcule la excentricidad de esta elipse.

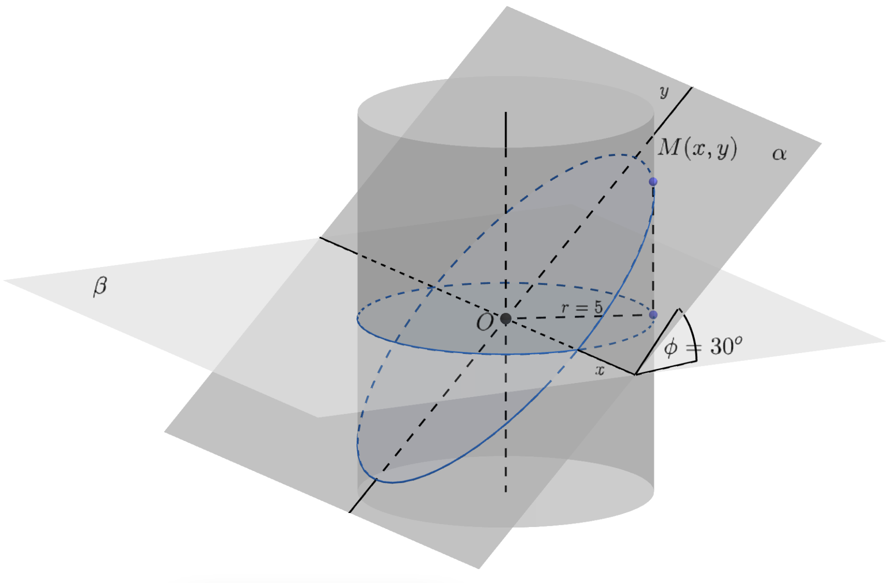


Figura 5.9: Elipse como sección transversal de un cilindro circular

Solución. Las ecuaciones paramétricas de la elipse con eje focal coincidente el eje Oy están dadas por

$$\begin{aligned} x =& b\cos t \\ y =& a\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

donde b corresponde al radio del cilindro, $a = \frac{b}{\cos\phi}$ y $\phi = 30^o$. Por tanto,

$$a = \frac{b}{\cos\phi} = \frac{5}{\cos 30^o} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de esta elipse son

$$\begin{aligned} x =& 5\cos t \\ y =& \frac{10\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

En cuanto a la excentricidad se tiene que

$$\epsilon = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{longitud del eje mayor}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

donde $c^2 = a^2 - b^2$.

5.2 La hipérbola

Definición 5.3. Se denomina *hipérbola* al lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que, el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, *llamados focos*, y representados por F_1 y F_2, es igual a una constante. Esta constante debe ser menor a la distancia entre los focos y se representa mediante $2a$.

Notas.

1. Si M es un punto de la hipérbola, entonces las longitudes de los segmentos $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ se denominan *radios focales* (Figura 5.10).

2. El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se denomina *centro* de la hipérbola (Figura 5.10).

3. Se representa por c la longitud del centro de la hipérbola a cada uno de los focos; así la distancia entre los focos es $2c$. Por tanto, $2c > 2a$; es decir, $c > a$.

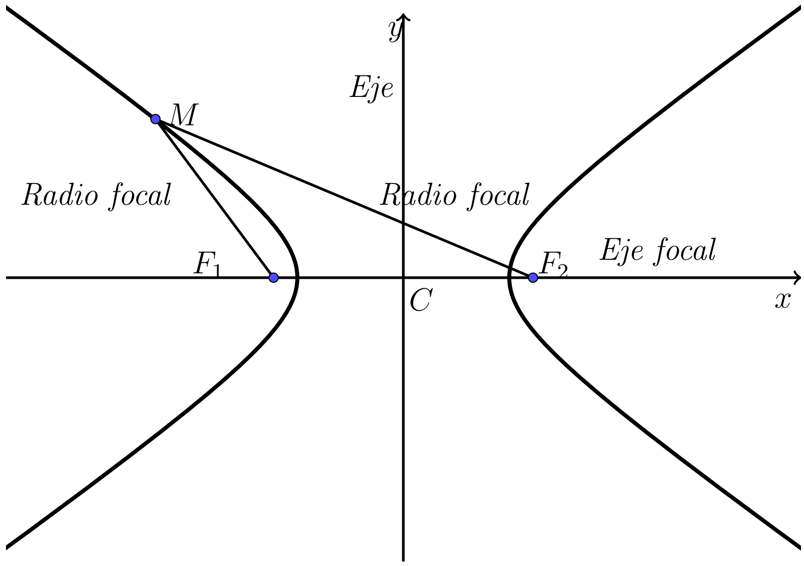


Figura 5.10: Definición de la hipérbola

4. La recta que une los focos de la hipérbola se denomina *eje focal de la hipérbola* (Figura 5.10).

5. La recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la hipérbola se denomina *eje conjugado* o simplemente *eje* (Figura 5.10).

Proposición 5.8. *La ecuación de la hipérbola de centro el origen y eje focal horizontal, es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.11}$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$

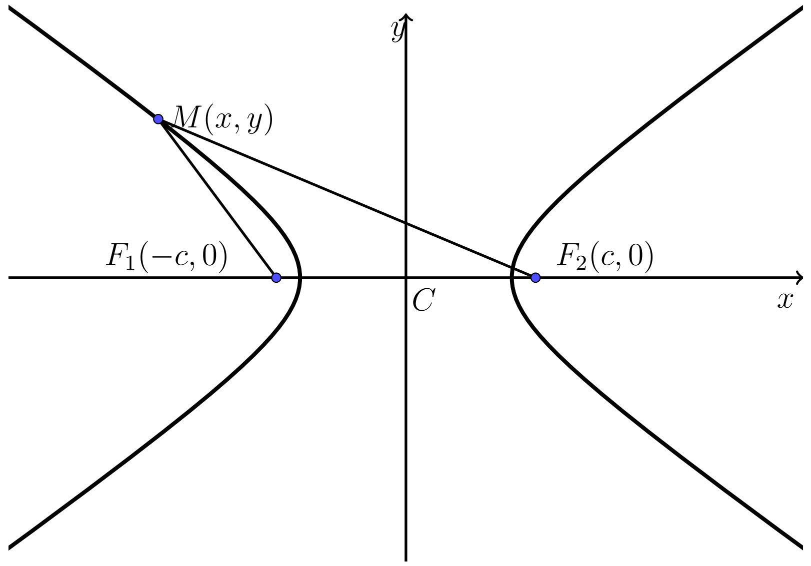


Figura 5.11: Definición de la hipérbola

Demostración. Sean los focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$; además, sea $M(x, y)$ un punto cualesquiera de la hipérbola (Figura 5.11), se tiene

1)	$\|F_1M - F_2M\| = 2a$	definición de hipérbola
2)	$F_1M - F_2M = \pm 2a$	definición valor absoluto
3)	$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$	reemplazo
4)	$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$	transposición de términos
5)	$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm$ $\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$	elevando al cuadrado
6)	$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	reduciendo términos
7)	$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$	dividiendo para 4
8)	$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$	elevando al cuadrado
9)	$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$	agrupando términos
10)	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	donde $b^2 = c^2 - a^2$
11)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	dividiendo para a^2b^2

□

5.2.1 Análisis de la ecuación de la hipérbola

De acuerdo a la ecuación de la hipérbola, se concluye que:

1. La hipérbola de ecuación 5.11, al igual que la elipse es simétrica respecto a los ejes coordenados; por tanto, su estudio puede limitarse al primer cuadrante coordenado.

2. Despejando de la ecuación 5.11 la variable y, se tiene

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{5.12}$$

pero como se indicó en el numeral anterior, es suficiente el estudio en el primer cuadrante por lo que se estudia el caso en el que $y \geq 0$ y $x \geq 0$; por tanto,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{5.13}$$

sin embargo, para que la la raíz cuadrada sea un número real se debe cumplir que $x \geq a$ o $x \leq -a$.

3. Se cumple que, si x tiende al infinito, entonces y también tiende al infinito; mientras que, si x tiende al valor a, entonces y tiende a 0.

4. Siguiendo con el análisis en primer cuadrante, con $x \geq a$, considérese la ecuación 5.13 y la ecuación de la recta

$$y = \frac{b}{a}x \tag{5.14}$$

cuyo coeficiente angular es $k = \frac{b}{a}$ (Figura 5.12) y está representada por la recta OB; se va a demostrar que cuando el punto M se aproxima al infinito por la hipérbola, también se aproxima indefinidamente a la recta $y = \frac{b}{a}x$.

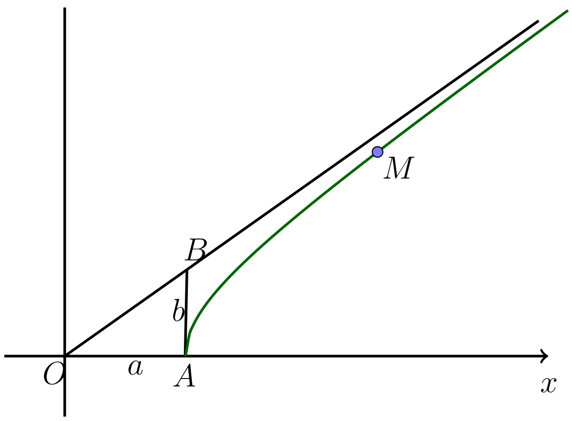


Figura 5.12: Hipérbola en el primer cuadrante

En efecto, sea $x \geq a$, considérese los puntos $M(x, y)$ y $N(x, Y)$ (Figura 5.13) de la hipérbola y la recta respectivamente; por tanto, se satisfacen las igualdades

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

y

$$Y = \frac{b}{a}x$$

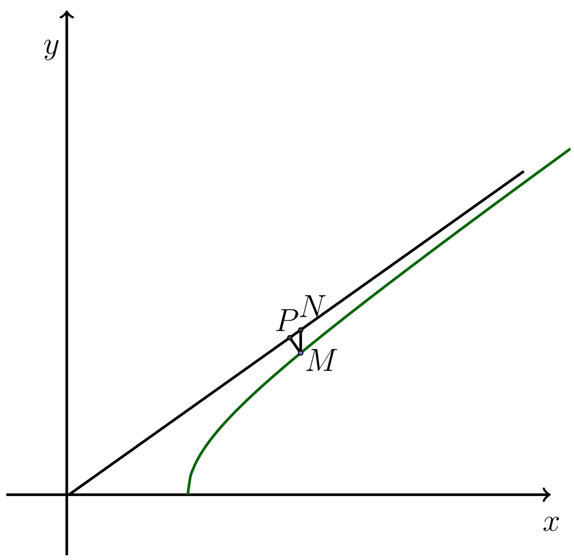


Figura 5.13: Hipérbola en el primer cuadrante, distancia a la recta $y = \frac{b}{a}x$

Además, los puntos M y N tienen la misma abscisa; por tanto, la recta que une estos puntos es perpendicular al eje Ox. Ahora se va a calcular la longitud del segmento $\overline{MN}$.

Por un lado, se tiene que

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y$$

por tanto, $Y > y$ y $MN = Y - y$.

Por otro lado,

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{(x + \sqrt{x^2 - a^2})}$$

es decir,

$$Y - y = \frac{ab}{(x + \sqrt{x^2 - a^2})}$$

Por tanto, si x tiende al infinito, entonces $Y - y$ tiende a 0; es decir, MN tiende a 0.

Ahora se calcula la distancia de M a la recta $y = \frac{b}{a}x$, para ello se traza la perpendicular por M a la recta. Sea P el pie de esta perpendicular, entonces se forma el triángulo rectángulo $\triangle PMN$, se tiene que $MP < MN$ (ya que MN es la longitud de la hipotenusa del triángulo $\triangle PMN$); por tanto, si M tiende al infinito por parte de la hipérbola situada en el primer cuadrante, entonces la distancia del punto M a la recta $y = \frac{b}{a}x$ tiende a 0.

5. Debido al comportamiento indicado en el numeral anterior se dice que la hipeŕbola *se aproxima asintóticamente* a la recta $y = \frac{b}{a}x$; es decir, que la recta $y = \frac{b}{a}x$ es asíntota del gráfico de la función $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (y de toda la hipérbola).

6. Si ϕ es el ángulo de inclinación de la recta $y = \frac{b}{a}x$, se tiene que $MP = MN\cos\phi$; es decir, que si MN tiende a cero de manera monótona (decrece constantemente), entonces MP tiende a 0 de manera monótona. En otras palabras, cualquiera sea la ubicación del punto M en la hipérbola en el primer cuadrante, si el punto se

mueve "hacia la derecha" por la hipérbola, su distancia a la asíntota disminuye. Esto último se dice del siguiente modo: *la aproximación de la hipérbola a su asíntota es monótona.*

7. Hasta aquí ya se tiene el gráfico de la hipérbola en el primer cuadrante, como ya se vió, es simétrico respecto a los ejes; por tanto, el gráfico de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ está dado en la Figura 5.14.

