Física. Fundamentos teórico-prácticos de Cinématica, Estática y Dinámica para ciencias e ingenierías

Diego Guillermo Barba Maggi
Bernardo Ezequiel Barba Barba

ESPOCH
2023

Física. Fundamentos teórico-prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica para ciencias e ingenierías

Física. Fundamentos teórico-prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica para ciencias e ingenierías

Diego Guillermo Barba Maggi

Bernardo Ezequiel Barba Barba

Dirección de Publicaciones

espoch

Física. Fundamentos teórico-prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica para ciencias e ingenierías

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Instituto de Investigaciones
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:La Caracola Editores
Diseñador de imágenes: David Medina

Impreso en Ecuador

CDU: 531
Física. Fundamentos teórico-prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica para Ciencias e ingenierías
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo Instituto de Investigaciones Dirección de Publicaciones, Año 2023
246 pp. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 978-9942-44-993-1
1. Física
2. Mecánica racional
3. Estática
4. Dinámica

DEDICATORIA

Esta obra va dedicada a nuestras familias, quienes confían en nuestro trabajo diario y son el motor que nos impulsa a compartir nuestro conocimiento, cimentando de buena manera la formación de futuros profesionales en áreas de ciencias e ingenierías.

Los autores.

GLOSARIO

$\vec{a}m$	Aceleración media.
$\vec{g}$	Aceleración de la gravedad.
α	Aceleración angular.
$\vec{a}_R$	Aceleración radial o centrípeta.
$\vec{a}_t$	Aceleración tangencial.
R	Alcance horizontal (movimiento. Parabólico).
y_{max}	Altura máxima.
b	Brazo del momento.
q	Cargas (fuerzas) distribuidas uniforme o no uniformemente.
μC	Coeficiente de rozamiento cinético.
μS	Coeficiente de rozamiento estático.
$\vec{\Delta} r$	Desplazamiento.
$d.c.l$	Diagrama del cuerpo libre.
D	Diámetro.
Dr	Distancia recorrida.
Δr	Espacio recorrido.
f	Frecuencia.
F	Fuerza.
$\vec{F}_{ext}$	Fuerza externa.
F_R	Fuerza resultante.
F_s	Fuerza de rozamiento estática.

F_c	Fuerza de rozamiento cinético.
g	Gravedad (aceleración).
ln	Logaritmo natural.
m	Masa (propiedad del cuerpo).
M	Momento.
MVTO	Movimiento.
MRU	Movimiento rectilíneo uniforme.
MRUV	Movimiento rectilíneo uniformemente variado (acelerado / retardado).
MC	Movimiento circular.
MCU	Movimiento circular uniforme.
MCUV	Movimiento circular uniformemente variado (acelerado / retardado).
MR	Movimiento rectilíneo.
N	Normal (fuerza).
T	Período (movimiento. circular).
w	Peso (fuerza).
θ	Posición angular.
rad	Radian.
r	Radio.
v	Rapidez.
R_x, R_y	Reacciones (fuerzas) en X y Y.
RPM	Revoluciones por minuto.
$\int$	Símbolo de integral.
Σ	Sumatoria.
T	Tensión (fuerza) (estática y dinámica).
t	Tiempo.
t_b	Tiempo de bajada.
t_s	Tiempo de subida.

t_{vuelo}	Tiempo de vuelo.
τ	Torque.
Δ	Variación finita.
Δt	Variación de tiempo.
d	Variación infinitesimal (derivada).
$\Delta\vec{v}_M$	Variación de velocidad en módulo.
$\Delta\vec{v}_D$	Variación de velocidad en dirección y sentido.
$\Delta\vec{v}_{MD}$	Variación de velocidad en módulo, dirección y sentido.
ΔS	Variación de posición lineal (desplazamiento lineal → módulo).
Δw	Variación de velocidad angular.
v_{max}	Velocidad máxima.
$\vec{v}m$	Velocidad media.
$\vec{v}_o$	Velocidad inicial.
W	Velocidad angular.
$\vec{u}$	Vector unitario.
$\vec{r}$	Vector Posición.
$\vec{a}$	Vector aceleración instantánea.
$\vec{v}$	Velocidad instantánea.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

PRÓLOGO

A la física se la define a menudo como la ciencia que estudia la materia, la energía y sus interacciones. Se considera que el estudio de la materia revela las propiedades fundamentales de los cuerpos que forman el universo y en base a las mismas propiedades se manifiestan las interacciones entre ellas a las que las identificamos como fuerzas o causas de los movimientos.

Para una mejor compresión, se considera subdividir el estudio de la física al menos en las siguientes seis partes:

1. Mecánica (el estudio de las fuerzas (causas) y del movimiento (efecto))

2. Física molecular y calor

3. Movimiento ondulatorio y sonido

4. Electricidad y magnetismo.

5. Luz y otras radiaciones electromagnéticas

6. Física atómica, física del estado sólido y física nuclear

Sin embargo, cada uno de estos campos no son partes separadas unas de las otras debido a que la física es solo una ciencia.

Por ejemplo, los principios y leyes que se estudian en MECÁNICA son la base de todas las otras partes de la física.

Se debe comprender el movimiento ondulatorio para entender el sonido, la luz y otras radiaciones electromagnéticas y la física atómica y nuclear.

Por ejemplo, el principio de la conservación de la energía, que estudiará en la mecánica, se aplica en la física molecular y en la termodinámica, en el movimiento ondulatorio el sonido, en la electricidad y magnetismo, en la radiación electromagnética y en la física atómica y nuclear.

En el primer campo, de "LA MECÁNICA", el principal científico que formuló leyes matemáticas que expliquen los principios físicos fue sin lugar a dudas ISAAC NEWTON, por ello se le considera el padre de la mecánica clásica. Leyes que han permitido al aplicarlas en la práctica, y utilizando la tecnología moderna, la ingeniería ha diseñado los sistemas electromecánicos, en el mundo actual que hoy nos desarrollamos resolviendo gran parte de los problemas de los seres vivos del planeta.

La obra que se presenta a continuación profundiza la Mecánica desde el punto de vista clásico como base para la formación de futuros profesionales en áreas de ciencias e ingenierías.

INTRODUCCIÓN

Esta obra de "Mecánica Clásica" considera los tres primeros aspectos de la misma: CINEMÁTICA, ESTÁTICA y DINÁMICA. Pretende, con la modesta experiencia de los autores, contribuir en la formación de estudiantes que se encaminan en carreras de ciencias e ingenierías, como un aporte hacia la búsqueda de conocimientos y principios fundamentales en este campo. Como se mencionó en el prólogo, es la base para los demás campos de la física y las aplicaciones a la realidad que nos rodea.

La obra inicia en su primer capítulo con el estudio del movimiento puro "Cinemática". Los conceptos fundamentales de las principales variables (magnitudes) a considerar en la misma.

Para que el lector, esté en la capacidad de formular las leyes (funciones), que se requieren para describir dicho movimiento puro, como también pueda hacerlo para cualquier función de dicha ley.

Como complemento, para su mejor captación, se presentan en el segundo capítulo ejercicios resueltos y propuestos del primer capítulo, con ejemplos de aplicación de cada uno de los movimientos.

A continuación, en el tercer capítulo se presenta la formulación de las tres leyes de Newton para la mecánica. Sus principales variables (magnitudes) y relaciones o funciones. Definiciones que permitirán aplicar en los siguientes capítulos.

En el capítulo cuarto se han aplicado las leyes de Newton en la "Estática", ciencia que considera las condiciones teóricas fundamentales que debe cumplir todo cuerpo en el que se aplican sistemas de fuerzas, con la condición de que el cuerpo se mantenga en "Equilibrio Estático".

Ahora sabemos que existen en forma general dos clases de movimientos: el de traslación y el de rotación. Por ende, si el cuerpo debe permanecer en "Equilibrio Estático" debemos asegurarnos de que no se mueva ni en traslación ni en rotación.

En el capítulo cinco se considera la aplicación de las leyes de Newton en el movimiento de los cuerpos, en el campo de la dinámica de traslación, definiendo las diferentes clases de interacciones o fuerzas.

Finalmente, en el capítulo seis, para la mejor comprensión del lector se presentan ejercicios resueltos y propuestos orientados principalmente a estática y dinámica.

CAPÍTULO I
1. CINEMÁTICA

En este primer capítulo se presenta la fundamentación teórico-práctica de la cinemática, orientada a la formación de profesionales en carreras de ciencias e ingenierías.

1.1. GENERALIDADES

La "MECÁNICA" es la ciencia que estudia el movimiento de los cuerpos en todos sus aspectos.

Para su mejor análisis se divide en diferentes ramas como: cinemática, estática, dinámica, mecánica de fluidos, mecánica de los sólidos, termodinámica, elasticidad, etc. Iniciaremos el estudio con la primera rama que es la CINEMÁTICA.

1.1.1. Definición

La CINEMÁTICA es la parte de la mecánica que estudia el movimiento puro de las partículas, sin considerar las causas, los efectos y las masas que se mueven.

1.1.2. Partícula

A todos los cuerpos en el universo se les considera "Partículas", es decir, como si fuesen puntos materiales o masas puntuales basados a que no se consideran las masas y las dimensiones de los cuerpos, por ejemplo una pelota será una partícula si la comparamos con las dimensiones del campo de fútbol en donde se mueve, un móvil también será una partícula, comparando sus dimensiones con las distancias entre las ciudades en las que se mueve, la tierra será una partícula en el sistema solar en el que se mueve, etc.

1.1.3. Espacio Tridimensional

Nos referimos al espacio en el que vivimos, el mismo que se puede describir con el sistema tridimensional para ubicar a las partículas que son las que se moverán en este espacio.

1.1.4. Tiempo

El tiempo es una variable (magnitud) independiente de los seres humanos, por ello no se ha logrado entender el tiempo, y no se lo puede controlar, este siempre transcurre inexorablemente sin lograr detenerlo, aumentarlo ni disminuirlo de forma diferente. Los movimientos ocurren en función del tiempo, luego al tiempo hay que medirlo; se han definido algunas variaciones del tiempo, como el año, el mes, el día, la hora, el minuto, el segundo, basados en variaciones periódicas de tiempo que ocurren continuamente. La variación de tiempo más utilizada para medir el tiempo en el sistema internacional es el segundo (s), sin embargo, si resultare ser muy pequeño se utilizará el minuto, la hora, etc. y si resultare muy grande se utilizará el milisegundo (ms), o el microsegundo (μs), etc.

Para medir la variación del tiempo Δ = variación finita (macroscópica) $\Delta t = t - t_0$. Se debe medir con un cronómetro el instante inicial t_0 (que puede ser cero) y el instante final t.

1.1.5. Sistema de referencia

Para el ser humano todo es relativo (no absoluto), por lo tanto, para considerar que una partícula está en movimiento (movimiento) o en reposo relativos, se debe elegir el sistema de referencia con respecto al cual se describirá el movimiento o reposo relativos.

El sistema de referencia es una partícula que, acompañada de sus ejes tridimensionales, en el plano, o en una dirección cualesquiera constituye el sistema de referencia.

Una partícula puede estar en movimiento con relación a un sistema de referencia, y estar en reposo con relación a otro sistema de referencia.

Por ejemplo, una persona que está viajando en un automóvil estará en movimiento con respecto a un árbol que está fijo en la tierra, pero estará en reposo con respecto al auto en el que está viajando.

Un poste estará en reposo con respecto a una casa que está en reposo respecto a la tierra, pero estará en movimiento con respecto a un automóvil que está viajando.

Entonces, el movimiento, o reposo relativo depende del sistema de referencia elegido. El sistema de referencia más adecuado es aquel que facilita la descripción del movimiento de otras partículas. Y si a usted le dan la libertad de escoger el sistema de referencia, puede elegir un sistema de referencia que esté en reposo con respecto a la tierra en donde vivimos. El mismo puede ser un poste, un árbol, una casa, una ciudad, etc., que sabemos que están en reposo con respecto a la tierra.

Ahora si le ponen como condición un sistema de referencia que esté en movimiento relativo como un auto que esté viajando, usted solo debe aceptar esta condición y considerar este, el sistema de referencia.

1.1.6. Vector posición

Si ya hemos elegido el sistema de referencia (Figura 1.1) estamos en condición de definir la posición $\vec{r}$ de la partícula que está en movimiento, en cualquier punto de la trayectoria.

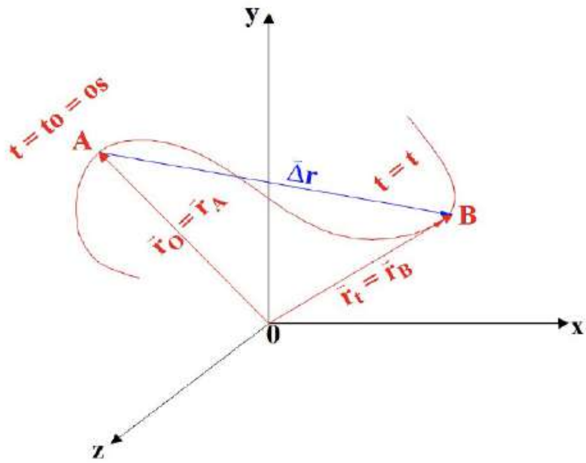


Figura 1.1. Vector posición-desplazamiento.

1.1.7. Trayectoria

Es el camino que sigue la partícula en su movimiento, en cualquier instante (tiempo), podemos definir las posiciones.

$\vec{r}_0$ = posición inicial en el instante inicial ($t_0 = 0s$), solo al tiempo inicial se le puede dar cualquier valor conveniente (que puede ser cero), es decir, poner en cero el cronómetro.

El vector posición en función del tiempo $\vec{r}_t$ permite localizar la partícula en cualquier instante, y se puede expresar de mejor manera, en función de vectores base.

$$\vec{r}_t = \vec{r}_x i + \vec{r}_y j + \vec{r}_z k \tag{1.1}$$

A la ecuación 1.1 se la llama “ecuación de movimiento”.

Para definir la ecuación anterior se deben determinar las componentes rectangulares, que también serán funciones del tiempo:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_x &= f(t) \\ \vec{r}_y &= f(t) \\ \vec{r}_z &= f(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

A las relaciones que figuran en la ecuación 1.2 se les considera las ecuaciones del movimiento. Si nos dan las ecuaciones del movimiento, estamos en condiciones de describir el movimiento puro en todos sus detalles.

Ejemplo. Dadas las siguientes ecuaciones.

$r_x = 3 - 2t$ (1)

$r_y = 2\text{t} - t^2$ (2)

$r_z = 5$ (3)

En donde el tiempo t se mide en segundos s y r_x, r_y, r_z en metros m. Describir el movimiento.

Con las ecuaciones dadas se puede determinar la posición de la partícula para cualquier instante t cuando $t = 0 \Rightarrow rx_0 = 3m : y_0 = 0m : rz_0 = 5m$ constantes así cuando $t = 1s \Rightarrow rx1 = 3m : ry1 = 1m : rz1 = 5m$ (constante)

1.1.8. Ecuación de la Trayectoria

Esta ecuación nos permite dibujar la trayectoria seguida por la partícula durante el movimiento, y es una relación entre (rx, ry, rz), por ejemplo:

$$ry = f\,(rx,\ rz) \tag{1.3}$$

La ecuación 1.3 representa la trayectoria. En el ejemplo para determinar la ecuación de la trayectoria se elimina la variable tiempo t despejando de la 1 el tiempo t)y remplazando en la 2.

$t = 1{,}5 - 0{,}5rx$ en (2)

$ry = 2\ (1{,}5 - 0{,}5\ rx) - (1{,}5 - 0{,}5\ rx)^2$

$ry = 3 - rx - (2{,}25 - 1{,}5\ rx + 0{,}25\ rx^2)$

$ry = 0{,}75 + 0{,}5\ rx - 0{,}25\ rx^2$ que corresponde a la ecuación trayectoria.

1.1.9. Desplazamiento

Corresponde a la variación (Δ) de la posición ($\vec{r}$).

$$\vec{\Delta}r = \vec{r}_t - \vec{r}_0 \qquad (1.4)$$

En la figura 1.1se puede definir gráficamente al vector desplazamiento ($\vec{\Delta}r$) que corresponde al vector que inicia en $A(t = t_0 = 0)$ y termina en $B = (t = t)$ y es la diferencia entre ($\vec{r}_B - \vec{r}_A$) y que significa el vector posición relativo de B respecto a A.

$$r_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{\Delta}r = AB$$

Se puede concluir diciendo también que el vector desplazamiento no depende de la forma de la trayectoria, si no únicamente de la posición final y de la posición inicial.

1.1.10. Espacio Recorrido (Δr)

Se considera "espacio recorrido" al módulo del desplazamiento:

$$\Delta r = |\vec{\Delta}r| = \text{espacio recorrido} \qquad (1.4\ a)$$

1.1.11. Distancia Recorrida (*Dr*)

Se define como distancia recorrida a la longitud de la trayectoria.

$$Dr = \text{longitud de la trayectoria} \qquad (1.4\ b)$$

Por lo general $Dr \geq \Delta r$

Solo la $Dr = \Delta r$ cuando la trayectoria sea una línea recta en un solo sentido.

El espacio recorrido (Δr) no depende de la forma de la trayectoria, la distancia recorrida (Dr) depende de la trayectoria.

1.1.12. Movimiento Relativo

Se dice que una partícula está en movimiento relativo, cuando varía su posición al transcurrir el tiempo, con respecto a un sistema de referencia.

1.1.13. Reposo Relativo

Diremos que una partícula está en reposo cuando su posición permanece invariable (fija) respecto a un sistema de referencia al transcurrir el tiempo.

1.1.14. Velocidad ($\vec{v}$)

A la relación o cociente entre el vector desplazamiento (variación de posición =>$\vec{\Delta} r$) yvariación del tiempo Δt se le define como el vector velocidad.

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta} r}{\vec{\Delta} t} \tag{1.5}$$

La velocidad se mide en $SI = m/s$

En otros sistemas: pies/s; km/h; milla/h, etc.

Al módulo de la velocidad se le denomina "rapidez"

Como la velocidad $\vec{v}$ se define respecto a la variación del tiempo, se podrían elegir infinitas variaciones de tiempo, y por ende resultarían infinitas velocidades; ahora pueden ser útiles únicamente velocidades referidas a los extremos de variaciones de tiempo, una considerando un tiempo macroscópico (finito => Δ = variación finita) y otra velocidad para una variación microscópica o infinitesimal =d (derivada). De esta forma definiremos dos velocidades; una para una variación finita Δt, nos resultará la velocidad media $\vec{V}m$, y otra para una variación infinitesimal dt obteniendo de esta manera la velocidad instantánea $\vec{v}$.

Velocidad media $\vec{V}m$

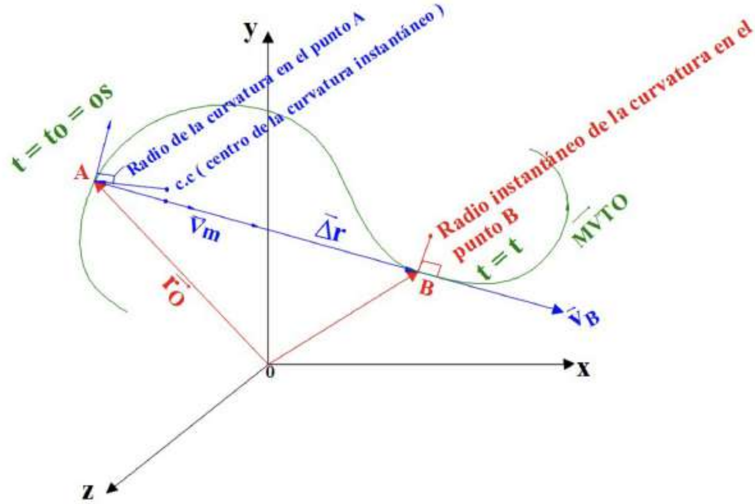


Figura 1.2. Representación gráfica de la velocidad media e instantánea $\vec{V}m$.

La velocidad media, definida para una variación finita del tiempo $\Delta t > 0$, resulta una velocidad media $\vec{V}m$ con las siguientes características:

- No es la velocidad real de la partícula en una variación instantánea del tiempo, por ende, es una velocidad teórica.
- Es una velocidad uniforme (en módulo, dirección y sentido), es constante y está en la dirección del desplazamiento $\vec{\Delta}r$.
- Esta velocidad ideal se utiliza para transformar teóricamente un movimiento variado (con velocidad real variada) en un movimiento teórico uniforme (v = constante)

Por ejemplo: los movimientos reales ocurren por lo general con velocidades muy variadas, en módulo, dirección y sentido, y a veces resultan dificultosos describirlos, pero, si definimos la velocidad media $\vec{V}m$ dividiendo el desplazamiento total $\vec{\Delta}r$ para el tiempo total transcurrido Δt, se definirá la velocidad teórica media $\vec{V}m$ de la siguiente manera:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta} r}{\vec{\Delta} t} \tag{1.6}$$

Esta velocidad transforma un movimiento variado en un movimiento teórico con $\vec{V}m$ = uniforme, que es muy fácil de describirlo teóricamente (movimiento. uniforme). Ahora se requiere definir la velocidad real de la partícula, la que tiene el móvil en una variación instantánea del tiempo, para la partícula de la figura 1.2 esta velocidad se llama:

Velocidad instantánea $\vec{V}$

Esta velocidad si resulta ser la velocidad real, porque se considera en una variación infinitesimal del tiempo *dt*.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \tag{1.7}$$

La variación finita Δ cuando tiende a cero (→ 0) se convierte en la variación infinitesimal (d → derivada) Por lo tanto, la velocidad instantánea se define como la derivada de la posición $\vec{d}r$ sobre la derivada del tiempo *dt* (Ecuación 1.7)

Desde el punto de vista geométrico, la dirección de la velocidad instantánea $\vec{V}$ que correspondería a la dirección de la velocidad media $\vec{V}m$ cuando tiende a cero, resulta ser la tangente a la trayectoria en el punto en donde se determina la velocidad instantánea punto A o B de la figura 1.2 el sentido es el mismo del movimiento. La dirección que es tangente a la trayectoria en un punto de cualquier trayectoria resulta ser perpendicular al radio instantáneo de curvatura en el punto que trazamos la tangente, si la trayectoria es recta, la tangente a la trayectoria coincide con la línea recta (trayectoria) que es la dirección de la velocidad instantánea [1].

1.1.15. Vector variación de velocidad ($\vec{\Delta} v$)

Los movimientos reales por lo general ocurren con velocidad variada, es decir, que es importante entender el vector variación de velocidad. Como sabemos, la velocidad es un vector, por ende, tiene módulo, dirección y sentido. Para hablar de la variación de un vector, podría variar únicamente el módulo o la dirección y sentido (van juntos) o variar módulo, dirección y sentido, por lo tanto, hay tres posibilidades de variación de velocidad (vector):

Variación de velocidad en modulo ($\vec{\Delta} v_M$) manteniendo constante dirección y sentido

En esta condición, como la dirección de la velocidad $\vec{v}$) geométricamente es tangente a la trayectoria, para que la dirección y sentido permanezca uniforme, la trayectoria generada, sería una línea recta, como la figura 1.3

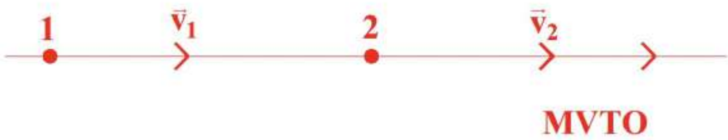


Figura 1.3. Variación solo del módulo de la velocidad.

Si elegimos dos puntos cualesquiera 1 y 2 las velocidades respectivas, se indican en la figura 1.3 $\vec{v}1$ y $\vec{v}2$ notamos que tienen igual dirección y sentido.

$$(\overrightarrow{\mu\, v_1} = \overrightarrow{\mu\, v_2}) = \overrightarrow{\mu_v}$$

Pero son diferentes en módulo. En este caso, la variación de velocidad $\vec{\Delta} v_M$ será:

$$\Delta\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = v_2\, \overrightarrow{\mu_v} - v_1\, \overrightarrow{\mu_v} = (v_2 - v_1)\, \overrightarrow{\mu_v}$$

En la figura figura 1.4 se muestra:

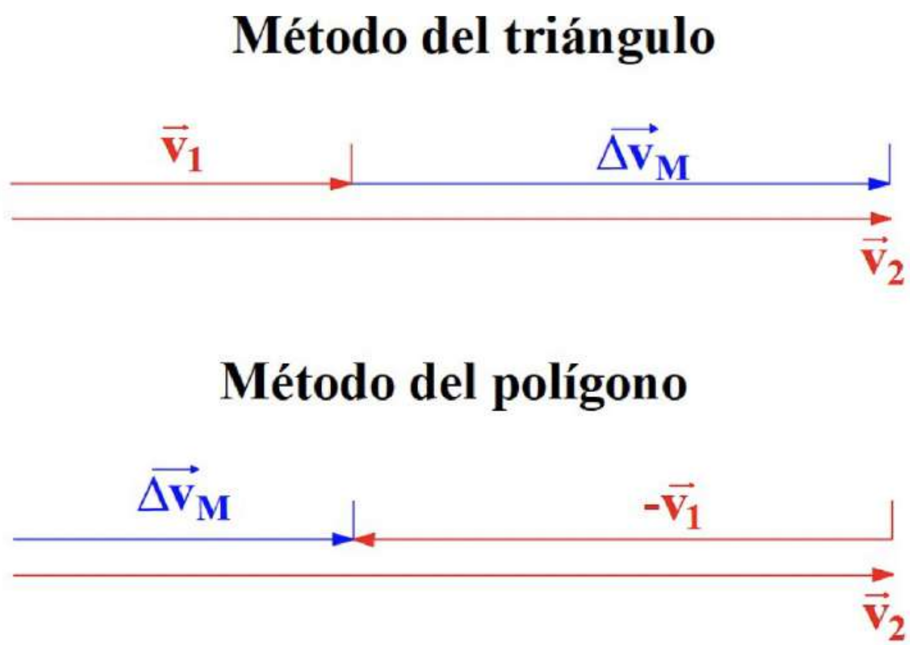


Figura 1.4. Determinación gráfica del vector $\vec{\Delta} v_M$.

El vector $\vec{\Delta} v_M$ se ha determinado en forma gráfica por el método del triángulo y del polígono

(Figura 1.4), como lo podemos notar $\vec{\Delta} v_M$, su dirección coincide con la misma dirección

de los vectores velocidades instantáneos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, lo que significa también que la dirección del vector variación de velocidad en módulo $\vec{\Delta} v_M$ es "tangente a la trayectoria".

Variación de velocidad en dirección y sentido ($\vec{\Delta} v_D$) manteniendo constante el módulo

Para que la velocidad varíe constantemente en dirección y sentido, la trayectoria necesariamente debe ser una circunferencia, como se indica en la figura 1.5.

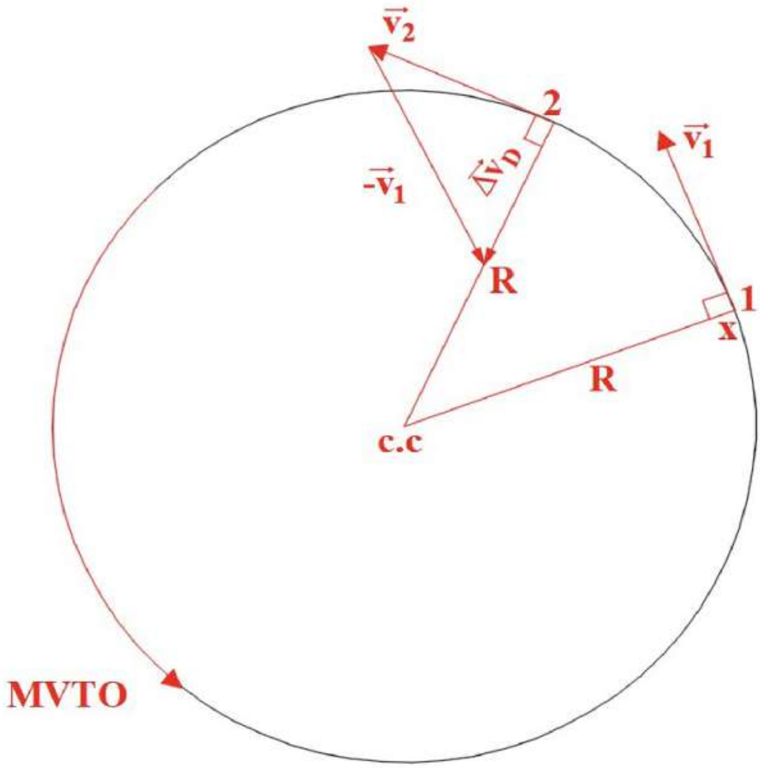


Figura 1.5. Determinación gráfica del vector variación de velocidad en dirección y sentido.

En la misma, se han graficando las velocidades instantáneas en 1 y 2: $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente.

Estos vectores tienen el mismo módulo $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, pero diferentes direcciones y sentidos, o sea unitarios $\mu\vec{v}_1 \neq \mu\vec{v}_2$.

$$\Delta\vec{v}_D = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = v\ (\mu\vec{v}_2 - \mu\vec{v}_1)$$

En lamisma figura1.5 se ha determinado gráficamente el vector $\Delta\vec{v}_D$ por elmétodo del polígono $\vec{v}_2 + (-\ \vec{v}_1) = \Delta\vec{v}_D$. El mismo tiene una dirección y sentido en dirección al “centro de curvatura (c.c.), o está en la dirección del radio de la curvatura (R)”.

Variación de velocidad en modulo dirección y sentido ($\vec{\Delta}_{VMD}$)

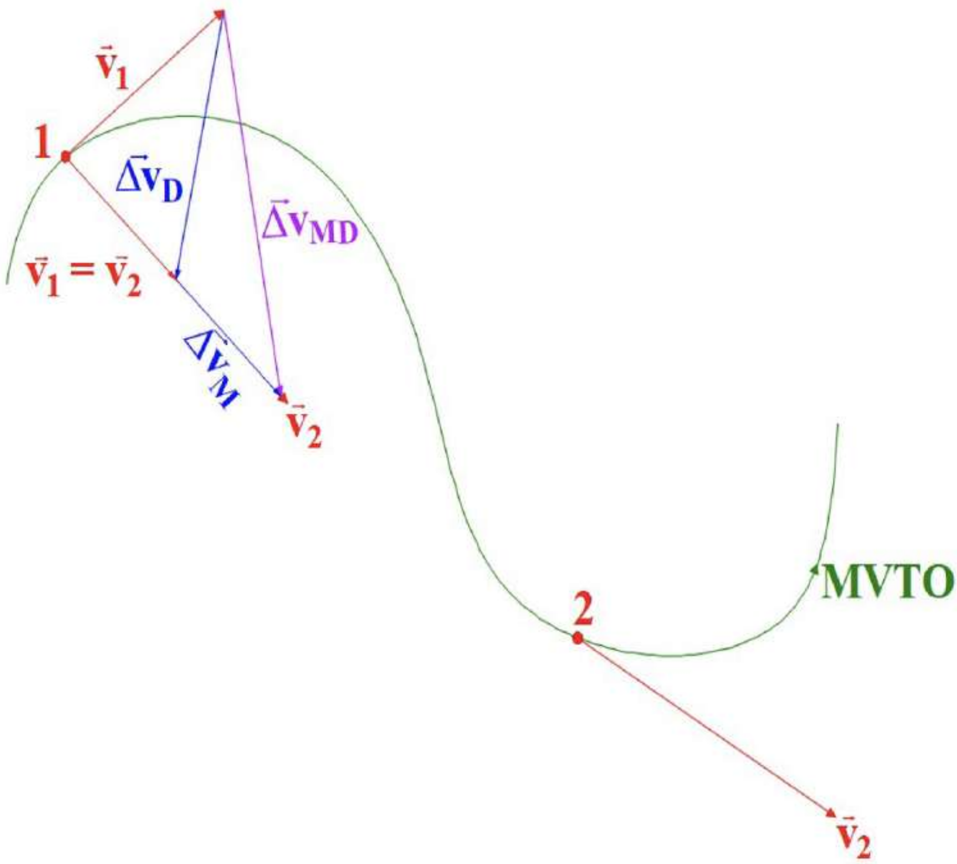


Figura 1.6. Determinación gráfica del vector variación de velocidad en módulo, dirección y sentido.

En este caso, la trayectoria generada sería una curva abierta cualesquiera como la de la figura 1.6; en la misma se han elegido dos puntos 1 y 2, y se han definido gráficamente sus velocidades instantáneas $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, las mismas que difieren en todo: en módulo, dirección y sentido. En este caso, el vector $\Delta\vec{v}_{MD}$ se ha determinado en la figura 1.6 por el método del triángulo. Además, se ha demostrado que el vector $\Delta\vec{v}_{MD}$ es la suma de $\Delta\vec{v}_D$ y $\Delta\vec{v}_M$, luego:

$$\Delta\vec{v}_{MD} = \Delta\vec{v}_M + \Delta\vec{v}_D \tag{1.8}$$

1.1.16. Aceleración ($\vec{a}$)

La razón entre el vector variación de velocidad $\Delta\vec{v}$ y la variación del tiempo $\Delta\vec{t}$ se denominavector aceleración.

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.9)$$

Las unidades en el SI están representadas por: m/s².

Análogamente a la velocidad se pueden definir dos aceleraciones extremas, la una para una Δt >> 0, y resultaría la aceleración teórica o media:

Aceleración media ($\vec{a}_m$)

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}_{MD}}{\Delta t} \qquad (1.10)$$

Reemplazando la ecuación 1.8 en la ecuación 1.10 tenemos:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_M} + \Delta\overrightarrow{v_D}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_M}}{\Delta t} + \frac{\Delta\overrightarrow{v_D}}{\Delta t} = \overrightarrow{a_{mt}} + \overrightarrow{a_{mR}} \qquad (1.11)$$

$$\overrightarrow{a}_{mt} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_M}}{\Delta t} \qquad (1.11)\text{ a}$$

$$\overrightarrow{a}_{mR} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_D}}{\Delta t} \qquad (1.11)\text{b}$$

Donde:

$\vec{a}_{mt}$ = aceleración media tangencial, porque tendría la misma dirección y sentido de la variación de la velocidad en modulo (y es tangente a la trayectoria).

$\vec{a}_{mR}$ = aceleración media centrípeta, radial, normal paseé la misma dirección del vector variación de velocidad en dirección y sentido (y este se dirige al centro de curvatura, o está en la dirección del radio de curvatura, o en la dirección de la normal).

Aceleración instantánea ($\vec{a}$)

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{a_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \tag{1.12}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_R \tag{1.13}$$

Donde:

$\vec{a}_t$ = aceleración instantánea tangencial.

$\vec{a}_R$ = aceleración instantánea radial o centrípeta.

1.2. VARIABLES DEL MOVIMIENTO

Resumiendo, las variables que permiten describir la cinemática (movimiento puro) de una partícula se indican en la figura 1.7.

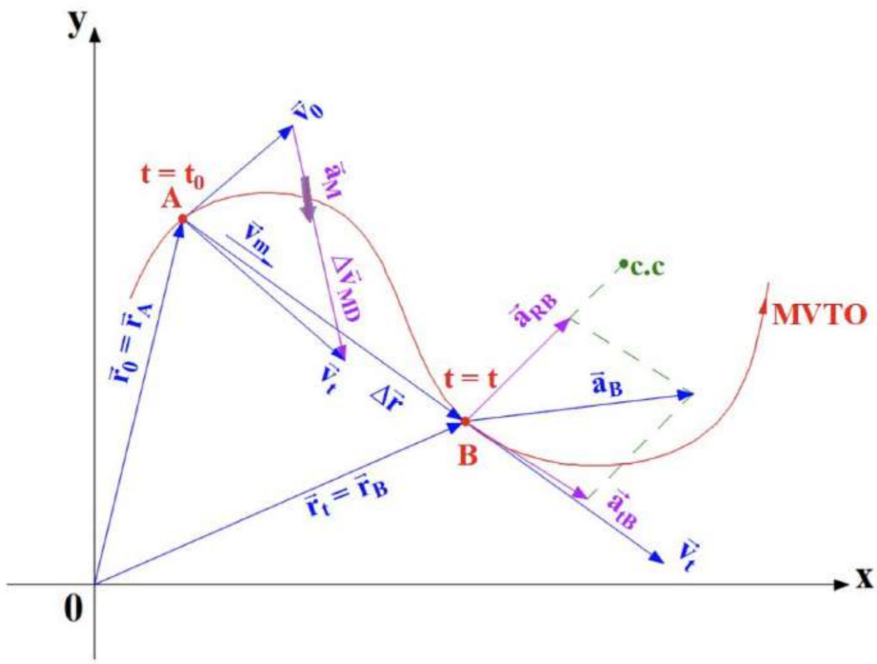


Figura 1.7. Variables del movimiento.