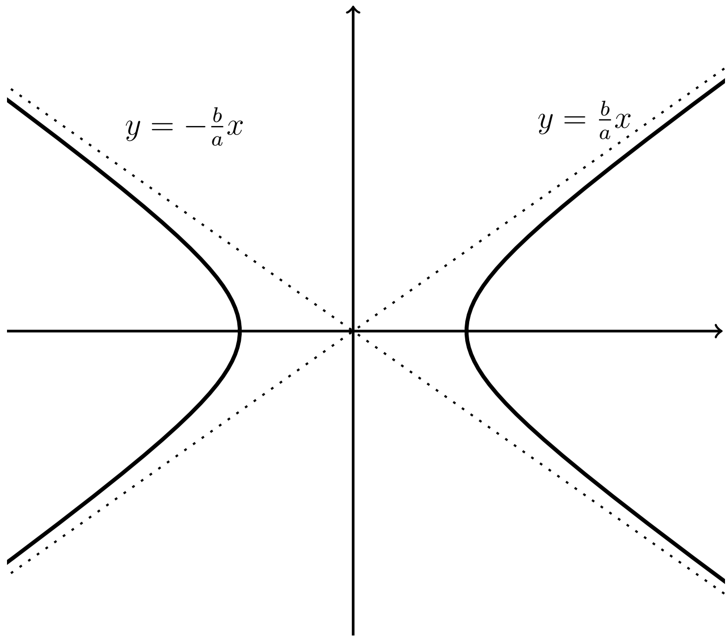


Figura 5.14: Hipérbola

8. Por la simetría del gráfico de la hipérbola, se tiene que esta posee dos asíntotas, estas son $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ (Figura 5.14).

9. La intersección del gráfico de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con el eje Ox es en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, que son denominados *vértices de la hipérbola* (Figura 5.15).

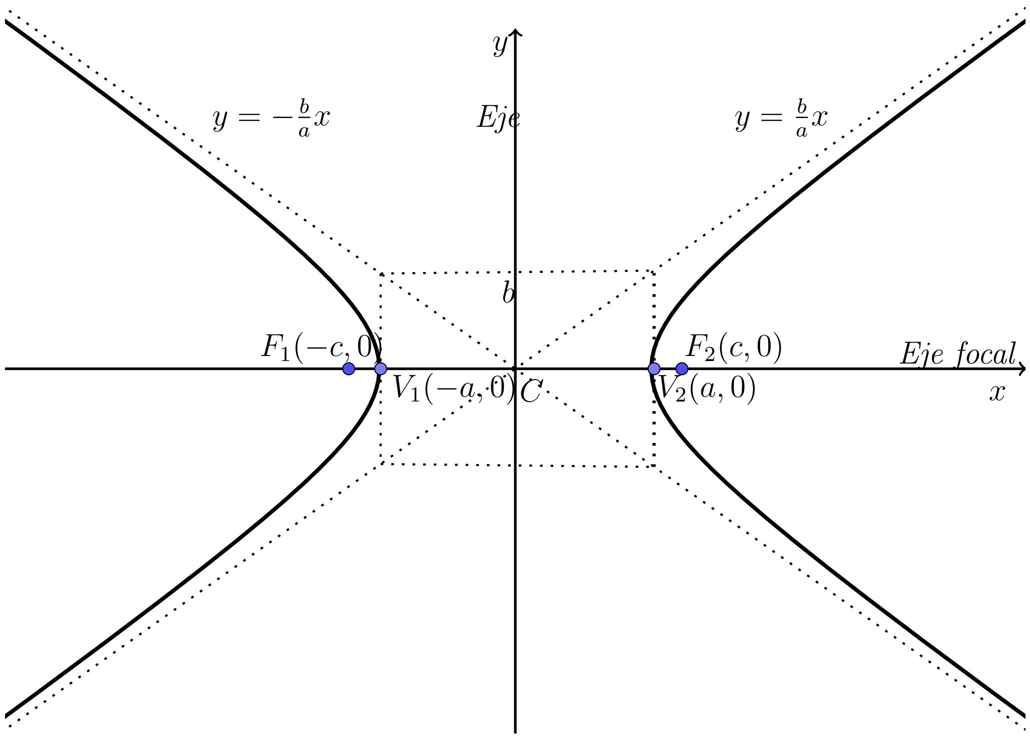


Figura 5.15: Elementos de la hipérbola

10. Para graficar una hipérbola de ecuación 5.11, es suficiente trazar el rectángulo de lados $2a$ y $2b$ (llamado *rectángulo principal*), luego trazar las diagonales de este rectángulo que no son otra cosa que las asíntotas de la hipérbola, estas asíntotas se intersecan en el centro de la hipérbola, luego trazar los vértices de coordenadas $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$. Finalmente, a partir de los vértices se traza la línea de tal forma que se va aproximando a las asíntotas (Figura 5.15).

Nota. Si los focos de la hipérbola están alineados verticalmente (Figura 5.16), tal que $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$, puede seguirse los mismos pasos que en la demostración de la proposición 5.8; con lo que se obtiene la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{5.15}$$

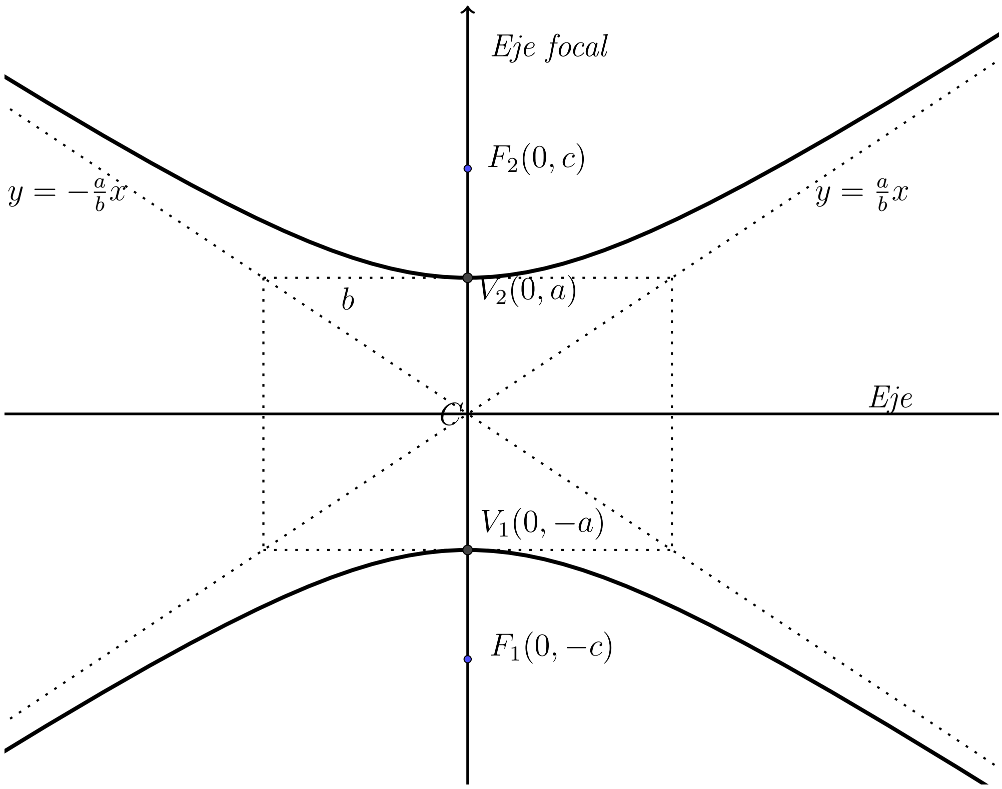


Figura 5.16: Hipérbola con eje focal vertical y centro el origen de coordenadas

5.2.2 Ecuación de la hipérbola de centro diferente al origen

Proposición 5.9. *La ecuación de una hipérbola de centro diferente al origen $C(h, k)$, de eje focal paralelo al eje Ox es*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{5.16}$$

donde $2a$ es la distancia entre los vértices, $2c$ es la distancia entre los focos y $b^2 = c^2 - a^2$.

La demostración de la proposición 5.9 se deja como ejercicio.

Proposición 5.10. *La ecuación de una hipérbola de centro diferente al origen*

$C(h,k)$, de eje focal paralelo al eje Oy es

$$-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \tag{5.17}$$

donde $2a$ es la distancia entre los vértices, $2c$ es la distancia entre los focos y $b^2=c^2-a^2$.

La demostración de la proposición 5.10 se deja como ejercicio.

Notas.

1. Si en la ecuación de la hipérbola se tiene que $a=b$, entonces la hipérbola se dice equilátera.

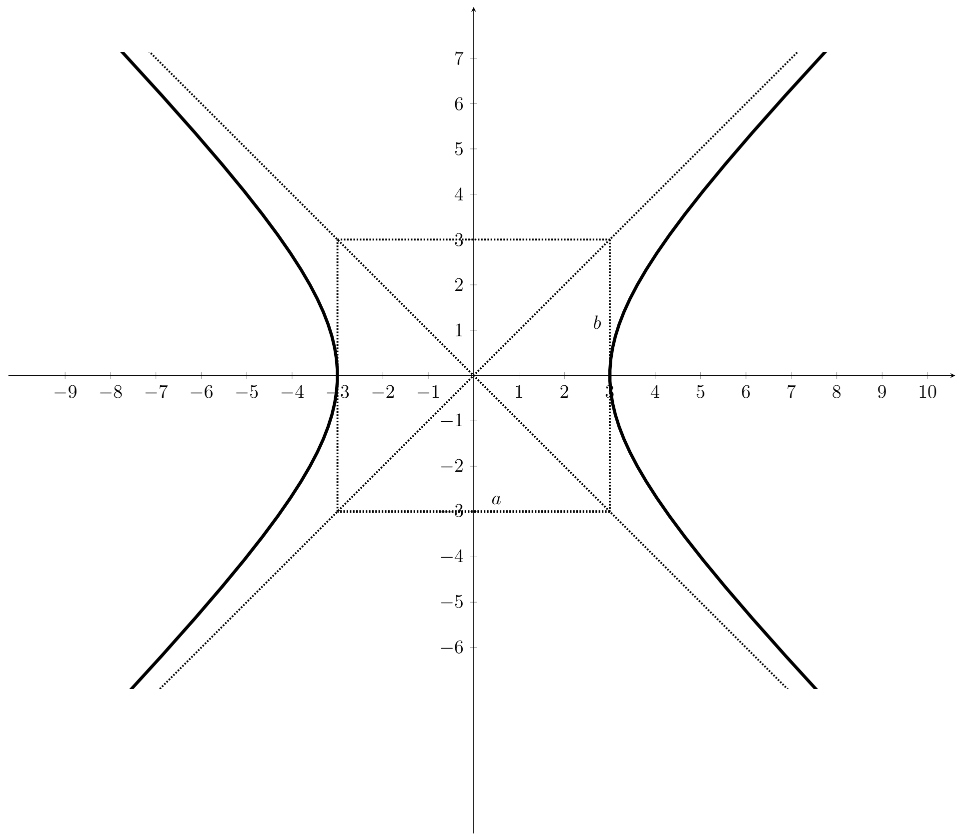


Figura 5.17: Hipérbola equilátera

2. Las hipérbolas de ecuaciones $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y $-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ se dicen conjugadas; además, tienen las mismas asíntotas (demostrar).

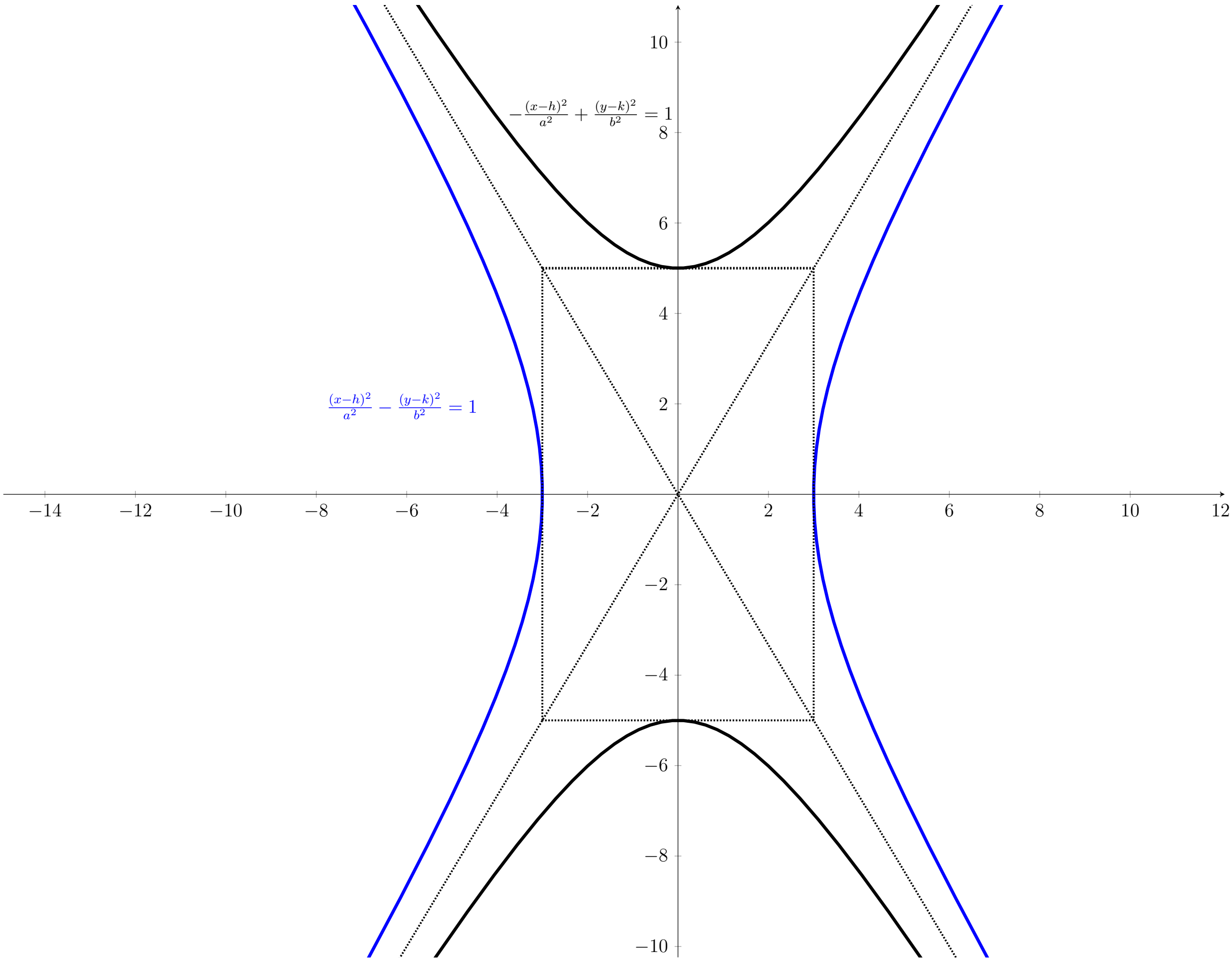


Figura 5.18: Hipérbols conjugadas

5.2.3 Excentricidad de la hipérbola

Definición 5.4. Se denomina *excentricidad de una hipérbola* a la razón entre la distancia entre sus focos y la distancia entre los vértices; es decir, la excentricidad es

$$\epsilon = \frac{c}{a}$$

Notas.

1. Para la hipérbola se tiene que $c > a$; por tanto, $\epsilon > 1$. Es decir, la excentricidad de la hipérbola es mayor que la unidad.

2. En la hipérbola se cumple la relación $c^2 = a^2 + b^2$; por tanto,

$$\epsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

entonces

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{5.18}$$

además,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\epsilon^2 - 1} \tag{5.19}$$

De acuerdo a las ecuaciones 5.18 y 5.19, la excentricidad de la hipérbola está relacionada con la forma del rectángulo principal, y, por tanto, de la forma de la hipérbola. Así:

a) Si $b < a$ el rectángulo es más alargado en la dirección de los vértices, y en la ecuación 5.18, ϵ estará más cercano a 1.

b) Si ϵ se acerca a 1 en la ecuación 5.19, entonces $\frac{b}{a}$ se aproxima a 0; por tanto, el rectángulo principal es más alargado en la dirección de los vértices.

5.2.4 Radios focales de la hipérbola

Definición 5.5. Sea M un punto de la hipérbola y F_1 y F_2 sus focos; se denominan *radios focales* a las longitudes F_1M y F_2M, representadas por r_1 y r_2 respectivamente.

Notas.

1. De acuerdo a la definición los radios focales están dados por

$$\begin{aligned} r_1 =& \sqrt{(x+c)^2+y^2} \\ r_2 =& \sqrt{(x-c)^2+y^2} \end{aligned} \tag{5.20}$$

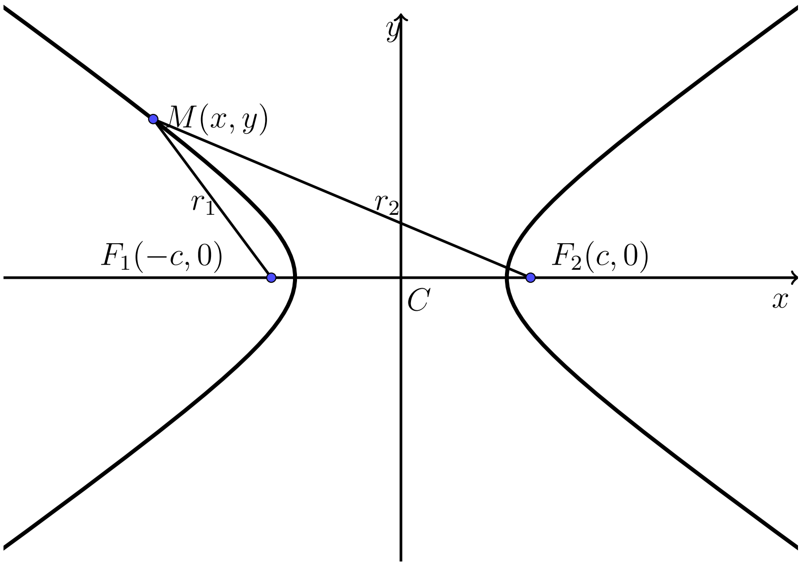


Figura 5.19: Radios focales

2. Tomando la ecuación 7) de la demostración de la proposición 5.8

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

que es equivalente a

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right)$$

el signo más indica que el punto M está ubicado en la rama derecha de la hipérbola. Como $\epsilon = \frac{c}{a}$

considerando la segunda igualdad de las ecuaciones 5.20, se tiene

$$r_2 = \pm(\epsilon x - a) \tag{5.21}$$

Recordando que $r_1 - r_2 = \pm 2a$ se tiene que, $r_1 = r_2 \pm 2a$; donde el signo más se refiere a los puntos de la rama derecha de la hipérbola. Entonces $r_1 = (\epsilon x + a)$. Por tanto

$$\begin{aligned} r_1 &= \epsilon x + a \\ r_2 &= \epsilon x - a \end{aligned} \tag{5.22}$$

para puntos de la rama derecha de la hipérbola y

$$\begin{aligned} r_1 &= -(\epsilon x + a) \\ r_2 &= -(\epsilon x - a) \end{aligned} \tag{5.23}$$

para puntos de la rama izquierda de la hipérbola.

5.2.5 Directrices de la elipse y de la hipérbola

Definición 5.6. Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a}{\epsilon} \\ x &= \frac{a}{\epsilon} \end{aligned} \tag{5.24}$$

se denominan *directrices de la elipse.*

Nota. Debido a que para la elipse se cumple que $\epsilon < 1$, entonces $\frac{a}{\epsilon} > a$; es decir, la directriz de ecuación $x = \frac{a}{\epsilon}$ está a la derecha del vértice derecho, mientras que la directriz de ecuación $x = -\frac{a}{\epsilon}$ está a la izquierda del vértice izquierdo (Figura 5.20).

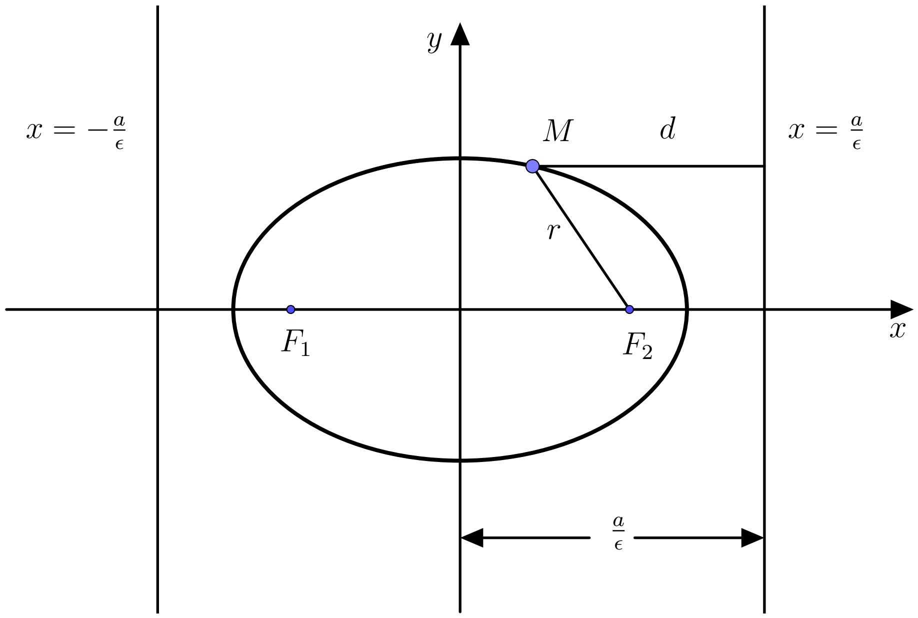


Figura 5.20: Directrices de la elipse

Definición 5.7. Dada la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a}{\epsilon} \\ x &= \frac{a}{\epsilon} \end{aligned} \tag{5.25}$$

se denominan *directrices de la hipérbola.*

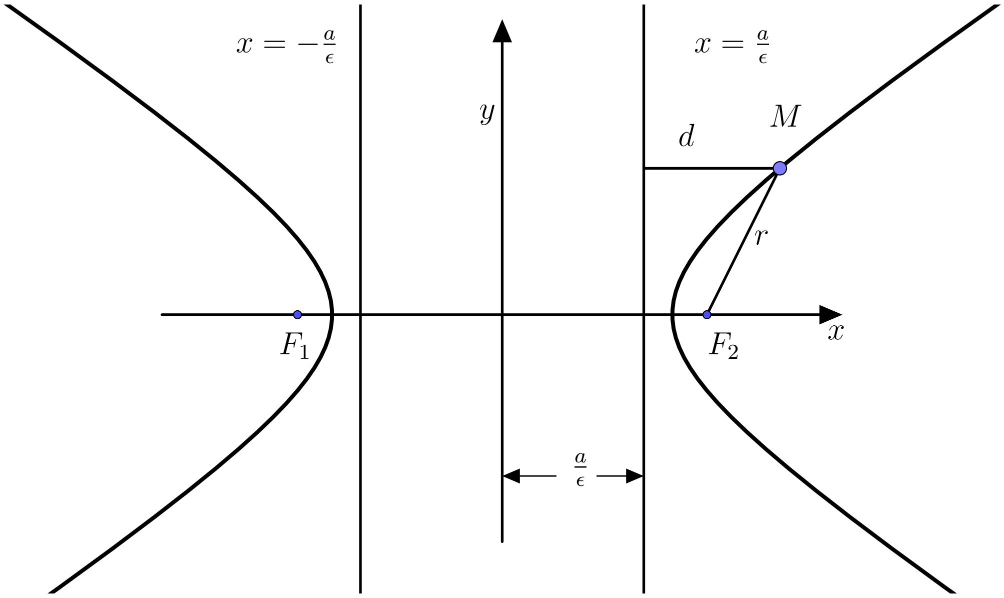


Figura 5.21: Directrices de la hipérbola

Nota. Debido a que para la hipérbola se cumple que $\epsilon > 1$, entonces $\frac{a}{\epsilon} < a$; es decir, la directriz de ecuación $x = \frac{a}{\epsilon}$ está entre el centro y el vértice derecho, mientras que la directriz de ecuación $x = -\frac{a}{\epsilon}$ está entre el centro y el vértice izquierdo (Figura 5.21).

Teorema 5.1. *Sea M un punto arbitrario de una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sea r la distancia del punto a uno de los focos y d la distancia del punto a la directriz correspondiente al foco, entonces se cumple*

$$\frac{r}{d} = \epsilon$$

Demostración. Se puede demostrar para el foco y directriz derechos (para los izquierdos, la demostración es similar). Sea $M(x, y)$ un punto de la elipse, se tiene

1)	$d = \frac{a}{\epsilon} - x$	ec. de la directriz y def. de distancia
2)	$r = a - \epsilon x$	segunda ecuación 5.52
3)	$\frac{r}{d} = \frac{a-\epsilon x}{\frac{a}{\epsilon}-x}$	reemplazando 1) y 2)
4)	$\frac{r}{d} = \epsilon$	reduciendo 3)

□

Teorema 5.2. *Sea M un punto arbitrario de una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sea r la distancia del punto a uno de los focos y d la distancia del punto a la directriz correspondiente al foco, entonces se cumple*

$$\frac{r}{d} = \epsilon$$

La demostración de este teorema queda como ejercicio.

Ejemplo. Determine todos los elementos (centro, focos, vértices, asíntotas, directrices, excentricidad y gráfico) de la hipérbola de ecuación

$$-\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Solución. A partir de esta ecuación se determina que $a = 5$ y $b = 6$, también se deduce que la hipérbola tiene sus focos sobre el eje Oy.