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r}_t - \overrightarrow{r_0} \tag{1.4}$$

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \tag{1.6}$$

$$\overrightarrow{v_t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \tag{1.7}$$

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_{MD}}}{\Delta t} = \overrightarrow{a}_{mt} + \overrightarrow{a}_{mR} \tag{1.11}$$

$$\overrightarrow{a}_{mt} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_M}}{\Delta t} \tag{1.11a}$$

$$\overrightarrow{a}_{mR} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_D}}{\Delta t} \tag{1.11b}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} \tag{1.12}$$

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_{tB}} + \overrightarrow{a_{RB}} \tag{1.13}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$$

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{\mu_{\Delta r}} = \overrightarrow{\mu v_m}$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

$$\Delta \overrightarrow{v_{MD}} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$$

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_{MD}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_M}}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_D}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{a_m} = \overrightarrow{a_{mt}} + \overrightarrow{a_{mR}}$$

$$\overrightarrow{\mu a_m} = \overrightarrow{\mu\,\Delta v_{MD}}$$

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_{t1}} + \overrightarrow{a_{R1}}$$

$$\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_{t2}} + \overrightarrow{a_{R2}}$$

1.2.1. Clasificación de los movimientos

A los movimientos los clasificaremos desde dos puntos de vista por su trayectoria y el comportamiento del vector velocidad. Ver la figura 1.8 según la trayectoria y la figura 1.9 según el comportamiento del vector velocidad.

$$\text{Trayectoria}\begin{cases}\text{Rectilineos}\\ \text{Curvilineos}\begin{cases}-\text{Circular}\\ -\text{Parabólico}\\ -\text{Elíptico}\\ -\text{Hiperbolico}\end{cases}\end{cases}$$

Figura 1.8. Clasificación del movimiento según la trayectoria

$$\text{Vector velocidad}\begin{cases}\text{Uniforme (COTE.)}\begin{cases}v=0\ (\text{reposo relativo})\\ v\neq 0\ (\text{Movimiento Uniforme})\end{cases}\\ \text{Variable}\begin{cases}\text{Varía solo el módulo}\left(\Delta\overrightarrow{v_{M}}\right)\\ \text{Varía solo la dirección y sentido}\left(\Delta\overrightarrow{v_{D}}\right)\\ \text{Varía en módulo, dirección y sentido}\left(\Delta\overrightarrow{v_{MD}}\right)\end{cases}\end{cases}$$

Figura 1.9. Clasificación del movimiento según el comportamiento del vector velocidad.

1.3. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Son aquellos movimientos con trayectoria rectilínea, en la misma que la dirección de la velocidad debe ser uniforme o constante, lo único que puede cambiar de la velocidad es el módulo, de acuerdo con el comportamiento del módulo de la velocidad se clasifican como se indica en la figura 1.10

$$\text{Módulo Velocidad } |\vec{v}| \begin{cases} \text{Uniforme} \begin{cases} v = 0 \left(\text{Reposo relativo}\right) \\ v \neq 0 \left(\text{MVTO.RECTILÍNEO UNIFORME}\right) \end{cases} \\ \text{Variable} \begin{cases} \Delta \overrightarrow{v_M} = \text{Uniforme(M.R.U.V)} \\ \Delta \overrightarrow{v_M} \neq \text{Uniforme} \left(\text{MVTO.RECTILÍNEO VARIABLE}\right) \end{cases} \end{cases}$$

Figura 1.10. Clasificación del movimiento rectilíneo según el módulo de la velocidad.

1.3.1. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

En este movimiento el módulo de la velocidad $|\vec{v}| = v$ es uniforme o constante, por ende, la variación de velocidad $\Delta\vec{v}_M = 0$ y la aceleración $\vec{a} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_M}}{\Delta t} = 0$.

$t = t_0 = 0s$

0 = inicial

F = final

t = t

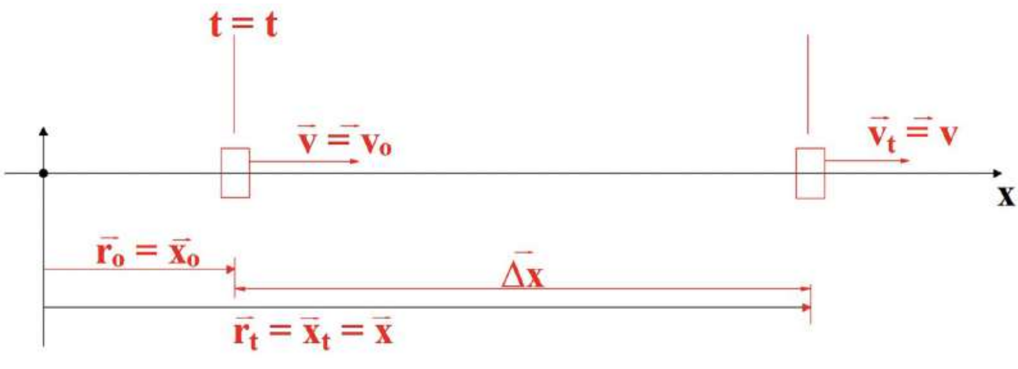


Figura 1.11. Variables del MRU.

Sabemos que:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} => \overrightarrow{\Delta x} = \vec{v}\ t_{OF} => \vec{x} - \vec{x_0} = \vec{v} \cdot t_{OF} =>$$

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{v}\ t_{OF} \tag{1.14}$$

$$\overrightarrow{v} = cote. \neq 0 \tag{1.15}$$

$$\overrightarrow{a} = 0 \tag{1.16}$$

Las ecuaciones que indicamos son las principales leyes de este movimiento; las mismas se pueden escribir también en forma escalar, debido a que, por tener una trayectoria rectilínea, todos los vectores tienen la misma dirección y sentido:

$$\overrightarrow{\mu x_0} = \overrightarrow{\mu_x} = \overrightarrow{\mu_{\Delta x}} = \overrightarrow{\mu_v}$$

Por ende, se puede escribir la ecuación 1.14:

$$x\overrightarrow{\mu_x} = x_0\overrightarrow{\mu_{x0}} + v\overrightarrow{\mu_v}\, t_{OF}$$

Los vectores unitarios se simplifican por ser iguales y tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &x = x_0 + v\, t_{OF} \\ &x - x_0 = vt \\ &\Delta x = x_{OF} = vt \end{aligned}\right\} \tag{1.14a}$$

$$v = cote \tag{1.15b}$$

$$a = 0 \tag{1.16a}$$

$\Delta x = x_{OF}$ = módulo del desplazamiento o espacio recorrido

Las ecuaciones precedentes o leyes del MRU se pueden expresar también en forma gráfica.

Ver figura 1.12

Gráficas del MRU

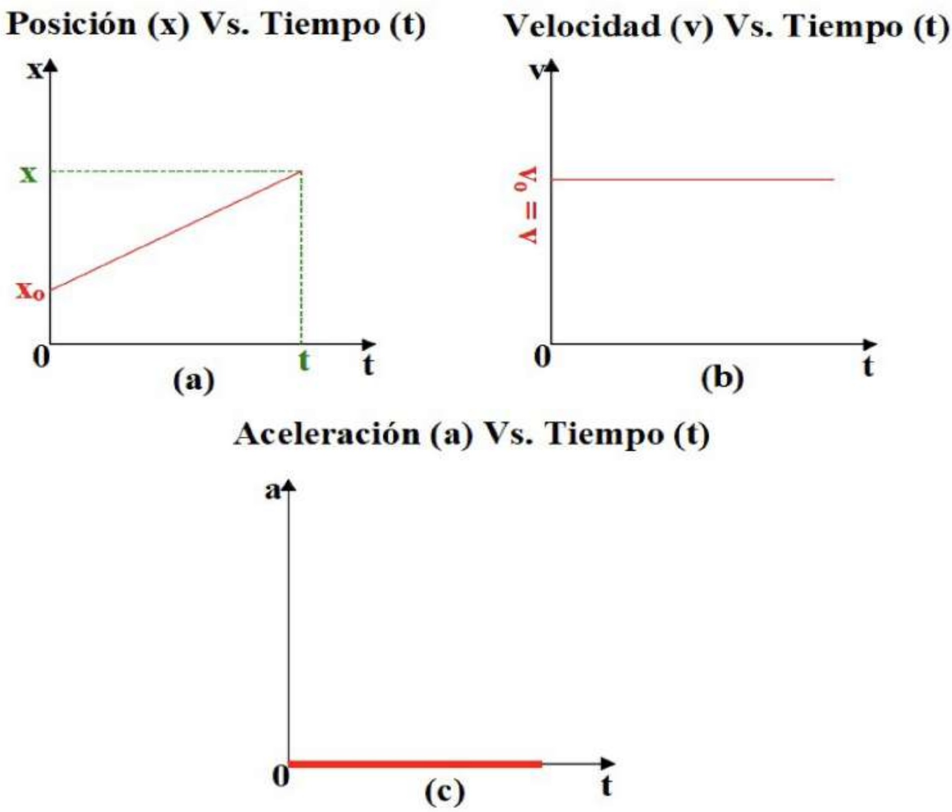


Figura 1.12. Leyes del MRU en forma gráfica.

La gráfica 1.12 (a) x vs t es una recta inclinada porque es la gráfica que corresponde a la ecuación 1.14 (a), que es una función lineal y, por lo tanto, la pendiente de esta recta significa la velocidad (v) que es constante.

La gráfica 1.12 (b) v vs t corresponde a una recta horizontal sobre el eje de tiempo, si la velocidad es positiva (sentido hacia la derecha, por ejemplo) y por debajo del eje del tiempo, si la velocidad fuese negativa (sentido hacia la izquierda, por ejemplo).

La pendiente de esta recta horizontal sería cero, que corresponde a la aceleración.

El área bajo la gráfica v vs t significa el espacio recorrido (o módulo del desplazamiento) si está el área sobre el eje del tiempo (el área es positiva) y el desplazamiento ocurrió hacia la derecha; si el área está por debajo del eje tiempo (el área es negativa) y el desplazamiento (módulo) sería negativo, es decir se movió hacia la izquierda.

Suma algebraica

$$\sum A\ v\ \ vs\ t = \ espacio\, total\, recorrido = \left|\overrightarrow{\Delta x}\right| total \tag{1.17}$$

Suma geométrica

$$\sum A\ v\ \ vs\ t = longitud\, de\, la\, trayectoria = \ distancia\, recorrida \tag{1.18}$$

Suma algebraica

$\sum$ = suma algebraica, considerando los sentidos (+) y (–)

Suma geométrica

$\sum$ = suma geométrica, sin considerar los sentidos (todos +)

1.3.2. Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

En este movimiento la trayectoria es una recta, pero el módulo de la velocidad $|\vec{v}| = v$ es variable, es decir, existe variación de la velocidad $\Delta\vec{v}$, pero esta variación es uniforme o constante, diferente de cero.

$\Delta\vec{v}_M$ = uniforme (cote.) ≠ 0

Si dividimos esta cote $\Delta\vec{v}_M$ para el tiempo transcurrido correspondiente obtendremos la aceleración $\vec{a}$ que es uniforme (cote.) ≠ 0

$$\vec{a} = \text{cote} \neq 0$$

En este movimiento de trayectoria rectilínea no existe variación de la dirección y sentido de la velocidad $\Delta\vec{v}_D = 0$ por ende la aceleración radial o centrípeta $\vec{a}_R = 0$ lo que significa que la aceleración total $\vec{a}$ corresponde a la aceleración tangencial o lineal.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_R \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_t = cote \neq 0$$

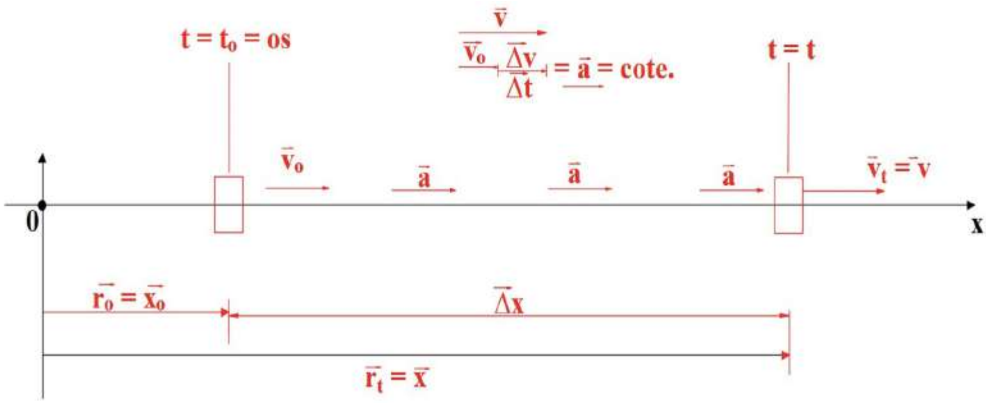


Figura 1.13. Variables en el MRUV.

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t_{OF}} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\, t_{OF}$$

Esta relación vectorial la podemos expresar en forma escalar debido a que por tener trayectoria rectilínea, los vectores tienen común la dirección y sentido, por ende:

$$\overrightarrow{\mu x_0} = \overrightarrow{\mu_x} = \overrightarrow{\mu_{\Delta x}} = \overrightarrow{\mu\, v_0} = \overrightarrow{\mu_v} = \pm\overrightarrow{\mu_a}$$

La ecuación vectorial será:

$$v\overrightarrow{\mu_v} = v_0\,\overrightarrow{\mu v_0} + a\,\overrightarrow{\mu_a}\, t_{OF}$$

Los vectores unitarios se simplificarían entre sí y se podría expresar en forma escalar:

$$v = v_0 + a\,t \qquad (1.18\ a)$$

Esta ecuación $v = f(t)$ es una función lineal que podría representarse en forma gráfica (Figura 1.14)

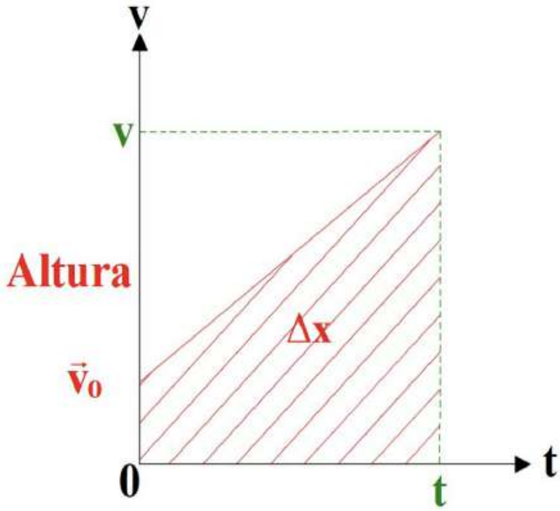


Figura 1.14. Gráfica de v = f (t) para el MRUV.

En la misma, el área bajo esta función gráfica es el espacio recorrido o módulo del desplazamiento:

$$\Delta x = x - x_0$$

Determinando geométricamente esta área (de un trapecio)

$$A = \Delta x = \left(\frac{\text{base menor} + \text{base mayor}}{\text{Dos}}\right) \text{Altura} \qquad (1.18\text{ b})$$

$$\Delta x = \left(\frac{v_0+v}{2}\right) t$$

$$\Delta x = \left(\frac{v_0+v_0+at}{2}\right) t$$

$$\Delta x = \left(\frac{2v_0}{2} + \frac{at}{2}\right) t$$

$\Delta x = v_0\, t + \frac{1}{2}at^2$ o la posición:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

También de la ecuación 1.18 (a) $t = \frac{v-v_0}{a}$ en 1.18 en 1.18 (b)

$$\Delta x = \left(\frac{v_0+v}{2}\right)\left(\frac{v-v_0}{a}\right)$$

$$2a\Delta x = v^2 - {v_0}^2 => v^2 = {v_0}^2 + 2a\Delta x$$

Y de la ecuación (1.18) b

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_0 + v}{2}$, resumiendo las ecuaciones (leyes) del MRUV

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_0\, t_{OF} \pm \tfrac{1}{2} a\, {t_{OF}}^2 \\ \Delta x = x_{0F} &= v_0\, t_{OF} \pm \tfrac{1}{2} a\, {t_{OF}}^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

$$v_F = v_0 \pm a\, t_{OF} \tag{1.20}$$

$$a = cote. \neq 0 \tag{1.21}$$

$${v_F}^2 = {v_0}^2 \pm 2a x_{0F} \tag{1.22}$$

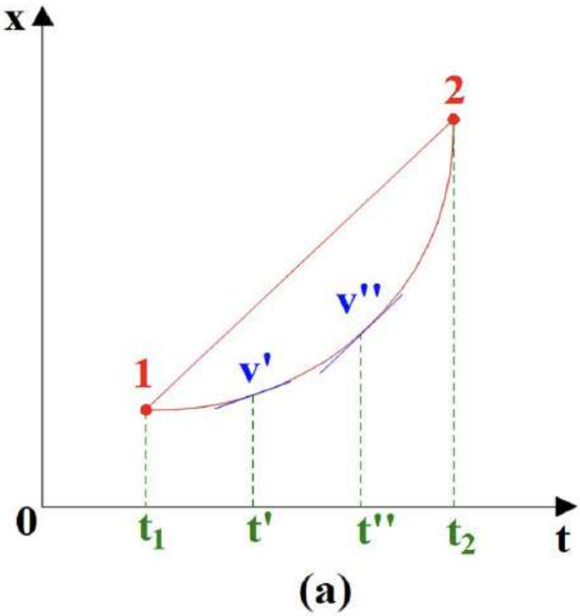
$$v_m = \frac{x_{OF}}{t_{OF}} = \frac{v_0 + v_F}{2} \tag{1.23}$$

En la ecuación 1.23 la fórmula $v_m = \frac{x_{OF}}{t_{OF}}$ se utiliza para cualquier movimiento, sea uniforme, variado o combinado, pero la fórmula de la velocidad media (v_m). $v_m = \frac{v_0 + v_F}{2}$ solo seutilizará cuando el movimiento es uniformemente variado. Las ecuaciones para este movimiento se las puede utilizar en forma escalar, pero también en forma vectorial (por ser movimiento rectilíneo): $\vec{\mu}\,\Delta x = \vec{\mu}\, v_0 = \vec{\mu}_v = \vec{\mu}_{vm} = \pm \vec{\mu}\, a$

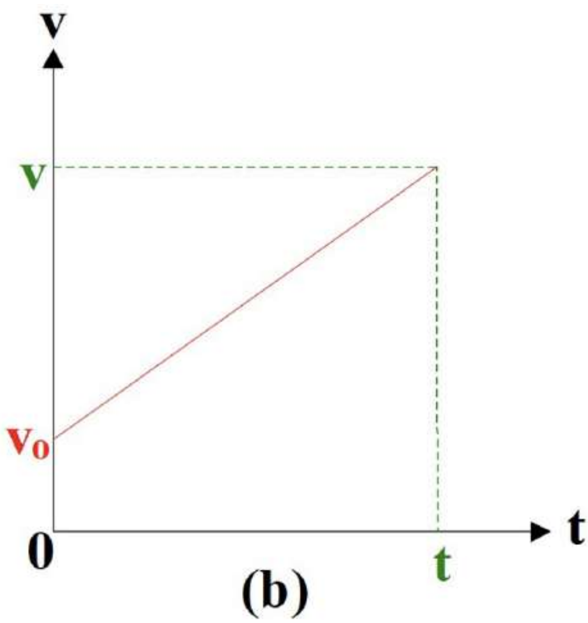
Como este movimiento es variado, la velocidad $\vec{v}$ puede variar aumentando o disminuyendo. Cuando $\vec{v}$ aumenta: $v_F > v_0 => a = \frac{v_F - v_0}{t} => (+)$. Y el movimiento, se llama acelerado A.

Cuando $\vec{v}$ disminuye $v_F < v_0 => a = \frac{v_F - v_0}{t} => (-)$, el movimiento se llama (retardado o desacelerado) => R, luego el movimiento es acelerado cuando el sentido de la aceleración será el mismo del movimiento. Y cuando el sentido de la aceleración es contrario al movimiento el movimiento es retardado.

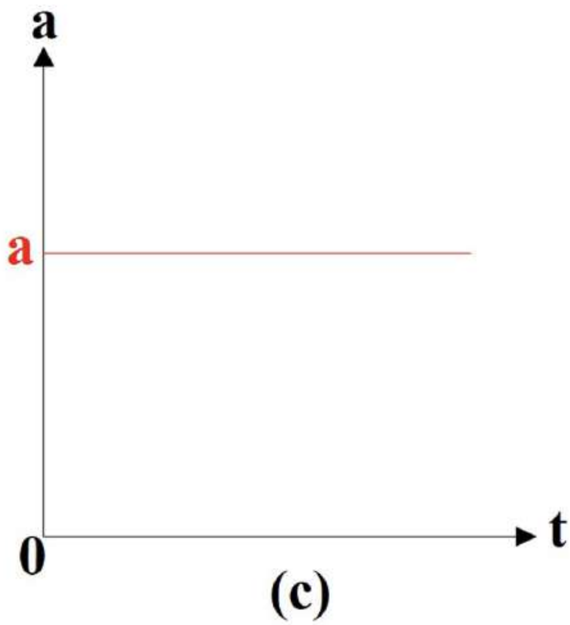
Gráficas de MRUV



Posición (x) Vs. tiempo (t)



Velocidad (v) Vs. Tiempo (t)



Aceleración (a) Vs. Tiempo (t)

Figura 1.15. Gráficas del MRUV.

La gráfica figura 1.15 (a) es una curva, porque representa a la ecuación cuadrática 1.19, en esta gráfica si unimos dos puntos con una recta 1 y 2, la gráfica se transforma a la del MRU y la pendiente es la velocidad media v_m entre t_1 y t_2.

También en cualquier instante t' o t'' la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto será la velocidad instantánea en dicho instante.

En la gráfica de la figura 1.15 (b), la pendiente de la recta significa la aceleración y el área bajo esta gráfica el espacio (módulo del desplazamiento) recorrido.

En la figura 1.15 (c), la gráfica es una recta horizontal porque la aceleración es constante, no depende del tiempo t.

Un caso práctico del MRUV, es la caída y subida libre de los cuerpos.

1.3.3. Caída libre de los cuerpos

Cuando se lanza verticalmente hacia arriba, hacia abajo o se lo deja caer desde el reposo a una pelota, una piedra, una bala, o cualquier otro objeto, estos se moverán verticalmente (eje Y) en forma libre, en este caso decimos que el movimiento es libre porque durante el mismo no interviene el ser humano, solo lo hace en el instante inicial, en el cual le da a la partícula una velocidad inicial v_0 , y luego el cuerpo se mueve únicamente influenciado por las leyes de la naturaleza en el lugar en donde se mueva, si está dentro de la atmósfera terrestre actuará sobre la partícula, la aceleración de la gravedad, que es el cambio de velocidad en función del tiempo que provoca la tierra a todas las masas que estén dentro de su campo gravitacional. El valor de esta aceleración nos indican los científicos que tiene un valor aproximado de un módulo igual a 9,8 m/s2 y que su dirección es vertical y su sentido hacia el centro de la tierra (abajo) en las proximidades de la superficie terrestre.

$\vec{a} = \vec{g} = -9,8\vec{j}m/\mathrm{s}^2$

Módulo $a = g = 9,8\ \mathrm{m/s^2}$

Entonces, significa que un cuerpo que se esté moviendo libremente hacia arriba, disminuirá su velocidad Δv = 9,8 m/s en cada variación de tiempo Δt = 1s, en cambio sobre una partícula que esté bajando (caída) la velocidad aumentará en 9,8 m/s en cada segundo que transcurra.

En la figura 1.16, si lanzamos una partícula desde el origen $t = t_0 = 0$; $y = y_0 = 0$ dándole una velocidad inicial v_0 hacia arriba, pero automáticamente actuará sobre ella la aceleración de la gravedad, que es un vector vertical hacia abajo $a = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ entonces el cuerpo disminuirá su velocidad a razón de 9,8m/s en cada segundo, y por ende se detendrá en una posición M.

La velocidad será nula $v_M = 0$ y como la aceleración continúa actuando la partícula iniciará su movimiento., hacia abajo, pero aumentando la velocidad a razón de 9,8 m/s en cada segundo.

La caída será acelerada y la subida retardada. Las ecuaciones para este movimiento., son las mismas del MRUV

Considerando que: $a = g$ (gravedad) y la posición x denotaremos con y altura.

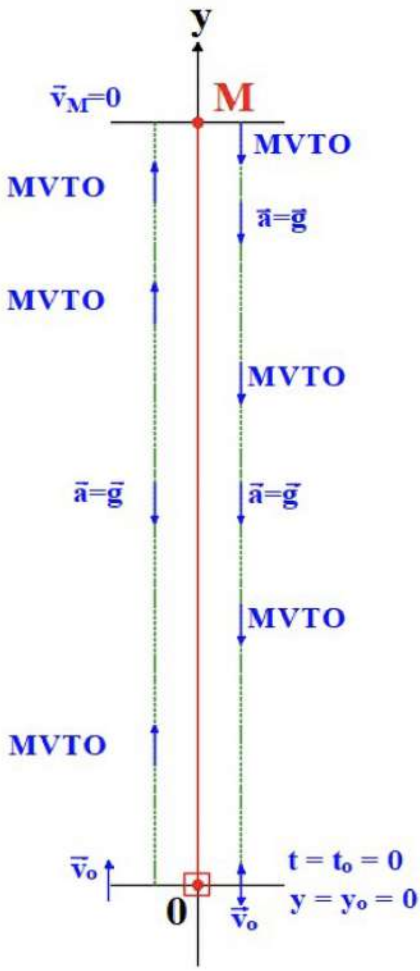


Figura 1.16. Subida y caída libre de los cuerpos.

$$Y_{oF} = v_0 t_{OF} \pm \frac{1}{2} g t_{OF}{}^2 \tag{1.24}$$

$$v_F = v_0 \pm g t_{OF} \tag{1.25}$$

$$a = g = 9{,}8 \mathrm{m/s^2} \tag{1.26}$$

$$v_F{}^2 = v_0{}^2 \pm 2gY_{oF} \tag{1.27}$$

$$v_M = \frac{y_{OF}}{t_{OF}} = \frac{v_0 + v_F}{2} \tag{1.28}$$

En un movimiento desacelerado o retardado, ocurrirá que en algún instante la partícula llegará al reposo lo que no ocurre en un movimiento., acelerado, por lo tanto, es importante saber evaluar, el instante (ts), tiempo de subida y la posición (altura máxima) en que esto ocurre. Para

ello aplicamos las ecuaciones entre las posiciones (OM) movimiento; retardado O = Inicial; M = Final; tOM =ts tiempo de subida aplicando la ecuación 1.25

$v_M = v_0 - g\, t_{oM}$, como $v_M = 0$

$$t_{oM} = ts = \frac{v_0}{g} \tag{1.29}$$

Ahora aplicando la ecuación 1.27

$v_M{}^2 = v_0{}^2 - 2g\, Y_{oM}$, como $v_M = 0$

$$Y_{oM} = Y\,\text{máx} = \frac{v_0{}^2}{2g} \tag{1.30}$$

Luego, también podemos evaluar el tiempo de “M” a “O”, es decir el tiempo en la caída *tb*, aplicando las Ecuaciones, entre M (inicial) y O´(final) ⇒ M.R.U. V.A según la ecuación 1.25 tenemos:

$v_0' = v_M + g\, t_{Mo}'$, como $v_M = 0$

$$t_{Mo} = tb = \frac{v_0'}{g} \tag{1.31}$$

v_0 en la ecuación 1.29 es el módulo de la velocidad inicial cuando lanzamos la partícula hacia arriba, y v_0' es el módulo de la velocidad que adquiere en “O” en la caída. Determinamos estos módulos tanto cuando sube, como cuando baja y tenemos: De “O” a “M” (M.R.U.V.R) aplicando la ecuación 1.27 tenemos:

$v_M{}^2 = v_0{}^2 - 2g\,Y_{oM}$, como $v_M = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gY_{oM}}$

Ahora de “M” a “O” M.R.U.V.A. aplicando la misma ecuación:

$v_0\prime^2 = v^2{}_M + 2g\,Y_{Mo}$, como $v_M = 0 \Rightarrow v_0{}' = \sqrt{2g\,Y_{Mo}}$

Como $Y_{oM} = Y_{Mo} \Rightarrow v_0 = v_0{}'$

Por ende, el tiempo de subida:

$t_{oM} = ts$ (Ecuación 1.29)

Es el mismo tiempo de caída:

$t_{Mo} = tb$ (Ecuación1.31)

$ts = tb$

(Tiempo subida es el mismo tiempo de caer desde la misma altura)

Llamamos tiempo de vuelo [t vuelo] a la suma de estos dos tiempos [2]:

$$t\,vuelo = ts + tb = \frac{2v_0}{g} \tag{1.32}$$

1.3.4. Aplicaciones del cálculo diferencial e integral en la cinemática

Cuando se trata de resolver cualquier movimiento., variado (incluso con aceleraciones variables) se deben utilizar el cálculo diferencial e integral.

Sabemos que las principales funciones que permiten describir el movimiento puro (cinemática) son, la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo t.

$$x = f(t) \tag{1.33}$$

$$v = f(t) \tag{1.34}$$

$$a = f(t) \tag{1.35}$$

Para describir el movimiento, cualquiera de estas funciones se las debe conocer por cualquier método, o sea, si tenemos como información (o dato) la posición en función del tiempo (x vs t), las demás se las debe determinar así:

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{1.36}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.37}$$

Como: $a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx}$; como $v = \frac{dx}{dt}$

$$a = \frac{vdv}{dx} \tag{1.38}$$

Ahora, si la información que tenemos (Dato) es por ejemplo la aceleración (a), para determinar las demás funciones, hacemos lo siguiente:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

Como dv = derivada de la velocidad (valor infinitesimal) para determinar la velocidad instantánea v debemos sumar todas las dv, esto significa integrar ($\int$) los dos miembros de la ecuación anterior, o sea:

$$\int dv = \int adt \Rightarrow v = \int adt + C1 \tag{1.39}$$

Resolviendo la integral de la ecuación 1.39 se obtiene la $v = f(t)$ y luego aplicamos:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dx = \int vdt \Rightarrow x = \int vdt + C2 \tag{1.40}$$

También se puede utilizar la ecuación (1.38)

$a = \frac{vdv}{dx} \Rightarrow \int vdv = \int adx$

$$\frac{v^2}{2} = \int adx + C3 \tag{1.41}$$

C1, C2, C3, son constantes de integración, en las integrales indefinidas, las mismas que se determinan para valores iniciales de las variables.

Aplicamos estos métodos para deducir las ecuaciones del MRUV

1.3.5. Deducción ECS. MRUV aplicando cálculo diferencial e integral

En este movimiento además de conocer que la trayectoria es una recta (eje, x por ejemplo) sabemos que la aceleración a es constante, diferente de cero.

$a = cote \neq 0$ (datos).

Sabemos que: $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int dv = \int adt = a \int dt$

$v = at + \mathrm{C1}$

Cuando $t = t_0 = 0s \Rightarrow v = v_0$, reemplazando tenemos:

$v_0 = a\,(0) + \mathrm{C1} \Rightarrow \mathrm{C1} = v_0$ luego tenemos:

$v = v_0 + at$

Que es la velocidad v en función del tiempo (t).

Ahora sabemos que:

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dx = \int vdx \Rightarrow x = \int vdt + C2$

Reemplazando el valor de $v = f(t)$ tenemos que:

$$x = \int (v_0 + at)\,dt + C2 = \int v_0 dt + \int at\,dt + C2$$

Integrando tenemos:

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C2$$

Cuando: $t = t_0 = 0s \Rightarrow x = x_0$,reemplazando tenemos:

$x_0 = v_0\,(0) + \frac{1}{2}a(0)^2 + C2 \Rightarrow C2 = x_0$, luego tenemos:

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Si aplicamos la ecuación 1.41

$\frac{v^2}{2} = \int a dx + C3$; como a = *cote* tenemos:

$\frac{v^2}{2} = ax + C3$; si $x = x_0 \Rightarrow v = v_0$, reemplazando tenemos:

$\frac{{v_0}^2}{2} = ax_0 + C3 \Rightarrow C3 = \frac{{v_0}^2}{2} - ax_0$, luego tenemos:

$$\frac{v^2}{2} = ax - ax_0 + \frac{{v_0}^2}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{v^2}{2} = a\,(x - x_0) + \frac{{v_0}^2}{2} \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{{v_0}^2}{2} = a\Delta x$$

$v^2 = {v_0}^2 + 2a\Delta x$ Δx = espacio recorrido = x_{0F}

Como hemos notado se han obtenido las ecuaciones, para este movimiento, aplicando estos métodos, que son mucho más generales, y permiten resolver cualquier movimiento [3].

1.4. MOVIMIENTOS EN UN PLANO

1.4.1. Movimiento parabólico

Cuando lanzamos una partícula, hacia arriba, o hacia abajo, o le dejamos caer desde el reposo, el movimiento, es vertical libre. Pero si a la velocidad inicial $\vec{v}_0$ le damos una dirección diferente, la trayectoria es una curva que ocurre en un plano del espacio en el que vivimos.

θ_0 = ángulo de lanzamiento o de tiro (es el ángulo formado por el eje x (+) y la velocidad inicial ($\vec{v}_0$) si $\theta_0 \neq 90°$ y 270°, el movimiento será parabólico (Figura 1.17).

Ecuaciones movimiento parabólico:

Velocidad inicial $\vec{v}_0$

$$\vec{v_0} = v_0 x\,\vec{i} + v_0 y\vec{j} \tag{1.42}$$

$$v_0 x = v_0 \, cos \, \theta_0 \qquad \text{(1.42 a)}$$

$$v_0 y = vv_0 \, sen \, \theta_0 \qquad \text{(1.42 b)}$$

Posición $\vec{r}_t$

$$\vec{r_t} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{1.43}$$

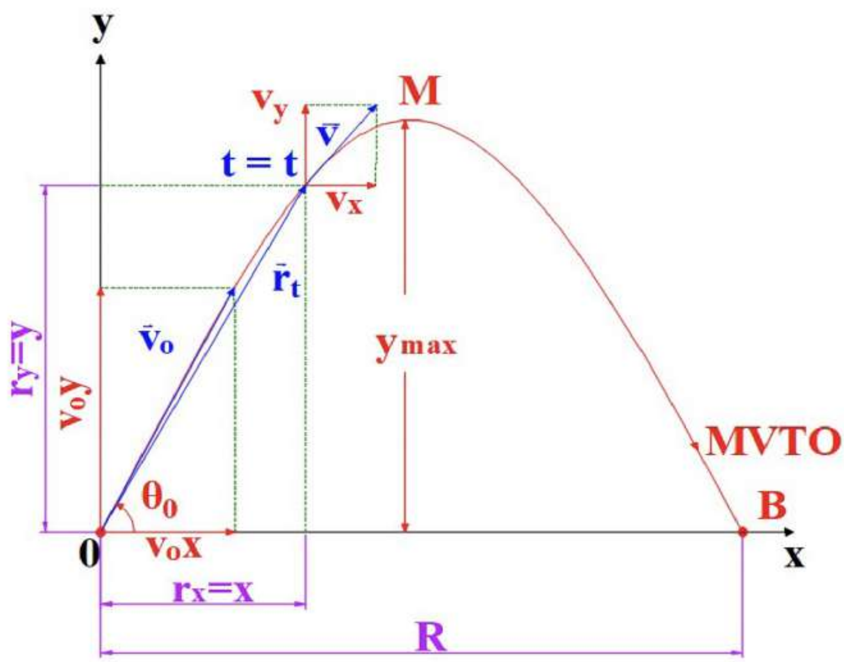


Figura 1.17. Trayectoria movimiento. parabólico y sus variables.

Para determinar la posición ($\vec{r}_t$) en cualquier instante t, se deben calcular las coordenadas rectangulares (x, y) en cualquier instante. Para ello, este movimiento (parabólico) se resuelve, considerando el principio de independencia de los movimientos. Es decir, lo vamos a considerar como si fuesen dos movimientos. que ocurren independientemente, pero en forma simultánea, (en el mismo tiempo t) uno en "x" y otro en "y".

Movimiento en "x"

En esta dirección, el movimiento, será: MRU debido a que la partícula se mueve libremente y por ende actuaría la aceleración de la gravedad $-9{,}8\vec{j}m/s^2$, y esta no tiene componente en el eje horizontal $ax = 0$

$vx = v_0x = v_0 \cos \theta_0$ = constante $\neq 0$, y como consideramos $r_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$; $y_0 = 0$, luego el espacio recorrido, sería el módulo de la posición en cualquier instante:

$$x = v_0 \cos \theta_0 t \qquad (1.43\text{ a})$$

Movimiento en "y"

Como la partícula se mueve libremente en "y", actúa la gravedad (hacia abajo), entonces la aceleración sería $-9{,}8\vec{j}m/s^2$, (hacia abajo), por ende, el movimiento en "y" es: MRUV

Se debe considerar retardado, cuando la velocidad inicial tiene una componente en "y" hacia arriba, y se le considerará acelerado cuando la velocidad inicial tiene una componente vertical hacia abajo, o cuando la velocidad inicial en y v_0y es cero, (lanzamiento horizontal: $\theta_0 = 0$).