1. Centro $(0, 0)$
2. Vértices. $V_1(0, -a) = V_1(0, -5)$ y $V_2(0, a) = v_2(0, 5)$
3. Focos. $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 25 = 61$ por tanto $c = \sqrt{61}$. Es decir, $F_1 = (0, -\sqrt{61})$ y $F_2 = (0, \sqrt{61})$
4. Asíntotas. $y = \frac{a}{b} = \frac{5}{6}x$ y $y = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{6}x$
5. Excentricidad. $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{61}}{5}$
6. Directrices. $y = -\frac{a}{\epsilon} = -\frac{5}{\frac{\sqrt{61}}{5}} = -\frac{25}{\sqrt{61}}$

   y

   $y = \frac{a}{\epsilon} = \frac{5}{\frac{\sqrt{61}}{5}} = \frac{25}{\sqrt{61}}$

7. Gráfico

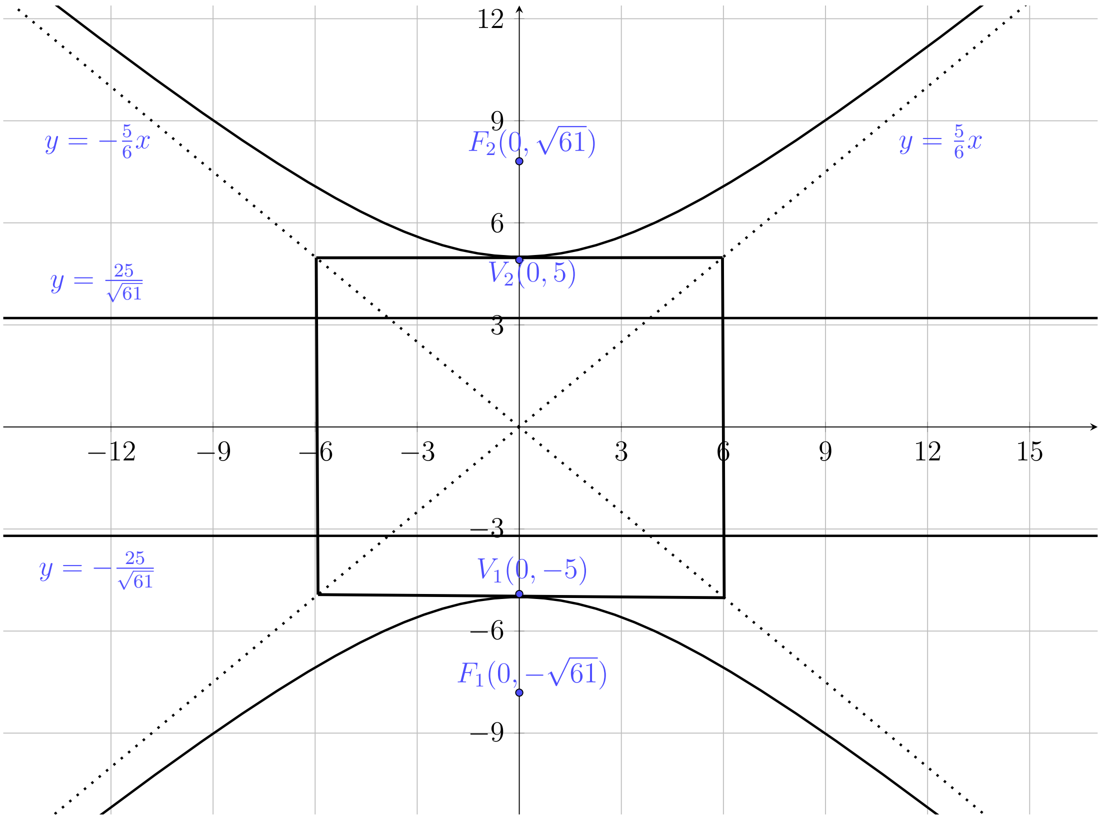


Figura 5.22: Hipérbola de eje focal coincidente con el eje Oy

5.3 La parábola

Definición 5.8. Se denomina *parábola* al lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo F denominado *foco* y una recta l fija denominada *directriz* (esta no pasa por el foco). La distancia del foco a la directriz se representa mediante $2p$; el valor de p se denomina *parámetro de la parábola*.

Notas.

1. Para la construcción de la parábola en este texto, se supone que la directriz es paralela al eje Ox y que el foco pertenece al eje Oy; además, se supone que el origen del sistema de coordenadas está en medio del foco y la directriz y que el valor del parámetro p es conocido.

2. El punto medio entre el foco y la directriz de una parábola se denomina *vértice de la parábola* (Figura 5.23).

3. La recta que pasa por el foco de la parábola y es perpendicular a la directriz se denomina *eje de la parábola*.

4. Dado un punto M de la parábola, se denomina *radio focal* a la longitud del segmento $\overline{FM}$ y se lo representa mediante r (Figura 5.23).

5. La distancia de un punto M de la parábola a la directriz se representa mediante d (Figura 5.23).

6. La distancia del origen del sistema de coordenadas al foco es igual a la distancia del origen de coordenadas a la directriz; estas distancias son iguales a p (Figura 5.23).

7. Un punto del plano M estará situado sobre la parábola si y solo si $r = d$.

8. La excentricidad de la parábola es $\epsilon = 1$, esto debido a que la excentricidad es la razón entre el radio focal r y la distancia d.

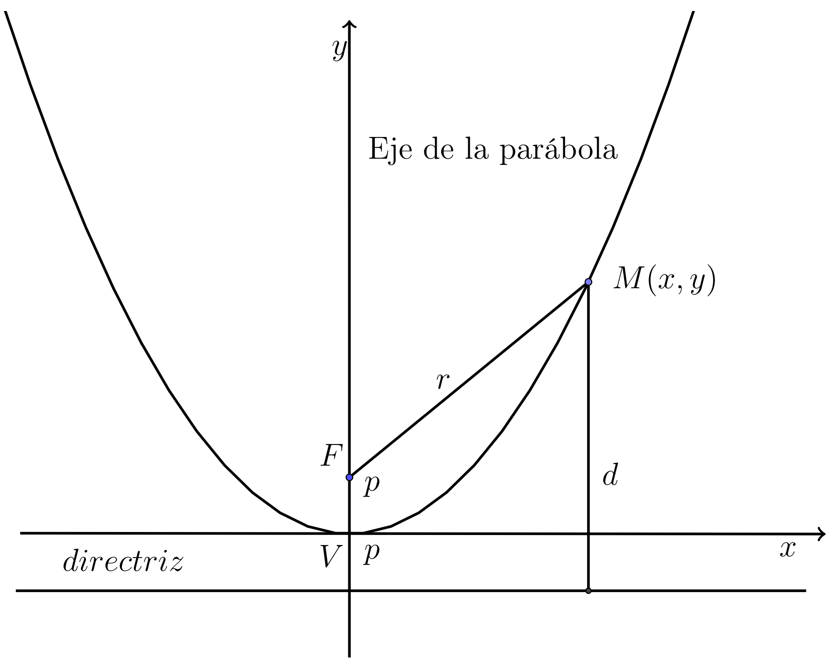


Figura 5.23: Parábola de eje coincidente con el eje Oy

Proposición 5.11. *La ecuación de la parábola cuyo eje coincide con el eje Oy y su vértice coincide con el origen de coordenadas, está dada por*

$$x^2 = 4py \tag{5.26}$$

Demostración. Sea $M(x, y)$ un punto de la parábola y sea el foco $F(0, p)$, se tiene:

1)	$\lvert MF\rvert = d(M, l)$	definición de parábola
2)	$\lvert MF\rvert = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$	distancia entre dos puntos
3)	$d(M, l) = y + p$	distancia entre un punto y una recta
4)	$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$	de 1), 2) y 3)
5)	$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$	elevando al cuadrado los dos miembros
6)	$x^2 = 4py$	reduciendo términos

□

Notas.

1. La ecuación 5.26 se llama *ecuación canónica* de la parábola.

2. La parábola es una línea de segundo orden, pues es una ecuación de segundo grado.

5.3.1 Análisis de la ecuación de la parábola

Debido a que la ecuación 5.26 contiene únicamente una potencia par de x, resulta que su gráfico es simétrico respecto al eje Oy; por tanto, es suficiente estudiar la parte contenida en el semiplano derecho. Esta parte está determinada por la ecuación

$$x = +\sqrt{4py} \tag{5.27}$$

Para valores negativos de y la ecuación 5.27 proporciona valores imaginarios de x; por tanto, debajo del eje Ox no hay algún punto de la parábola.

Para $y = 0$, se obtiene $x = 0$, el origen de coordenadas es un punto de la parábola que está situado más "abajo". Cuando y aumenta a partir de 0 se tiene que x también crece, partiendo de 0; debido a la ecuación 5.27 se tiene que si $y \to +\infty$; entonces, $x \to +\infty$. Por tanto, la parte considerada de la parábola representa un punto variable $M(x, y)$ que se mueve a partir del origen de coordenadas hacia la parte derecha del eje Ox y hacia arriba del eje Oy (Figura 5.24).

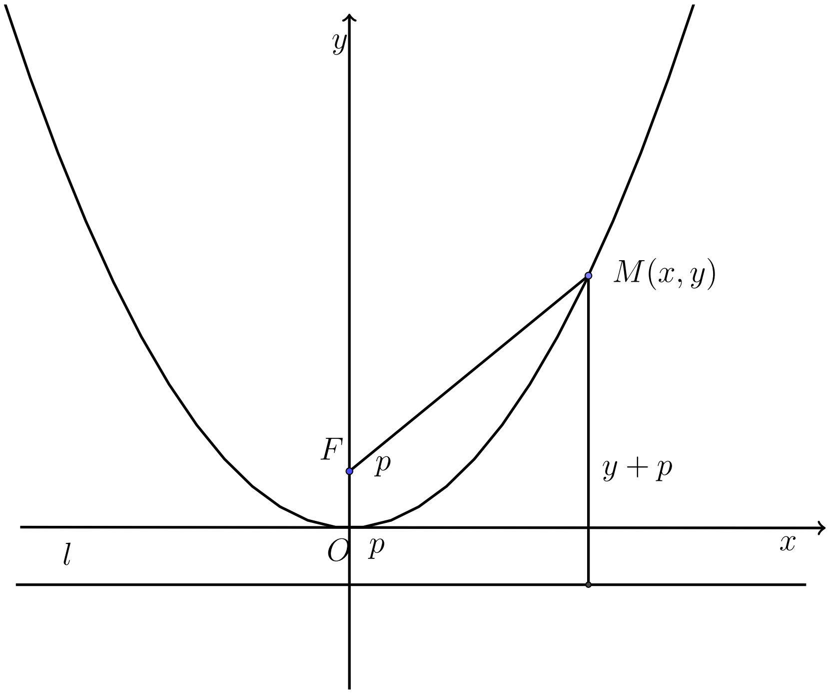


Figura 5.24: Parábola de eje coincidente con el eje Oy

Notas.

1. El vértice de la parábola tiene coordenadas $V(0, 0)$, ya que es el punto medio entre el foco y la directriz.

2. El parámetro p es la distancia del vértice al foco y la distancia del vértice a la directriz.

3. Se denomina *cuerda* de la parábola a cualquier segmento que une dos puntos de la parábola (Figura 5.25).

4. Se denomina *cuerda focal* a cualquier cuerda que pasa por el foco de la parábola (Figura 5.25).

5. La cuerda focal paralela a la directriz de la parábola mide $4p$, esto se demuestra fácilmente. Esta longitud se denomina *lado recto* de la parábola (Figura 5.25).

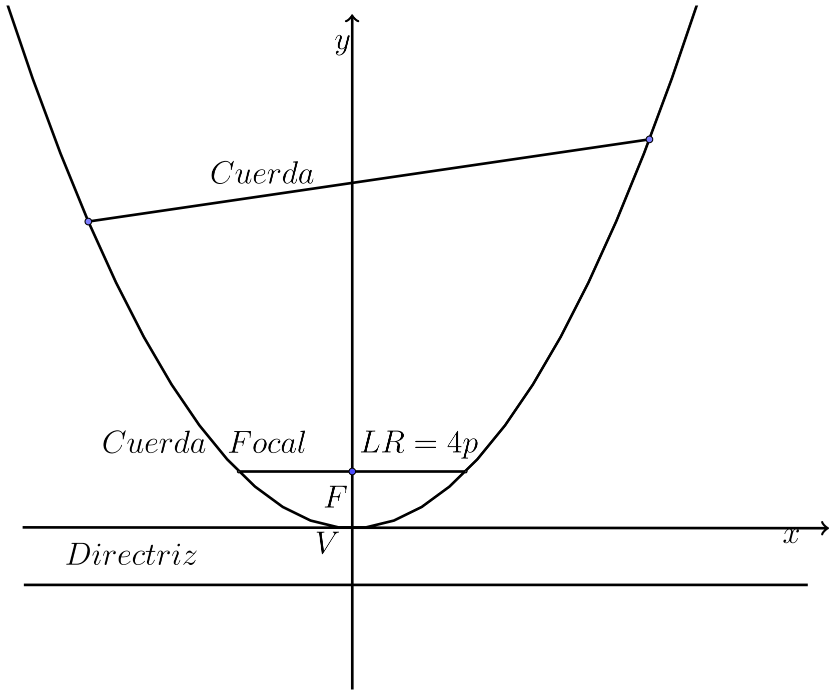


Figura 5.25: Cuerda focal y lado recto

6. La ecuación $x^2 = -4py$ representa la parábola cuyo eje coincide con el eje Oy, vértice O y está situada en el semiplano inferior.

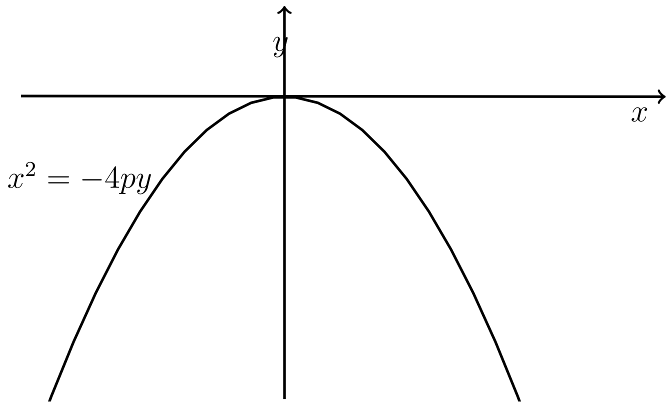


Figura 5.26: Parábola en el semiplano inferior

7. Con razonamientos análogos se tienen las parábolas de eje coincidente con el

eje Ox

$$y^2 = 4px$$

y

$$y^2 = -4px$$

estas parábolas se encuentran en los semiplanos derecho e izquierdo, respectivamente.

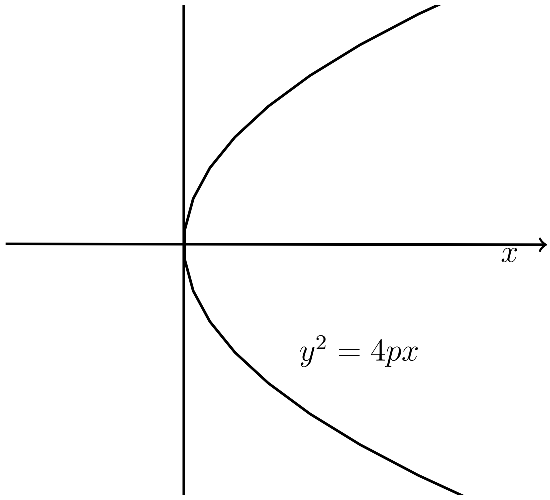


Figura 5.27: Parábola en el semiplano derecho

5.3.2 Ecuación polar de la elipse, hipérbola y parábola

Definición 5.9. Se denomina *cuerda focal de la línea* L al segmento perpendicular a su eje que une dos puntos de esta línea y pasa por el foco.

Proposición 5.12. *Sea L una elipse, hipérbola (una de sus ramas) o parábola, la ecuación en coordenadas polares de esta línea está dada por*

$$\rho = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \theta} \tag{5.28}$$

donde ρ y θ son las coordenadas polares de un punto M de la línea L, de acuerdo a un sistema de coordenadas cuyo origen es un foco y el eje Ox es el eje focal de la *línea, p es la longitud de la mitad de la cuerda focal y ϵ es la excentricidad (Figura 5.28).*

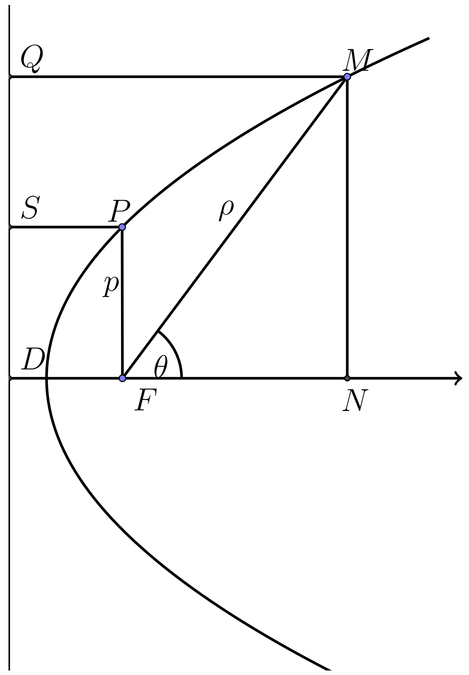


Figura 5.28: Línea L

Demostración. Sea L una de las líneas nombradas, y $M(\rho, \theta)$ un punto de ella, sea g la directriz más próxima al foco considerado, sea Q la proyección del punto M sobre la directriz g, sea P un punto de la línea L tal que su proyección sobre el eje de esta es F, sea D la proyección el foco sobre la directriz, sea S la proyección sobre la directriz del punto P, considérese la dirección positiva del eje del punto D en dirección del foco, se tiene:

1)	$\frac{r}{d} = \epsilon$	teoremas 5.1 y 5.2
2)	$r = \rho$	el foco coincide con el polo del sistema de coordenadas
3)	$d = QM$	definición de distancia de un punto a una recta
4)	$QM = DN$	$QMDN$ es un paralelogramo
5)	$DN = DF + FN$	relación fundamental
6)	$FN = \rho \cos \theta$	relación trigonométrica en el triángulo $\triangle FMN$
7)	$DN = DF + \rho \cos \theta$	de 5) y 6)

8)	$\frac{FP}{SP} = \epsilon$	teoremas 5.1 y 5.2, P es un punto de L
9)	$SP = \frac{FP}{\epsilon} = \frac{p}{\epsilon}$	de 8) e hipótesis
10)	$SP = DF$	$DFPS$ es un paralelogramo
11)	$DF = \frac{p}{\epsilon}$	de 9) y 10)
12)	$d = \frac{p}{\epsilon} + \rho \cos\theta$	de 3), 4), 5), 6) , 7) y 11)
13)	$\frac{\rho}{\frac{p}{\epsilon}+\rho\cos\theta} = \epsilon$	de 1), 2) y 12)
14)	$\rho = \frac{p}{1-\epsilon\cos\theta}$	despejando ρ de 13)

□

Teorema 5.3. *Los puntos medios de las cuerdas paralelas de una línea de segundo orden están situados sobre una recta.*

La demostración del teorema 5.3 queda como ejercicio.

Teorema 5.4. *Cualquier sección de un cono circular determinada por un plano que no pase por su vértice, determina curvas que solo pueden ser una elipse, una hipérbola o una parábola; además, si el plano corta únicamente con una hoja del cono y la sección es una curva cerrada, entonces es una elipse (Figura 5.29) y si determina una curva abierta, entonces es una parábola (Figura 5.30); si el plano corta dos hojas del cono, la sección es una hipérbola (Figura 5.31).*

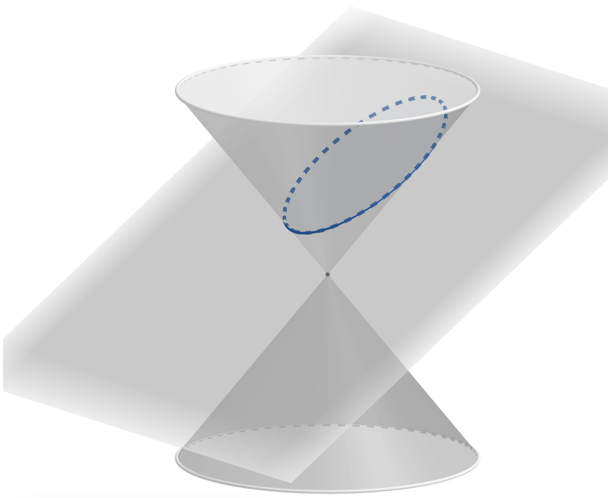


Figura 5.29: Curva cerrada: elipse

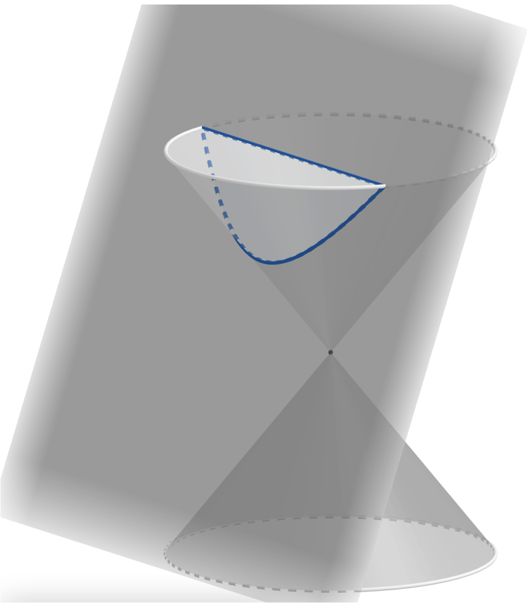


Figura 5.30: Curva abierta: parábola

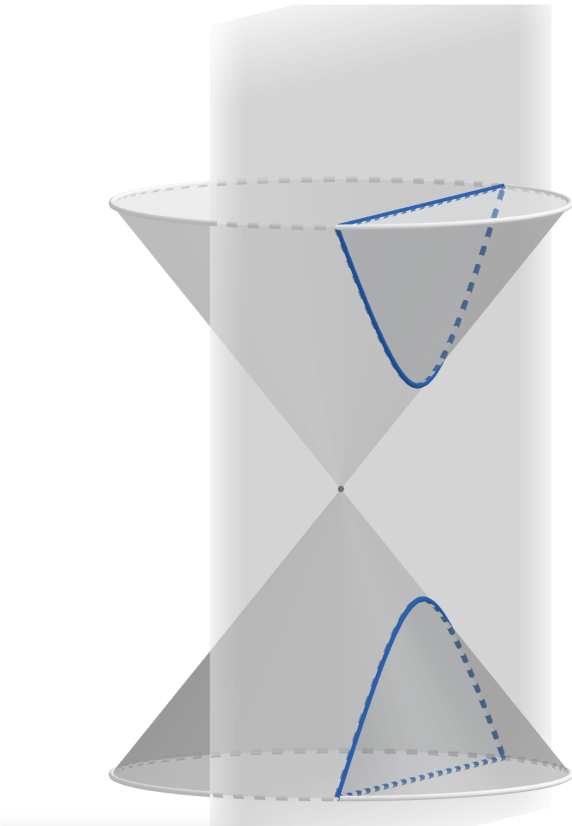


Figura 5.31: Plano que corta dos hojas del cono: hipérbola

5.4 Reducción de la ecuación general de una línea de segundo orden a su forma canónica

El objetivo de esta sección es transformar la ecuación general de una línea de segundo orden a su forma canónica. El estudio en este texto se lo realiza a partir de casos particulares.

Definición 5.10. Se denomina *ecuación general de segundo grado respecto a las variables* x e y a la ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{5.29}$$

Notas.

1. Es conveniente expresar la ecuación general de segundo grado de la siguiente manera

   $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{5.30}$$

   Ejemplo. En la ecuación $5x^2 - 3xy + 4y^2 - 6x + 5y + 1 = 0$ se tiene que $A = 5$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = 4$, $D = -3$, $E = \frac{5}{2}$ y $F = 1$.

2. Los valores de A, B, C, D, E y F se denominan coeficientes de la ecuación 5.30.

3. Los tres primeros términos de la ecuación 5.30, se denominan términos superiores.

4. Se cumple que

   $$\begin{aligned} &Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \\ &\qquad = (Ax + By + D)x + (Bx + Cy + E)y + (Dx + Ey + F) \end{aligned} \tag{5.31}$$

5. Para reducir la ecuación 5.30 se hace un cambio de ejes, de tal manera que el término superior $2Bxy$ se anule; además, que reduzca lo más posible el

número de términos de primer grado y el término independiente desaparezca. La ecuación así obtenida se denomina *ecuación canónica.*

A continuación, se estudia un ejemplo de lo indicado en la última nota.

Ejemplo. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0 \tag{5.32}$$

Solución.

1. Mediante un traslado paralelo de ejes coordenados, se traslada el origen de coordenadas al punto $C(x_0, y_0)$ utilizando las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \tag{5.33}$$

   la ecuación 5.32 se transforma en

$$\begin{split} 5x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 + (10x_0 + 4y_0 - 24)x' + (4x_0 + 4y_0 - 12)y' + \\ + (5x_0^2 + 4x_0y_0 + 2y_0^2 - 24x_0 - 12y_0 + 29) = 0 \end{split} \tag{5.34}$$

2. Ahora se busca eliminar los términos de primer grado, para ello se resuelve el siguiente sistema

$$\begin{cases} 10x_0 + 4y_0 - 24 = 0 \\ 4x_0 + 4y_0 - 12 = 0 \end{cases} \tag{5.35}$$

   que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x_0 + 2y_0 - 12 = 0 \\ x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{cases} \tag{5.36}$$

   se tiene que la solución es $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$.