Para el caso de la figura 1.17, la velocidad inicial en "y" $v_0y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0$, es hacia arriba, por ende, el movimiento vertical es retardado, y la componente en "y" de la posición es:

$$y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (1.43\text{ b})$$

Reemplazando las ecuaciones 1.43 (a) y (b) en la ecuación 1.43 tenemos:

$$\overrightarrow{r_t} = v_0 \cos\,\theta_0\, t\, \vec{i} + \left(v_0\, sen\,\theta_0\, t - \tfrac{1}{2} g t^2\right) \vec{J}$$

$$\overrightarrow{r_t} = v_0 \cos\,\theta_0\, t\, \vec{i} + v_0\, sen\,\theta_0\, t\, \vec{J} - \tfrac{1}{2} g\, \vec{J}\, t^2$$

$$\overrightarrow{r_t} = \left(v_0 \cos\,\theta_0\, \vec{i} + v_0\, sen\,\theta_0\; \vec{J}\right) t - \tfrac{1}{2} g\, \vec{J}\, t^2$$

La ecuación nos queda:

$$\overrightarrow{r_t} = \overrightarrow{v_0} t + \tfrac{1}{2} \vec{a}\; t^2 \qquad (1.43\ c)$$

Esta ecuación, es análoga a la Ec. (1.19) del MRUV con la diferencia que esta ecuación 1.43 (c) es vectorial y no se la puede escribir en forma escalar porque las direcciones y sentidos de los vectores no son iguales como en el caso de la ecuación 1.19.

Ecuación de la trayectoria

Si de la ecuación 1.43 (a) despejamos el tiempo t y reemplazamos en la ecuación. 1.43 (b) tendremos:

$$t = \tfrac{x}{v_0 \cos\,\theta_0}$$

$$y = v_0\, sen\,\theta_0 \tfrac{x}{v_0\, \cos\,\theta_0} - \tfrac{1}{2} g \left(\tfrac{x}{v_0\, \cos\,\theta_0}\right)^2 \Rightarrow$$

$$y = \tan\,\theta_0\, x - \tfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta_0} x^2$$

Ahora como θ_0, g y v_0 son constantes:

$a = \tan\,\theta_0\;\; ;\;\; b = \tfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta_0}$ tenemos:

$$y = ax - bx^2 \qquad (1.44)$$

Que es la ecuación de la parábola cartesiana, y con ello demostramos que este movimiento, teóricamente es parabólico.

Velocidad instantánea ($\vec{v}$)

La velocidad instantánea en cualquier instante es un vector cuya dirección geométrica es tangente a la trayectoria en dicho instante (t), al mismo que lo podemos expresar en vectores base (Figura 1.17)

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \tag{1.45}$$

En donde las componentes rectangulares serán:

$$\text{En “}x\text{”: MRU: } vx = v_0 \cos \theta_0 \tag{1.45 a}$$

$$\text{En “3”: MRUVR: } vy = v_0 \, sen \, \theta_0 - gt \tag{1.45 b}$$

Si reemplazamos las ecuaciones 1.45 (a) y 1.45 (b) en 1.45 tenemos:

$$\vec{v} = v_0 \cos \theta_0 \vec{i} + (v_0 \, sen \, \theta_0 - gt)\vec{j}$$
$$\vec{v} = v_0 \cos \theta_0 \vec{i} + v_0 \, sen \, \theta_0 \vec{j} - g\vec{j}t$$

Como:

$\vec{v_0} = v_0 \cos \theta_0 \vec{i} + v_0 \, sen \, \theta_0 \vec{j}$ y $\vec{a} = -g\vec{j}$, tenemos:

$$v = \vec{v}_0 + a\,t \tag{1.45)c}$$

Esta ecuación 1.45 (c) es análoga a la ecuación 1.20 del MRUV con la diferencia que esta ecuación vectorial para este movimiento, no se puede expresar en forma escalar, como si lo podemos hacer para el MRUV

Altura máxima ($Ymax$)

Para determinar la fórmula de la altura máxima utilizamos la ecuación 1.43 (b) y la aplicamos entre O y M (punto de altura máxima donde $v_{MY} = 0$).

$$Y_{OM} = v_0 \, sen \, \theta_0 \cdot t_{oM} - \tfrac{1}{2} g \, t_{oM}{}^2$$

Determinamos el tiempo de 0M (en alcanzar la altura máxima)

$$v_{MY} = v_0 \, sen \, \theta_0 - g \; t_{oM}$$

Como $v_{MY} = 0$, tenemos:

$$t_{oM} = \frac{v_0\, sen\, \theta_0}{g} \Rightarrow t\, subida \tag{1.46}$$

Luego reemplazando tendremos:

$$Y_{oM} = v_0\, sen\, \theta_0\, \frac{v_0\, sen\, \theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0\, sen\, \theta_0}{g} \right)^2$$
$$Y_{oM} = \frac{{v_0}^2\, sen^2\, \theta_0}{g} - \frac{1}{2} \frac{{v_0}^2\, sen^2\, \theta_0}{g}$$

$$Y_{OM} = Y_{max} = \frac{{v_0}^2\, sen^2\, \theta_0}{2g} \tag{1.47}$$

Alcance horizontal (R)

En el movimiento parabólico, cuando se lanza una partícula con una componente de la velocidad vertical hacia arriba, luego de cierto tiempo (tiempo de vuelo) la partícula alcanza un punto (B) que se encuentra en el mismo plano o nivel del lanzamiento, en donde la altura $y_{oB} = 0$ y a la distancia horizontal de “0” a “B”, se lo denomina alcance horizontal (R), su fórmula la podemos obtener aplicando la ecuación 1.43 a entre O y B, tenemos:

$$x_{oB} = v_0\, cos\, \theta_0\, t_{oB}$$

Para determinar el tiempo (toB) aplicamos la ecuación 1.43 (b) entre O y B (tiempo de vuelo).

$$y_{oB} = v_0\, sen\, \theta_0\, t_{oB} - \tfrac{1}{2} g t^2 oB$$

Como $y_{oB} = 0$ tenemos:

a. $t_{oB}{}' = \frac{0}{v_0\, sen\, \theta_0 - \frac{1}{2} g} = 0$

b. $v_0\, sen\, \theta_0 - \frac{1}{2} g\, t_{oB} = \frac{0}{t_{oB}} = 0$

$$t_{oB}{}'' = \frac{2 v_0\, sen\, \theta_0}{g} \Rightarrow t\, vuelo \tag{1.48}$$

Reemplazando el segundo valor tenemos:

$X_{oB} = \frac{v_0 \cos\theta_0 \, 2v_0 \, sen\,\theta_0}{g}$

$X_{oB} = \frac{{v_0}^2}{g}(2\cos\theta_0 \, sen\,\theta_0) = R$

Como trigonométricamente:

$2\cos\theta_0 \, sen\,\theta_0 = sen\,2\theta_0$

Tenemos:

$$R = \frac{{v_0}^2 \, sen\,2\,\theta_0}{g} \tag{1.49}$$

Si se requiere saber el alcance horizontal máximo para una misma velocidad inicial (v_0), este alcance dependerá de la función seno, y como sabemos la función seno es máxima, es decir = uno (1) cuando el ángulo es de 90° = $\frac{\pi}{2}$

$sen\,90° = 1$ entonces: $2\,\theta_0 = 90° \Rightarrow$

$\theta_0 = \frac{90°}{2} \Rightarrow \theta_0 = 45°$

Aceleración ($\vec{a}$)

La aceleración en este movimiento libre, para cuerpos que están dentro de la atmósfera terrestre, es la aceleración de la gravedad, en cualquier instante, pero como sabemos, por ser la trayectoria una curva abierta (parábola), la velocidad debe variar tanto en módulo generando la aceleración tangencial $\vec{a}t$, como también en dirección y sentido generando la aceleración centrípeta o radial $\vec{a}_R$, luego:

$$\vec{a} = \vec{g} = \vec{a}t + \vec{a}_R \tag{1.50}$$

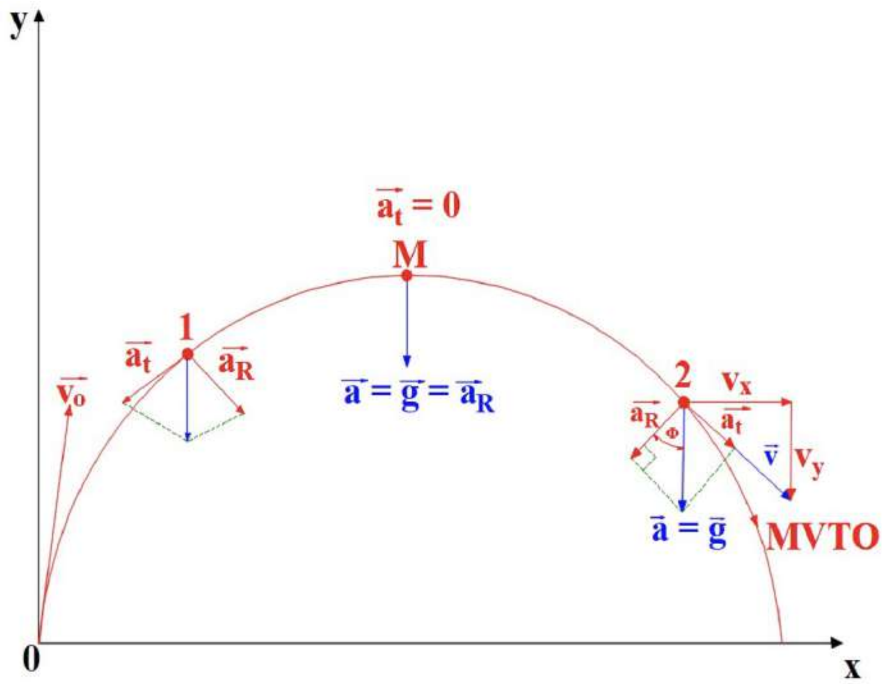


Figura 1.18. Componentes de la aceleración: $\vec{a}t$ y $\vec{a}R$.

En esta relación, la aceleración total $\vec{a}$ será constante y corresponde a la gravedad $\vec{g}$, y la suma de $\vec{a}t + \vec{a}_R$ será siempre uniforme o *cote* $\vec{a} = -g\vec{j}$, pero la aceleración tangencial $\vec{a}_t$ y radial $\vec{a}_R$ serán variables para cada instante como se muestra en la figura 1.18, estas aceleraciones variables las podemos determinar así mediante los siguientes modelos matemáticos:

$$\vec{a}_t = at \cdot \vec{\mu}_{at} \qquad (1.50)\ a$$

$$\vec{a}_R = a_R \cdot \vec{\mu}_{aR} \qquad (1.50)\ b$$

En el triángulo rectángulo en el punto (2) de la Fig. 1.18., tenemos:

$$a_t = g\ sen\ \theta \qquad (1.50)\ c$$

$$a_R = g\ cos\ \theta \qquad (1.50)\ d$$

$$\tan\theta = \frac{vy}{vx} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{vy}{vx}\right) \qquad (1.50)\ e$$

Luego los módulos de $|\vec{a}_t|$ y $|\vec{a}_R|$ estarían definidos con el ángulo θ , dado a través de la ecuación 1.50, donde solo se requiere la dirección de la velocidad instantánea, a través de vy y vx .

Los vectores unitarios de la aceleración tangencial y radial se determinarían según se expone a continuación:

Vector unitario de la aceleración tangencial ($\vec{\mu}_{at}$)

Este unitario es el mismo de la velocidad instantánea $\vec{v}$

$$\overrightarrow{\mu_{at}} = \overrightarrow{\mu_v} = \frac{\vec{v}}{v} \qquad (1.50)\ f$$

y ya está definida la velocidad instantánea $\vec{v}$

Vector unitario de la aceleración radial ($\vec{\mu}_{aR}$)

$$\overrightarrow{\mu_{aR}} = \frac{\overrightarrow{a_R}}{a_R} \qquad (1.50)\ g$$

Como ya conocemos, la aceleración tangencial $\vec{a}t$ y la aceleración total es la gravedad $\vec{a} = -9{,}8\,\vec{J}m/s^2$ entonces, despejando $\vec{a}_R$ tenemos:

$$\vec{a} = \vec{a}t + \vec{a}_R \Rightarrow \vec{a}_R = \vec{a} - \vec{a}t$$

Y así podemos calcular el vector unitario $\mu\vec{a}_R$ con la ecuación 1.50 (g), y estarían definidas las aceleraciones tangencial y radial, según las ecuaciones 1.50 (a) y (b).

1.4.2. Movimiento circular (M.C)

Este movimiento ocurre en una trayectoria circular en un plano (ejemplo xy), y el sentido puede ser horario, o como en este caso antihorario (Figura 1.19).

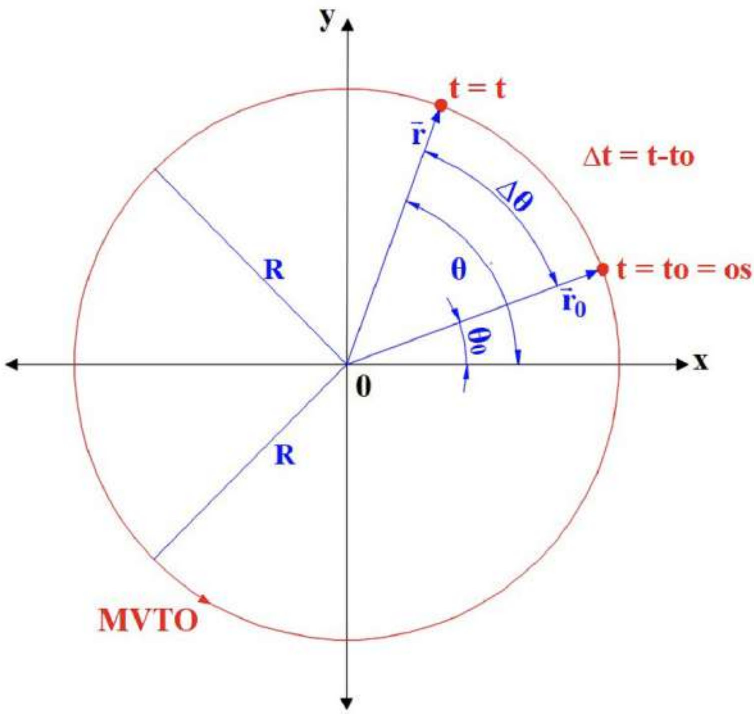


Figura 1.19. Movimiento Circular.

Si una partícula se está moviendo en esta trayectoria, podemos posicionarla en cualquier instante ($t_0 = 0$) o $t = t$ (cualesquiera) definiendo una partícula de referencia (origen del sistema xy) con un vector (posición lineal) que empieza en "0" y termina localizando a la partícula en ese instante o punto (posiciones lineales $\vec{r}_0$ y $\vec{r}$ Figura 1.19)

Ahora, por tratarse de un movimiento periódico que ocurre en una misma trayectoria, notamos que el radio de giro (R) está girando en ángulos, y si logramos localizar este radio, que lo podríamos hacer con un ángulo respecto a un eje de referencia (Eje x positivo) y girando los ángulos en sentido antihorario, se puede localizar a la partícula, a través de la posición angular θ, es decir en este movimiento. circular, se deben definir variables lineales y angulares.

Variables angulares

Posición angular θ

θ_0 = Posición angular inicial.

θ = Posición angular final.

Desplazamiento angular $\Delta\theta$

La variación de posición angular $\Delta\theta = \theta_{0F}$

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \tag{1.51}$$

Las unidades en el SI corresponden a radián = *rad* pero también se utilizan los grados (°) y revoluciones (vueltas completas = *rev*)

1 *rev* = 360° = 2π *rad*

π = PI ≅ 3,1416

Velocidad angular (*W*)

Para que haya ocurrido un desplazamiento angular $\Delta\theta$ también varió el tiempo Δt, la razón entre estas variaciones es la velocidad angular:

$$W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.52}$$

Y se mide en el SI: $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ o también en revoluciones por minuto

$$\left(rpm = \frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{min}} \times \frac{2\pi\mathrm{rad}}{\mathrm{rev}} \times \frac{\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}}\right)$$

Aceleración angular (α)

$$\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{1.53}$$

Y se mide en el SI: $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$

Movimiento circular uniforme (M.C.U)

En este movimiento la partícula describe desplazamientos angulares iguales en tiempos proporcionalmente iguales, es decir, la velocidad angular es constante:

$W = uniforme\ (cote) \neq 0$

$\Delta\theta = \theta_{OF} = W\ t_{OF}$

$$\theta_{OF} = W\ t_{OF} \tag{1.54}$$

$$W = cote \neq 0 \tag{1.55}$$

$$\alpha = 0 \tag{1.56}$$

Período (T)

Llamamos período T al tiempo que tarda una partícula en girar una vuelta completa (o revolución). Si $\Delta t = T$

$$\Delta\theta = 2\,\pi\,\text{rad} \quad W = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi\,\text{rad}}{W} \tag{1.57}$$

El período T en el SI se mide en segundos s.

Frecuencia (F)

Se define como frecuencia f al inverso del período T:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{W}{2\pi\,\text{rad}} \tag{1.58}$$

La frecuencia f en el SI se mide en $\frac{1}{s} = s^{-1} = Hz$, al inverso del segundo se le llama Hercio (Hz).

Con el objeto de medir de mejor manera el período T, y la frecuencia f se puede determinar el tiempo total t que tarda en girar un número n de revoluciones, con estos datos el período T y la frecuencia f se determinarían así:

$$T = \frac{\Delta t}{n} \tag{1.59}$$

$$f = \frac{n}{\Delta t} \tag{1.60}$$

Mientras el período T físicamente es el tiempo que tarda una partícula en girar una revolución, la frecuencia f es el número de revoluciones que gira en un segundo (unidad de tiempo del SI).

Movimiento circular uniformemente variado (movimiento circular uniformemente variado.)

Cuando la partícula gira con velocidad angular W variando en aumento o en disminución en forma uniforme (*cote*.) se dice que el movimiento circular es uniformemente variado cuando la velocidad angular aumenta uniformemente será acelerado A y cuando la velocidad angular disminuye uniformemente será desacelerado o retardado R.

$$\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta T} = cote. \neq 0 \Rightarrow W_F - Wo = \alpha t_{OF} \Rightarrow W_F = Wo + \alpha t_{OF}$$

La velocidad angular media Wm también se la puede calcular así:

$$Wm = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{Wo + W_F}{2}$$

$\Delta\theta = \theta_{OF} =$ desplazamiento angular $= \theta_F - \theta_0 \Rightarrow$

$$\frac{\theta_F - \theta_0}{t_{OF}} = \frac{Wo + Wo + \alpha t_{OF}}{2}$$

$$\theta_F = \theta_0 + \left(\frac{2Wo}{2} + \frac{\alpha t_{OF}}{2}\right) t_{OF}$$

$$\theta_F = \theta_0 + Wot_{OF} + \frac{1}{2}\alpha t_{OF}{}^2$$

O también:

$$\Delta\theta = \left(\frac{Wo + W_F}{2}\right)\left(\frac{W_F - Wo}{\alpha}\right)$$

$2\alpha\ \Delta\theta = W_F^2 - W_O^2 \Rightarrow W_F^2 = W_O^2 + 2\alpha\ \theta_{OF}$, resumiendo, las ecuaciones en parámetros angulares son: movimiento circular uniformemente variado .

$$\theta_{OF} = Wot_{OF} \pm \frac{1}{2}\alpha t_{OF}{}^2 \tag{1.61}$$

$$W_F = Wo \pm \alpha t_{OF} \tag{1.62}$$

$$\alpha = cote. \neq 0 \tag{1.63}$$

$$W_F{}^2 = Wo^2 \pm 2\alpha\theta_{OF} \tag{1.64}$$

$$Wm = \frac{\theta_{OF}}{t_{OF}} = \frac{Wo + W_F}{2} \tag{1.65}$$

Si la velocidad angular es variable, pero varía en forma no uniforme, en este caso se utilizarán los métodos del cálculo diferencial e integral, análogamente al movimiento rectilíneo o en el plano, o en el espacio en variables lineales; para variables angulares tenemos:

$$\theta = f(t) \tag{1.66}$$

$$W = \frac{d\theta}{dt} \tag{1.67}$$

$$\alpha = \frac{dW}{dt} \tag{1.68}$$

$$\alpha = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} \Rightarrow \alpha = \frac{WdW}{d\theta} \tag{1.69}$$

$$\alpha = f(t) \tag{1.70}$$

$$\int dW = \int \alpha dt$$

$$W = \int \alpha dt + C1 \tag{1.71}$$

$$W = \tfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int d\theta = \int Wdt$$

$$\theta = \int W dt + C2 \qquad (1.72)$$

O utilizando la Ecu. 1.66: $\int W dW = \int \alpha \, d\theta$

$$\frac{W^2}{2} = \int \alpha d\theta + C3 \qquad (1.73)$$

Relaciones entre la cinemática angular y lineal

Relación entre el desplazamiento lineal (ΔS) **y el desplazamiento angular** ($\Delta\theta$) En el movimiento circular mientras la partícula se mueve en la trayectoria circular, suponiendo que en el instante $t = t_0$ se encuentra en el punto P y en el instante $t = t$ se encuentra en el punto Q habiendo recorrido el arco ΔS que aproximadamente sería el espacio recorrido o modulo del desplazamiento, y que mientras la variación de la posición es más corta el espacio recorrido Δr es aproximadamente al arco descrito ΔS.

$\Delta r \cong \Delta S$

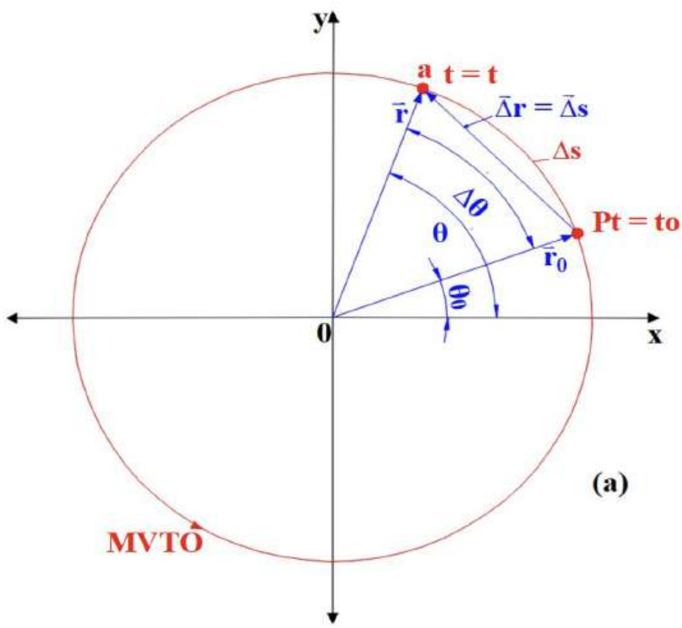


Figura 1.20. Relación entre el desplazamiento lineal (ΔS) y el desplazamiento ($\Delta\theta$).

Mientras tanto, el radio de la circunferencia está girando y realizando desplazamientos angulares $\Delta\theta$. Se ha comprobado experimentalmente que el arco ΔS es directamente proporcional al desplazamiento angular $\Delta\theta$, y la constante de proporcionalidad que las relaciona es el radio de la circunferencia R, es decir:

$$\Delta S = R\Delta\theta \tag{1.74}$$

(m) = (m) rad → en unidades

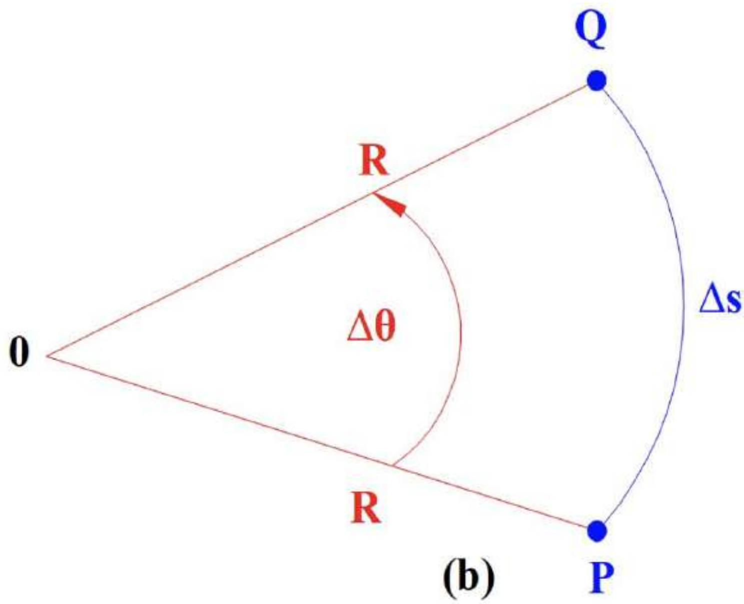


Figura 1.17 (b) Relación entre desplazamientos.

Partiendo de esta relación se define el ángulo correspondiente a un radián:

$$\Delta\theta\,(\mathrm{rad}) = \frac{\Delta S(\mathrm{m})}{R(\mathrm{m})}$$

El ángulo $\Delta\theta$ será igual a 1 radián cuando el arco ΔS sea igual al radio del círculo (R), ósea:

$$\Delta S = R.$$

Relación entre la velocidad lineal (v) y la velocidad angular (w)

Si la relación 1.74 dividimos para la variación del tiempo Δt tendremos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Pero como sabemos $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v_m$; $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = Wm$ nos queda:

$$v_m = RW_m \tag{1.75}$$

Que es la relación entre velocidades medias, pero a la ecuación 1.75 se le podrían aplicar límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y obtendríamos la relación entre velocidades instantáneas como se muestra a continuación.

$$\text{lím}_{\Delta t\rightarrow 0} v_m = \text{lím}_{\Delta t\rightarrow 0} RW_m$$

$$\text{lím}_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = R\,\text{lím}_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v = RW \tag{1.76}$$

Relación entre aceleraciones ($\vec{a}$) y aceleraciones angulares (α)

Como sabemos, la aceleración es la variación de la velocidad $\vec{v}$ en función del tiempo t, y como la velocidad es un vector, se generan dos aceleraciones, una por la variación del módulo (aceleración tangencial $\Rightarrow \vec{a}_t$) y otra por la variación en la dirección y sentido (aceleración radial $\Rightarrow \vec{a}_R$)

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_R \tag{1.77}$$

$$\overrightarrow{a_m} = \overrightarrow{a_{mt}} + \overrightarrow{a_{mR}} \tag{1.77 b}$$

Según la ecuación 1.75 $\frac{\Delta v_m}{\Delta t} = R\frac{\Delta W_m}{\Delta t}$

$$amt = R\alpha m \tag{1.77 c}$$

$$at = R\alpha \tag{1.77 d}$$

at = aceleración tangencial o lineal (m/s^2)

α = aceleración angular (rad/s^2)

En el movimiento circular uniforme ⇒ $W = cote$. Y por ende el módulo de la velocidad ($|\vec{v}|$)

$v = RW$ es también uniforme, por lo tanto, en el $M.R.U.$ $W = cote \Rightarrow \alpha = 0$ y como:

$a_t = R\alpha = 0$

Y la velocidad varía solo en dirección y sentido, generando solo una aceleración radial o centrípeta, que se dirige al centro de curvatura (Figura 1.21).

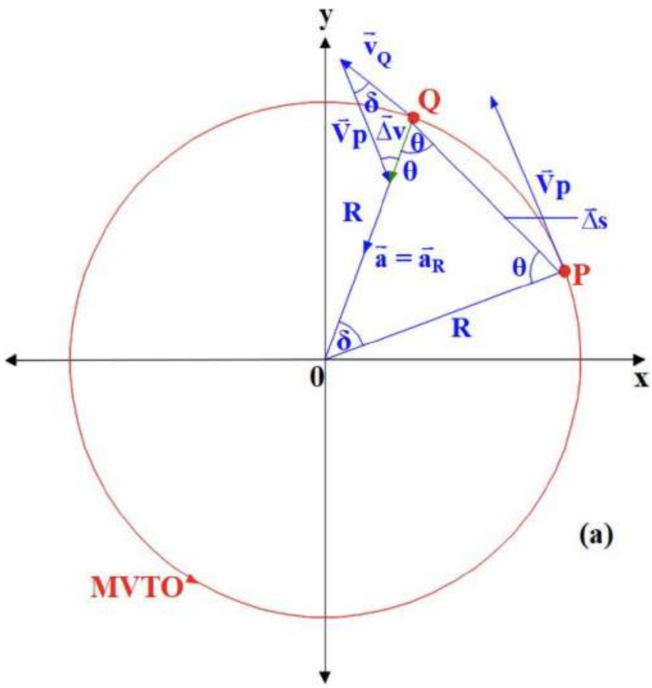


Figura 1.21. Aceleración en el movimiento circular uniforme.

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_Q - \vec{v}_P$

$|\vec{v}_Q| = |\vec{v}_P| = v$

La aceleración media ($\vec{a}_m$) sería:

$\overrightarrow{a_{mR}} = \frac{\vec{v_Q} - \vec{v_P}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v_D}}{\Delta t}$, y su módulo:

$a_{mR} = \frac{\Delta v_D}{\Delta t}$ (a)

En el triángulo θpq (isósceles)

$\frac{\Delta S}{sen\delta} = \frac{R}{sen\theta} \Rightarrow \frac{sen\delta}{sen\theta} = \frac{\Delta S}{R}$ (b)

En el triángulo θpq (isósceles)

$\frac{\Delta v_D}{sen\delta} = \frac{v}{sen\theta} \Rightarrow \frac{sen\delta}{sen\theta} = \frac{\Delta v_D}{v}$

Igualando con la relación (b) tenemos

$\frac{\Delta v_D}{v} = \frac{\Delta S}{R} \Rightarrow \Delta v_D = v\frac{\Delta S}{R}$ en (a)

$a_{mR} = \frac{v}{R}\frac{\Delta S}{\Delta t}$

La aceleración $|\vec{a}_R|$ en el punto "P" se define en módulo y dirección como el límite de la aceleración media cuando Q tiende a P y Δv_D y Δt tienden a cero. Si esto ocurre, el vector de la figura (1.21) se hace cada vez más pequeño, pero siempre dirigido hacia el centro y Δt es también cada vez menor; en el límite, la aceleración instantánea continúa dirigida hacia el centro (esta es la aceleración radial o centrípeta) y su valor modular será:

$a_R = \text{lím}_{\Delta t \to 0} am = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R}\frac{\Delta S}{\Delta t}$

Como v y R son constantes salen del límite.

$a_R = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$

Como sabemos: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ es la velocidad instantánea (v).

$a_R = \frac{v}{R} \cdot v = \frac{v^2}{R} = \frac{(RW)^2}{R} = RW^2$

$$a_R = \frac{v^2}{R} = RW^2 \tag{1.78}$$

Si el movimiento es Movimiento circular uniforme la aceleración instantánea en cualquier punto corresponde a la aceleración radial. Es decir, se dirige al centro de curvatura, pero su módulo es constante, y como la velocidad tiene una dirección que es tangente a la trayectoria, o perpendicular al radio de curvatura aceleración $\vec{a}$ y velocidad $\vec{v}$ son perpendiculares en cualquier punto y de módulo constante. (Figura 1.22).

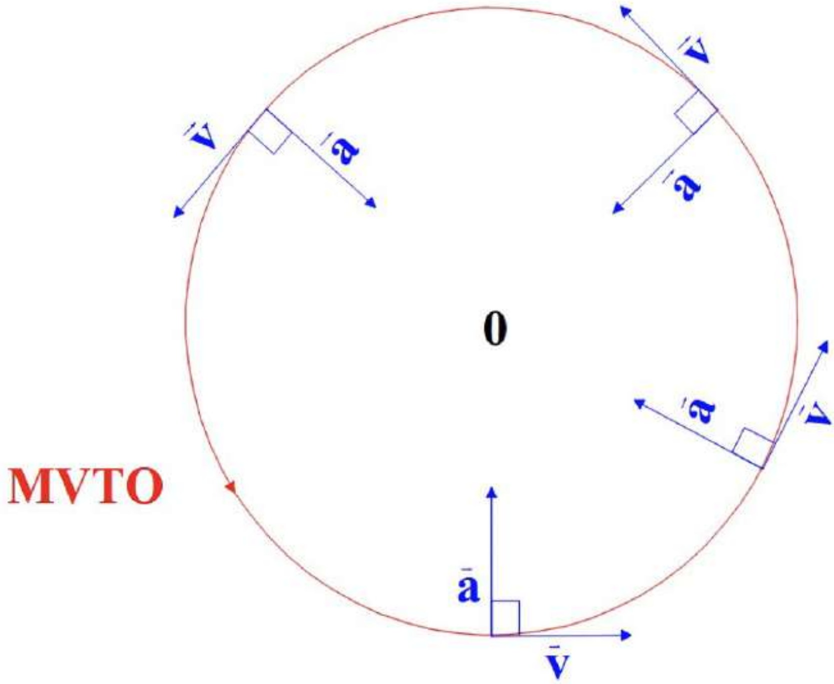


Figura 1.22. Movimiento circular uniforme.

Cuando el movimiento circular es variado, como el movimiento circular uniformemente variado , la velocidad varía en módulo $\Delta\vec{v}_M$, en dirección y sentido $\Delta\vec{v}_D$, lo que genera una aceleración tangencial o lineal $\vec{a}_t$ y una aceleración radial o centrípeta $\vec{a}_R$ [4]

La aceleración media en este caso sería:

$$\overrightarrow{a_m} = \overrightarrow{a_{mt}} + \overrightarrow{a_{mR}}$$
$$\overrightarrow{a_{mt}} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_M}}{\Delta t}$$
$$\overrightarrow{a_{mR}} = \frac{\Delta\overrightarrow{v_D}}{\Delta t}$$

La aceleración instantánea a será el límite de la aceleración media cuando $\Delta t \to 0$ (Figura 1.23)

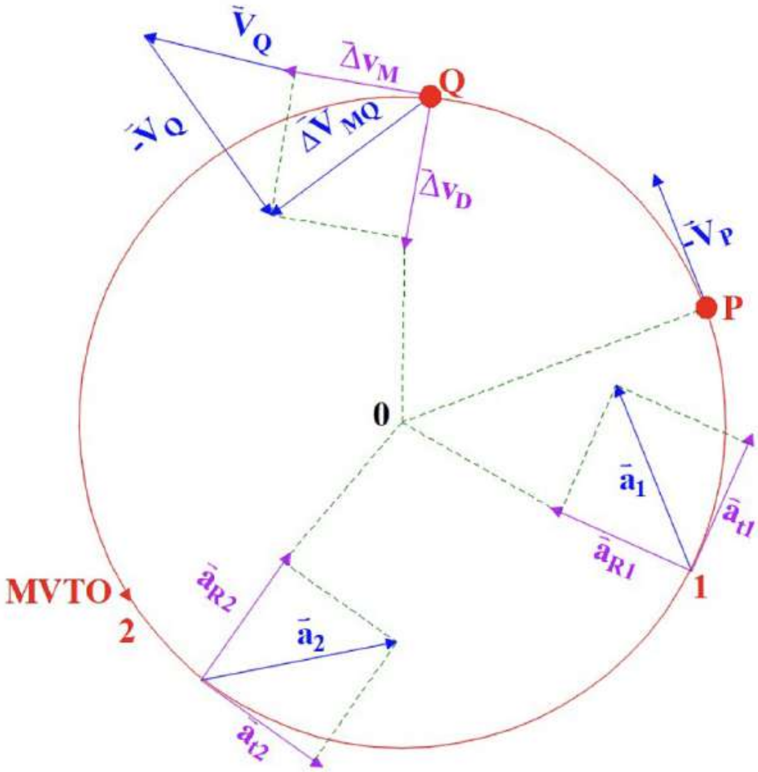


Figura 1.23. movimiento circular uniformemente variado.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_R \tag{1.79}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_R^2} \quad \text{(1.79 a)}$$

$$a_t = R\alpha \quad \text{(1.79 b)}$$

$$a_R = \frac{v^2}{R} = RW^2 \quad \text{(1.79 c)}$$

Movimiento circular. Velocidad angular (vector)

Considerando la trayectoria circular, la velocidad lineal ($\vec{v}$), siendo tangente a la trayectoria, es perpendicular al radio $R = CA$ (Figura 1.24). Si medimos las distancias angulares (S) a partir de B, nos da $S = R\theta$, donde S es la longitud del arco, aplicando la ecuación 1.7, para la rapidez instantánea, y considerando que R permanece constante, obtendremos:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \tag{1.80}$$

Y la cantidad:

$$W = \frac{d\theta}{dt} \tag{1.81}$$

Es la velocidad angular, luego:

$v = WR$

Ecuación 1.76 ya definida.