3. Llamando F' al término independiente de la ecuación 5.34, y utilizando la

ecuación 5.31, se tiene que

$$\begin{aligned}
F' &= 5x_0^2 + 4x_0y_0 + 2y_0^2 - 24x_0 - 12y_0 + 29 \\
&= (5x_0 + 2y_0 - 12)x_0 + (2x_0 + 2y_0 - 6)y_0 + (-12x_0 - 6y_0 + 29) \\
&= -1
\end{aligned}$$

4. El origen del nuevo sistema de coordenadas es el punto C, cuyas coordenadas primitivas son $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Por tanto, la ecuación en coordenadas nuevas es

$$5x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 - 1 = 0 \tag{5.37}$$

Nótese que el lado izquierdo de la ecuación 5.37 no varía al sustituir x' e y' por $-x'$ e $-y'$ respectivamente; es decir, los puntos $M(x', y')$ y $N(-x', -y')$ son simétricos respecto al punto C; en otras palabras, el origen de coordenadas ha sido trasladado al centro de la curva.

5. Ahora se giran los ejes un ángulo α; por tanto, se emplean las ecuaciones de la proposición 2.6, en el que las coordenadas primitivas son (x', y') y las coordenadas nuevas son (x'', y'')

$$\begin{cases} x' = x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha \\ y' = x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha \end{cases} \tag{5.38}$$

reemplazando x' y y' de las ecuaciones 5.38 en la ecuación 5.37 se tiene.

$$\begin{aligned}
5(x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha)^2 + 4(x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha)(x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha) + \\
+ 2(x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha)^2 - 1 = 0
\end{aligned} \tag{5.39}$$

reduciendo términos se tiene

$$\begin{aligned}
&(5\cos^2\alpha + 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha)x''^2 + \\
&+ (4\cos^2\alpha - 6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 4\operatorname{sen}^2\alpha)x''y'' + \\
&+ (5\operatorname{sen}^2\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha)y''^2 - 1 = 0
\end{aligned} \tag{5.40}$$

6. Ahora se busca que el término $x''y''$ se anule; es decir,

$$4\cos^2\alpha - 6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 4\operatorname{sen}^2\alpha = 0 \tag{5.41}$$

la solución de la ecuación 5.41 es $\tan\alpha = -2$ o $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Se toma $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, pues α tiene que ser un ángulo agudo.

Por tanto, los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ están dados por:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Luego, la ecuación 5.40 se convierte en

$$6x''^2 + y''^2 = 1. \tag{5.42}$$

Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{6}} + y''^2 = 1 \tag{5.43}$$

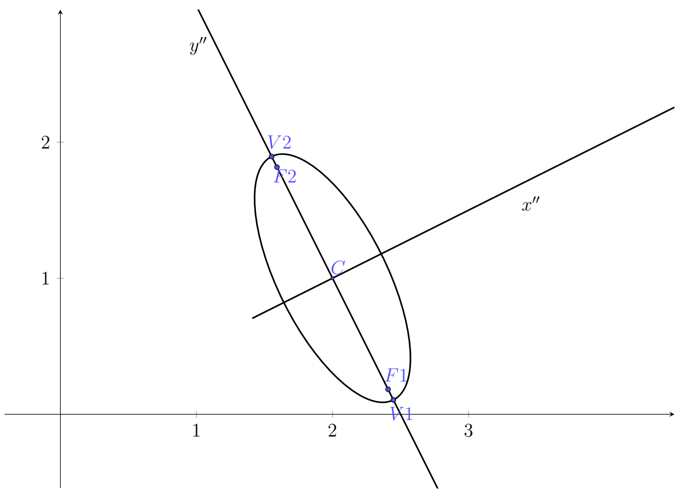


Figura 5.32: Transformación de ecuación general a ecuación canónica

Se obtiene la ecuación de una elipse de eje focal Cy'' y centro C (Figura 5.32).

7. El análisis del resultado anterior es el siguiente:

   a) Eje menor $2b = \frac{\sqrt{6}}{3} \to b = \frac{\sqrt{6}}{6}$

   b) Eje mayor $2a = 2 \to a = 1$

   c) Distancia entre focos $2c = 2\sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{3} \to c = \frac{\sqrt{30}}{6}$

   d) Excentricidad $\epsilon = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{longitud del eje mayor}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

   e) Focos en coordenadas nuevas $F_1'' = (0, -\frac{\sqrt{30}}{6})$ y $F_2'' = (0, \frac{\sqrt{30}}{6})$

   f) Focos en coordenadas primitivas

   Foco 1

$$
\begin{aligned}
x =& x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha + x_0 = \frac{\sqrt{30}}{6}\frac{\sqrt{5}}{5} + 2 = \frac{12 + \sqrt{6}}{6} \\
y =& x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha + y_0 = -\frac{\sqrt{30}}{6}\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}
\end{aligned}
$$

   Foco 2

$$
\begin{aligned}
x =& x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha + x_0 = -\frac{\sqrt{30}}{6}\frac{\sqrt{5}}{5} + 2 = \frac{12 - \sqrt{6}}{6} \\
y =& x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha + y_0 = \frac{\sqrt{30}}{6}\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}
\end{aligned}
$$

   g) Vértices en coordenadas nuevas $V_2 = (0, 1)$ y $V_1 = (0, -1)$

   h) Vértices en coordenadas primitivas

   Vértice 1

$$
\begin{aligned}
x =& x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha + x_0 = 1\frac{\sqrt{5}}{5} + 2 = \frac{10 + \sqrt{5}}{5} \\
y =& x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha + y_0 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}
$$

   Vértice 2

$$
\begin{aligned}
x =& x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha + x_0 = -1\frac{\sqrt{5}}{5} + 2 = \frac{10 - \sqrt{5}}{5} \\
y =& x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha + y_0 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}
$$

El ejemplo anterior se puede generalizar así. Sean una curva de segundo orden de ecuación

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{5.44}$$

su centro $C(x_0, y_0)$, si existe, está determinado por el sistema

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \tag{5.45}$$

Una vez que se traslada el origen de coordenadas al centro C, la ecuación 5.44 se transforma en

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0 \tag{5.46}$$

donde

$$F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F$$

pero por la ecuación 5.31 se tiene

$$\begin{aligned} F' =& (Ax_0 + By_0 + D)x_0 + (Bx_0 + Cy_0 + E)y_0 + \\ &+ (Dx_0 + Ey_0 + F) \end{aligned}$$

como se cumple la ecuación 5.45 se tiene que

$$F' = Dx_0 + Ey_0 + F$$

Posteriormente, se tiene que eliminar el término que contiene a $x'y'$, esto se consigue usando las ecuaciones 5.38, que permite determinar el ángulo de giro α.

El sistema 5.45 puede no tener solución, en este caso la curva no tiene centro, por lo que, para reducir la ecuación se debe seguir otro procedimiento como en el siguiente ejemplo

Ejemplo. Reducir a la forma canónica y graficar la siguiente ecuación

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0 \tag{5.47}$$

Solución. Puede verse que el sistema 5.45 no tiene solución. Por tanto, la curva no tiene centro, por lo que se procede de la siguiente manera:

a) Sin cambiar el origen de coordenadas, se giran los ejes un ángulo α, mediante las fórmulas

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

por lo que la ecuación dada queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = \\
&(4\cos^2\alpha - 12\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 9\operatorname{sen}^2\alpha)x'^2 + (10\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 12\cos^2\alpha + 12\operatorname{sen}^2\alpha)x'y' + \\
&+ (4\operatorname{sen}^2\alpha + 12\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 9\cos^2\alpha)y'^2 - (8\sqrt{13}\cos\alpha + 14\sqrt{13}\operatorname{sen}\alpha)x' + \\
&+ (8\sqrt{13}\operatorname{sen}\alpha - 14\sqrt{13}\cos\alpha)y' + 117
\end{aligned} \tag{5.48}$$

b) Ahora se elige un ángulo α de modo que anule el término que contiene a $x'y'$; por tanto, se resuelve la ecuación

$$10\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 12\cos^2\alpha + 12\operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

dividiendo para $2\cos^2\alpha$ se obtiene

$$6\tan^2\alpha + 5\tan\alpha - 6 = 0$$

resolviendo para $\tan\alpha$ se obtiene

$$\tan\alpha = -\frac{3}{2}$$

y

$$\tan\alpha = \frac{2}{3}$$

tomando el ángulo agudo, se calcula $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

c) Reemplazando las funciones $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en la ecuación 5.48 se obtiene

$$y'^2 - 4x' - 2y' + 9 = 0$$

d) Por completación de cuadrados la ecuación anterior se transforma en

$$(y'-1)^2 - 4(x'-2) = 0$$

e) Haciendo una traslación de ejes, utilizando $x'' = x' - 2$ y $y'' = y' - 1$, se obtiene

$$y''^2 - 4x'' = 0$$

lo que representa una parábola de eje paralelo a Cx'' y vértice el punto $C(2,1)$, estas coordenadas están dadas según el sistema de ejes Ox' y Oy'. Las coordenadas del vértice en el sistema primitivo están dadas por $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}}\right)$.

El siguiente es el gráfico de la ecuación dada (Figura 5.33).

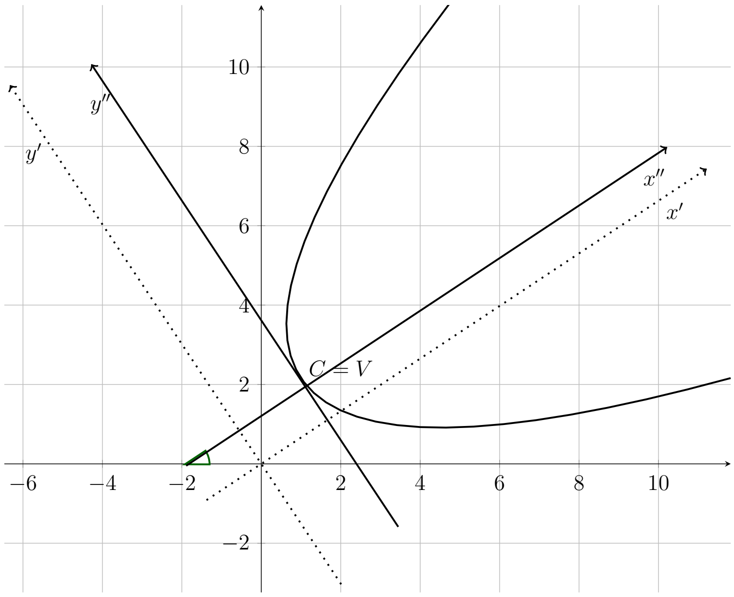


Figura 5.33: Gráfico de $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0$

En conclusión, volviendo a analizar el sistema

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

se tiene que el determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

puede tomar los siguientes valores:

1. $\delta \neq 0$; por tanto, el sistema tiene solución única y la curva tiene centro. Cuando no representa una curva imaginaria o degenerada, representa una elipse o hipérbola.

2. $\delta = 0$; por tanto, el sistema no tiene solución. En este caso la curva no tiene centro; es decir, representa una parábola o rectas paralelas, o el sistema tiene infinitas soluciones (la curva tiene infinitos centros).

Ejemplo. Analizar la ecuación de segundo grado

$$-2x^2 + 20xy - 50y^2 - 21x + 105y - 10 = 0 \tag{5.49}$$

Solución. El sistema

$$\begin{cases} -2x_0 + 10y_0 - \frac{21}{2} = 0 \\ 10x_0 - 50y_0 + \frac{105}{2} = 0 \end{cases} \tag{5.50}$$

no tiene solución, ya que $\delta = 0$. Por tanto, la curva no tiene centro; además, la ecuación 5.49 se transforma en

$$(x - 5y + 10)(-2x + 10y - 1) = 0$$

que representa dos rectas paralelas.

Procediendo como en el ejemplo anterior se tiene:

1. Sin cambiar el origen de coordenadas, se giran los ejes un ángulo α, mediante las fórmulas

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

   por lo que la ecuación 5.49 queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &-2x^2 + 20xy - 50y^2 - 21x + 105y - 10 = \\ &(-2\cos^2\alpha + 20 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 50\operatorname{sen}^2\alpha)x'^2 + \\ &+ (-96\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 20\cos^2\alpha - 20\operatorname{sen}^2\alpha)x'y' - \\ &- (2\operatorname{sen}^2\alpha + 20\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 50\cos^2\alpha)y'^2 + \\ &+ (-21\cos\alpha + 105\operatorname{sen}\alpha)x' + \\ &+ (21\operatorname{sen}\alpha + 105\cos\alpha)y' - 10 \end{aligned} \tag{5.51}$$

2. Ahora se elige un ángulo α de modo que anule el término que contiene a $x'y'$,

por tanto, se resuelve la ecuación

$$-96\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 20\cos^2\alpha - 20\operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

dividiendo para $-4\cos^2\alpha$ se obtiene

$$5\tan^2\alpha + 24\tan\alpha - 5 = 0$$

resolviendo para $\tan\alpha$ se obtiene

$$\tan\alpha = -5$$

y

$$\tan\alpha = \frac{1}{5}$$

tomando el ángulo agudo, se calcula $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

3. Reemplazando las funciones $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en la ecuación 5.51 se obtiene

$$-52y'^2 + 21\sqrt{26}y' - 10 = 0$$

equivalente a

$$52y'^2 - 21\sqrt{26}y' + 10 = 0$$

4. Finalmente factorizando la ecuación anterior se tiene

$$y' = \frac{\sqrt{26}}{52}$$

y

$$y' = \frac{5\sqrt{26}}{13}$$

lo que representa dos rectas paralelas.