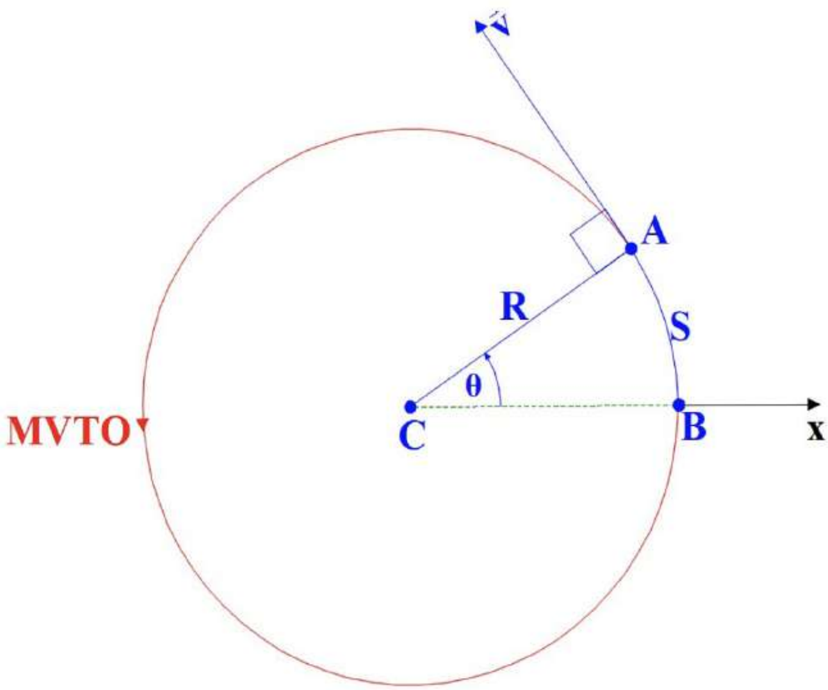


Figura 1.24. Movimiento Circular.

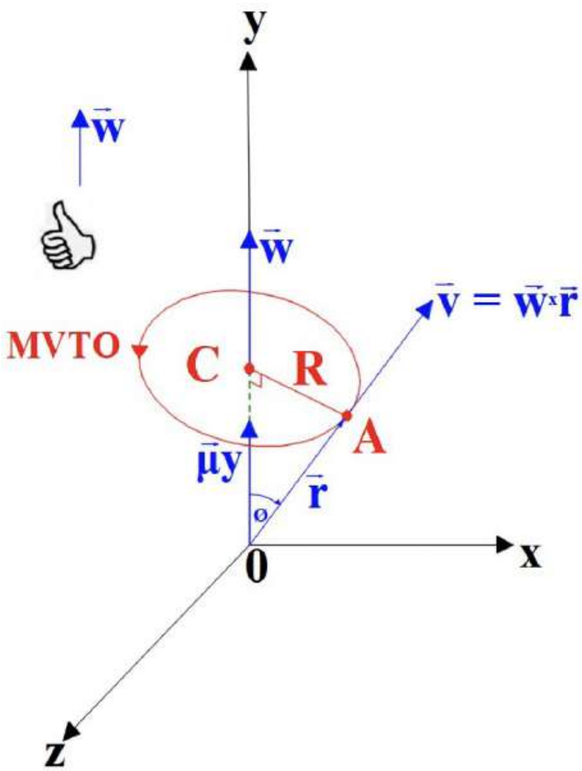


Figura 1.25. Velocidad angular (vector).

La velocidad angular puede expresarse como una magnitud vectorial $\vec{w}$, cuya dirección sería perpendicular al plano del movimiento y el sentido en el que avance un tornillo de rosca derecha, cuando gira en el mismo sentido (circular) en que se mueve la partícula (Figura 1.25).

De esta figura se deduce que $R = r \cdot sen\phi$ y de qué $\overrightarrow{W} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\overrightarrow{\mu y}$; por lo tanto, podemos escribir la ecuación 1.76 en la siguiente forma:

$$v = w\ r\ sen\ \phi$$

Que corresponde al módulo del producto cruz entre los vectores $\vec{w}$ y $\vec{r}$ así:

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \tag{1.82}$$

Nótese que esto es válido solamente para el movimiento circular.

Movimiento circular. Aceleración:

Como ya se vio, cuando la velocidad angular w cambia con el tiempo, la aceleración angular α está definida por la ecuación 1.53, pero en el límite cuando Δt tiende a cero obtendríamos la aceleración angular instantánea, esto es:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{w}}{dt} \tag{1.83}$$

Como el movimiento circular ocurre en un plano, la dirección de $\vec{w}$ permanece invariable, y la relación (1.83) también se cumple para sus módulos (o magnitudes) de las cantidades involucradas, esto es:

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.84}$$

Cuando la aceleración angular es constante (esto es cuando el movimiento circular es uniformemente variado) tenemos al integrar la ecuación 1.84

$\int_{w_0}^{w} dw = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$, o sea: $w = w_0 + \alpha\,(t - t_0)$ y considerando $t_0 = 0$

$w = w_0 \pm \alpha\, t$ (Ecuación 1.62, ya descrita)

Ahora, como $w = \frac{d\theta}{dt}$ o $d\theta = w\, dt$, podemos integrar nuevamente para obtener $\theta\,(t)$

$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t w_0 dt + \alpha \int_0^t t dt$

$\theta = \theta_0 + w_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$ (Ecuación 1.61, ya descrita)

En el caso particular del movimiento circular uniformemente variado, combinado las ecuaciones 1.77 (d) con la Ecuación 1.68 obtenemos para la aceleración tangencial (a_t) así:

$a_t = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{dw}{dt} = R \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$ (Ecuación 1.77 (d), ya descrita)

Y para la aceleración radial (o centrípeta) es:

$a_N = \frac{v^2}{R} = w^2 R$ (Ec. 1.78, ya descrita anteriormente)

Los componentes tangencial y radial de la aceleración en el movimiento circular se ilustran en la figura 1.26

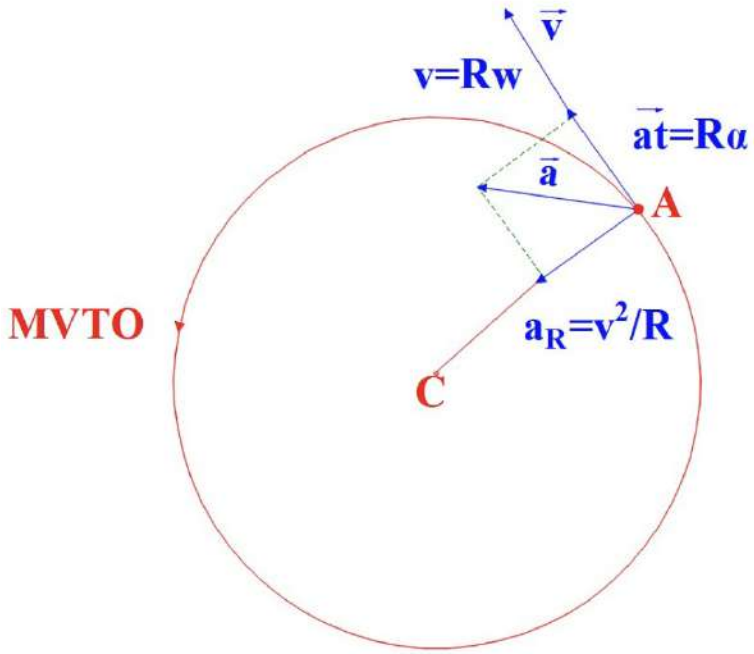


Figura 1.26. Componentes tangencial y radial de la aceleración.

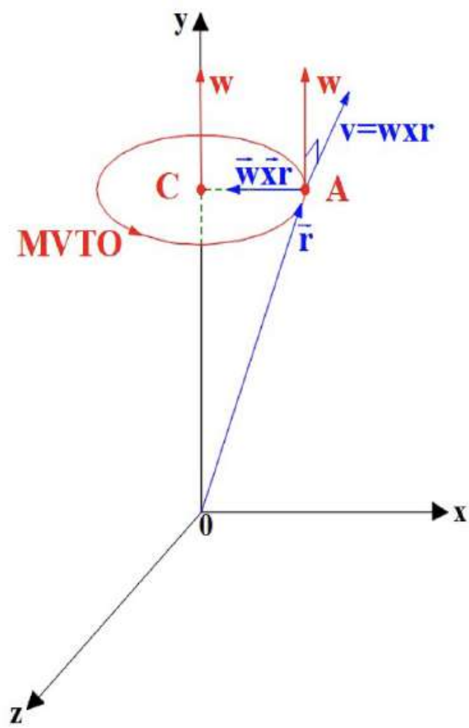


Figura 1.27. Vector $\vec{w}$ y $\vec{v}$.

Nótese que en el movimiento circular uniforme (aceleración angular nula $\alpha = 0$) no hay aceleración tangencial, pero si la aceleración radial o centrípeta debido al cambio de dirección de la velocidad.

En este caso del movimiento circular uniforme podemos calcular la aceleración directamente usando la ecuación (1.82), luego como w es constante:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\vec{w} \times \vec{r}\right)}{dt} = \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{w} \times \vec{v} \tag{1.85}$$

Ya que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, usando la ecuación 1.82

Nuevamente, podemos escribir la aceleración en la forma alterna:

$$\vec{a} = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) \tag{1.86}$$

Como el movimiento circular es uniforme la aceleración dada por la ecuación 1.85 o 1.86, debe ser la aceleración centrípeta. Esto puede verificarse; refiriéndose a la figura 1.27, vemos que el vector $\vec{w} \times \vec{r}$ señala hacia el centro del círculo y su módulo es: $|\vec{w} \times \vec{r}| = w\ v = w^2R$, ya que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares y $v = wR$; este valor coincide con nuestro resultado anterior (Ecuación 1.78) [5]

CAPÍTULO II
2. EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS DE CINEMÁTICA

En este segundo capítulo se presenta la fundamentación práctica de la Cinemática.

2.1. EJERCICIOS RESUELTOS

Conceptos generales de cinemática

- Una avioneta, en un vuelo de entrenamiento, parte de su base a las 6:00 y llega al punto A (-60,70, -20) km, a las 6:15; cambia de rumbo y llega al punto B (45,20, -70) km, con respecto a la base a las 6:28. Posteriormente vuela al punto C (90,30,-10) km, con respecto a la base en donde llega a las 6:36 y finalmente aterriza y llega al punto D (12,0,28) km, con respecto a la base como a las 6:52.

Determinar:

a. Los vectores posición de cada punto (considerar la base como referencia, el origen del sistema de coordenadas);

b. Los desplazamientos realizados;

c. El desplazamiento total;

d. El espacio total recorrido;

e. La distancia recorrida;

f. La velocidad media en cada desplazamiento;

g. La rapidez media en cada desplazamiento.

Solución:

Iniciamos un diagrama (gráfico esquemático de los puntos descritos)

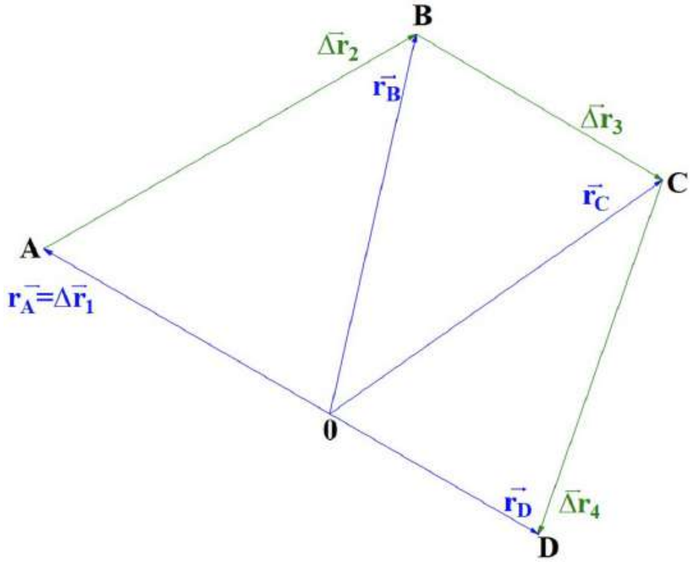


Figura 2.1. Ejercicio cinemática.

a. Vectores Posición: en vectores base.

$$\vec{r_A} = \left(-60\,\vec{i} + 70\vec{j} - 20\vec{k}\right)\,\text{km}$$
$$\vec{r_B} = \left(45\,\vec{i} + 20\vec{j} - 70\vec{k}\right)\,\text{km}$$
$$\vec{r_C} = \left(90\,\vec{i} + 30\vec{j} - 10\vec{k}\right)\,\text{km}$$
$$\vec{r_D} = \left(12\,\vec{i} + 0\vec{j} + 28\vec{k}\right)\,\text{km}$$

b. Los desplazamientos realizados

$$\overrightarrow{\Delta r_1} = \vec{r_A} - \vec{r_0} = \left[\left(-60\,\vec{i} + 70\,\vec{j} - 20\,\vec{k}\right) - \left(0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\right)\right]\ \text{km}$$
$$\overrightarrow{\Delta r_1} = \left(-60\,\vec{i} + 70\,\vec{j} - 20\,\vec{k}\right)\ \text{km}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_2} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = \left[\left(45\,\vec{i} + 20\,\vec{j} - 70\,\vec{k}\right) - \left(-60\,\vec{i} + 70\,\vec{j} - 20\,\vec{k}\right)\right]\text{km}$$
$$\overrightarrow{\Delta r_2} = \left(105\,\vec{i} - 50\,\vec{j} - 50\,\vec{k}\right)\text{km}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_3} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B} = \left[\left(90\,\overrightarrow{i} + 30\,\overrightarrow{j} - 10\,\overrightarrow{k}\right) - \left(45\,\overrightarrow{i} + 20\,\overrightarrow{j} - 70\,\overrightarrow{k}\right)\right] \mathrm{km}$$
$$\overrightarrow{\Delta r_3} = \left(45\,\overrightarrow{i} + 10\,\overrightarrow{j} + 60\,\overrightarrow{k}\right) \mathrm{km}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_4} = \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C} \left[\left(12\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 28\,\overrightarrow{k}\right) - \left(90\,\overrightarrow{i} + 30\,\overrightarrow{j} - 10\,\overrightarrow{k}\right)\right] \mathrm{km}$$
$$\overrightarrow{\Delta r_4} = \left(-78\,\overrightarrow{i} - 30\,\overrightarrow{j} + 38\,\overrightarrow{k}\right) \mathrm{km}$$

c. El desplazamiento total: $\overrightarrow{\Delta r}_{TOTAL} = \overrightarrow{r}_{FINAL} - \overrightarrow{r}_{INICIAL}$

Primer método:

$$\overrightarrow{\Delta r_t} = \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_0} = \left(12\,\overrightarrow{i} + 28\,\overrightarrow{k}\right) \mathrm{km}$$

Segundo método:

$$\overrightarrow{\Delta r}_{TOTAL} = \overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2} + \overrightarrow{\Delta r_3} + \overrightarrow{\Delta r_4}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_T} = \left[(-60 + 105 + 45 - 78)\,\overrightarrow{i} + (70 - 50 + 10 - 30)\,\overrightarrow{J} + (-20 - 50 + 60 + 38)\,\overrightarrow{k}\right] \mathrm{km}$$
$$\overrightarrow{\Delta r_T} = \left(12\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + 28\,\overrightarrow{k}\right) \mathrm{km}$$

d. Espacio Recorrido

$$\left|\overrightarrow{\Delta r_T}\right| = \sqrt{\left(12^2 + (28)^2\right)} \Rightarrow \Delta r_T = 30{,}46\ \mathrm{km}$$

e. Distancia Total

$$\left|\overrightarrow{\Delta r_1}\right| + \left|\overrightarrow{\Delta r_2}\right| + \left|\overrightarrow{\Delta r_3}\right| + \left|\overrightarrow{\Delta r_4}\right|$$
$$DT = \sqrt{(-60)^2 + (70)^2 + (-20)^2} + \sqrt{(105)^2 + (-50)^2 + (-50)^2} + \sqrt{(45)^2 + (10)^2 + (60)^2} +$$
$$\sqrt{(-78)^2 + (-30)^2 + (38)^2}$$
$$DT = (94{,}34 + 126{,}59 + 75{,}66 + 91{,}8)\ \mathrm{km}\ DT = 388{,}4\ \mathrm{km}$$

f. Velocidad Media

$$\overrightarrow{v_{m1}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r_1}}{\Delta t_1} = \frac{\left(-60\,\overrightarrow{i} + 70\,\overrightarrow{j} - 20\,\overrightarrow{k}\right)\mathrm{km}}{0{,}25\ \mathrm{h}}$$
$$\Delta t_1 = 15\ \mathrm{mín} = 0{,}25\ \mathrm{h}$$

$$\overrightarrow{v_{m1}} = \left(-240\,\overrightarrow{i} + 280\,\overrightarrow{j} - 80\,\overrightarrow{k}\right)\ \text{km/h}$$

$$\overrightarrow{v_{m2}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r_2}}{\Delta t_2} = \frac{\left(105\,\overrightarrow{i} - 50\,\overrightarrow{j} - 50\,\overrightarrow{k}\right)\text{km}}{\frac{13}{60}\text{h}}$$

$$\Delta t_2 = 28 - 15 = 13\,\text{mín} = \tfrac{13}{60}\text{h}$$

$$\overrightarrow{v_{m2}} = \left(284{,}6\,\overrightarrow{i} - 230{,}77\,\overrightarrow{j} - 230{,}77\,\overrightarrow{k}\right)\ \text{km/h}$$

$$\overrightarrow{v_{m3}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r_3}}{\Delta t_3} = \frac{\left(45\,\overrightarrow{i} + 10\,\overrightarrow{j} + 60\,\overrightarrow{k}\right)\text{km}}{\frac{2}{15}\text{h}}$$

$$\Delta t_3 = 36 - 28 = 8\,\text{mín} = \tfrac{2}{15}\text{h}$$

$$\overrightarrow{v_{m3}} = \left(337{,}5\,\overrightarrow{i} + 75\,\overrightarrow{j} + 450\,\overrightarrow{k}\right)\ \text{km/h}$$

$$\overrightarrow{v_{m4}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r_4}}{\Delta t_4} = \frac{\left(-78\,\overrightarrow{i} - 30\,\overrightarrow{j} + 38\,\overrightarrow{k}\right)\text{km}}{\frac{4}{15}\text{h}}$$

$$\Delta t_4 = 52 - 36 = 16\,\text{mín} = \tfrac{4}{15}\text{h}$$

$$\overrightarrow{v_{m4}} = \left(-292{,}5\,\overrightarrow{i} - 112{,}5\,\overrightarrow{j} + 142{,}5\,\overrightarrow{k}\right)\ \text{km/h}$$

g. Rapidez media en cada desplazamiento

$$v_{m1} = \sqrt{(240)^2 + (280)^2 + (80)^2} \Rightarrow v_{m1} = 377{,}36\ \ \text{km/h}$$

$$v_{m2} = \sqrt{(284{,}6)^2 + (-230{,}77)^2 + (-230{,}77)^2} \Rightarrow v_{m2} = 433\ \ \text{km/h}$$

$$v_{m3} = \sqrt{(337{,}5)^2 + (75)^2 + (450)^2} \Rightarrow v_{m3} = 567{,}5\ \ \text{km/h}$$

$$v_{m4} = \sqrt{(-292{,}5)^2 + (-112{,}5)^2 + (142{,}5)^2} \Rightarrow v_{m4} = 344{,}3\ \ \text{km/h}$$

- Un viajero sorprendido por una tormenta ve el relámpago de una descarga eléctrica A(4,5 *km*; *N*25°*E*; $\hat{e} = 70°$) y oye el trueno a los 13 segundos

Determinar:

a. La velocidad del sonido en el aire (constante);

b. La rapidez del sonido;

c. El vector unitario de la velocidad;

d. El vector unitario del desplazamiento.

Solución:

Consideramos el oído (la vista) o simplemente al viajero una partícula que está en un origen de coordenadas (0,0,0) m.

Punto en donde se produce el relámpago (posición A).

$$\overrightarrow{r_A} = (4500\,\mathrm{m}, N25°E, \widehat{e} = 70°)$$
$$\overrightarrow{r_A} = r_{Ax}\overrightarrow{i} + r_{Ay}\overrightarrow{j} + r_{AZ}\overrightarrow{k}$$

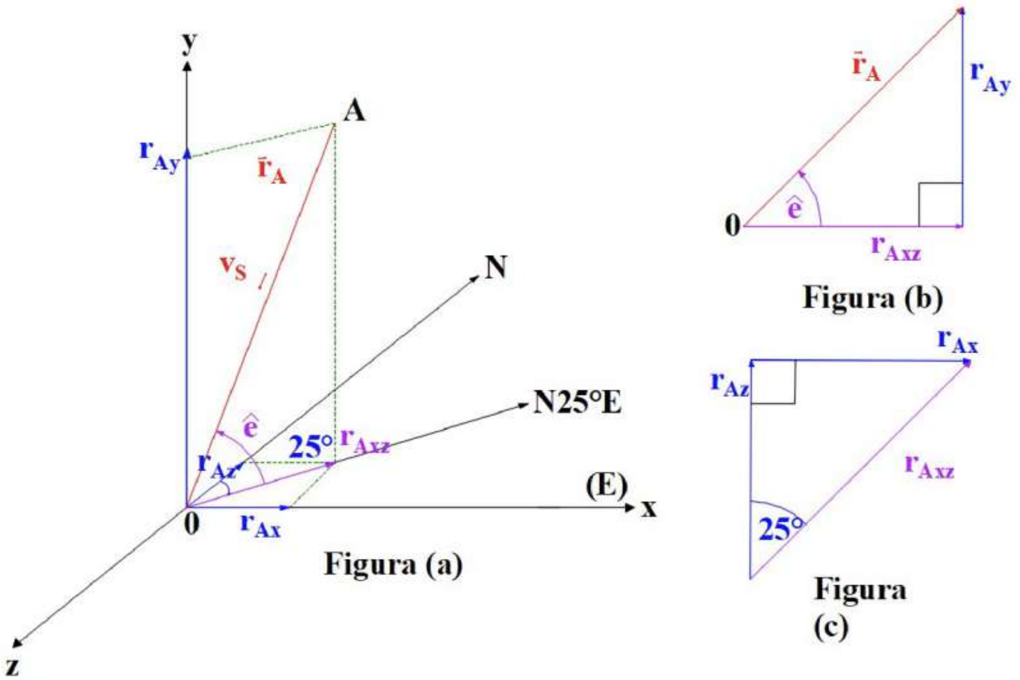


Figura 2.2. Ejercicio Cinemática.

Según Fig. (b)

$$r_{Ay} = r_A\,\mathrm{sen}\,\widehat{e} = 4\,500\,sen70°$$

$$r_{Ay} = 4\,228{,}6\ \mathrm{m}$$

$$r_{Axz} = r_A\cos\widehat{e}$$

$$r_{Axz} = 4\,500\cos 70°$$

$$r_{Axz} = 1\,539\ \mathrm{m}$$

Según Fig. (c)

$r_{Ax} = r_{Axz} \cdot \operatorname{sen} 25° = 1\,539 \operatorname{sen} 25° = +650{,}4\,\mathrm{m}$

$r_{Az} = r_{Axz} \cdot \cos 25° = 1\,539\ \cos 25° = -1\,394{,}8\,\mathrm{m}$

$\overrightarrow{r_A} = \left(650{,}4\,\vec{i} + 4\,228{,}6\,\vec{j} - 1\,394{,}8\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m}$

a. $\overrightarrow{v_s} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_A}}{13\,\mathrm{s}} = \frac{(0) - \left(650{,}4\,\vec{i} + 4\,228{,}6\,\vec{j} - 1\,394{,}8\,\vec{k}\right)}{13\,\mathrm{s}}$

$\overrightarrow{v_s} = \left(-50\,\vec{i} - 325{,}3\,\vec{j} + 107{,}3\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m/s}$

b. $v_s = \sqrt{(-50)^2 + (-325{,}3)^2 + (107{,}3)^2}$

$v_s = 346{,}17\mathrm{m/s}$

c. $\overrightarrow{\mu_v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\left(-50\,\vec{i} - 325{,}3\,\vec{j} + 107{,}3\,\vec{k}\right)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{346{,}17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$

$\overrightarrow{\mu_v} = \left(-0{,}144\,\vec{i} - 0{,}94\,\vec{j} + 0{,}31\,\vec{k}\right)$

d. $\overrightarrow{\mu_{Ar}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta r} = \frac{\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_A}}{\Delta r} = \frac{\left(-650{,}4\,\vec{i} - 4\,228{,}6\,\vec{j} + 1\,394{,}8\,\vec{k}\right)}{4500\,\mathrm{m}}$

$\overrightarrow{\mu_{Ar}} = \left(-0{,}144\,\vec{i} - 0{,}94\,\vec{j} + 0{,}31\,\vec{k}\right)$

Movimientos variados aplicando derivadas e integrales

- Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición como función del tiempo $[x = f(t)]$ está dada por la ecuación $x = Pt^2 + Q$, siendo $P = 5\ \mathrm{m/s^2}$ y $Q = 7\mathrm{m}$

Determinar:

a. El desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo: $t_1 = 3\mathrm{s}$ hasta $t_2 = 6\mathrm{s}$;

b. La velocidad media en el intervalo de tiempo anterior;

c. La velocidad instantánea en $t = 4\mathrm{s}$;

d. La aceleración en $t = 4\mathrm{s}$.

Datos:

movimiento → *Eje x*

$x = Pt^2 + Q \rightarrow$ (Ec,1)

$P = 5\text{m/s}^2$

$Q = 7\text{m}$

$x = 5t^2 + 7$

t (s) → x (m)

$\Delta x = ?$

$t_1 = 3\text{s}$

$t_2 = 6\text{s}$

Solución:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \, (a)$$

a. $t_1 = 3\,\text{s} \rightarrow x_1 = 5(3)^2 + 7 = 52\,\text{m}$

$t_2 = 6\,\text{s} \rightarrow x_2 = 5(6)^2 + 7 = 187\,\text{m}$

en (a) $\Delta x = (187 - 52)$ m

$\Delta x = 135$ m, como vector:

$$\overrightarrow{\Delta x} = \left(135\,\overrightarrow{i}\right)\,\text{m}$$

b. $\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\left(135\,\overrightarrow{i}\right)\text{m}}{6-3\,\text{s}}$

$\overrightarrow{v_m} = \left(45\,\overrightarrow{i}\right)\,\text{m/s}$

c. $\overrightarrow{v_4} = ? \rightarrow t = 4\,\text{s}$

Derivando la ecuación (1), obtenemos:

$$v = \frac{d}{dt}\left(5t^2+7\right) \Rightarrow v = 10t \rightarrow \begin{array}{c} t\,(\mathrm{s}) \\ v\,(\mathrm{m/s}) \end{array} \quad (Ec,2)$$

$$t = 4\,\mathrm{s} \Rightarrow v_4 = 10\,(4) \Rightarrow v_4 = 40\,\mathrm{m/s} \Rightarrow \overrightarrow{v_4}\left(40\,\overrightarrow{i}\right)\mathrm{m/s}$$

d. $a = ? \rightarrow t = 4\mathrm{s}$

Sabemos que : $a = \frac{dv}{dt}$; derivamos la (Ec.2)

$a = \frac{d(10t)}{dt} \Rightarrow a = 10\,\mathrm{m/s^2} \Rightarrow$ Constante en cualquier tiempo

$$\overrightarrow{a_4} = \left(10\,\overrightarrow{i}\right)\mathrm{m/s^2}$$

- La velocidad de una partícula está determinada por la ecuación: $v = 25 + 18t \Rightarrow t\ (\mathrm{s}) \rightarrow v\ (\mathrm{m/s})$

Determinar:

a. El desplazamiento (módulo) desde $t_1 = 1{,}5$ s hasta $t_2 = 3{,}5$ s y la aceleración (módulo) en $t = 2$s sabiendo que $t = 0 \rightarrow$ estuvo en el origen.

Solución:

a. $\Delta x = x_2 - x_1$ (a)

$v = 25 + 18t$ (Ec. 1)

Sabemos que: $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (25+18t)\,dt$

$$x = 25t + \frac{18t^2}{2}\Big|_0^t \Rightarrow x = 25t + 9t^2\ (Ec,2)$$

$$t_1 = 1{,}5\,\mathrm{s} \Rightarrow x_1 = 25\,(1{,}5) + 9(1{,}5)^2 \Rightarrow x_1 = 57{,}75\,\mathrm{m}$$

$$t_2 = 3{,}5\,\mathrm{s} \Rightarrow x_2 = 25\,(3{,}5) + 9(3{,}5)^2 \Rightarrow x_2 = 197{,}75\,\mathrm{m}$$

$$En(a)\ \Delta x = (197{,}75 - 57{,}75)\,\mathrm{m} \Rightarrow \Delta x = 140\,\mathrm{m}$$

b. Sabemos que: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(25+18t)}{dt} \Rightarrow$

$a = 18\ \mathrm{m/s^2} \Rightarrow$ constante

Para $t = 2\mathrm{s} \Rightarrow a = 18\ \mathrm{m/s^2}$

- Un coche hace un recorrido en 10 minutos, moviéndose según la ecuación: $x = 100t^2 - \frac{t^4}{2}$ en donde t (minutos) y x(m)

Determinar:

a. Que distancia recorrió el coche en los 10 min;

b. ¿Cuál fue la velocidad máxima?;

c. ¿Qué distancia recorrió el coche hasta alcanzar la velocidad máxima?.

Datos:

$\Delta t = 10\ \text{mín} = t - t_0 \Rightarrow t_0 = 0\,\text{mín}$

$x = 100t^2 - \frac{t^4}{2}\ (2) \Rightarrow \begin{matrix} t\,(\text{mín}) \\ x\,(\text{m}) \end{matrix}$

$x_0 = 0\,\text{m} \Rightarrow t_0 = 0\,\text{mín}$

$x_{10} = 100(10)^2 - \frac{10^4}{2}$

$x_{10} = 5\,000\,\text{m}$ Luego:

a. $\begin{aligned} \Delta x &= x_{10} - x_0 \\ \Delta x &= 5\,000\,\text{m} \end{aligned}$

b. $v = v_{\text{máx}} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(100t^2 - \frac{t^4}{2}\right)\ v = 200t - \frac{4}{2}t^3 \Rightarrow v = 200t - 2t^3$

(Ec.2)

$a = \frac{dv}{dt} = d\,(200t - 2t^3) \Rightarrow a = 200 - 6t^2$ (Ec.3)

$a = 0 = 200 - 6t^2 \Rightarrow \sqrt{t^2} = \sqrt{\frac{200}{6}} \Rightarrow t = 5{,}7735\,\text{mín}$

Reemplazamos en (Ec.2)

$v_{\text{máx}} = 200\,(5{,}7735) - 2(5{,}7735)^3\ v_{\text{máx}} = 769{,}8\,\text{m/min}$

c. $\Delta x = ? \Rightarrow t = 5{,}7735\,\text{mín}$ en Ec. 1

$x = 100(5{,}7735)^2 - \frac{(5{,}7735)^4}{2} \Rightarrow x = 2{,}8\,\text{m}$

- El movimiento rectilíneo de una partícula está definido por: $a = 3{,}28\sqrt{v} \Rightarrow$ v (m/s) → $a \Rightarrow$ (m/s²). Sabiendo, además:

Cuando $t = 2$s → $v = 10{,}8$ m/s y $x = 9$ m

a. Determine el valor de x → cuando $t = 3$s

Datos:

$a = 3{,}28\sqrt{v}$ (1) $\Rightarrow v$ (m/s) → $a \Rightarrow$ (m/s²)

$t_1 = 2$s → $v_1 = 10{,}8$ m/s ; $x_1 = 9$m

s =? → $t = 3$s

Solución:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow dv = 3{,}28\sqrt{v}\,dt \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = 3{,}28dt \Rightarrow \int_{10{,}8}^{v} v^{-\frac{1}{2}}dv = \int_{2}^{t} 3{,}28\,dt$$

$$\left.\frac{v^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}\right|_{10{,}8}^{v} = 3{,}28t\Big|_2^t$$

$$\left.2v^{\frac{1}{2}}\right|_{10{,}8}^{v} = 3{,}28\,t\Big|_2^t \Rightarrow v^{\frac{1}{2}} - (10{,}8)^{\frac{1}{2}} = \frac{3{,}28}{2}t - \frac{3{,}28}{2}(2) \Rightarrow$$

$$v^{\frac{1}{2}} = 1{,}64\,t - 3{,}28 + \sqrt{10{,}8} \Rightarrow v^{\frac{1}{2}} = 1{,}64t + 0$$

$$\left(v^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (1{,}64\,t)^2 \Rightarrow v = 2{,}7\,t^2\ (2)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_9^x dx = \int_2^t 2{,}7t^2dt \Rightarrow$$

$$x\Big|_9^x = \left.\frac{2{,}7\,t^3}{3}\right|_2^t = x - 9 = 0{,}9t^3 - 0{,}9(2)^3 \Rightarrow$$

$$x = 0{,}9t^3 - 7{,}2 + 9$$

$$x = 0{,}9t^3 + 1{,}8\ (\text{Ec. } 3) \Rightarrow t\,(\text{s}) \rightarrow x\,(\text{m})$$

$$t = 3\,\text{s} \Rightarrow x_3 = 0{,}9(3)^3 + 1{,}8 \Rightarrow x_3 = 26{,}1\ \text{m}$$

- El movimiento de una partícula está definido por: $a = 3t - 0{,}3t^2$, donde t (s) y a (m/s²)

  ¿A qué distancia puede ir desde el reposo antes de empezar a cambiar la dirección de su movimiento?

  $a = 3t - 0{,}3t^2$ (Ec.1) $\Rightarrow t$ (s) a (m/s²)

  $x_{0A} = ?$

  Punto A → cambia la dirección del movimiento.

Solución:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t (3t - 0{,}3t^2)\,dt \Rightarrow$$

$$v\Big|_0^v = \frac{3t^2}{2} - \frac{0{,}3t^3}{3}\Big|_0^t \Rightarrow v = 1{,}5t^2 - 0{,}1t^3\ (Ec{,}2) \rightarrow \begin{matrix} t\,(\mathrm{s}) \\ v\,(\mathrm{m/s}) \end{matrix}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (1{,}5t^2 - 0{,}1t^3)\,dt \Rightarrow$$

$$x = \frac{1{,}5t^3}{3} - \frac{0{,}1t^4}{4} \Rightarrow x = 0{,}5t^3 - 0{,}025t^4\ (Ec{,}3) \rightarrow \begin{matrix} t\,(\mathrm{s}) \\ x\,(\mathrm{m}) \end{matrix}$$

Para que cambie el sentido del movimiento, la velocidad debe cambiar de más a menos, y esto ocurre cuando $v = 0$; en la (Ec.2) tenemos:

$0 = 1{,}5t^2 - 0{,}1t^3 \Rightarrow t^2(1{,}5 - 0{,}1t) = 0 \Rightarrow$

$1{,}5 - 0{,}1t = 0 \Rightarrow t = \frac{1{,}5}{0{,}1} \Rightarrow t = 15\mathrm{s}$ en (Ec.3)

$x_3 = 0{,}5(15)^3 - 0{,}025(15)^4 \Rightarrow x_3 = 421{,}875\mathrm{m}$

- La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = 25 - 3x^2$, donde x (m) $\Rightarrow a$(m/s²).

  La partícula está en reposo en la posición $x_0 = 0\mathrm{m}$

Determinar:

a. La velocidad cuando: x = 2m;

b. La posición donde la velocidad sea igual a cero;

c. La posición donde la velocidad sea máxima.