5.5 Ejercicios resueltos

1. Los focos de una hipérbola son $F_1(0,-4)$ y $F_2(0,4)$ uno de sus vértices es el punto $(0,2)$. Determine la ecuación de la hipérbola.

   Solución. Es una hipérbola con focos a lo largo del eje Oy, por tanto su ecuación tiene la forma general: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

   En este caso se tiene que $c=4$

   $b=2$

   luego

   $a^2=c^2-b^2=16-4=12$

   por tanto la ecuación es

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$$

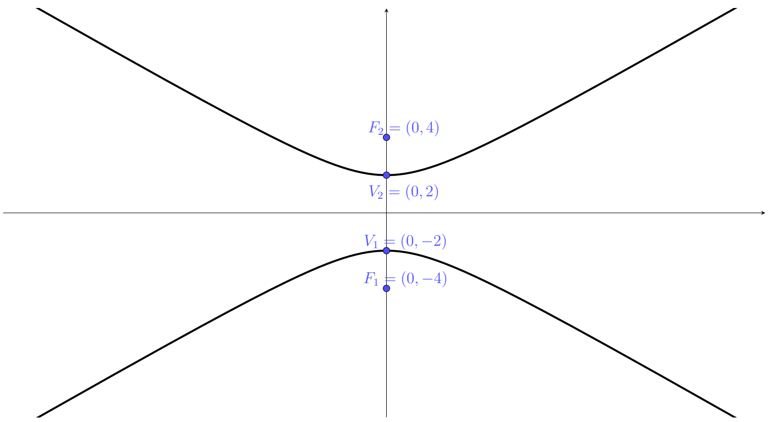


Figura 5.34: Hipérbola de ecuación $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

2. Determine la ecuación polar de la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Calculando la distancia del centro a los focos $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

por tanto $c = \sqrt{7}$

Calculando la excentricidad de la elipse $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Las ecuaciones de las directrices son $x = -\frac{a}{\epsilon}$ y $x = \frac{a}{\epsilon}$

por tanto $x = -\frac{16}{\sqrt{7}}$ y $x = \frac{16}{\sqrt{7}}$

El parámetro focal p está dado por el valor de y que le corresponde a $x = c = \sqrt{7}$

es decir $p = \sqrt{(1 - \frac{7}{16})9} = \frac{9}{4}$

por tanto la ecuación polar está dada por

$\rho = \dfrac{p}{1 - \epsilon \cos\theta}$

$\rho = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{\sqrt{7}}{4}\cos\theta}$

$\rho = \frac{9}{4 - \sqrt{7}\cos\theta}$

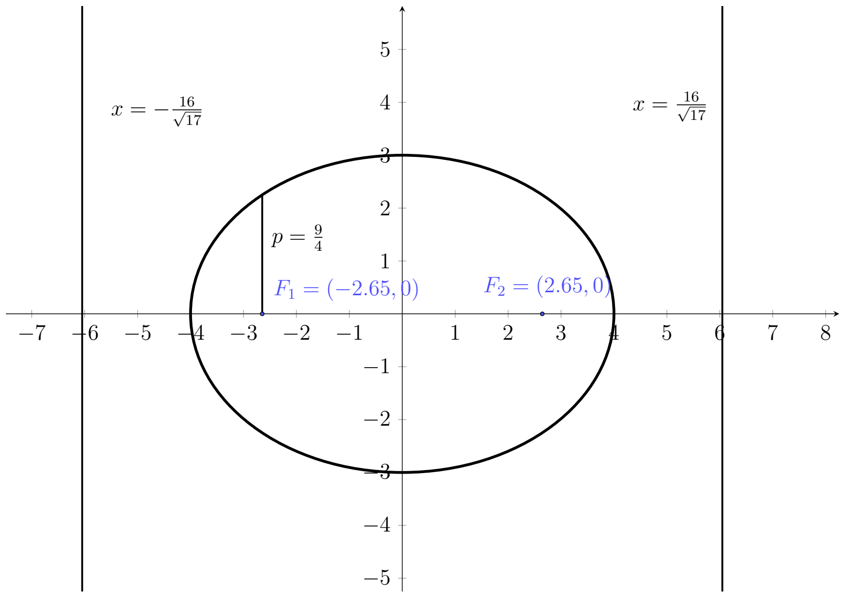


Figura 5.35: Elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. Determine la ecuación general de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, luego de haber trasladado su centro al punto $(2,-2)$ y de haber rotado todos sus puntos un ángulo $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

Solución. La ecuación de la elipse buscada se puede obtener haciendo un cambio de sistema de coordenadas, donde la ecuación dada se considere como la ecuación de la elipse en un nuevo sistema, y debemos buscar su ecuación según el sistema primitivo, para ello utilizamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -(x-a)\operatorname{sen}\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

donde $a=2$, $b=-2$ y $\alpha=\frac{\pi}{6}$

1)	$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$	ecuación dada (puede pensarse como el lugar geométrico en el nuevo sistema de referencia
2)	$\frac{\left((x-2)\cos\frac{\pi}{6}+(y+2)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^2}{9}+$ $+\frac{\left(-(x-2)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+(y+2)\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{4}=1$	reemplazando en 1) los valores de a, b, α y las ecuaciones de cambio de sistema.
3)	$\frac{\left((x-2)\frac{\sqrt{3}}{2}+(y+2)\frac{1}{2}\right)^2}{9}+\frac{\left(-(x-2)\frac{1}{2}+(y+2)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4}=1$	calculando las funciones trigonométricas
4)	$\frac{(x-2)^2\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)(y+2)+(y+2)^2\frac{1}{4}}{9}+$ $+\frac{(x-2)^2\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)(y+2)+(y+2)^2\frac{3}{4}}{4}=1$	resolviendo los cuadrados
6)	$\frac{\frac{21}{4}(x-2)^2+\frac{31}{4}(y+2)^2-\frac{5\sqrt{3}}{2}(x-2)(y+2)}{36}=1$	resolviendo términos semejantes
7)	$\frac{21}{4}(x-2)^2+\frac{31}{4}(y+2)^2-\frac{5\sqrt{3}}{2}(x-2)(y+2)=36$	multiplicando por 36
8)	$\frac{21}{4}x^2-21x+21+\frac{31}{4}y^2+31y+31-\frac{5\sqrt{3}}{2}xy-5\sqrt{3}x+$ $+5\sqrt{3}y+10\sqrt{3}=36$	resolviendo cuadrados
9)	$\frac{21}{4}x^2-\frac{5\sqrt{3}}{2}xy+\frac{31}{4}y^2+(-5\sqrt{3}-21)x+(31+5\sqrt{3})y+$ $+16+10\sqrt{3}=0$	asociando términos semejantes

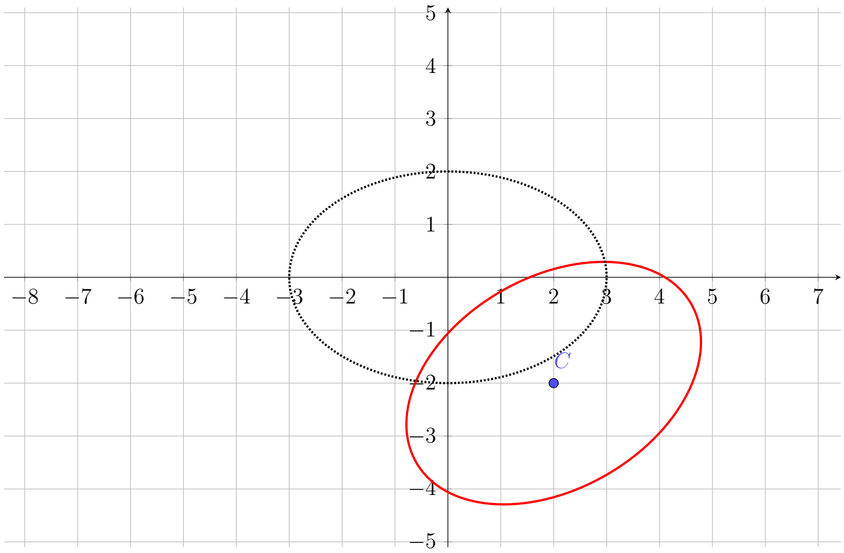


Figura 5.36: Traslación y rotación de una elipse

4. Recordando que la intersección entre dos curvas en el plano se consigue resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las curvas. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-5,-5)$ (puede ser más de una) que interseca a la elipse de focos $F_1(-3,2)$ y $F_2(5,2)$ y valor constante $2a=10$, en un único punto.

   Solución. Para resolver este ejercicio, hay que tomar en cuenta que la intersección entre dos líneas se determina mediante la resolución del sistema formado por las ecuaciones de dichas líneas. Además, se debe tener en cuenta que una ecuación cuadrática tiene soluciones reales coincidentes, cuando su discriminante es igual a 0.

   a) Ecuación de la elipse

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-16}=3$$

   luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

b) Ecuación de la recta

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y + 5 = k(x + 5)$$

c) Resolución del sistema

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \\ y + 5 = k(x+5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \\ y = k(x+5) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(k(x+5)-7)^2}{9} = 1 \\ y = k(x+5) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x^2 - 2x + 1) + 25(kx + 5k - 7)^2 = 225 \\ y = k(x+5) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 18x + 9 + 25(k^2x^2 + 25k^2 + 49 + 10k^2x - 14kx - 70k) = 225 \\ y = k(x+5) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 18x + 9 + 25k^2x^2 + 625k^2 + 1225 + 250k^2x - 350kx - 1750k = 225 \\ y = k(x+5) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (9 + 25k^2)x^2 + (-18 + 250k^2 - 350k)x + 625k^2 + 1009 - 1750k = 0 \\ y = k(x+5) - 5 \end{cases}$$

resolviendo la ecuación de segundo grado para x, sabiendo que debe dar una única solución, se debe tener que el discriminante debe ser igual a 0, es decir

$$
\begin{aligned}
b^2 - 4ac &= 0\\
(-18 + 250k^2 - 350k)^2 - 4(9 + 25k^2)(625k^2 + 1009 - 1750k) &= 0\\
11k^2 - 84k + 40 &= 0
\end{aligned}
$$

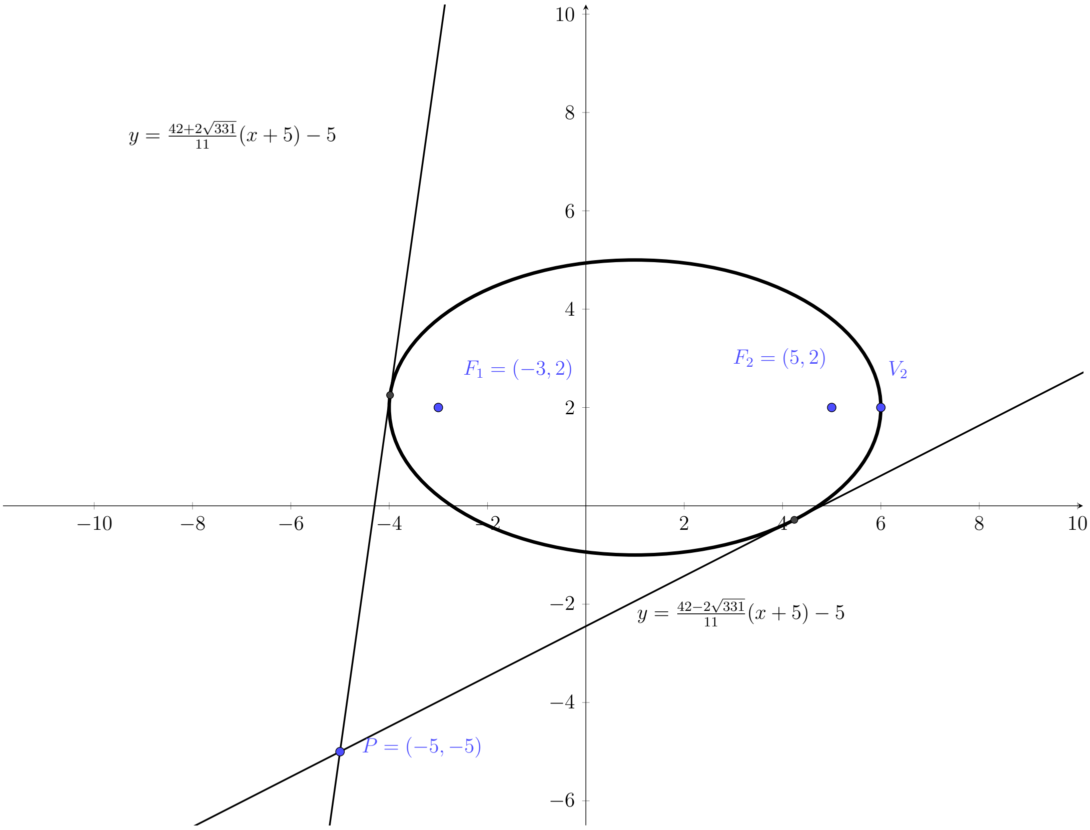


Figura 5.37: Rectas tangentes a una elipse

resolviendo la última ecuación se tiene que

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{42 + 2\sqrt{331}}{11} \approx 7.13\\
k_2 &= \frac{42 - 2\sqrt{331}}{11} \approx 0.51
\end{aligned}
$$

por tanto las ecuaciones de las rectas que tienen un solo punto en común con la elipse (rectas tangentes) son:

$$y = \frac{42 + 2\sqrt{331}}{11}(x+5) - 5$$
$$y = \frac{42 - 2\sqrt{331}}{11}(x+5) - 5$$