Datos:

$$a = 25 - 3x^2\,(Ec{,}1) \quad \begin{matrix} x\,(\mathrm{m}) \\ a\,(\mathrm{m/s^2}) \end{matrix}$$

$$t = t_0 = 0 \Rightarrow v_0 = 0 \;\; ; \;\; x_0 = 0$$

$$v_2 =? \rightarrow x_2 = 2\,\mathrm{m}$$

$$x =? \rightarrow v = 0$$

$$x =? \rightarrow v = v_{\text{máx}}$$

Solución:

$$a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} \Rightarrow a = \frac{vdv}{dx} \Rightarrow vdv = adx \Rightarrow$$

$$\int_0^v vdv = \int_0^x (25 - 3x^2)dx$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^v = 25x - \left.\frac{3x^3}{3}\right|_0^x \qquad \text{(Ec.2)}$$

$$\frac{v^2}{2} = 25x - x^3 \Rightarrow$$

$$(v^2)^{\frac{1}{2}} = (50x - 2x^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = \sqrt{50x - 2x^3}$$

a. Si $x_2 = 2\text{ m} \Rightarrow v_2 = \sqrt{50\,(2) - 2(2)^3} = \sqrt{84} \Rightarrow v_2 = 9{,}165\,\mathrm{m/s}$

b. $v = 0 \Rightarrow$ en (Ec.2) $(0)^2 = 50x - 2x^3 \Rightarrow x\,(50 - 2x^2) = 0 \Rightarrow$

$$50 - 2x^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \frac{50}{2} = \sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5\,\mathrm{m}; x = 0\,\mathrm{m}$$

c. $x =? v = v_{\text{máx}} \Rightarrow a = 0$ en (Ec.1)

$$0 = 25 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$x = 2{,}887\,\mathrm{m}$$

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

- Un móvil que va por una carretera recta con una velocidad constante de $(-14\vec{i} + 0\vec{j} - 18\vec{k})$m/s, se encuentra en el punto (5, 0,–8)m en t = 15s

Determinar:

a. La posición que tuvo el móvil en t = 3 s

b. El desplazamiento realizado desde t1 = 3 s hasta t2 = 15 s

c. La distancia recorrida en este intervalo.

Datos:

M.R.U

$$\vec{v} = \left(-14\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 18\,\vec{k}\right)\,\text{m/s}$$
$$\vec{r_2} = \left(5\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 8\,\vec{k}\right)\,\text{m}$$
$$t = 15\,\text{s}$$

Solución:

a.
$$\vec{r_1} = ? \to t_1 = 3\,\text{s}$$
$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{\Delta r} = \vec{v}\cdot\Delta t \Rightarrow$$
$$\vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{v}\,(15-3)\ \ \text{s} \Rightarrow$$
$$\vec{r_1} = \vec{r_2} - \left(-14\,\vec{i} - 18\,\vec{k}\right)(12) \Rightarrow$$
$$\vec{r_1} = \left(5\,\vec{i} - 8\,\vec{k}\right) + 168\,\vec{i} + 216\,\vec{k}$$
$$\vec{r_1} = \left(173\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 208\,\vec{k}\,e\right)\,\text{m}$$

b.
$$\vec{\Delta r} = \vec{v}\,\Delta t = \left(-14\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 18\,\vec{k}\right)(12)$$
$$\vec{\Delta r} = \left(-168\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 216\,\vec{k}\right)\,\text{m}$$

Segundo método: $\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \left(5\,\vec{i} - 8\,\vec{k}\right) - \left(173\,\vec{i} + 208\,\vec{k}\right)$

c. $\Delta r = \sqrt{(-168)^2 + (-216)^2} \Rightarrow \Delta r = 273{,}6\,\text{m}$

- Dos personas van una al encuentro de la otra por una misma vía recta. Con una velocidad de 10 km/h cuando les separan 100 km, una de ellas suelta un perro que corre al encuentro de la otra, a una velocidad de 25 km/h. ¿Cuál será la distancia que separa a las personas, cuando el perro encuentra a la otra persona?

Datos:

$v_1 = v_2 = 10$ km/h

$x_{AB} = 100$km

$v_p = 25$ km/h

$x_{A'B'} =$?

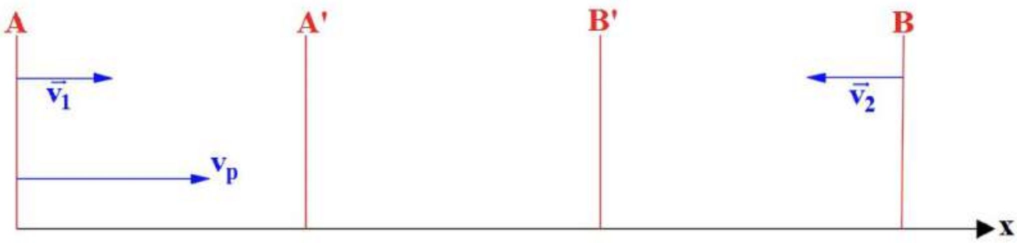


Figura 2.3. Ejercicio MRU.

Solución:

$x_{A'B'} = x_{AB} - x_{AA'} - x_{BB'}$ (Ec.1)

$$\left.\begin{aligned} x_{AA'} &= v_1 t_1 \Rightarrow x_{AA'} = 10t_1 \quad (Ec.2) \\ x_{BB'} &= v_2 t_2 \Rightarrow x_{BB'} = 10t_2 \quad (Ec.3) \end{aligned}\right\} \text{Reemplazamos en (Ec.1)}$$

$x_{A'B'} = 100 - 10t_1 - 10t_2$; como $t_1 = t_2$

$x_{A'B'} = 100 - 20t_1$ (Ec.4), Por otro lado:

$x_{A'B'} = x_{AB'} - x_{AA'}$ (Ec.5)

AB′: movimiento.Perro (P) : $x_{AB'} = 25tp$ (Ec.6)

(Ec.6) y (Ec.2) Reemplazamos en (Ec.5) y nos da:

$x_{A'B'} = 25tp - 10t_1$ y como: $tp = t_1$, nos da:

$x_{A'B'} = 25t_1 - 10t_1 \Rightarrow x_{A'B'} = 15t_1$ (Ec.7)

Igualamos (Ec.4) =(Ec.7)

$100 - 20t_1 = 15t_1 \Rightarrow 35t_1 = 100 \Rightarrow t_1 = \frac{100}{35} \Rightarrow$

$t_1 = \frac{20}{7}\text{h en } (Ec.4) : x_{A'B'} = 100 - 20\left(\frac{20}{7}\right) = \frac{300}{7}$

$x_{A'B'} = 42{,}86\,\text{km}$

En (Ec.7): $x_{A'B'} = 15\left(\frac{20}{7}\right) \Rightarrow x_{A'B'} = 42{,}86\,\text{km}$

- Un hombre rana es impulsado por un motor que le da una velocidad de 5 m/s en dirección perpendicular a la corriente del agua de un río de 40 m de ancho, las aguas del río van a 1 m/s.

Determinar:

a. La velocidad resultante del hombre rana;

b. El tiempo que demora en cruzar el río;

c. La distancia que se desvía con la normal del río.

Datos:

$x_{AB} = 40$ m

$v_M = (5\vec{i})$m/s

$\vec{v}_r = (-\vec{j})$m/s

$\vec{v}_R = ?$

$t = ?$

$y_{BB'} = ?$

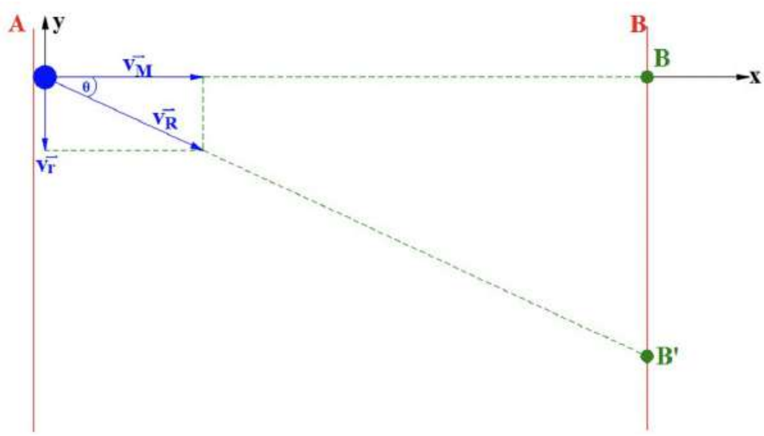


Figura 2.4. Ejercicio MRU.

Solución:

a.
$$\overrightarrow{v_R} = \overrightarrow{v_M} + \overrightarrow{v_r}$$
$$\overrightarrow{v_R} = \left(5\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) \mathrm{m/s} \Rightarrow \overrightarrow{v_R} = (5{,}1\,\mathrm{m/s}; \theta = 11{,}31°)$$
$$v_R = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2} = 5{,}1\,\mathrm{m/s}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\tfrac{1}{5}\right) = 11{,}31°$$

b. $t = \frac{x_{AB'}}{v_R}$ (Ec.1)
$$\cos\theta = \frac{x_{AB}}{x_{AB'}} = x_{AB'} = \frac{40\,\mathrm{m}}{\cos 11{,}31°} = 40{,}7922 \text{ en (Ec.1)}$$
$$t = \frac{40{,}7222\ \mathrm{m}}{5{,}1\,\mathrm{m/s}} \Rightarrow t = 8\,\mathrm{s}$$

c.
$$\tan\theta = \frac{y_{BB'}}{x_{AB}} \Rightarrow y_{BB'} = 40\,\mathrm{m}\ \tan(11{,}31°)$$
$$y_{BB'} = 8\,\mathrm{m}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Un auto parte del reposo y se mueve con una aceleración de 4 m/s^2 durante 4 segundos. En los próximos 10 segundos se mueve con un movimiento uniforme. Luego, aplica los frenos y el auto se desacelera a razón de 8 m/s^2, hasta que se detiene.

Determinar:

a. La distancia total recorrida.

b. El tiempo transcurrido durante el movimiento.

c. Hacer un gráfico de la rapidez v en función del tiempo y calcular el área bajo esta gráfica y ¿Qué ha comprobado?

Datos:

$v_0 = 0$ (reposo)

$a_1 = 4$ m/s^2

$t_{0A} = 4$ s

$t_{AB} = 10$ s

$v_A = v_B =$ uniforme

BC: Desacelera

$a_2 = -8\text{m/s}^2$

$v_C = 0$ (detiene)

$x_{0C} =?$

$t_{0C} =?$

$Av = f(t) =?$

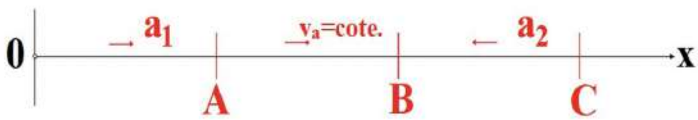


Figura 2.5. Ejercicio MRUV.

a.
$$\begin{aligned}
&x_{0C} = x_{0A} + x_{AB} + x_{BC}\,(Ec{,}1)\\
&0A : MRUVA : x_{0A} = v_0 \cdot t_{0A} + \tfrac{1}{2}a \cdot {t_{0A}}^2\\
&x_{0A} = \tfrac{1}{2}(4)(4)^2 = x_{0A} = 32\,\mathrm{m}\\
&AB : MRU : v_A = v_B = 16\,\mathrm{m/s}\\
&x_{AB} = v_A \cdot t_{AB}\ (Ec{,}2)\\
&0A : MRUVA : v_A = v_0 + a \cdot\ t_{0A}\\
&v_A = 4\,(4) \Rightarrow v_A = 16\,\mathrm{m/s}\quad (\mathrm{En}\ Ec{,}2)\\
&x_{AB} = 16\,(10) \Rightarrow x_{AB} = 160\,\mathrm{m}\\
&BC : MRUVR : x_{BC} = v_B t_{BC} - \tfrac{1}{2}a_2 {t_{BC}}^2\quad (Ec{,}3)\\
&v_C = v_B - a_2 t_{BC} \Rightarrow t_{BC} = \tfrac{v_B}{a_2} = \tfrac{16}{8} \Rightarrow t_{BC} = 2\,\mathrm{s}\quad (En\ Ec{,}3)\\
&x_{BC} = 16\,(2) - \tfrac{1}{2}(8)\,(2)^2 \Rightarrow x_{BC} = 16\,\mathrm{m}\ reemplazamos\,en\,(Ec{,}1)\\
&x_{0C} = (32 + 160 + 16)\,\mathrm{m} \Rightarrow x_{0C} = 208\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

b. $t_{0C} = t_{0A} + t_{AB} + t_{BC} = (4 + 10 + 2) \Rightarrow t_{0C} = 16\,\text{s}$

c. Tabla de Datos $[v = f\,(t)]$

$t\,(s)$	$v\,\left(\frac{m}{s}\right)$
0	0
4	16
14	16
16	0

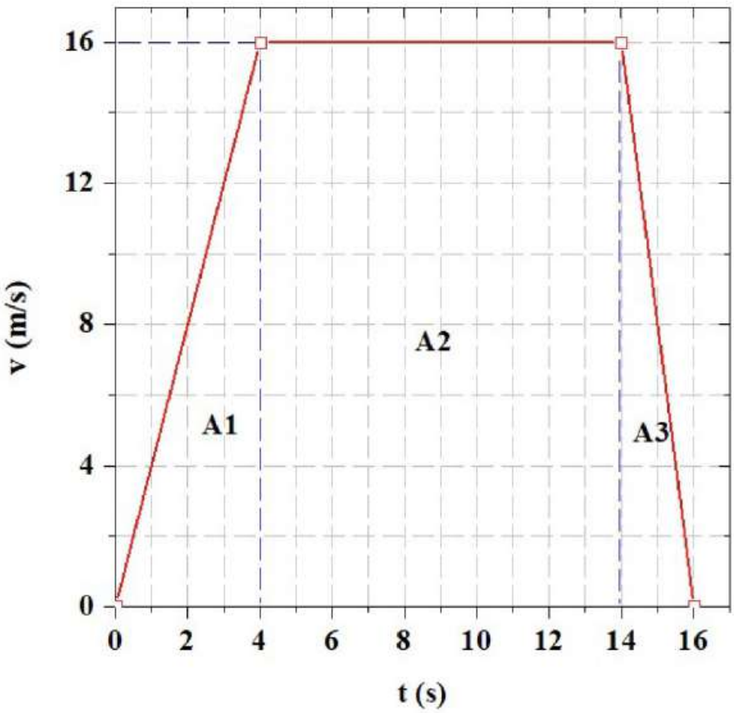


Figura 2.6. Ejercicio de velocidad vs. tiempo del MRUV

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 + A_3 = \tfrac{4(16)}{2} + 10\,(16) + \tfrac{2(16)}{2}$$

$$A_{TOTAL} = 32\,\text{m} + 160\,\text{m} + 16\,\text{m} \Rightarrow A_{TOTAL} = 208\,\text{m}$$

A_{TOTAL} bajo la gráfica $v = f\,(t)$ es la distancia total recorrida; que en este caso coincide con el espacio total recorrido o módulo del desplazamiento.

- La velocidad de un móvil animado de movimiento rectilíneo, paso de una velocidad de $(11{,}25\vec{i} - 9{,}92\vec{k})$m/s a otra velocidad de $(30\vec{i} - 26{,}45\vec{k})$m/s, por la acción de una aceleración de módulo 0,6m/s^2

Determinar:

a. El tiempo empleado;

b. La velocidad y rapidez media;

c. El desplazamiento realizado;

d. La distancia recorrida.

Datos:

$$\vec{v_0} = \left(11{,}25\,\vec{i} - 9{,}92\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m/s}$$
$$\vec{v_F} = \left(30\,\vec{i} - 26{,}45\,\vec{k}\right)\,\mathrm{m/s}$$
$$|\vec{a}| = 0{,}6\mathrm{m/s}^2$$

Solución:

Por ser movimiento rectilíneo, los unitarios de todos los vectores son iguales por tener una igual dirección y sentido: $(\overrightarrow{\mu_{v0}} = \overrightarrow{\mu_{vF}} = \overrightarrow{\mu_{\Delta r}} = \overrightarrow{\mu_{v_m}} = \overrightarrow{\mu_a})$

$$v_0 = \sqrt{(11{,}25)^2 + (-9{,}92)^2} \Rightarrow v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$$
$$v_F = \sqrt{(30)^2 + (-26{,}45)^2} \Rightarrow v_F = 40\,\mathrm{m/s}$$
$$\overrightarrow{\mu_{v0}} = \frac{\vec{v_0}}{v_0} = \frac{\left(11{,}25\,\vec{i} - 9{,}92\,\vec{j}\right)}{15} \Rightarrow \overrightarrow{\mu_{v0}} = 0{,}75\vec{i} - 0{,}66\vec{k}$$
$$\overrightarrow{\mu_{vF}} = \frac{\vec{v_F}}{v_F} = \frac{\left(30\vec{i} - 26{,}45\vec{k}\right)}{40} \Rightarrow \overrightarrow{\mu_{vF}} = 0{,}75\vec{i} - 0{,}66\vec{k}$$

a. *OF : Movimiento uniformente variado acelerado*:

$$v_F = v_0 + a\,t_{OF} \Rightarrow t_{OF} = \frac{v_F - v_0}{a} = \frac{40-15}{0{,}6} \Rightarrow t_{OF} = 41{,}67\mathrm{s}$$

b. $v_m = \frac{v_0 + v_F}{2} = \frac{15+40}{2} \Rightarrow v_m = 27{,}5\mathrm{m/s}$

$$\vec{v_m} = v_m\ \overrightarrow{\mu v_m} = 27{,}5\left(0{,}75\,\vec{i} - 0{,}66\vec{K}\right) \Rightarrow \vec{v_m} = \left(20{,}625\,\vec{i} - 18{,}15\vec{K}\right)$$

c. $\overrightarrow{\Delta r} = t_{OF}\overrightarrow{v_m} = 41{,}67\left(20{,}625\,\overrightarrow{i} - 18{,}15\overrightarrow{K}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\Delta r} = \left(859{,}4\,\overrightarrow{i} - 756{,}3\overrightarrow{K}\right)\,\mathrm{m}$

d. $\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = \sqrt{(859{,}4)^2 + (-756{,}3)^2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = 1144{,}8\,\mathrm{m} \cong 1145\,\mathrm{m}$

Otro método:

$$\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = v_0\, t_{OF} + \tfrac{1}{2}a\, t_{OF}{}^2 = 15\,(41{,}66) + \tfrac{1}{2}\,(0{,}6)\,(41{,}66)^2 \Rightarrow \left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = 1145\,\mathrm{m}$$

- Se considera el mismo punto, la referencia inicial del movimiento de dos móviles que llevan igual dirección y sentido. El auto A parte del reposo con una aceleración: $(-1{,}4\vec{i} - 2{,}3\vec{k})\mathrm{m/s^2}$. Y el auto B lleva una rapidez constante de 25 m/s. Si se considera que el auto B pasó por el punto inicial 5 segundos antes que el móvil A.

Determinar:

a. Sí A le puede alcanzar a B, ¿A que distancia del punto inicial de referencia lo hace?

b. Después de que tiempo que pasó por el punto inicial el auto A alcanzó al punto B;

c. Qué velocidad lleva el auto A cuando alcanza el auto B.

Datos:

$v_{0(A)} = 0$ (Reposo)

$\vec{a}_A = (-1{,}4\vec{i} - 2{,}3\vec{k})\mathrm{m/s^2}$

$a_A = \sqrt{(-1{,}4)^2 + (-2{,}3)^2}$

$a_A = 2{,}7\ \mathrm{m/s^2}$

$v_B = 25\ \mathrm{m/s}$

$t_B = t_A + 5$ (Ecuación 1)

$r_{OE} =?$

E = Punto de encuentro

t_A =?

$v_{E(A)}$ =?

Figura 2.7. Ejercicio de MRUV.

OE: Móvil A: MRUVA

$$r_{OE(A)} = v_{0(A)} \cdot t_A + \tfrac{1}{2} a_A t_A{}^2$$
$$r_{OE(A)} = \tfrac{1}{2}(2{,}7)\, t_A{}^2 = 1{,}35 t_A{}^2 \qquad \text{(Ecuación2)}$$

OE: Móvil B: MRU

$r_{OE(B)} = v_B \cdot t_B = 25 t_B$ (Ecuación3)

$r_{OE(A)} = r_{OE(B)}$; (Ecuación2) = (Ecuación3)

$1{,}35 t_A{}^2 = 25 t_B$ (Ecuación4)

(Ec.1) reemplazamos en (Ec.4)

$1{,}35 t_A{}^2 = 25\,(t_A + 5) \Rightarrow 1{,}35 t_A{}^2 - 25 t_A - 125 = 0$ $t_A = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(1{,}35)(-125)}}{2(1{,}35)} = \frac{25 \pm 36}{2{,}7} \Rightarrow t_A{}' = 22{,}6\,\mathrm{s} \rightarrow$ Respuesta (b)

En (Ec.2) $r_{OE(A)} = 1{,}35(22{,}6)^2 \Rightarrow r_{OE} = 689{,}5\,\mathrm{m}$ →Respuesta (a)

$v_{E(A)} = v_{0(A)} + a_A t_A = 0 + 2{,}7\,(22{,}6) \Rightarrow v_{E(A)} = 61\,\mathrm{m/s} \rightarrow$ Respuesta(c)

- El diagrama vx vs t de la figura a, representa el movimiento de dos partículas A y B por una carretera recta y a partir de la misma posición inicial.

Determinar:

a. Describa el movimiento de cada partícula en los intervalos de tiempo que considere diferentes tipos de movimiento. A la vez realice un esquema de la trayectoria de cada partícula considerando el eje *x*, como la carretera recta;

b. La distancia que recorre cada partícula;

c. El desplazamiento realizado por cada partícula en el intervalo de tiempo que se indica en el diagrama;

d. El espacio recorrido por cada partícula en ese intervalo de tiempo;

e. La distancia que les separa a las dos partículas luego de 30 segundos y 60 segundos de haberse iniciado el movimiento;

f. Dónde y cuándo estarán juntas o se encontrarán nuevamente;

g. Haga los gráficos: $x = f(t)$ y $a = f(t)$ de cada partícula.

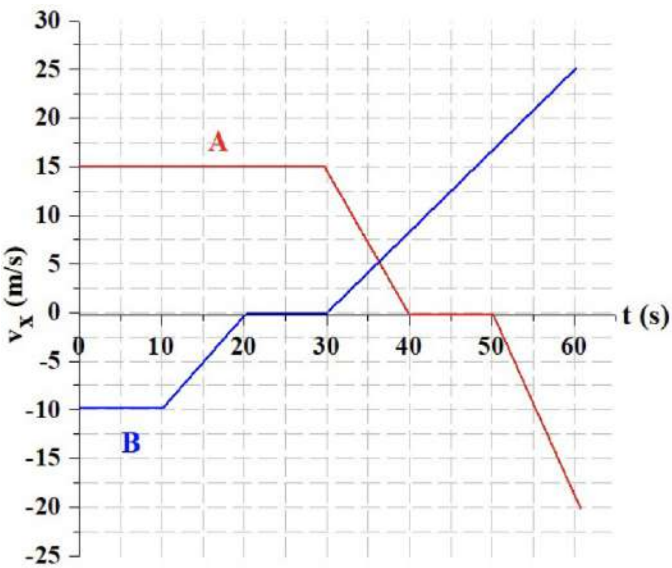


Figura 2.8. Ejercicio de Velocidad vs. tiempo del MRUV.

Solución:

Realizamos el esquema de la trayectoria (Eje x) de las dos partículas y de acuerdo con el diagrama $v_x = f(t)$, describimos el movimiento, para cada partícula.

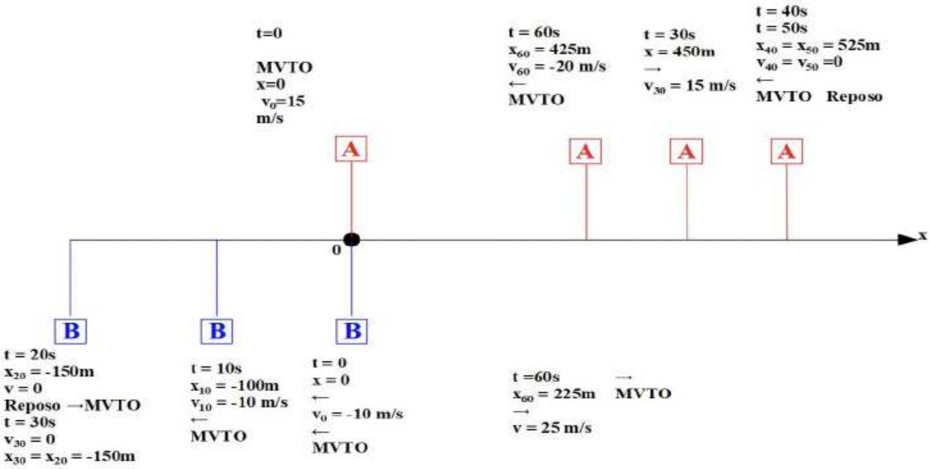


Figura 2.9. Gráfica de los movimientos.

a. Movimiento "A"

$$0 \leq t \leq 30 : MRU : v_0 = v_{30} = 15\mathrm{m/s} : a = 0\mathrm{m/s}^2 \overrightarrow{movimiento}$$

$$30 \leq t \leq 40 : MRUVR : a = \frac{v_{40}-v_{30}}{(40-30)\ \mathrm{s}} = \frac{(0-15)\ \mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{s}} = -\overleftarrow{1{,}5}\mathrm{m/s}^2\overrightarrow{movimiento}$$

$$40 \leq t \leq 50 : \text{Reposo} : v_{40} = v_{50} = 0\,\mathrm{m/s} \rightarrow a = 0\ \mathrm{m/s}^2$$

$$50 \leq t \leq 60 : MRUVA : a = \frac{v_{60}-v_{50}}{60-50} = \frac{-20-0}{10} = -\overleftarrow{2}\ \mathrm{m/s}^2\overleftarrow{movimiento}$$

Movimiento. "B"

$$0 \leq t \leq 10 : MRU : v_0 = v_{10} = -10\,\mathrm{m/s} \rightarrow a = 0\,\mathrm{m/s}^2\ \overleftarrow{movimiento}$$

$$10 \leq t \leq 20 : MRUVR : a = \frac{v_{20}-v_{10}}{20-10} = \frac{0-(-10)}{10} = \overrightarrow{1}\ \mathrm{m/s}^2\overleftarrow{movimiento}$$

$$20 \leq t \leq 30 : \text{Reposo} : v_{30} = v_{20} = 0\mathrm{m/s} \rightarrow a = 0\,\mathrm{m/s}^2$$

$$30 \leq t \leq 60 : MRUVA : a = \frac{v_{60}-v_{30}}{60-30} = \frac{25-0}{30} = 0{,}833\ \mathrm{m/s}^2\ \overrightarrow{movimiento}$$

b. Distancia recorrida por la partícula "A"

Primer método: Área $v = f(t) : x_0 - 30 = 30\mathrm{s}\ (15\mathrm{m/s}) = 450\mathrm{m}$

Segundo Método:

$$M.R.U : x_0 - 30 = v \cdot t_0 - 30 = 15\,\text{m/s}\,(30\,\text{s}) = 450\,\text{m}$$

$$x_{30-40} = \tfrac{1}{2}\,(10\,\text{s})\,(15\,\text{m/s}) = 75\,\text{m}$$

$$M.R.U.V.R : x_{30-40} = v_{30}\,(10) - \tfrac{1}{2}a(10)^2 = 15\,(10) - \tfrac{1}{2}\,(1{,}5)\,(100) = 75\,\text{m}$$

$$x_{40-50} = 0\,\text{m}\,(\text{Reposo})$$

$$x_{50-60} = \tfrac{1}{2}\,(10\,\text{s})\,(-20\,\text{m/s}) = -100\,\text{m}$$

$$M.R.U.V.A : x_{50-60} = v_{50}\,(10) + \tfrac{1}{2}a(10)^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\,(-2)\,(10)^2 = -100\,\text{m}$$

Distancia recorrida: suma geométrica de las áreas sin considerar signos.

$D_A = (450 + 75 + 0 + 100)\text{m} = 625\text{m}$

Distancia recorrida por la partícula “B”, consideramos solo el primer método [Áreas gráfico $v = f\,(t)$]

$$x_{0-10} = 10\,(-10) = -100\,\text{m}$$

$$x_{10-20} = \tfrac{1}{2}\,(10)\,(-10) = -50\,\text{m}$$

$$x_{20-30} = 0\,\text{m}\,(\text{Reposo})\,(\text{No hay área})$$

$$x_{30-60} = \tfrac{1}{2}\,(30)\,(25) = 375\,\text{m}$$

$$D_B = (100 + 50 + 375) \Rightarrow D_B = 525\,\text{m}$$

c. Desplazamiento de “A”, según la figura (b)

$$\overrightarrow{\Delta x}_A = \overrightarrow{x_{60}} - \overrightarrow{x_0} = \left(425\,\vec{i} - 0\,\vec{i}\right)\text{m}$$
$$\overrightarrow{\Delta x}_A = \left(425\,\vec{i}\right)\text{m}$$

Desplazamiento de “B”, según la figura (a)

$$\overrightarrow{\Delta x}_B = \overrightarrow{x_{60}} - \overrightarrow{x_0} = \left(225\,\vec{i} - 0\,\vec{i}\right)\text{m}$$
$$\overrightarrow{\Delta x}_B = \left(225\,\vec{i}\right)\text{m}$$

d. Espacio recorrido: módulos del desplazamiento.

$$\Delta x_A = 425\,\mathrm{m}; \Delta x_B = 225\,\mathrm{m}$$

e. $x_{AB(30s)} \Rightarrow x_{A(30)} = 450\,\mathrm{m}; x_{B(30)} = -150\,\mathrm{m}$

$$x_{AB(30s)} = 450\,\mathrm{m} + 150\,\mathrm{m} \Rightarrow x_{AB(30)} = 600\,\mathrm{m}$$

$$x_{AB(60s)} : x_{A(60)} = 425\,\mathrm{m}; x_{B(60)} = 225\,\mathrm{m}$$

$$x_{AB(60s)} = (425 - 225)\,\mathrm{m} \Rightarrow x_{AB(60)} = 200\,\mathrm{m}$$

Ver diagrama de la trayectoria.

f. Donde (posición) y cuando (el instante) estarán juntas nuevamente: en toda la descripción de 0 a 60 s, no han estado juntas, la única alternativa de que se encuentren nuevamente es después de los 60 segundos, debido a que en este instante la partícula A está moviéndose hacia la izquierda con una aceleración de 2m/s y con MRUVA; y la partícula B se mueve hacia la derecha; con una aceleración de 0,833 m/s^2, y con una velocidad inicial de (60 s) de 25 m/s y la “A” con una velocidad inicial de (20 m/s), hacia la izquierda suponiendo que continúan con estas condiciones podemos determinar dónde y cuándo se encuentran luego de los 60 segundos de movimiento. Si la distancia entre A y B es de 200 m en este instante.

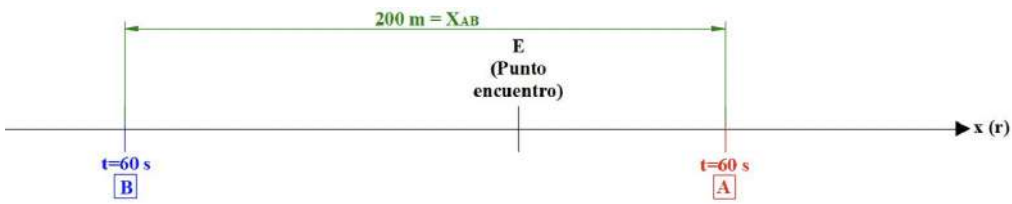


Figura 2.10. Ejercicio de MRUV.

$$\overrightarrow{v_{B(60)}} = 25\,\mathrm{m/s}$$

$$\overrightarrow{a_B} = 0{,}833\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\overleftarrow{v_{A(60)}} = 20\,\mathrm{m/s}$$

$$\overleftarrow{a_A} = 2\,\mathrm{m/s^2}$$

- Relación de segmentos: $x_{AB} = x_{AE} + x_{BE}$ (Ecuación 1)
- AE: MRUVA: $x_{AE} = v_{A(60)}t_{AE} + \frac{1}{2}a_A t_{AE}{}^2$
- Partícula "A": $x_{AE} = 20t_{AE} + \frac{1}{2}(2)\,t_{AE}{}^2$ (Ecuación 2)
  $x_{AE} = 20t_{AE} + t_{AE}{}^2$
- BE: MRUVA: $x_{BE} = v_{B(60)}t_{BE} + \frac{1}{2}a_B t_{BE}{}^2$
- Partícula "B": $x_{BE} = 25t_{BE} + \frac{1}{2}(0{,}833)\,t_{BE}{}^2$
  $x_{BE} = 25t_{BE} + 0{,}4165t_{BE}{}^2$

(Ec.2) y (Ec.3) reemplazamos en (Ec.1) y considerando que $t_{AE} = t_{BE}$ (porque parten simultáneamente→ a partir de 60s)

$200 = 20t_{AE} + t_{AE}{}^2 + 25t_{AE} + 0{,}4165t_{AE}{}^2$

$1{,}4165t_{AE}{}^2 + 44t_{AE} - 200 = 0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos:

$t_{AE'} = 3{,}953\text{s} \Rightarrow$ Reemplazando en la (Ec.2)

$x_{AE} = 20\,(3{,}953) + (3{,}953)^2 \Rightarrow x_{AE} = 94{,}7\text{m}$

En la (Ec.3): $x_{BE} = 25\,(3{,}953) + 0{,}4165(0{,}953)^2 \Rightarrow x_{BE} = 105{,}3\text{m}$

Con los resultados podemos decir que estarán juntos nuevamente en la posición (E) (punto de encuentro), con respecto al origen (O):

$\vec{x}_E = \vec{x}_{0E} = (225\vec{i} + 94{,}7\vec{i})\text{m}$

$\vec{x}_E = (319{,}7\vec{i})\text{m}$

Cuando en el instante:

$t_E = 60\text{s} + 3{,}953\text{ s}$

$t_E = 63{,}953\text{ s}$

g. Realice los gráficos: $x = f(t)$ de cada partícula.

Partícula "A":

$t\,(s)$	$x\,(m)$
0	0
30	450
40	525
50	525
60	425

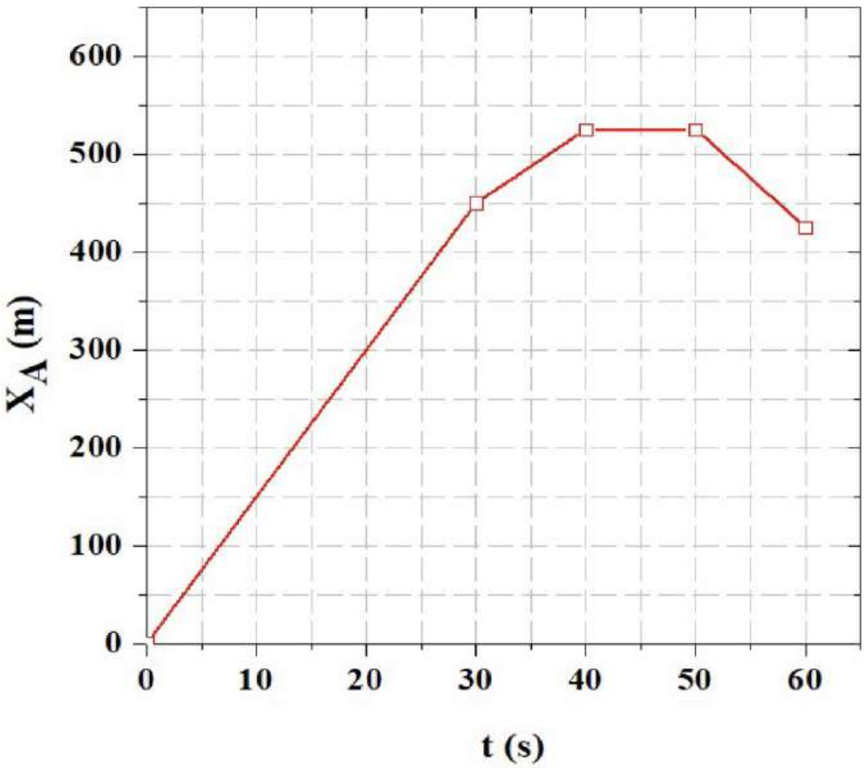


Figura 2.11. Ejercicio de MRUV de la partícula A.

Partícula “B”:

t (s)	*x (m)*
0	0
10	-100
20	-150
30	-150
60	225

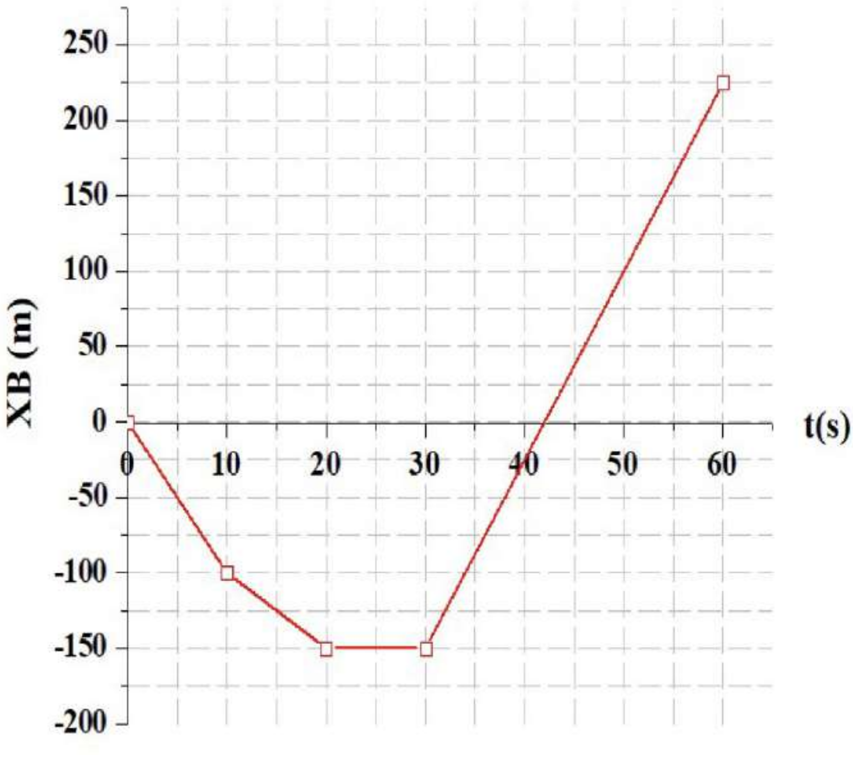


Figura 2.12. Ejercicio de MRUV de la partícula B.

$a = f(t)$

Partícula "A":

$t\ (s)$	$a\ (m/s^2)$
0	0
30	0
30	-1,5
40	-1,5
40	0
50	0
50	-2
60	-2

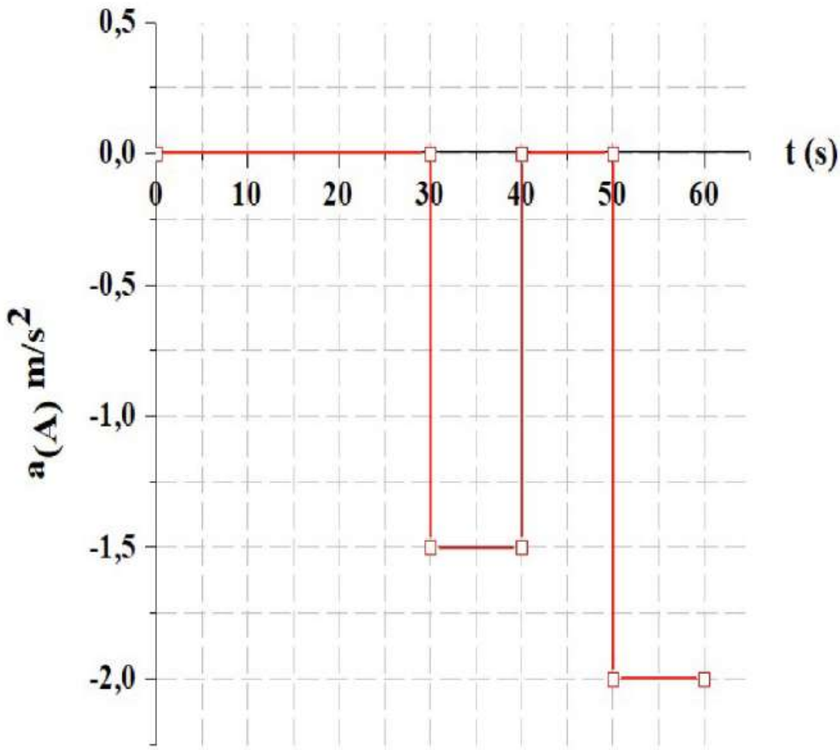


Figura 2.13. Ejercicio de aceleración vs. tiempo de la partícula A.

Partícula "B":

$t\,(s)$	$a\,(m/s^2)$
0	0
10	0
10	1
20	1
20	0
30	0
30	0,8333
60	0,8333

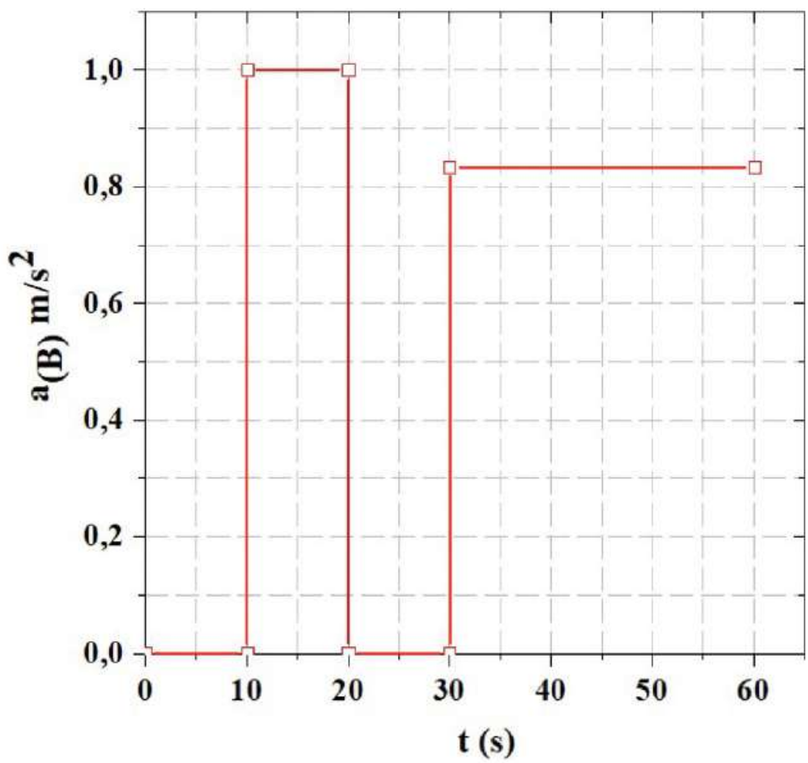


Figura 2.14. Ejercicio de aceleración vs. tiempo de la partícula B.

Movimiento vertical (Caída y subida libre)

- Se dispara verticalmente y hacia arriba un móvil que a los dos segundos se desplaza con una velocidad de $(50\vec{j})$m/s.

(Trabaje con un valor de g = 9,8 m/s^2)

Determinar:

a. La velocidad del disparo;

b. La altura máxima alcanzada;

c. El tiempo de vuelo;

d. A qué altura se encuentra a los 6 segundos;

e. Que velocidad lleva a los 12 segundos.

Solución:

Realizamos un esquema del problema (movimiento vertical → Eje *y*)

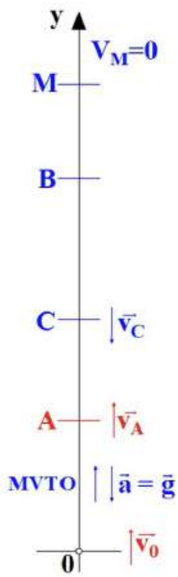


Figura 2.15. Ejercicio de caída libre.

Datos:

$\uparrow \vec{v_0}$

$t_{OA} = 2s$

$\vec{v_A} = \left(50\vec{j}\right) \mathrm{m/s}$

a. v_0 =? OA: MRUVR

$$v_A = v_0 - gt_{OA} \Rightarrow$$

$$v_0 = v_A + gt_{OA} = 50 + 9{,}8\,(2)$$

$$v_0 = 69{,}6 \mathrm{m/s} \qquad \text{Resp (a)}$$

$$\vec{v_0} = \left(69{,}6\vec{j}\right) \mathrm{m/s} \Rightarrow$$

b. $y_{\text{máx}} = y_{OM} =?\; OM : {v_m}^2 = {v_0}^2 - 2g \cdot y_{OM} \Rightarrow$

$$y_{OM} = y_{\text{máx}} = \frac{{v_0}^2}{2g} = \frac{(69{,}6)^2}{2(9{,}8)}$$

$$y_{\text{máx}} = 247{,}15\,\mathrm{m} \Rightarrow \text{Resp (b)}$$

c.

$$t_{vuelo} = t_{00} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2(69{,}6)}{9{,}8} \qquad \text{Resp (c)}$$

$$t_{vuelo} = 14{,}2\,\mathrm{s} \Rightarrow$$

Lo que significa que el tiempo de "O" a "M" es: $t_{OM} = \frac{14{,}2}{2} = 7{,}1\,\mathrm{s}$

d. $t_{OB} = 6$ s $< t_{OM}$ (significa que aún se encuentra subiendo)

$$y_{OB} = v_0 \cdot t_{OB} - \tfrac{1}{2}g{t_{OB}}^2 = 69{,}6\,(6) - \tfrac{1}{2}\,(9{,}8)\,(6)^2 \qquad \text{Resp (d)}$$

$$y_{OB} = 241{,}2\,\mathrm{m} \Rightarrow$$

$\vec{v_C} =? \Rightarrow t_{OC} = 12\,\mathrm{s} > t_{subida}\,(t_{OM})$ La partícula estará bajando en "C".

Pero no hace falta saber este detalle. Se considera de "O" a "C" un M.R.U.V.R. El lanzamiento inicial nos da la referencia para decidir si es acelerado o retardado y se calcula la velocidad final (En C); si sale positivo (está subiendo) y si sale negativo (está bajando)

Así:

OC: MRUVR:

$v_C = v_0 - g \cdot t_{OC} = 69{,}6 - 9{,}8\ (12)$

$v_C - 48$ m/s (que significa que está bajando) $\vec{v}_C = (-48\vec{j})$m/s

Otra forma de calcular la velocidad a los 12 segundos es considerando el movimiento de M (Altura máxima) a "C", porque como sabemos, el tiempo de subida (t_{OM} = 7,1 s) es menor que 12 segundos luego, el tiempo de "M" a "C" será: $t_{MC} = (12 - 7{,}1\ s)$, $t_{MC} = 4{,}9$ s

MC: M.R.U.V.A: (Caída): $v_C = v_M + g\ t_{MC} \Rightarrow v_C = 9{,}8\ (4{,}9) = 48$ m/s

(Hacia Abajo), qué es exactamente el mismo valor pero el proceso sería más largo, porque habría que determinar el tiempo de subida, para comparar con el tiempo que nos dan; en cambio el primer método es más rápido y directo, teniendo como referencia el lanzamiento inicial.

- Un observador situado a 48 m de altura respecto del piso ve pasar un cuerpo hacia arriba y 8 segundos después lo ve pasar hacia abajo.

Determinar:

a. Con qué velocidad fue lanzado el cuerpo desde el piso;

b. Hallar a qué altura llegó respecto al piso; 90

c. El tiempo de vuelo;

d. Qué velocidad llevaba el cuerpo cuando pasó frente al observador, a la ida y a la vuelta.

Datos:

$y_{SO} = 48m$

$t_{OO} = 8$ s

$v_S =?\uparrow$

$y_{SM} = y_{máx} =?$

$t_{vuelo} =?$

$\downarrow v_0 \uparrow =?$

Solución:

Realizamos el esquema del problema.

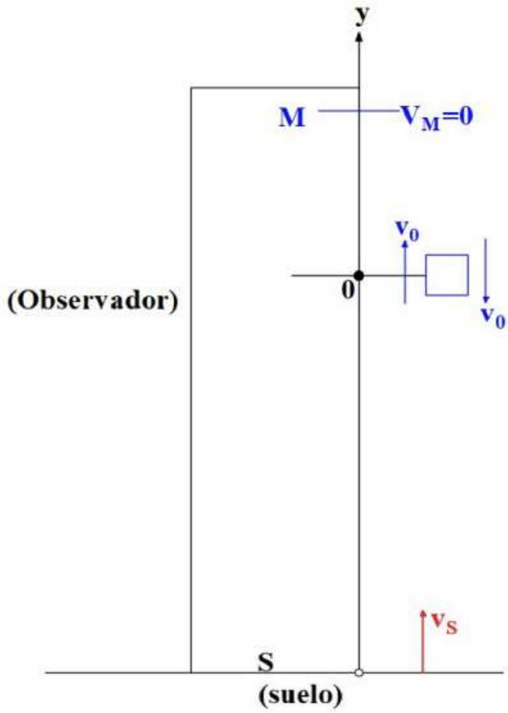


Figura 2.16. Ejercicio de caída libre.

SM: MRUVR

$$v_m{}^2 = v_S{}^2 - 2g\, y_{SM}$$

$$v_S{}^2 = 2g\, y_{SM} \text{ (Ecuación 1)}$$

$$y_{SM} = y_{SO} + y_{OM} \text{ (Ecuación 2)}$$

$$y_{SM} = 48 + y_{OM}$$

OM: MRUVR:

$$y_{OM} = v_0 t_{OM} - \tfrac{1}{2} g t_{OM}{}^2 \text{ (Observador)}$$

$$t_{OO} = t_{OM} + t_{MO} = 2t_{OM} : t_{OM} = t_{MO}$$

$$t_{OM} = \tfrac{8}{2} = 4\text{s}$$

Luego:

$y_{OM} = 4v_0 - \frac{1}{2}(9{,}8)(4)^2$

$y_{OM} = 4v_0 - 78{,}4$ (Ecuación 3)

$v_m = v_0 - gt_{OM} \Rightarrow v_0 = 9{,}8\,(4)$

$v_0 = 39{,}2\,\mathrm{m/s}$ en (Ecuación 3)

$y_{OM} = 4\,(39{,}2) - 78{,}4 \Rightarrow y_{OM} = 156{,}8\,\mathrm{m}$ En (Ecuación 2): $y_{SM} = (48 + 156{,}8)\,\mathrm{m}$

$y_{SM} = 204{,}8\,\mathrm{m}$ en (Ecuación 1)

$v_s = \sqrt{2\,(9{,}8)\,(204{,}8)}$

$v_s = 63{,}36\mathrm{m/s}$

$t_{vuelo} = \frac{2v_s}{g} = \frac{2(63{,}36)}{9{,}8} \Rightarrow t_{vuelo} = 12{,}93\,\mathrm{s}$

Respuestas:

a. $\vec{v}_s = (63{,}36\vec{j})\mathrm{m/s}$

b. $y_{máx} = 204{,}8\mathrm{m}$

c. $t_{vuelo} = 12{,}93$ s

d. $\vec{v}_0 = \uparrow(39{,}2\vec{j})\mathrm{m/s} \downarrow (39{,}2\vec{j})\mathrm{m/s}$

- Desde un trampolín que está a 64 pies por encima de la superficie del agua de un lago se deja caer un balín de plomo. El balín cae en el agua con cierta velocidad y se hunde hasta el fondo con esta misma velocidad (constante). y alcanza el fondo en 10 segundos después de que se le dejó caer desde el trampolín.

Determinar:

a. Cuál es la profundidad del lago;

b. Cuál es la velocidad media del balín;

c. Supóngase que se seca el lago y que se lanza el balín desde el trampolín de manera que alcanza de nuevo el fondo en 10 segundos, ¿cuál es la velocidad inicial del balín?.

Datos:

$y_{OA} = 64$ pies

Deja caer

$v_0 = 0$m/s

$\downarrow v_A =$ constante

$t_{OF} = t_{OA} + t_{AF} = 10$ s (Ecuación E)

$y_{AF} =?$

$v_m =?$

$v_0 =?$

Solución: realizamos un esquema: $g = 32$ pie/s^2 (Sistema Inglés)

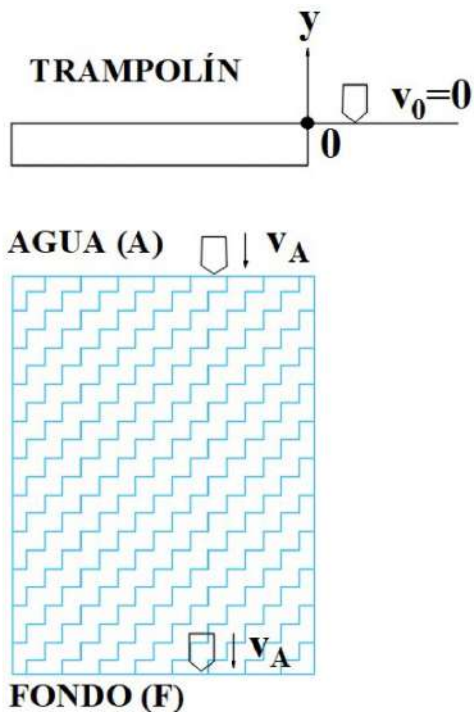


Figura 2.17. Ejercicio de caída libre.

AF: MRU: $y_{AF} = v_A \cdot t_{AF}$ (Ecuación 1)

OA: MRUVA (Caída)

$v_A = v_0 + gt_{OA}$ (Ec.2)

$y_{OA} = v_0 t_{OA} + \frac{1}{2} g t_{OA}{}^2$

$\sqrt{t_{OA}{}^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{OA}}{g}} = \sqrt{\frac{2(64)}{32}}$

$t_{OA} = 2$ s

de (Ec.E) $t_{AF} = (10 - 2)$ s

$t_{AF} = 8$ s

en (Ec.2): $v_A = 32\ (2) = 64$ pie/s

en (Ec.1): = 64 pie/s (8s)

$y_{AF} = 512$ pie $\Rightarrow$ Resp. (a)

$v_m = \frac{y_{OF}}{t_{OF}}\ (Ec{,}3)$ (Ecuación 3)

$y_{OF} = (64 + 512)\,\mathrm{pie} = 576\,\mathrm{pie}$ en (Ecuación 3)

$v_m = \frac{576\,\mathrm{pie}}{10\,\mathrm{s}} \Rightarrow v_m = 57{,}6\mathrm{m/s} \Rightarrow$ Resp. (b)

$t_{OF} = 10$ s

v_0 =? (Si no hay agua)

$y_{OF} = v_0\, t_{OF} + \frac{1}{2} g\, t_{OF}{}^2$

$v_0 = \frac{y_{OF} - \frac{1}{2} g\, t_{OF}{}^2}{t_{OF}} = \frac{576 - \frac{1}{2}(32)(10)^2}{10}$

$v_0 = -102{,}4\,\mathrm{m/s}$

El signo negativo significa que se debe disparar hacia arriba $\vec{v}_0 = (102{,}4\vec{j})$ m/s Resp. (c) (Hacia arriba)

- Se deja caer un balín de acero desde el tejado de un edificio. Un observador colocado frente a una ventana de 8 pies de altura observa que el balín tarda 1/8 de segundo en caer desde la parte alta de la ventana a la parte baja. El balín continúa cayendo, sufre una colisión completamente elástica en el pavimento horizontal, y reaparece en la parte baja de la ventana 4 segundos después de que pasó por allí en la bajada. ¿Cuál es la altura del edificio? (Figura a).

Datos:

$v_0 = 0$

$y_{AB} = 8$ pies

$t_{AB} = 1/8$ s

$t_{BB} = 4$ s

$t_{BP} = t_{PB} = 2$ s

$y_{OP} =?$

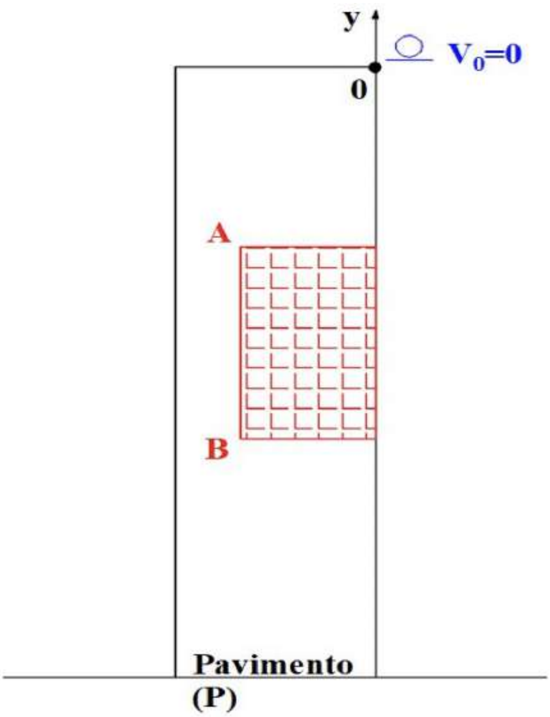


Figura 2.18. Ejercicio de caída libre.

Solución:

Trabajaremos este ejercicio en el sistema inglés (g = 32 pie/s^2)

$y_{OP} = y_{OA} + y_{AB} + y_{BP}$ (Ecuación 1)

OA: MRVUA:

$${v_A}^2 = {v_0}^2 + 2g\,y_{OA}$$

$$y_{OA} = \frac{{v_A}^2}{2g} \text{ (Ecuación 2)}$$

AB: MRVUA:

$$y_{AB} = v_A t_{AB} + \tfrac{1}{2} g\, {t_{AB}}^2$$

$$v_A = \frac{y_{AB} - \frac{1}{2} g\, {t_{AB}}^2}{t_{AB}}$$

$$v_A = \frac{8 - \frac{1}{2}(32)\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{1}{8}}$$

$$v_A = 62\,\text{pie/s} \quad \text{en (Ecuación 2)}$$

$$y_{OA} = \frac{(62)^2}{2(32)}$$

$$y_{OA} = 60\,\text{pie}$$

BP: MRVUA

$$y_{BP} = v_B\, t_{BP} + \tfrac{1}{2} g\, {t_{BP}}^2 \text{ (Ecuación 3)}$$

$$v_B = v_A + g t_{AB} = 62 + 32\left(\tfrac{1}{8}\right) \Rightarrow v_B = 66\,\text{pie/s}$$

$$\text{en (Ec.3) } y_{BP} = 66\,(2) + \tfrac{1}{2}\,(32)\,(2)^2 \Rightarrow y_{BP} = 196\,\text{pie}$$

$$\text{en (Ec.1) } y_{OP} = (60 + 8 + 196)\,\text{pie}$$

$$y_{OP} = 264\,\text{pie}$$

- Un objeto es soltado desde una altura H y emplea 4 segundos en recorrer los últimos 240 m antes de impactar contra el piso determine H.

Trabaje con $g = 9{,}8 m/s^2$

Datos:

$v_0 = 0$

$y_{AB} = 240m$

H =?

$t_{AB} = 4$ s

Solución:

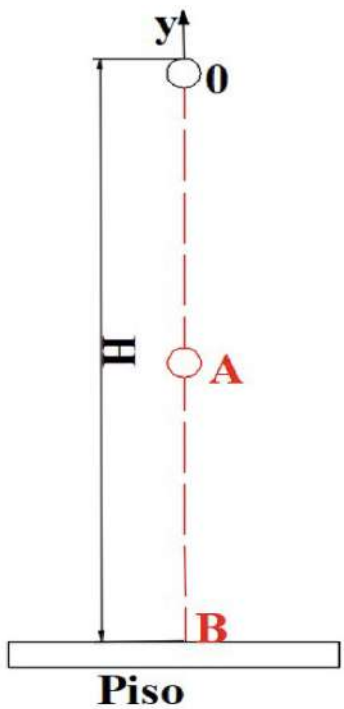


Figura 2.19. Ejercicio de caída libre.

OA: MRVUA:

$y_{OA} = v_0 t_{OA} + \frac{1}{2} g\, {t_{OA}}^2$

$y_{OA} = 4{,}9\, {t_{OA}}^2$ (Ecuación 1)

${v_A}^2 = {v_0}^2 + 2g\, y_{OA}$

$y_{OA} = \frac{{v_A}^2}{2g}$ (Ecuación 2)

AB: MRVUA:

$y_{AB} = v_A \cdot t_{AB} + \frac{1}{2} g\, {t_{AB}}^2$

$v_A = \frac{y_{AB} - \frac{1}{2} g\, {t_{AB}}^2}{t_{AB}}$

$v_A = \frac{240 - \frac{1}{2}(9{,}8)(4)^2}{4}$

$v_A = 40{,}4\mathrm{m/s}$

En (Ecuación 2)

$y_{OA} = \frac{(40{,}4)^2}{2(9{,}8)}$

$y_{OA} = 83{,}3\,\mathrm{m}$

$H = y_{OA} + y_{AB} = (83{,}3 + 240)\mathrm{m}$

$H = 323{,}3\mathrm{m} \Rightarrow$ Respuesta

Movimiento en un plano (Parabólico)

- Un jugador de fútbol pateó una pelota que sale disparada a razón de 25 m/s y haciendo un ángulo de 37° con la horizontal. Otro jugador que se encuentra a 20 m de distancia, y delante del primero, corre con movimiento uniforme a recoger la pelota ¿con qué velocidad debe correr este último para recoger la pelota justo en que ésta llegue a tierra? Desprecie la resistencia del aire.

Solución: realizamos un esquema (gráfico) del problema:

Datos:

$v_0 = 25$ m/s

$\theta_0 = 37°$

$x_{OA} = 20$m

$v_2 =$?

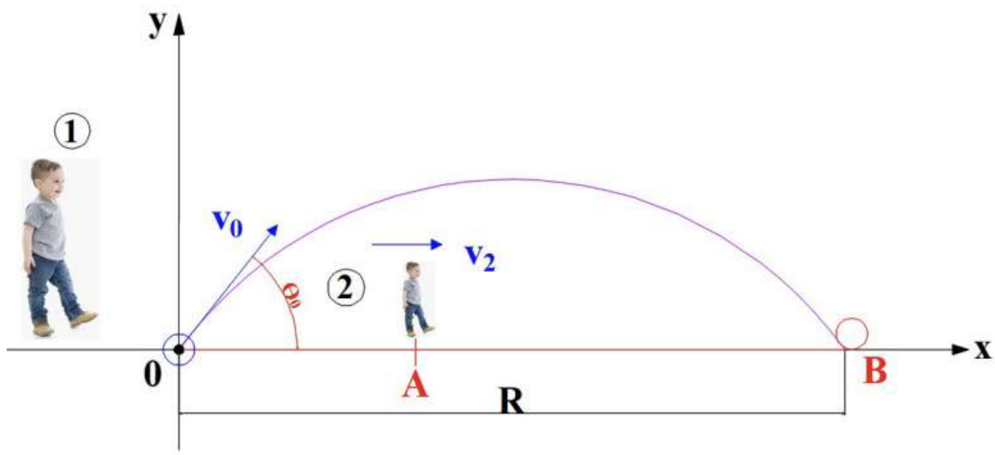


Figura 2.20. Ejercicio de movimiento parabólico.

movimiento: Jugador 2 AB: MRU

$v_2 = \frac{x_{AB}}{t_{AB}}$ (Ecuación 1)

$x_{AB} = x_{OB} - x_{OA}$ (Ecuación 2)

$x_{OB} = R = \frac{{v_0}^2 sen\, 2\,\theta_0}{g} = \frac{(25)^2 sen 2(37°)}{9{,}8}$

$x_{OB} = 61{,}3\,\mathrm{m}$ en (Ecuación 2)

$x_{AB} = 61{,}3\,\mathrm{m} - 20m \Rightarrow x_{AB} = 41{,}3\,\mathrm{m}$

El tiempo que dispone el segundo jugador: t_{AB} es el tiempo que tarde la pelota en el aire:

$t_{AB} = t_{vuelo} = \frac{2v_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0}{g} = \frac{2(25)\mathrm{sen}\,37°}{9{,}8}$

$t_{AB} = 3{,}07$s. Reemplazamos en la (Ecuación 1)

$v_2 = \frac{41{,}3\,\mathrm{m}}{3{,}07\,\mathrm{s}} \Rightarrow v_2 = 13{,}45\,\mathrm{m/s} \Rightarrow$ Respuesta

- Se dispara una bala con una velocidad inicial de 50 m/s formando un ángulo de tiro de 53°. Se observa que, al caer a tierra, pasa justo rozando el borde de un precipicio de 200 m de altura.

Determinar:

a. El alcance horizontal total;

b. El tiempo que permanece en el aire.

Datos:

$v_0 = 50$ m/s

$\theta_0 = 53°$

$y_{AP} = 200$m

$x_{OP} =?$

$t_{OP} =?$

Esquema:

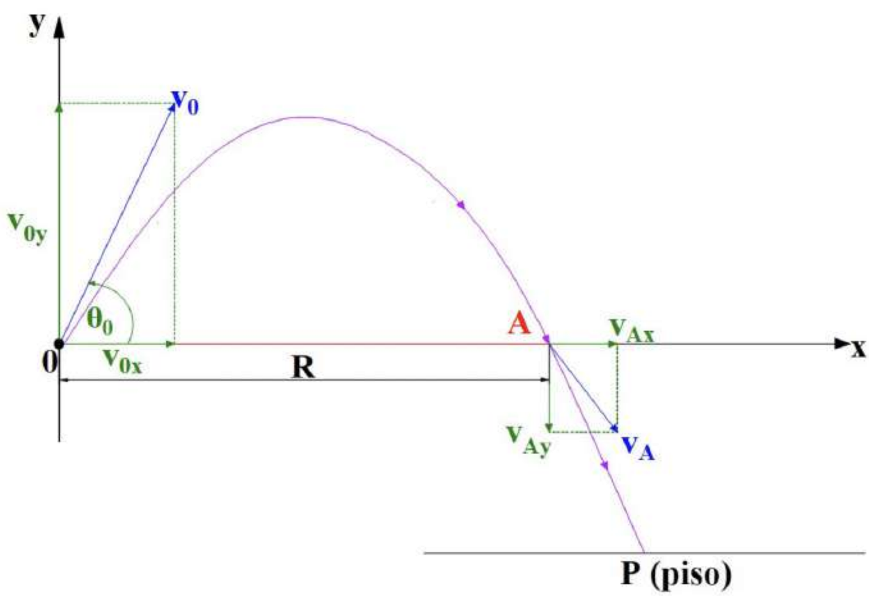


Figura 2.21. Ejercicio de movimiento parabólico.

Primer Método:

$x_{OP} = x_{OA} + x_{AP}$ (Ecuación 1)

$x_{OA} = R = \frac{v_0{}^2\, sen\, 2\,\theta_0}{g} = \frac{(50)^2 \cdot sen\, 2(53°)}{9{,}8} = 245{,}2$ m

AP (Movimiento parabólico): X: MRU

$x_{AP} = v_{AX} \cdot t_{AP}$ (Ecuación 2)

$v_{AX} = v_{OX} = v_0 \cdot \cos\theta_0 = 50 \cdot \cos 53° = 30\,\text{m/s}$

Y: M.R.U.V. A: $y_{AP} = v_{Ay} \cdot t_{AP} + \frac{1}{2} g t_{AP}{}^2$ (Ecuación 3)

OA (Movimiento parabólico): Y: MRUVR:

$v_{Ay} = v_{0y} - g\, t_{OA}$ (Ec.4)

$t_{OA} = t_{vuelo} = \frac{2v_0 \cdot sen\theta_0}{g} = \frac{2(50) sen\, 53°}{9{,}8} = 8{,}15\,\text{s}$ en (Ecuación 4)

$v_{Ay} = v_0\,\text{sen}\,\theta_0 - g t_{OA} = 50\,\text{sen}\,53° - 9{,}8\,(8{,}15) = -40\,\text{m/s} \downarrow$

En (Ecuación 3): $200 = 40 t_{AP} + \frac{1}{2}\,(9{,}8)\, t_{AP}{}^2 \Rightarrow$

Hacia abajo $(+) \Rightarrow 4{,}9 t_{AP}{}^2 + 40 t_{AP} - 200 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $t_{AP}{}' = 3{,}5\,\text{s}$; $t_{AP}{}'' = -11{,}75\,\text{s}$

Se elige la positiva: t_{AP} = 3,5 s en (Ecuación 2)

x_{AP} = 30 (3,5) = 105m en (Ecuación 1)

x_{OP} = (245,2 + 105)m ⇒ xOP = 350,2m ⇒ Resp (a)

$t_{OP} = t_{OA} + t_{AP}$ = (8,15 + 3,5) s ⇒ tOP = 11,65 s → Resp (b)

Segundo Método:

Se puede aplicar el movimiento parabólico directamente de OP: $x_{OP} = v_0 \cos\theta_0 \cdot t_{OP}$ (Ec.1) Y: MRUVR (considerando el punto inicial de lanzamiento con una velocidad en y → hacia arriba y la altura $y_{OP} = y_{AP} = -200$m

$-y_{AP} = v_0\, sen\,\theta_0 \cdot t_{OP} - \frac{1}{2} g\, t_{OP}{}^2 \Rightarrow 4{,}9 t_{OP}{}^2 - 40 t_{OP} - 200 = 0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado: $t_{OP}{}' = 11{,}66\,\text{s}$ $\quad t_{OP}{}'' = -3{,}5\,\text{s}$

Elegimos la positiva: $t_{OP} = 11{,}66$ s en (Ecuación 1)

$x_{OP} = 50\cos 53° \,(11{,}66) \Rightarrow x_{OP} = 350{,}8\text{m} \Rightarrow$ Resp (a)

$t_{OP} = 11{,}66\ \text{s} \Rightarrow$ Resp (b)

Que son los mismos resultados obtenidos por el primer método.

- Un bombardero vuela de manera horizontal sobre el agua a una altitud de 2 800 m con respecto al nivel del mar, mientras que un barco enemigo que se encuentra a una distancia horizontal de 1 000 m navega a 90 km/h en la misma dirección y sentido del bombardero. En ese instante y posición se deja caer una bomba desde el avión para que impacte en el barco enemigo.

Determinar:

a. La velocidad del bombardero para que la bomba impacte en el barco;

b. El tiempo que tarda la bomba en impactar al barco;

c. La velocidad de la bomba cuando impacta en el barco.

Datos:

$\theta_0 = 0°$

$y_{OM} = 2\,800\text{m} = y_{OD}$

$x_{OC} = 1\,000\text{m}$

$v_B = 90\ \text{km/h} = 25\ \text{m/s}$

$v_0 = \vec{v}_A = ?$

$t_{OD} = ?$

$\vec{v}_D = ?$

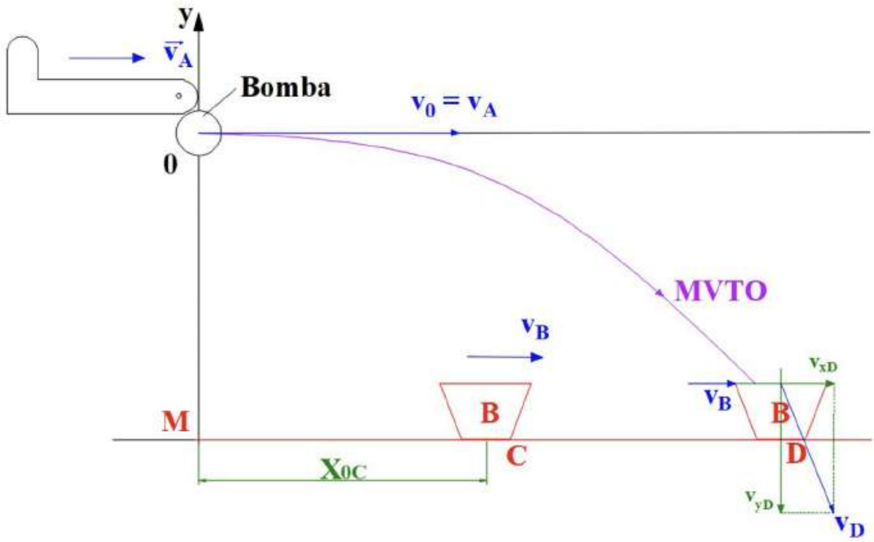


Figura 2.22. Ejercicio de movimiento parabólico.

Solución:

Movimiento bomba: parabólico:

X: MRU:

$x_{OD} = v_0 \cos\theta_0 \cdot t_{OD}$ (Ecuación 1)

Y: MRUVA (caída libre)

$$y_{OD} = v_0 \cdot sen\,\theta_0 t_{OD} + \tfrac{1}{2} g t_{OD}{}^2$$

$$\sqrt{t_{OD}{}^2} = \sqrt{\tfrac{2 \cdot y_{OD}}{g}} \Rightarrow t_{OD} = \sqrt{\tfrac{2(2800)}{9{,}8}}$$

$$t_{OD} = 23{,}9\,\mathrm{s} = t_{CD}\ (\mathrm{Barco} \Rightarrow \mathrm{MRU})$$

Según gráfico: relación de segmentos:

$x_{OD} = x_{OC} + x_{CD}$ (Ecuación 2)

Movimiento barco: CD: MRU

$$x_{CD} = v_B \cdot t_{CD} = 25\,(23{,}9)$$

$x_{CD} = 597{,}5\,\mathrm{m}$: en ecuación 2: $x_{OD} = (1\,000 + 597{,}5)\,\mathrm{m}$

$x_{OD} = 1\,597{,}5\,\mathrm{m}$ en ecuación 1

$v_0 = \frac{x_{OD}}{t_{OD}} = \frac{1597{,}5}{23{,}9} \Rightarrow \vec{v_0} = \vec{v_A} = \left(66{,}841\ \vec{i}\right)\,\mathrm{m/s} \Rightarrow$ Resp (a)

$t_{OD} = 23{,}9\,\mathrm{s} \Rightarrow$ Resp (b)

$$\overrightarrow{v_D} = v_{Dx}\overrightarrow{i} + v_{Dy}\overrightarrow{j} \text{ (Ecuación 3)}$$

$$v_{Dx} = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = 66{,}841 \cos 0° = 66{,}841 \overrightarrow{\mathrm{m/s}}$$

$$v_{Dy} = v_{0y} + gt_{OD} = 9{,}8\,(23{,}9) = 234{,}22\,\mathrm{m/s} \downarrow$$

En (Ecuación 3): $\overrightarrow{v_D} = \left(66{,}941\overrightarrow{i} - 234{,}22\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s} \Rightarrow$ Resp (c)

- Se lanza desde un punto A un proyectil con una velocidad de 15 m/s y formando un ángulo de 37° sobre la horizontal. Si el proyectil impacta en un punto B de un plano inclinado, como se indica en la figura.