5. Determine los radios focales de elipses de centro $C(h, k)$ y eje focal horizontal y vertical.

Solución. Se sabe que para la elipse de eje focal Ox y centro el origen de coordenadas se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon x \\ r_2 &= a - \epsilon x \end{aligned} \tag{5.52}$$

además si consideramos que la elipse tiene centro en el origen del sistema nuevo C_x y C_y, se tiene que los radios focales están dados por:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon x' \\ r_2 &= a - \epsilon x' \end{aligned} \tag{5.53}$$

si consideramos las fórmulas de traslación

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}$$

se tiene que los radios de la elipse de centro $C(x, y)$ están dados por:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon(x - h) \\ r_2 &= a - \epsilon(x - h) \end{aligned} \tag{5.54}$$

Por otro lado se sabe que en la elipse de eje focal Oy y centro el origen de coordenadas los radios focales están dados por

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon y \\ r_2 &= a - \epsilon y \end{aligned} \tag{5.55}$$

además si consideramos que la elipse tiene centro en el origen del sistema nuevo C_x y C_y, se tiene que los radios focales estÃ¡n dados por:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon y' \\ r_2 &= a - \epsilon y' \end{aligned} \tag{5.56}$$

si consideramos las fórmulas de traslación

$$\begin{aligned} x' =& x - h \\ y' =& y - k \end{aligned}$$

se tiene que los radios de la elipse de centro $C(x, y)$ están dados por:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \epsilon(y - k) \\ r_2 &= a - \epsilon(y - k) \end{aligned} \tag{5.57}$$

6. Deduzca la ecuación del lugar geométrico tal que el valor absoluto de la diferencia de distancias de un punto de ella a dos puntos fijos de coordenadas $(0, -3)$ y $(0, 3)$ es igual 4. Escriba el nombre del lugar geométrico, sus focos, vértices, directrices, excentricidad, elabore su gráfico.

Solución. Sea $M(x, y)$ un punto de dicho lugar geométrico, sean los puntos fijos $F_1(0, -3)$ y $F_2(0, 3)$, entonces el lugar geométrico solicitado esta dado por la siquiente expresión:

$$|MF_1 - MF_2| = 4$$

reemplazando las coordenadas se tiene que

$$|\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2}| = 4$$

por definición de valor absoluto se tiene que

$$\sqrt{(y+3)^2 + x^2} - \sqrt{(y-3)^2 + x^2} = \pm 4$$

transponiendo términos

$$\sqrt{(y+3)^2+x^2} = \sqrt{(y-3)^2+x^2} \pm 4$$

elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad

$$y^2+6y+9+x^2 = y^2-6y+9+x^2 \pm 8\sqrt{(y-3)^2+x^2}+16$$

reduciendo términos

$$12y-16 = \pm 8\sqrt{(y-3)^2+x^2}$$

dividiendo para 4

$$3y-4 = \pm 2\sqrt{(y-3)^2+x^2}$$

elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad

$$9y^2-24y+16 = 4y^2-24y+36+4x^2$$

transponiendo términos

$$-4x^2+5y^2 = 20$$

multiplicando los dos lados de la igualdad por $\frac{1}{20}$

$$-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4} = 1$$

Se tiene por tanto que $a=2$, $b=\sqrt{5}$ y $c=3$, luego

a) Lugar geométrico: hipérbola de eje coincidente con el eje Oy.

b) Focos $(0,-3)$ y $(0,3)$

c) Vértices $(0,-2)$ y $(0,2)$

d) Excentricidad

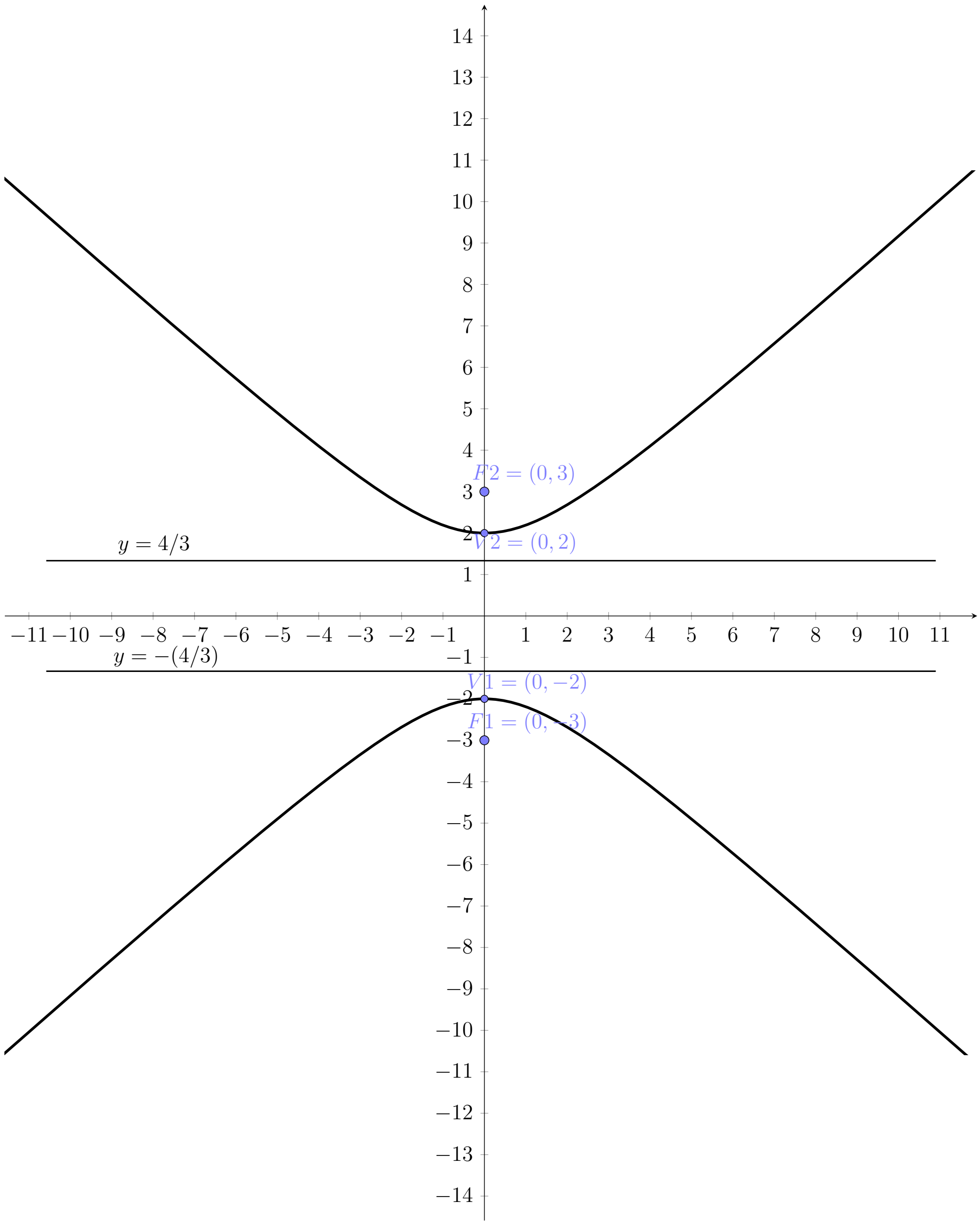
$$\epsilon = \frac{\text{distancia entre focos}}{\text{distancia entre vértices}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

e) Directrices

$y = -\frac{a}{\epsilon} = -\frac{4}{3}$

$y = \frac{a}{\epsilon} = \frac{4}{3}$

f) Gráfico



5.6 Ejercicios propuestos

1. Una elipse de excentricidad $\epsilon = 0.75$ tiene centro en el punto $C(-3, 4)$ y pasa por el punto $M(2, 2)$. Determine su ecuación, focos, vértices y los radios focales al punto M (utilice las fórmulas de radios focales). Grafique sin usar software.

2. Determine la ecuación de la circunferencia de centro $C(8, 3)$ que interseca en un solo punto a la línea de excentricidad $\epsilon = \frac{1}{2}$ y vértices $V_1(0, 4)$ y $V_2 = (0, 12)$. Realizar el gráfico.

3. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$. Determine e identifique la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

4. Determine al menos 5 elementos de las siguientes curvas, determine su ecuación canónica.

   a) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

   b) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

   c) $4x^2 + 48y + 12x = 159$

5. Determine el o los focos, la directriz o directrices en coordenadas nuevas y en coordenadas primitivas, del lugar geométrico de ecuación

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

6. Demuestre que cualquier recta paralela al eje de una parábola corta a esta en uno y solo un punto.

7. Un cilindro de radio 5, es intersecado por dos planos, el primero horizontal y el segundo transversal, de modo que dichos planos se intersecan en un punto del eje del cilindro y forman un ángulo de 30^o. Deduzca a ecuación de la elipse cuando el sistema de referencia está localizado sobre el plano transversal y el

origen coincide con la intersección de los planos y el eje del cilindro, considere como eje Ox la recta intersección de los dos planos.

8. Determine todos los elementos (centro, focos, vértices, asíntotas, directrices y excentricidad) de la hipérbola de ecuación

$$-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$$

9. Transforme a ecuación canónica la siguiente ecuación general. Determine centro (si existe), foco(s), vértice(s) y excentricidad. Grafique.

Bibliografía

[AC] Abate, M. & de Fabritiis, C. (2015). *Geometria analitica con elementi di algebra leneare*. Milano: McGraw -Hill Education.

[AJ] Aarts, J. M. (2008). *Plane ald Solid Geometry*. New York: Springer.

[BC] Buser, P. & Costa, A. (2010). *Curso de Geometría Básica*. Madrs: EDITORIAL SANZ Y TORRES, S. L.

[CE] Carpinteyro, E. (2016). *Geomtría Analítica*. New York: Springer.

[CP] Camargo, I. & Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica um tratamento vectorial.* Brasil: PEARSON Prentice Hall.

[EN] Efimov, N. (1969). *Curso Breve de Geometría Analítica*. Moscu: Editorial MIR.

[EH] Eves, H. (1965). *Survey of Geometry Volume Two*. Boston: ALLYN AND BACON, INC.

[FB] Frota, E. & Bontorim M. (2016). *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Brasil: EDITORA UNICAMP.

[KD] Kletenik, D. (1969). *Problemas de Geometría Analítica*. México, D. F.: GRUPO EDITORIAL PATRIA, S. A. DE C. V.

[LE] Lima, E. (2014). *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Brasil: IMPA.

[ME] Moise, E. (1990). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. New York: ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY.

[RGA] Ramírez–Galarza, A. (2011). *Geometría analítica. Una intrducción a la geometría*. México Distrito Federal: Las prensas de ciencias.

[RT] Raichman, S. & Totter E. (2016). *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. Mendoza: EDICIÓN DIGITAL.

[RS] Ruslan, S. (2011). *Course og Analytical Geometry*. Rusia: UFA.

[SE] Sernesi, E. (1989). *Geometría 1*. Italia: BOLLATU BORINGHIERI.

[SC] Swokowski E. & Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Goemetría Analítica.* México: CENGAGE Learning.

[VG] Valencia, M. & García, M. (2013). *Geometría analítica moderna.* México: PEARSON.

[VP] Vittal, P. (2013). *Analytical Geometry 2D and 3D.* India: PEARSON.

[WB] Wooton, W., Beckenbach, E. & Fleming, F. (1985). *Geometría Analítica Moderna.* Mexico: PUBLICACIONES CULTURAL S. A. de C. V.

[YG] Yákoliev, G. (1985). *Geometría.* Moscu: Editorial MIR.

Índice de figuras

Autores

Janneth del Rocío Morocho Yaucán

Doctora en Matemática

Máster en Estadística Aplicada

Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

janneth.morocho@espoch.edu

Leonidas Antonio Cerda Romero

Doctor en Matemática

Máster en Matemática Aplicada

Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

lcerda@espoch.edu.ec

Martha Ximena Dávalos Villegas

Doctora en Matemática

Máster en Estadística Aplicada

Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

martha.davalos@espoch.edu.ec

Introducción a la Geometría Analítica del Plano

ISBN: 978-9942-42-436-5

9 789942 424365

2022

Janneth del Rocío Morocho Yaucán
Doctora en Matemática
Máster en Estadística Aplicada
Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Leónidas Antonio Cerda Romero
Doctor en Matemática
Máster en Matemática Aplicada
Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Martha Ximena Dávalos Villegas
Doctora en Matemática
Máster en Estadística Aplicada
Docente Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

ISBN: 978-9942-42-436-5

9 789942 424365

2022