Determinar:

a. La distancia entre los puntos A y B;

b. El tiempo empleado entre los puntos A y B;

c. La velocidad en el punto B.

Datos:

$v_0 = 15$ m/s

$\theta_0 = 37°$

$\theta = 30°$

$d_{AB} = ?$

$t_{AB} = ?$

$\vec{v}_B = ?$

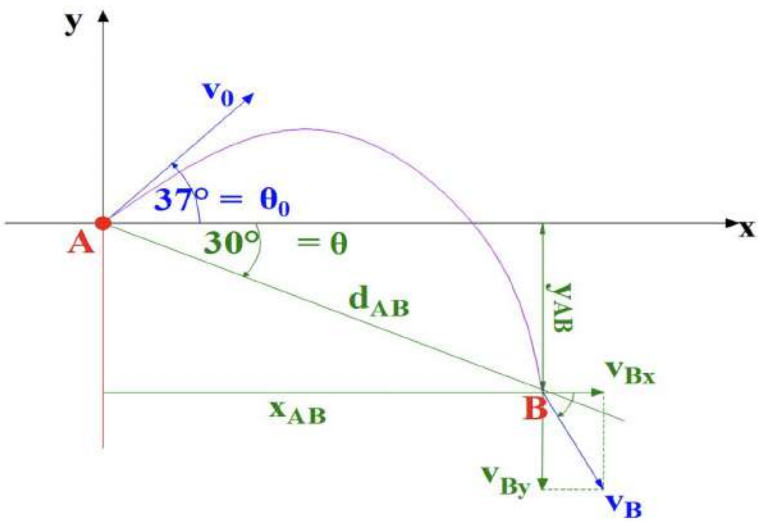


Figura 2.23. Ejercicio de movimiento parabólico.

Solución:

$d_{AB} = \sqrt{x_{AB}{}^2 + y_{AB}{}^2}$ (Ecuación 1)

$\tan\theta = \frac{y_{AB}}{x_{AB}} \Rightarrow y_{AB} = x_{AB} \cdot \tan 30°$ (Ecuación 2)

Movimiento AB: parabólico: X: MRU; Y: MRUVR

$x_{AB} = v_0 \cos\theta_0\, t_{AB} \Rightarrow x_{AB} = 15 \cos 37° t_{AB} \Rightarrow x_{AB} = 11{,}98 t_{AB}$ (Ecuación 3)

$-y_{AB} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t_{AB} - \frac{1}{2} g t_{AB}{}^2 \Rightarrow y_{AB} = \frac{1}{2}(9{,}8)\, t_{AB}{}^2 - 15 \operatorname{sen} 37° t_{AB} \Rightarrow$

$y_{AB} = 4{,}9 t_{AB}{}^2 - 9 t_{AB}$ ecuación 4 y ecuación 3 reemplazamos en ecuación 2

$4{,}9 t_{AB}{}^2 - 9 t_{AB} = 11{,}98\, t_{AB} \tan 30°$

$4{,}9 t_{AB}{}^2 - 9 t_{AB} + 6{,}92 t_{AB} = 15{,}92 t_{AB}$

$t_{AB} = \frac{15{,}92}{4.9} \Rightarrow t_{AB} = 3{,}25\,\text{s} \Rightarrow$ Resp (b)

En ecuación 3 y ecuación 2:

$x_{AB} = 11{,}98\,(3{,}25) \Rightarrow x_{AB} = 38{,}94\,\text{m}$

$y_{AB} = 38{,}94 \tan 30° \Rightarrow y_{AB} = 22{,}5\,\text{m}$

En ecuación 1: $d_{AB} = \sqrt{(38{,}94)^2 + (22{,}5)^2}$

$d_{AB} = 45\text{m} \Rightarrow$ Resp (a)

$v_B = v_{Bx}\vec{i} + v_{By}\vec{J}$

X: MRU:

$v_{Bx} = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = 15 \cos 37° = 11{,}98$ m/s

Y: MRUVR:

$v_{By} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - g\, t_{AB} = 15 \operatorname{sen} 37° - 9{,}8\,(3{,}25)$

$v_{By} = -22{,}8$ m/s ↓ en ecuación 5

$\vec{v}_B = (11{,}98\,\vec{i} - 22{,}8\,\vec{j})$ m/s = (25,76 m/s;–62,3°) ⇒ Resp. (c)

Ángulo negativo (–62,3°) en sentido horario

Movimiento en un plano: Circular

- Un auto tiene una rapidez de 110 km/h. El diámetro de las llantas de 15 pulgadas: calcular la velocidad angular de la llanta.

Datos:

$v = 110\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{1000\,\mathrm{m}}{\mathrm{km}} \times \frac{\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}}$

$v = 30{,}56\,\mathrm{m/s}$

$D = 15\,\mathrm{pul} \Rightarrow R = \frac{D}{2} = 7{,}5\,\mathrm{in}$

$R = 7{,}5\,\mathrm{pul} \times \frac{\mathrm{m}}{39{,}4\,\mathrm{in}}$

$R = 0{,}19\,\mathrm{m}$

$W = ?$

Solución:

$v = R \cdot W$

$W = \frac{v}{R}$

$W = \frac{30{,}56}{0{,}19}$

$W = 160{,}8\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

- Un ciclista en una competencia da 80 pedaleadas completas por minuto. La catalina tiene un diámetro de 20 cm el piñón de la cadena 8 cm y la rueda o llanta tiene un diámetro de 60 cm. Calcular la velocidad (rapidez lineal) de la bicicleta.

Datos:

$W_3 = 80\frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{min}}$

$D_3 = 0{,}20\,\mathrm{m}$

$R_3 = 0{,}10\,\mathrm{m}$

$D_2 = 8\,\mathrm{cm} = 0{,}08\,\mathrm{m}$

$R_2 = 0{,}04\,\mathrm{m}$

$D_1 = 0{,}60\,\mathrm{m}$

$R_1 = 0{,}30\,\mathrm{m}$

$W_3 = 80\frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{min}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{\mathrm{rev}} \times \frac{\mathrm{mín}}{60s}$

$W_3 = \frac{8}{3}\pi\ \mathrm{rad}/\mathrm{s}$

$v_1 = ?$

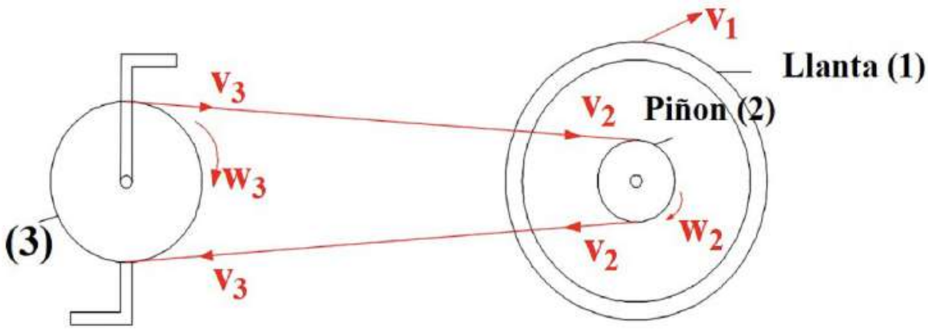


Figura 2.24. Ejercicio de movimiento circular.

Solución:

$v_3 = W_3 R_3 = \frac{8}{3}\pi\,(0{,}10) = 0{,}838\,\mathrm{m/s}$

$v_3 = v_2$

$W_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{0{,}838}{0{,}04} = 20{,}944\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

$W_2 = W_1$

$v_1 = W_1 R_1 = 20{,}944\,(0{,}30)$

$v_1 = 6{,}28\,\mathrm{m/s} \cong 22{,}6\,\mathrm{km/h}$

- Un cuerpo parte del punto (8,-6) m en sentido antihorario por una trayectoria circular con centro en el origen de un sistema de coordenadas en el plano, y se mueve durante 24 segundos con una velocidad angular constante de 9 rad/s.

Determinar:

a. El desplazamiento angular;

b. La posición angular inicial;

c. La posición angular final;

d. Cuántas vueltas dio;

e. El período;

f. La velocidad en la posición inicial;

g. La aceleración centrípeta en la posición final.

Datos:

$r_0 = (8\vec{i} - 6\vec{j})$m

$t_{OF} = 24$ s

$W = 9$ rad/s

M.C.U

$\phi F = ?$

$\vec{r}_F = ?$

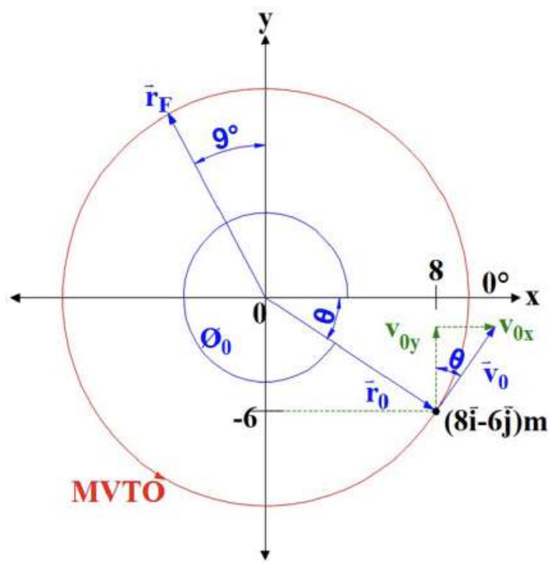


Figura 2.25. Ejercicio de movimiento circular.

a.
$$\Delta\theta = \theta_F - \theta_0 = w \cdot t_{OF}$$
$$\Delta\theta = 9\text{rad/s}\,(24\,\text{s}) \Rightarrow \Delta\theta = 216\,\text{rad}$$

b.
$$\phi_0 = 360^\circ - \theta = 360 - 36{,}87 = 326{,}13^\circ$$
$$\tan\theta = \tfrac{6}{8} \Rightarrow \theta = 36{,}87^\circ$$
$$\phi_0 = 326{,}13^\circ \times \tfrac{\text{rad}}{180^\circ}$$
$$\phi_0 = 5{,}64\,\text{rad}$$

c. $\phi_F = \theta_0 + \Delta\theta = (5{,}64 + 216)\,\text{rad} \Rightarrow \phi_F = 221{,}64\,\text{rad}$

d. $\phi_F = 221{,}64\,\text{rad} \times \frac{\text{rev}}{2\,\pi\,\text{rad}} = 35{,}2751\,\text{rev}$
$$\phi_F = 35\,\text{rev} + 0{,}2751\ \text{rev}\ \times \tfrac{360^\circ}{\text{rev}} = 35\,\text{rev} + 99^\circ$$
$$r_F = R = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = 10\,\text{m}$$
$$r_{Fx} = r_F\,\text{sen}\,9^\circ = -1{,}56\,\text{m}$$
$$r_{Fy} = r_F\ \cos\,9^\circ = 9{,}88\,\text{m}$$
$$\overrightarrow{r_F} = r_{Fx}\,\overrightarrow{i} + r_{Fy}\,\overrightarrow{j}\ (Ecuacin1)$$
$$\overrightarrow{r_F} = \left(-1{,}56\,\overrightarrow{i} + 9{,}88\,\overrightarrow{j}\right)\text{m}$$

e. Período: $T = ?$
$$T = \tfrac{2\pi\,\text{rad}}{w}$$
$$T = \tfrac{2\pi\,\text{rad}}{9\frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow T = 0{,}698\,\text{s}$$

f. $\overrightarrow{v_0} =?\ \overrightarrow{v_0} = v_{0x}\,\overrightarrow{i} + v_{0y}\,\overrightarrow{j}$ (Ecuación 2)
$$\left.\begin{array}{l} v_{0x} = v_0\,\text{sen}\,\theta = 90\,\text{sen}\,36{,}87^\circ = 54\,\text{m/s} \\ v_{0y} = v_0\ \cos\theta = 90\cos 36{,}87^\circ = 72\,\text{m/s} \end{array}\right\}\ \text{En (Ec.2)}$$
$$v_0 = R_W = 10\,(9) = 90\,\text{m/s}$$
$$\overrightarrow{v_0} = \left(54\,\overrightarrow{i} + 72\,\overrightarrow{j}\right)\text{m/s}$$

g. $\Delta\theta =?\ (\text{rev}) \Rightarrow \Delta\theta = 216\,\text{rad} \times \frac{\text{rev}}{2\pi\text{rad}}$
$$\Delta\theta = 34{,}38\,\text{rev}$$

h. $a_F = ?$

$$a_{centripeta} = RW^2 = a_F$$

$$a_F = 10(9)^2 = 810\,\mathrm{m/s}$$

$$\overrightarrow{a_F} = a_{Fx}\overrightarrow{i} + a_{Fy}\overrightarrow{j} \text{ (Ecuación 3)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{Fx} &= a_F \operatorname{sen} 9° = 810 \operatorname{sen} 9° = 126\,\mathrm{m/s^2} \\ a_{Fx} &= a_F \cos = 810 \cos 9° = -800\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}\right\} \text{En (Ec.3)}$$

$$\overrightarrow{a_F} = \left(126{,}7\overrightarrow{i} - 800\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s^2}$$

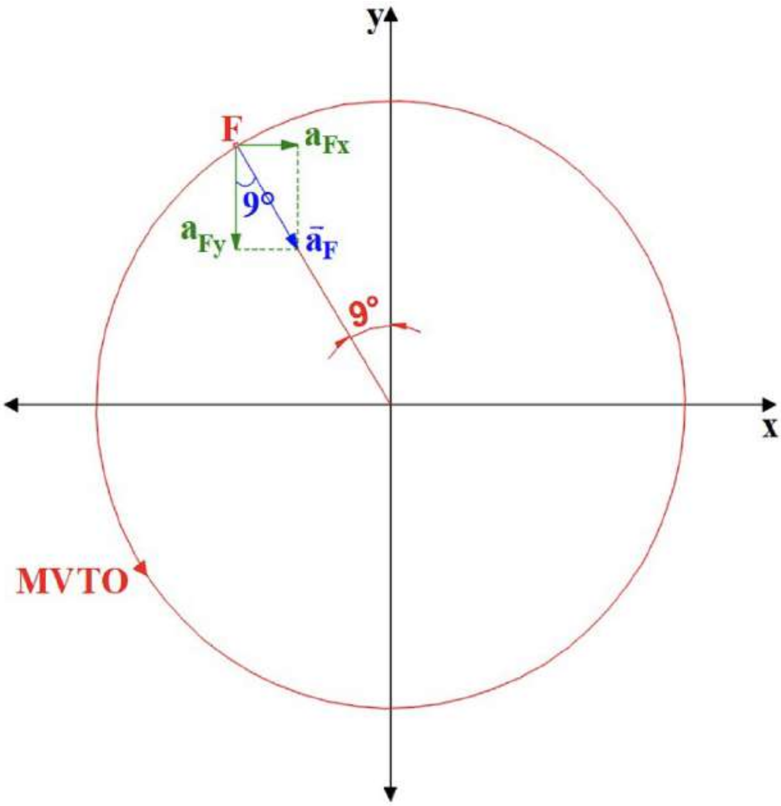


Figura 2.26. Ejercicio de movimiento circular.

- Una partícula se mueve en una trayectoria circular de 2,8 m de radio en sentido horario. Si parte del reposo y del punto B, alcanzando una velocidad angular de 14 rad/s en 8 segundos.

Determinar:

a. La aceleración angular;

b. El desplazamiento angular;

c. La velocidad angular media;

d. La posición angular final (tomando al eje y de referencia);

e. La posición final;

f. La velocidad final;

g. La aceleración total final.

Datos:

$R = 2{,}8\,\mathrm{m}$

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{array}\right\} \text{Punto B}$$

$\theta_0 = 60° = 1{,}047\,\mathrm{rad}$

$w_F = 14\,\mathrm{rad/s}$

$t_{OF} = 8\,\mathrm{s}$

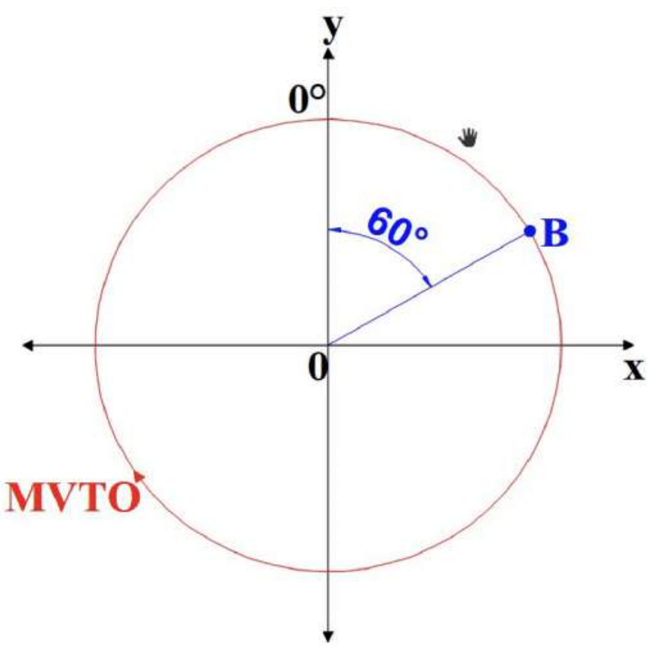


Figura 2.27. Ejercicio de movimiento circular.

a. $\alpha =? : OF$:

MCUVA:

$w_F = w_0 + \alpha\, t_{OF}$

$\alpha = \frac{w_F}{t_{OF}} = \frac{14}{8}$

$\alpha = 1{,}75\,\mathrm{rad/s^2}$

b. $\Delta\theta =?$

$\Delta\theta = w_0 \cdot t_{OF} + \frac{1}{2}\alpha \cdot {t_{OF}}^2$

$\Delta\theta = \frac{1}{2}\,(1{,}75)\,(8)^2 \Rightarrow \Delta\theta = 56\,\mathrm{rad}$

c. $w_m =? w_m = \frac{\Delta\theta}{t_{OF}} = \frac{56\,\mathrm{rad}}{8\,\mathrm{s}} \Rightarrow w_m = 7\,\mathrm{rad/s}$

d. $\theta_F =? \Delta\theta = \theta_F - \theta_0 \Rightarrow \theta_F = \theta_0 + \Delta\theta = (1{,}047 + 56)\,\mathrm{rad}$

$\theta_F = 57{,}047\,\mathrm{rad}$

e. $\overrightarrow{r_F} =?$

$\theta_F = 57{,}047\,\mathrm{rad} \times \frac{\mathrm{rev}}{2\,\pi\,\mathrm{rad}} = 9{,}08\,\mathrm{rev}$

$\theta_F = 9 + 0{,}08\,\mathrm{rev} \times \frac{360°}{rev} = 9\,\mathrm{rev} + 28{,}8°$

$\overrightarrow{r_F} = r_{Fx}\,\overrightarrow{i} + r_{Fy}\,\overrightarrow{j}$ (Ec.1): $r_F = R$

$r_{Fx} = r_F \mathrm{sen}\ 28{,}8° = 2{,}8\,\mathrm{sen}\ 28{,}8°$

$r_{Fx} = 1{,}35\,\mathrm{m}$

$r_{Fy} = r_F \cos\ 28{,}8° = 2{,}8 \cos\ 28{,}8°$

$r_{Fy} = 2{,}45\,\mathrm{m}$, en (Ec.1)

$\overrightarrow{r_F} = \left(1{,}35\,\overrightarrow{i} + 2{,}45\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m}$

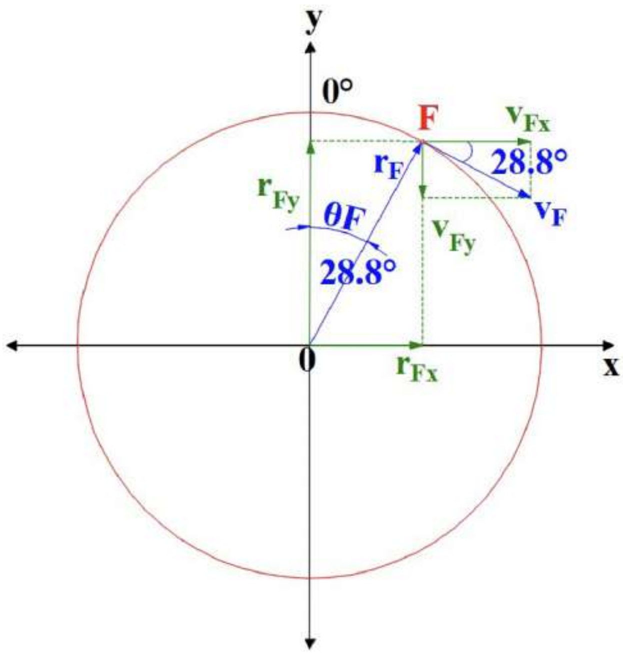


Figura 2.28. Ejercicio de movimiento circular.

f. $\overrightarrow{v_F} = ? : \overrightarrow{v_F} = v_{Fx}\overrightarrow{i} + v_{Fy}\overrightarrow{j}$ (Ecuación 2)

$v_F = RW_F = 2{,}8\,(14) \Rightarrow v_F = 39{,}2\ \mathrm{m/s}$

$v_{Fx} = v_F \cos 28{,}8° = 39{,}2 \cos 28{,}8° = 34{,}4\mathrm{m/s}$

$v_{Fy} = v_F \operatorname{sen} 28{,}8° = 39{,}2 \operatorname{sen} 28{,}8° = -18{,}9\mathrm{m/s}$

$\overrightarrow{v_F} = \left(34{,}4\,\overrightarrow{i} - 18{,}9\,\overrightarrow{j}\right)\ \mathrm{m/s}$

g. La aceleración total final:

$\overrightarrow{a}_{T_F} = \overrightarrow{a}_{t_F} + \overrightarrow{a}_{R_F}$ (Ecuación 2)

$a_t = R\alpha = 2{,}8\,(1{,}75)$

$a_t = 4{,}9\mathrm{m/s^2}$

$\overrightarrow{a_{t_F}} = a_{t_{Fx}}\overrightarrow{i} + a_{t_{Fy}}\overrightarrow{j}$

$a_{t_{Fx}} = a_{t_{Fx}} \cos 28{,}8°$

$a_{t_{Fx}} = 4{,}9 \cos 28{,}8°$

$a_{t_{Fx}} = 4{,}3\ \mathrm{m/s^2}$

$$a_{tF_y} = 4{,}9\,sen\,28{,}8°$$
$$a_{tF_y} = -2{,}4\,\mathrm{m/s^2}$$
$$\overrightarrow{a_{t_F}} = \left(4{,}3\,\overrightarrow{i} - 2{,}4\,\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s^2}$$

$$a_{R_F} = W R_{F^2} = 2{,}8(14)^2$$
$$a_{R_F} = 548{,}8\,\mathrm{m/s^2}$$
$$\overrightarrow{a}_{R_F} = a_{R_{Fx}}\overrightarrow{i} + a_{R_{Fy}}\overrightarrow{j}$$

$$a_{R_{Fx}} = a_{R_F}\,sen\,28{,}8° = 548{,}8\,sen\,28{,}8° = -264{,}4\,\mathrm{m/s^2}$$
$$a_{R_{Fy}} = a_{R_F}\,\cos\,28{,}8° = 548{,}8\,\cos\,28{,}8° = -480{,}9\,\mathrm{m/s^2}$$
$$\overrightarrow{a_{R_F}} = \left(-264{,}4\,\overrightarrow{i} - 480{,}9\,\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s^2}$$

Reemplazando en la ecuación 3

$$\overrightarrow{a_{T_F}} = \left[\left(4{,}3\,\overrightarrow{i} - 2{,}4\,\overrightarrow{j}\right) + \left(-264{,}4\,\overrightarrow{i} - 480{,}9\,\overrightarrow{j}\right)\right]\mathrm{m/s^2}$$
$$\overrightarrow{a_{T_F}} = \left(-260{,}1\,\overrightarrow{i} - 483{,}3\,\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s^2}$$

2.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

Conceptos generales de cinemática

1. Un barco navega rectilíneamente desde el origen hasta el punto A (120 km; N30°E) y luego hasta el punto Bxz (70 km; 225° con Z). Determinar:

a) Los desplazamientos realizados;

b) Los vectores posición de cada punto;

c) El desplazamiento total realizado;

d) El espacio recorrido;

e) La distancia recorrida.

2. A una partícula que lleva una velocidad de $(-4{,}16\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 7{,}8\,\vec{k})$ se le comunica una aceleración de ($6\,m/s^2$; S61°O) durante 10 segundos. Determinar:

a) El vector unitario de la velocidad inicial;

b) El vector unitario de la aceleración;

c) La velocidad alcanzada.

3. Una partícula se mueve con una velocidad constante de $(15\vec{i} + 2\vec{j} - 18\,\vec{k})$m/s durante 2 minutos. Determinar:

a) El desplazamiento realizado;

b) La distancia recorrida;

c) El vector unitario de la velocidad (dirección);

d) El vector unitario del desplazamiento.

4. Un móvil con una rapidez constante de 324 km/h parte del punto (45,0, 18) m y moviéndose rectilíneamente luego al punto (12,0,-15) m [6]. Determinar:

a) El tiempo empleado;

b) El desplazamiento realizado;

c) El espacio recorrido;

d) La distancia recorrida.

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

1. De dos lugares que están separados por 200 km, de A sale una motocicleta hacia B y demora 4 horas en llegar. De B sale otra motocicleta hacia A y demora 5 horas en llegar. Calcular:

a) A qué distancia de A se cruzan. Respuesta:111,11km

b) Cuánto tiempo después de que partieron se cruzan. Respuesta: 2,22 H

2. Un hombre escuchó una explosión en el mar dos veces, con una diferencia de 15 s. ya que el sonido producido por la explosión se propaga por el aire y por el agua. A que distancia del punto de explosión estaba el hombre, sabiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s y en el agua 1 420 m/s.

Respuesta: d = 6676 m

3. Un alumno de la ESPOCH está de vacaciones en la playa, en un día de lluvia ve una centella y 5 segundos después escucha su sonido. Calcular la distancia del alumno al lugar donde se produjo la centella, sabiendo que el sonido tiene una velocidad 340 m/s.

Respuesta: 1 700 m

4. Desde un mismo punto parten dos móviles con una rapidez constante de 62 km/h y 80 km/h respectivamente. Si llevan la misma dirección y sentido, y el primero sale 30 minutos antes.

Hallar en donde se encontrarán y cuándo se encuentran.

5. Dos puntos A y B están separados 200 km, desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 60 km/h. Simultáneamente y desde B parte otro móvil con el mismo sentido que A y con una rapidez constante de 40 km/h. Hallar dónde y cuándo se encuentren.

6. Dos ciudades C y D están en la misma línea recta y separadas 1 200 km. Desde C parte hacia D un móvil con uno rapidez constante de 222 m/s, 120 segundos después y desde D; parte hacia C otro móvil con una rapidez constante (media) de 333 m/s.

Hallar dónde y cuándo se encuentran.

7. Una persona dispone de 8 horas para darse un paseo. ¿Hasta qué distancia podrá hacerse conducir por un automóvil que va a 35 km/h, sabiendo que tiene que regresar a pie y a 6 km/h?

8. Con un bote que lleva una velocidad (módulo) de 30 km/h se quiere cruzar un río de 250 m de ancho. Si velocidad de lo corriente es 72 km/h (módulo). Calcular:

   a) La desviación que experimenta bote por efecto de la corriente;

   b) La velocidad total;

   c) A que distancia río abajo, tocará la otra orilla.

9. Dos móviles parten de un punto "O" en direcciones perpendiculares entre sí, si se desplazan con rapideces constantes de 20 y 30 m/s, al cabo de qué tiempo estarán separados 20 km.

10. Dos móviles parten del reposo en las mismas direcciones y sentidos, con módulos de velocidad de 50 y 68 km/h respectivamente, cuando pasan 12 s del móvil de menor velocidad se dispara hacia el otro un proyectil a 180 km/h. ¿Qué distancia están separados los dos cuando alcance el proyectil al móvil de mayor velocidad?

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

1. Un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de 3 m/s (rapidez) y una aceleración constante de 4 m/s^2 en la misma dirección que la de la velocidad. Determinar:

   a) La velocidad del cuerpo y el espacio recorrido al final de 7 s;

   Respuestas: 31 m/s y 119 m.

   b) Resolver el mismo problema para un cuerpo cuya aceleración tiene dirección opuesta a la velocidad. Escribir la expresión del desplazamiento en función del tiempo.

   Respuestas: -25 m/s y -77 m

2. Un aeroplano al partir recorre 600 m en 15 s, suponiendo una aceleración constante, calcular la velocidad de partida. Calcular también la aceleración. Respuestas: 288 km/h; 533 m/s^2

3. Un auto parte del reposo y se desplaza con una aceleración de 1 m/s^2 durante 1s. Luego se apaga el motor y el auto desaceleró debido a la fricción, durante 10 s. A un promedio de 5 cm/s^2, entonces se aplican los frenos y el auto se detiene en 5 s. Calcular la distancia total recorrida por el auto. Hacer un gráfico de: x, v y a Vs t.

Respuesta: 9,25 m.

4. Un cuerpo que se mueve con MRUVA viaja 55 pies en 2 s. Durante los próximos 2 s, cubre 77 pies. Determinar:

a) La velocidad inicial del cuerpo;

b) La aceleración;

c) ¿Qué espacio recorrerá en los próximos 4s?.

5. Un auto está esperando que cambie la luz roja; cuando la luz roja cambia a verde, el auto acelera uniformemente durante 6 s a razón de 2 m/s, después de los cual se mueve con una velocidad constante. En el instante que el auto comenzó a moverse, un camión que se mueve en el mismo sentido y dirección con movimiento uniforme de 10 m/s, lo pasó. Determinar:

a) ¿Después de que tiempo y a qué distancia del semáforo se cruzarán nuevamente el auto y el camión?

6. Un automóvil se está moviendo o una velocidad de 45 km/h cuando una luz roja se enciende en una intersección Si el tiempo de reacción del conductor es de 0,7 s, y el auto desacelera o razón de 7 m/s^2 tan pronto el conductor aplica los frenos, calcule que distancia recorrerá el auto desde el instante en que el conductor nota la luz roja hasta que el auto se detiene (”Tiempo de reacción” es el intervalo entre el tiempo en que el conductor nota la luz y el instante que empieza aplicar los frenos)

7. Un cuerpo que parte del reposo en una carretera recta adquiere una velocidad de $(-64\vec{i} - 58\vec{k})$m/s en 10 s. Determinar:

a) La aceleración producida;

b) La velocidad media;

c) La rapidez media;

d) El desplazamiento realizado;

e) La distancia recorrida.

8. Un móvil arranca y recorre 125 m con una aceleración de $(-1{,}1\vec{i} + 1{,}4\vec{k})$m/s^2 por una trayectoria rectilínea. Determinar:

a) El tiempo empleado;

b) El desplazamiento realizado;

c) Lo velocidad final;

d) La velocidad media;

e) La rapidez media.

9. Un móvil que va por una carretera recta con una velocidad de $(-8\vec{i} + 6\vec{k})$m/s recorre 21,6 m con una aceleración de módulo 0,8 m/s2. Determinar:

a) La velocidad alcanzada;

b) El tiempo empleado;

c) El desplazamiento realizado;

d) La velocidad media.

10. Al aproximarse un tren a la estación por una vía recta, la velocidad es de $(-15\vec{i} - 18\vec{k})$m/s. En ese momento el maquinista desconecta la locomotora, produciendo una desaceleración de módulo 0,5 m/s^2. Determinar:

a) El desplazamiento del tren hasta su parada;

b) La distancio recorrida;

c) El tiempo empleado;

d) La velocidad y la rapidez media.

11. Cuando se aplican los frenos de un auto animado de movimiento rectilíneo, su velocidad es de $(-65\vec{i} - 78\,\vec{k})$ km/h. Si el auto se detiene en 3,5 s, determinar:

a) La aceleración producida por los frenos;

b) El desplazamiento realizado;

c) La distancia recorrida;

d) La velocidad y la rapidez media.

12. Un móvil que tienemovimiento rectilíneo frena con una aceleración de $(1{,}3\vec{i} - 1{,}6\,\vec{k})$ m/s^2, durante 8s. Sí durante el frenado recorre una distancia de 45 m, determinar:

a) La velocidad del móvil antes de comenzar a frenar;

b) La velocidad y rapidez media;

c) El desplazamiento realizado;

d) La velocidad final.

13. A un móvil que se mueve por una trayectoria recta, se le comunica una desaceleración de módulo 108 m/s^2 en un espacio de 25 m, si al final de la desaceleración lleva una velocidad de $(14\vec{i} - 17\,\vec{k})$ m/s, determinar:

a) La velocidad que llevaba el móvil antes de comunicarle la desaceleración;

b) El desplazamiento realizado;

c) La velocidad y rapidez media.

14. A un cuerpo que avanza por una carretera recta con una velocidad de (20 m/s; N 150° E), se le comunica una aceleración constante y de módulo 4 m/s^2 en sentido opuesto al de la velocidad durante 10 s. Determinar:

a) El desplazamiento realizado;

b) La distancia recorrida;

c) La velocidad y rapidez media;

d) La velocidad final del cuerpo.

15. Un móvil parte del reposo en una carretera recta con una aceleración de $(1{,}44\vec{i} + 2{,}63\vec{k})m/s^2$, que mantiene durante 3 s, al final de los cuales aplica los frenos con una aceleración de $(-1{,}92\vec{i} - 3{,}508\vec{k})m/s^2$, hasta que se detiene. Determinar:

a) El tiempo que estuvo en movimiento;

b) El espacio total recorrido;

c) El desplazamiento total realizado.

16. Desde un mismo punto parten simultáneamente dos móviles por una carretera recta. El móvil A sale del reposo con una aceleración de módulo 25 m/s^2 y el móvil B inicia con una rapidez constante de 15 m/s, Determinar qué distancia los separa a los 4 s de haber partido:

a) Cuando tienen la misma dirección y sentido;

b) Cuando tienen la misma dirección, pero sentido contrario.

17. El diagrama Vx vs t de la figura adjunta representa el movimiento de tres autos: A, B, C por una carretera recta y a partir de una misma posición inicial. Determinar:

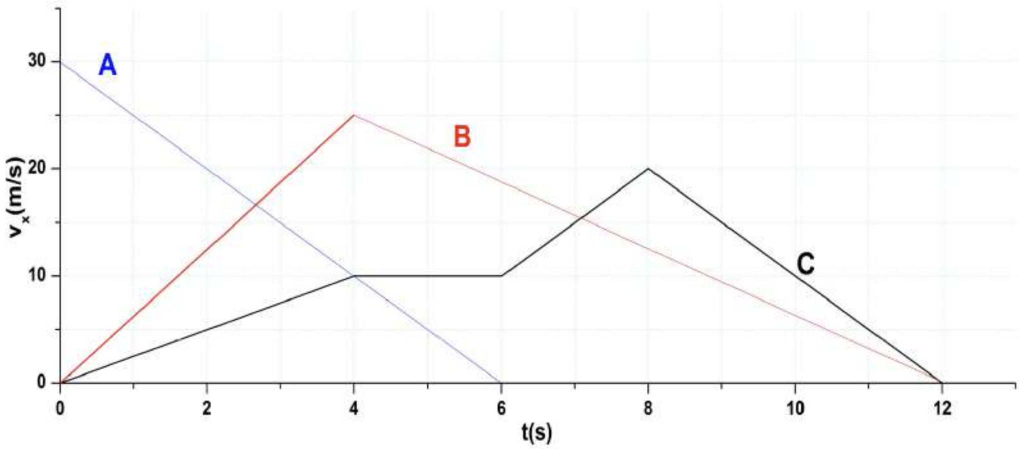


Figura 2.29. Ejercicio MRUV.

a) El movimiento de cada auto;

b) La distancia que recorre cada auto;

c) La distancia entre ellos al final del movimiento;

d) La velocidad media de cada uno;

e) Los gráficos rx Vs t y ax Vs t de cada auto.

Movimiento vertical: caída y subida libre (MRUVAR)

1. Un cuerpo es lanzado en un acantilado con una velocidad de $(-22\vec{j})$m/s y llega al fondo en 5 s. Determinar:

a) Con que velocidad llega al fondo;

b) La altura del acantilado;

c) El desplazamiento realizado;

d) Que velocidad lleva cuando ha descendido 15 m;

e) El espacio recorrido cuando lleva una velocidad de $(-30\vec{j})$m/s.

2. Desde un mismo punto se dejan caer libremente dos cuerpo con un intervalo de 3 s. Determinar:

a) La distancia que los separa a los 8 s de salir el primero;

b) Que velocidad lleva cada uno en ese instante.

3. El punto A está 140 m sobre el punto B. Desde A se lanza un móvil con una velocidad de $(-10\,\vec{j})$m/s. Simultáneamente y desde B se lanza otro móvil con una velocidad de $(40\vec{j})$m/s. Determinar: en dónde y cuándo se encuentran (o cruzan).

4. Se lanza un cuerpo con una velocidad de $(-4\,\vec{j})$m/s dos segundos después y desde el mismo punto se lanza otro cuerpo con una velocidad de $(-25\vec{j})$m/s Hallar dónde y cuándo se encuentran (o cruzan).

5. Un elevador abierto está ascendiendo con una rapidez constante V (32 pie/s). Cuando está a una altura H (100 pies) por encima del suelo, un niño lanza una pelota directamente hacia arriba. La rapidez inicial de la pelota respecto al elevador es Vo (64 pies/s). Determinar:

a) Cual será la altura máxima alcanzada por la pelota;

b) Cuanto tiempo tardará la pelota en volver a caer del elevador.

6. Un cuerpo que cae libremente recorre durante el último segundo la mitad del camino total. Determinar:

a) El tiempo que demora su caída desde que se lo soltó hasta tocar el piso;

b) Desde que altura cayó (respecto al piso).

Movimiento rectilíneo variado (MRV): aplicando cálculo diferencial e integral

1. Después de parar el motor de una pequeña embarcación tiene una aceleración en sentido opuesto al de su velocidad y directamente proporcional al cuadrado de esta; esto es: $dv/dt = -kv^2$

Donde k es constante. Supongamos que se para el motor cuando la velocidad es Vo = 8 m/s, y que la velocidad disminuye hasta 4 m/s en un tiempo de 12 s.

a) Demostrar que la velocidad V en un instante t después de parar el motor está dada por: $1/v = 1/v_0 + Kt$;

b) Calcular el valor de K;

c) Encontrar la aceleración en el instante en que se paró el motor;

d) Demostrar que la distancia recorrida en un tiempo *t* es: $x = 1/k\,[\ln(v_0 K t + 1)]$

e) Demostrar que lo velocidad después de recorrer una distancia X es: $v = v_0\,e^{-kx}$.

2. La posición de un cuerpo móvil sobre el eje *X* viene dada por x = $12t^2 - 6t$, estando *X* medida en metros (m) y *t* en segundos (s).

a) Obtener por derivación, las expresiones de su velocidad y aceleración, y cuál es su velocidad inicial;

b) En qué instante tiene el cuerpo velocidad nula;

c) En qué posición se encuentra en ese instante;

d) Para que dos instantes es X = 0;

e) Cuál es su velocidad inicial;

f) Calcular la velocidad en cada uno de los instantes del inciso d.

3. La posición de un cuerpo móvil sobre el eje *Y* viene dada por $y = 6t^3 - 6t^2 - 2t$ estando *Y* medida en metros (m) y *t* en segundos (s), calcule.

a) Obtener las expresiones de su velocidad y de su aceleración;

b) ¿Se mueve el cuerpo con aceleración constante?;

c) ¿Cuál es su velocidad inicial?;

d) ¿Cuál es la aceleración para $t = 0$?;

e) Y para $Y = 0$.

4. La abscisa de un móvil sobre el eje X vale $x = A\ cos\ 2\pi ft$ si A y f son constantes, obtenga las expresiones de la velocidad y de la aceleración del móvil en cualquier instante.

5. La velocidad de un móvil sobre el eje de las X viene dada por $v = 12 + 3t^2$, estando V medida en metros por segundo (m/s) y t en segundos (s). Cuando $t = 3$ s, el cuerpo está 52 m a la derecha del origen, calcule.

a) Las expresiones de la aceleración y de la posición del cuerpo en cualquier instante;

b) La velocidad inicial;

c) La posición inicial.

6. La velocidad de un móvil sobre el eje Y viene dada por la expresión: $v = 10 + 2t^2$, estando V medida en metros por segundo (m/s) y t en (s). El cuerpo se encuentra 20 m delante del origen cuando t=0. Determinar:

a) La aceleración del cuerpo para $t = 0$ y $t = 2$ s. ¿Tiene el movimiento aceleración constante?;

b) La posición del móvil en los instantes $t = 0$ y $t = 2$ s.

7. La aceleración de un móvil sobre el eje de las X viene dada por la expresión: $a = 4t$, estando a medida en (m/s^2) y t en (s). Para $t = 0$, el cuerpo está en reposo en el punto $X_0 = 10$ m. Halle su velocidad y posición en cualquier instante.

Movimiento en un plano: Parabólico

1. Un avión vuela horizontalmente a 2 160 m de altura, a una velocidad de 360 km/h. Del avión cae un cajón de provisiones a un grupo de personas. ¡A cuantos metros antes de volar sobre el grupo debe soltar el cajón?.

2. Un tren rueda a 90 km/h, entra a un puente de 170 m de largo, y justo en el momento de entrar al puente, un pasajero deja caer afuera del tren un pequeño cuerpo a una altura de 6,45 m del agua. ¿Caerá este cuerpo en el agua?

3. Desde un punto situado a 100 m de un blanco, el cual está a 10 m sobre la horizontal se lanza un proyectil con $v_0 = 80$ m/s. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación del disparo para dar en el blanco?

4. Dos proyectiles son disparados con igual velocidad inicial y con ángulos de inclinación de 45° y 60° respectivamente. Determinar la relación entre sus alturas máximas.

5. Desde el punto "O" se apunta al aro "A" y se lanza una bola dirigida al centro del aro "A" con un ángulo inicial de 53°. Calcular:

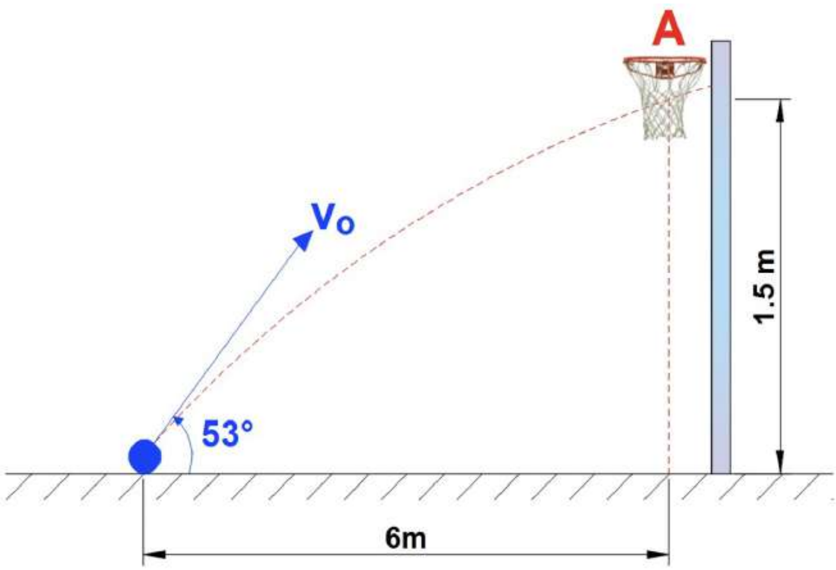


Figura 2.30. Ejercicio de movimiento parabólico.

a) Con que velocidad inicial se debe lanzar la bola para que pase por el centro del aro "A";

b) Que ángulo de inclinación forma la trayectoria de la bola al pasar por el aro.

Movimiento en un plano: Circular

1. Un motor gira a 1 800 rpm Calcular su velocidad angular en grados por segundo y en radianes por segundo.

2. Hallar la velocidad tangencial de un móvil que circula por un círculo de 12 m de radio en 3,5 minutos.

3. Calcular la velocidad angular y el período de un móvil que circula sobre una circunferencia que tiene un radio de 25 m y su velocidad es de 9 m/s.

4. Calcular el ángulo descrito en 18 minutos por el radio de una circunferencia que gira con una velocidad angular de 12 rad/s. Calcular cuantas revoluciones a dado.

5. En un motor de 2 100 rpm calcular su período, su velocidad angular y su frecuencia.

6. Cuál es la aceleración centrípeta de un móvil que recorre una pista circular de 60 m de radio con Movimiento circular uniforme a 90 km/h.

7. Un motor eléctrico que gira a 2 600 rpm, tiene dos ruedas de poleas en su eje. Hallar la velocidad inicial de la banda cuando se coloca sobre una rueda de mayor diámetro. Los diámetros de las poleas son 10 y 20 cm.

8. Al cabo de 24 s de iniciado un movimiento circular uniformemente variado ¿cuál será la velocidad angular de un móvil cuya aceleración angular es de 12 rad/s2?

9. Al desconectar la corriente de un motor eléctrico su velocidad de 1 700 rpm, desciende a 1 000 rpm en 2 s. Calcular:

   a) La desaceleración;

   b) El número de vueltas en ese tiempo.

10. ¿Cuál será el número de revoluciones que da la rueda de un carro que está aumentando su velocidad de 4 m/s a 30 m/s, en 8 s? Si la llanta tiene un radio de 25 cm.

11. Un motor gira a 2 400 rpm disminuye su velocidad uniformemente hasta 400 rpm realizando 100 revoluciones. Calcular:

a) La desaceleración angular;

b) El tiempo para detenerse a partir del momento en que está a 400 rpm.

12. Un automóvil marcha a razón de 80 km/h, el chofer aplica los frenos y empieza a desacelerar a razón de 5 cm/s^2. Si las ruedas tienen un diámetro de 50 cm; calcular cuantas vueltas darán las ruedas hasta detenerse. Tomar en cuenta que no ha habido deslizamiento o patinaje.

13. Una barra delgada de 1 m de longitud gira en un plano horizontal alrededor de uno de sus extremos. En el tiempo de 6 s aumenta su velocidad de 1 800 rpm a 2 400 rpm Determinar:

a) La velocidad lineal en su punto medio al principio y al final de ese intervalo;

b) Calcular la aceleración angular y tangencial.

14. Una rueda tiene una aceleración constante de 3 rad/s^2. En un intervalo de 4 s gira un ángulo de 120 radianes. Suponiendo que la rueda partió del reposo, ¿cuántas tiempo había estado en movimiento antes de ese intervalo de 4 s?

15. Una rueda gira a razón de 1 000 rpm Si se anula la fuerza que la mantiene dándole vueltas, se detiene después de 100 vueltas. ¿Cuánto tiempo tardó la última vuelta?

Ejercicios adicionales del capítulo

1. Un objeto que se mueve con aceleración uniforme tiene una velocidad de 12 m/s en la dirección x positiva cuando su coordenada x es 3 m, y su coordenada x 4 segundos después es −5 m ¿Cuál es su aceleración? Respuesta: −7 m/s^2

2. En 1865 Julio Verne propuso enviar hombres a la luna disparándoles desde una cápsula espacial con un cañón de 222 m de longitud, partiendo de un extremo del cañón desde el reposo y que al final del cañón adquieran una rapidez final de 11 km/s. ¿Cuál hubiese sido la gran aceleración, poco realista experimentada por los viajeros espaciales, durante su lanzamiento (un ser humano puede soportar vivo una aceleración máxima de 15 g durante un tiempo muy breve, compare su resultado con la aceleración de la gravedad ($g \cong 9{,}80\ m/s^2$). Respuesta: 275 000 m/s^2 =28 000 g

3. Un camión recorre 400 m en 20 segundo,s mientras disminuye su velocidad de manera uniforme hasta una velocidad de 12,80 m/s. Determine:

a) La rapidez inicial del camión;

b) Su aceleración.

Respuestas: a) 27,2 m/s   b) -0,72 m/s^2

4. Una avioneta requiere para su despegue una rapidez de 180 km/h. Sí la pista que debe recorrer tiene 250 m de longitud.

a) La aceleración constante mínima requiere la avioneta para lograr su propósito.

b) El tiempo que le toma a la avioneta despegar?

Respuestas: a) 5 m/s^2 b) 10 s

5. Susi la rápida, conduce su auto a 32 m/s y entra en un túnel de un solo carril luego observa una furgoneta que viaja lento a unos 165 m adelante que viaja a 6 m/s. Susi, aplica de inmediato los frenos, pero sólo puede desacelerar a -2 m/s2 ya que el camino está mojado. ¿Habrá colisión? explique su respuesta.

a) Si es afirmativa determine a qué distancia y en qué tiempo ocurre la colisión.

b) Si es negativa (no hay colisión). Determine a qué distancia de la furgoneta queda Susi cuando frena completamente y en qué tiempo logró hacerlo.

Respuesta: No hay choque: $x_{(1)\to(2)} = 5\,\mathrm{m}$
$t = 16\,\mathrm{s}$

6. Un registro de un viaje por un trayecto recto es el siguiente:

- Parte del reposo con una aceleración de: 2,77 m/s^2 durante 15 s.
- Mantiene una velocidad constante 2,05 min, siguientes.
- Aplica una aceleración negativa constante de menos -9,47 m/s^2 durante 4,59 s.

Determinar:

a) ¿Cuál fue la distancia total del viaje?

b) ¿Cuáles fueron las rapideces media para los tramos 1,2 y 3 y para el viaje completo?

Respuestas: a) 5513.2 m   b) 20,8 m/s, 41,55 m/s, 19,8 m/s, 38,7 m/s

7. Un jugador de hockey se encuentra de pie en reposo sobre sus patines sobre un estanque congelado cuando un jugador contrario, que se mueve con una rapidez constante de 12 m/s patina con el disco de hockey. Después de 3 s el primer jugador decide perseguir a su oponente. Si acelera de manera uniforme a razón de 4 m/s^2

a) ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar a su oponente?

b) ¿Cuán lejos ha viajado en ese tiempo?

(Suponga que el jugador con el disco de hockey permanece en movimiento a rapidez constante).

Respuestas: a) 8,2 s   b) 134,5 m

8. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 25 m/s Determinar:

a) La altura máxima que sube.

b) El tiempo que le toma alcanzar el punto más alto.

c) ¿Cuánto tiempo toma la pelota chocar con el suelo, después que alcanzó el punto más alto?

d) ¿Cuál es su velocidad cuando regresa al nivel donde partió?

Respuestas: a) 31,9 m b) 2,55 s c) 2,55 s d) $(-25\vec{j})$m/s

9. Un objeto en caída libre, liberado del reposo, requiere 1,50 s, para recorrer los últimos 30 m antes de que golpee el suelo.

a) Determine la velocidad del objeto cuando éste está a 30 m, sobre el suelo.

b) Determine la distancia total que el objeto recorre durante la caída.

Respuestas: a) 12,65 m/s b) 38,16 m

10. Una lesión cerebral traumática en el ser humano, como una contusión resulta cuando la cabeza experimenta una aceleración muy grande. En general una aceleración menor que 800 m/s^2 que dure cualquier variación instantánea de tiempo no ocasionará ninguna lesión. En tanto que una aceleración mayor a 1 000 m/s2 y que dure al menos un milisegundo ocasionará un daño. Supóngase que un niño pequeño cae de una cama que está a 0,40 m sobre el piso. Si el piso es de madera dura, la cabeza del niño llegará al reposo en 2 milímetros. Si el piso está alfombrado, a esta distancia de parada se incrementa hasta aproximadamente 10 milímetros. Calcule la magnitud y la duración de la desaceleración en dos casos, para determinar si existe riesgo de una lesión suponga que el niño permanece horizontal durante la caída al piso.

Respuestas:

Caída 1) 1 960 m/s2, 1,43 m/s

Caída 2) 392 m/s2 , 7,14 m/s

11. Se deja caer un paquete desde un helicóptero que desciende de manera constante a una rapidez Vo. Después que ha transcurrido t segundos.

a) ¿Cuál es la rapidez V del paquete en términos de Vo, g y t?

b) A que distancia ”d” se encuentra el helicóptero del paquete en ese instante, en términos de g y t.

c) ¿Cuáles son las respuestas para los incisos a y b si el helicóptero sube en forma constante a la misma rapidez Vo?

Respuestas: *a)* $\downarrow v = v_0 + gt$

b) $d = \frac{1}{2} g t^2$

c) $|v| = v_0 - gt \; ; d' = 2v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

12. Un cohete se dispara directamente hacia arriba con una rapidez inicial de 50 m/s. Acelera de manera constante hacia arriba a 2 m/s^2. Hasta que sus motores se apagan a una altitud de 150 m.

a) ¿Qué puede decir respecto al movimiento del cohete después que sus motores se detienen?

b) ¿Cuál era la velocidad del cohete, cuando se apagaron los motores?

c) ¿Cuál era la altura máxima alcanzada por el cohete, respecto al de lanzamiento?

d) ¿Cuánto tiempo después del despegue alcanza la altura máxima?

e) ¿Cuánto tiempo dura el cohete en el aire?

Respuestas: a) 55,68 m/s b) 308 m c) 8,54 s d) 16,47 s

13. Leonel Messi, en el último minuto del juego tiene la oportunidad de cobrar un tiro libre, el 70% del público inglés espera que el balón pase arriba del travesaño, mientras que el 80% del público televidente espera que entre el arco. El balón se ubica en un punto a 36 m de la meta que tiene una altura de 3,05 m. Cuando Messi patea la pelota esta sale del suelo con una rapidez de 20 m/s, formando un ángulo de 37° con la horizontal. Determinar:

a) ¿Entrará o no la pelota al arco y lo hace mientras aún sube o baja?

b) Si ingresa o no al arco, cuál es la distancia (o altura) entre el travesaño y el balón, cuál es la velocidad módulo y dirección cuando ingresa o no a la meta qué tiempo transcurre en ingresar o no a la meta, desde que se disparó el balón.

Respuestas:

a) Si es gol (entra cuando baja).

b) 0,81 m por debajo de travesaño.

c) $(16\vec{i} - 10\vec{j})$m/s = (18,9m/s;−32°)

d) 2,254 s.

14. Un automóvil que estaba estacionado sobre un acantilado que da al océano en una ladera que forma un ángulo de 24° debajo de la horizontal. El conductor negligente deja el automóvil en neutro y sin freno de mano. El auto rueda desde el reposo por la ladera con una aceleración constante de 4 m/s2 durante una distancia de 50 m, hasta el borde del acantilado el cual está a 30 m por encima del océano. Encuentre:

a) La posición del auto respecto a la base del acantilado cuando este termina en el océano.

b) El tiempo que el auto está en el aire.

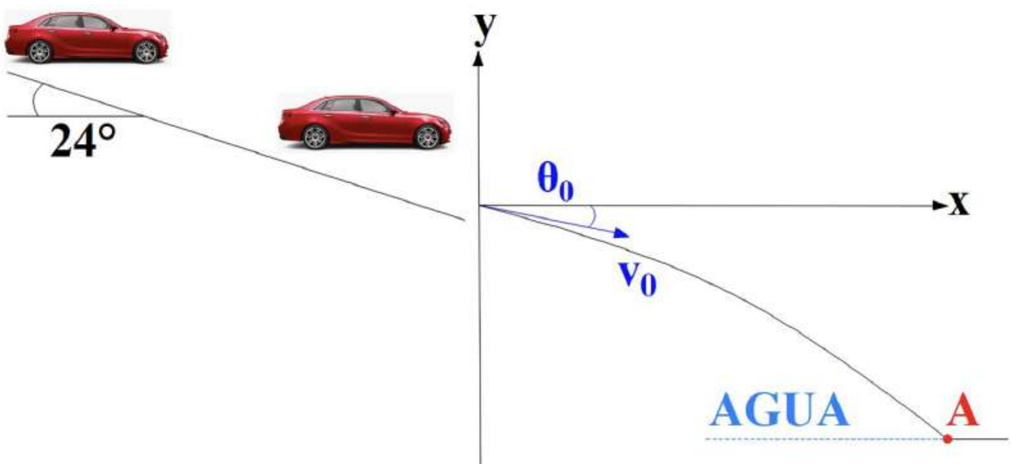


Figura 2.31. Ejercicio de movimiento parabólico.

15. Un patio de juegos se encuentra en el techo plano de una escuela de una ciudad, 6 m arriba de la calle (figura adjunta). El muro vertical del edificio tiene una altura h=7 m, para formar una baranda de 1 m de altura alrededor del patio de juegos por seguridad. Una pelota cae hacia la calle y un transeúnte comedido la regresa lanzándola a un ángulo $\theta_0 = 53°$ arriba de la horizontal, desde una distancia horizontal d = 24 m, desde la base del muro del edificio. La pelota tarda 2,2 segundos para alcanzar un punto verticalmente arriba del muro. Determinar:

a) La rapidez a la cual se lanzó la pelota.

b) Encuentre la distancia vertical por la cual la pelota cae fuera del muro.

c) La distancia horizontal desde el punto que pasa sobre el muro hasta el punto en el techo donde pega la pelota.

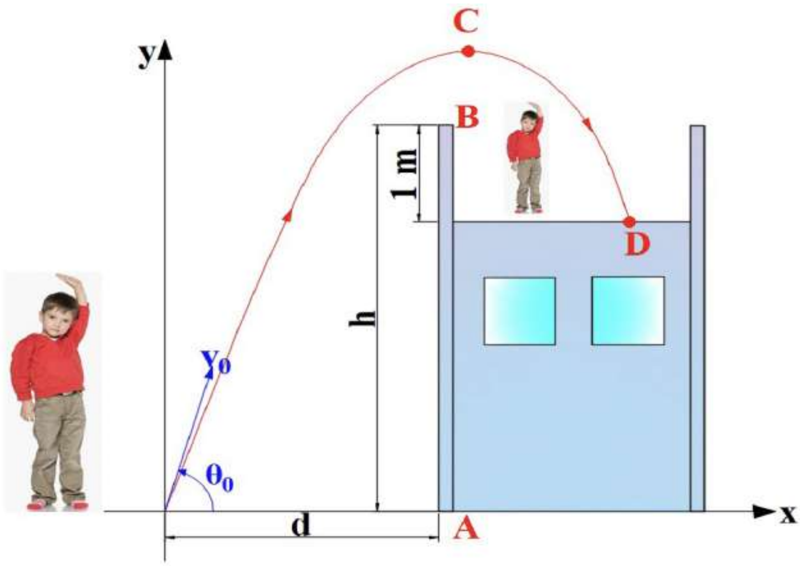


Figura 2.32. Ejercicio de movimiento parabólico.

16. Una partícula que se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ley $v = t3+4t^2+2 \Rightarrow$ en la cual cuando t (s) → v (m), según el sistema internacional de unidades. Si sabemos que cuando $x = 4$ m, $t = 2$ s, determinar:

a) El valor de x cuando $t = 3$ s.

b) Y también su aceleración para $t = 3$ s

Respuestas: a) 47,6 m b) 51 m/s^2

17. La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por: $a = 4 - t^2$, en donde cuando t (s) → a (m/s^2). Determinar:

a) Las expresiones para la velocidad y la posición en función del tiempo, sabiendo que para $t = 3$ s → $v = 2$m/s y $x = 9$m

Respuestas: *a)* $v = -1 + 4t - \frac{t^3}{3}$ y $x = 0{,}75 - t + 2t^2 - \frac{t^4}{12}$

18. Una partícula se mueve a lo largo del eje x su aceleración está dada por: $a = -2x$, en donde cuando x (m) , a (m/s^2). Determinar la relación entre la velocidad (v) y la distancia (x), suponiendo que cuando $x = 0$, $v = 4$m/s.

Respuestas: $v = (+16 - 2x^2)^{\frac{1}{2}}$

19. La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por: $a = kv^2$, donde k es una constante y suponiendo que cuando $t = 0$; $v = v_0$. Determinar:

a) La velocidad (v) en función del tiempo (t).

b) La distancia (x) en función del tiempo (t).

c) La expresión de la velocidad (v) en función de la distancia (x).

Respuestas: *a)* $v = \frac{v_0}{1+k\cdot v_0\cdot t}$

b) $x = x_0 + \frac{1}{k}\ln(1 + k\cdot v_0\cdot t)$

c) $v = v_0 \cdot e^{-k(x-x_0)}$

20. Para un cuerpo en movimiento rectilíneo cuya aceleración está dada por: $a = 32 - 4v$. Para v (m/s) ; a (m/s^2). Y sus condiciones iniciales: sí $t = 0$. Determinar:

a) La velocidad (v) en función del tiempo.

b) La distancia (x) en función del tiempo (t).

c) La distancia (x) en función de la velocidad (v).

Respuestas: *a*) $v = 0{,}5e^{4t}$

b) $x = -0{,}125 + 0{,}125\,e^{4t}$

c) $x = 6{,}545 - \frac{v}{4} - 2\ln\frac{8}{v}$

21. Una partícula animada de Movimiento circular uniforme se encuentra en la posición que indica la figura adjunta en el instante t = 2 s si gira en sentido horario, con una velocidad angular de 10 rad/s durante 15 segundos, [considerando como referencia, el origen (0) y el eje x (+)]. Determinar:

a) El desplazamiento angular.

b) La posición angular inicial.

c) La posición angular final.

d) La posición final.

e) Cuantas vueltas (rev) dio.

f) El periodo.

g) La velocidad en t = 2s.

h) La aceleración centrípeta en t = 2s.

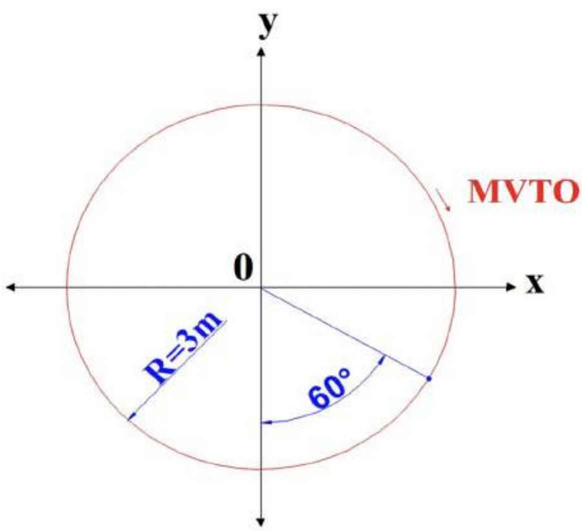


Figura 2.33. Ejercicio de movimiento circular.

22. Una partícula se mueve en una trayectoria circular como indica la figura adjunta, en el instante ($t = 0$) tiene una rapidez: $v_0 = 20$ m/s y una aceleración angular de (−10 rad/s) hasta detenerse. Determinar:

a) La velocidad angular inicial.

b) La velocidad inicial.

c) El tiempo hasta detenerse.

d) El desplazamiento angular.

e) La posición angular final.

f) La posición final.

g) La aceleración inicial.

[Considerando como referencia, el origen (0) y el eje x (+)] [7].

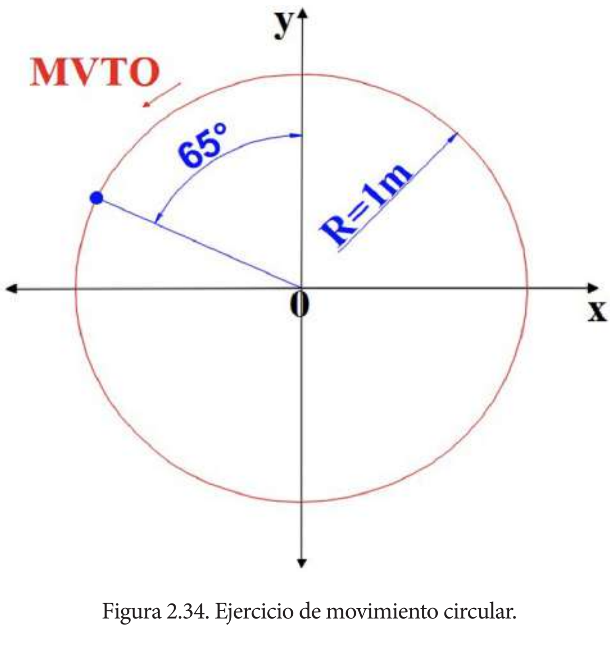


Figura 2.34. Ejercicio de movimiento circular.

CAPÍTULO III
3. LEYES DE NEWTON PARA LA MECÁNICA

3.1. GENERALIDADES

En el estudio de la cinemática se dijo que considerábamos el movimiento, pero sin tomar en cuenta las causas, efectos y masas que se mueven, para tener en consideración estos aspectos necesitamos otras leyes, iniciamos planteándonos la siguiente pregunta:

¿Quién o qué causa la aceleración que adquiriere una partícula?

Sir Isaac Newton considerado como el padre de la mecánica clásica, estudió estos aspectos y llegó a la conclusión, de que la aceleración (variación de velocidad en función del tiempo) que experimenta un cuerpo no es generada por sí mismo, sino que son otros cuerpos los que generan la aceleración que adquiere el cuerpo al interactuar sobre él, es decir que la aceleración que adquieren los cuerpos, en el fenómeno de interacción, y para hablar de interacción por lo menos deben interactuar dos cuerpos, para que el uno actúe y el otro sienta esta acción.

Newton, encontró que si bien es cierto que, la aceleración que experimenta un cuerpo se debe a la interacción con otro cuerpo, pero la intensidad (o módulo) de la aceleración si depende de una propiedad intrínseca del cuerpo, esta propiedad depende del tipo de movimiento., en el que interactúa, si la aceleración la adquiere en el movimiento., de traslación, es decir hablamos de la aceleración lineal (o tangencial) la propiedad del cuerpo (o cuerpos) es su masa. Y cuando se trata de movimientos de rotación, esta propiedad, es el momento de inercia.

3.2. MASA

Se dice que la masa de un cuerpo es el número de partículas elementales (átomos o moléculas) que tiene el cuerpo y esta es una constante dentro de la mecánica clásica, en cualquier lugar del universo.

Desde el punto de la interacción, la masa es la reacción que presenta un cuerpo cuando interactúa con otras masas en el movimiento., de traslación y el módulo de la aceleración lineal que adquiere el cuerpo, dependerá de su masa.

La masa es una magnitud escalar y queda definida indicando únicamente el módulo (o medida de la magnitud). Las unidades físicas dependen del sistema de unidades; en el SI (se mide en kilogramos => kg)

En otros sistemas: en libras (lb), en gramos (g), en onzas (oz) entre otros.

Se sabe que un litro de agua (en condiciones atmosféricas normales) corresponde a un kilogramo de masa.

3.3. FUERZA

En una interacción, por ejemplo, entre dos cuerpos, el uno experimenta un efecto de aceleración, ocasionado por el segundo cuerpo, y también este cuerpo experimenta una aceleración (efecto) causado por el primer cuerpo.

Estos efectos (de aceleración) deben ser generados por una causa, y se dice que la causa son fuerzas que actúan sobre los cuerpos generadas en la interacción entre sí por los dos cuerpos, es decir, que si en el primer cuerpo se verifica una aceleración (efecto) generado por el segundo, significa que a la vez el segundo cuerpo aplica una fuerza (causa) sobre el primero, y este hace lo mismo sobre el segundo, o sea cuando notamos una aceleración (efecto) debe ser generada siempre por una causa (fuerza).

A la Fuerza, la podemos definir desde dos puntos de vista:

3.3.1. Dinámico, o Cinético

Una fuerza es toda aquella causa de cambiar o modificar el estado inercial de un cuerpo (estado de movimiento. relativo de traslación) por ejemplo, si un cuerpo está en reposo relativo, la fuerza puede causar el movimiento, de traslación del cuerpo, o si este está en MRU, la fuerza puede causar un cambio en este movimiento, (es decir aumentar o disminuir la velocidad en función del tiempo) o sea provoca la aceleración lineal.

3.3.2. Estático

Desde este punto de vista, una fuerza aplicada a un cuerpo que está en reposo (estado inercial) y si luego de aplicada la fuerza el cuerpo continúa en el mismo estado (reposo relativo) o equilibrio estático, la fuerza habría provocado deformaciones (micro o macroscópicas) en el cuerpo, si luego de aplicada "la fuerza" el cuerpo recupera sus propiedades mecánicas, se dice que las deformaciones han estado en el campo elástico.

Pero si al retirar las fuerzas (o dejar de interactuar) sobre el cuerpo, este no recupera las propiedades mecánicas iniciales (es decir queda deformado), se dice que las deformaciones han estado en el campo inelástico o plástico.

Las fuerzas no son observables directamente, si no, sabemos que ha actuado una fuerza sobre un cuerpo por los efectos que observamos que provocan, como aceleraciones lineales, o deformaciones desde el punto de vista estático.

Se dice también que las fuerzas (causas) son magnitudes vectoriales, porque sus efectos (aceleraciones o desplazamientos) son vectores.

¿Y cómo se pueden definir los elementos del vector fuerza?, observando a los efectos vectoriales.

La dirección y sentido de la fuerza, será la dirección y sentido en el que se mueva un cuerpo aceleradamente.

Por ejemplo, si colocamos una masa dentro del campo gravitacional de la tierra, observamos que esta se mueve en dirección vertical hacia abajo, esta dirección y sentido corresponderá a la fuerza que actúa sobre este cuerpo, que es el peso del cuerpo ($\vec{w}$) a la dirección en el que el cuerpo se mueve se le llama " línea de acción de la fuerza" (Figura 3.1)

El módulo (o intensidad) de una fuerza se lo puede medir con un aparato, llamado "Dinamómetro" (Figura 3.2).

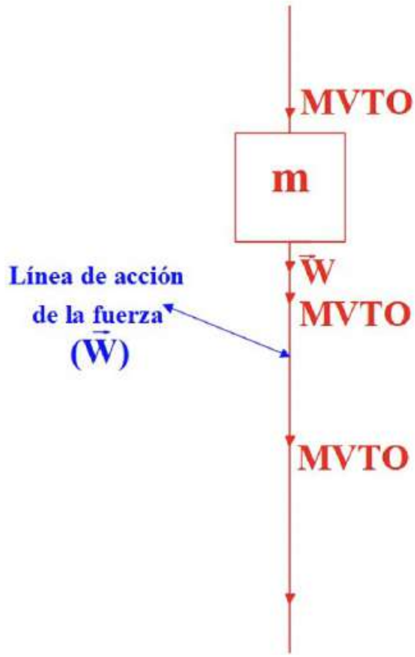


Figura 3.1. Definición de la dirección y sentido de la FUERZA.

El mismo que se lo construye basado en el efecto de deformación que producen las fuerzas estáticas en el campo elástico sobre resortes helicoidales, por ejemplo, y como estas deformaciones longitudinales suelen ser proporcionales a las fuerzas, si una masa de 100 gramos provoca una deformación de un centímetro, la fuerza sobre una masa de 200 gramos provocará una deformación del doble y así sucesivamente, de esta forma se graduará la escala del dinamómetro, y en lugar de señalar las longitudes en centímetros, se pueden indicar los valores de las fuerzas en (Gramos fuerza, Dinas, Newtons, etc.) (Figura 3.2)

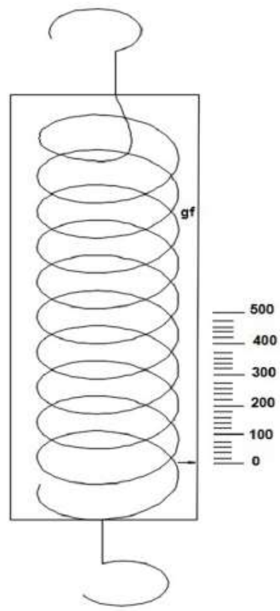


Figura 3.2. El Dinamómetro.

Las unidades de fuerza: el nombre del aparato para medir módulos de fuerza es el dinamómetro que proviene de "Dina" que es una de las unidades de fuerza en el sistema cgs de unidades, que significa que notaremos que se ha aplicado una fuerza de una dina sobre un cuerpo de una masa de un gramo cuando éste experimente una aceleración lineal de 1 cm por s^2 (1 cm/s^2).

Pero en la actualidad la unidad de fuerza que debemos utilizar obligatoriamente en el SI es el Newton.

Newton (N)

Corresponderá a una fuerza que es capaz de provocar una aceleración de 1 m/s^2 actuando sobre una masa de 1 kg.

$1N = 1\ kgm/s^2$.

Otra unidad de fuerza es:

Kilogramo fuerza (kgf) o Kilopondio (kp)

Que será la fuerza que siente una masa de un kilogramo dentro del campo gravitacional terrestre en donde la aceleración gravitacional es aproximadamente 9,8 m/s^2.

1 kgf = 9,8 kgm/s^2

1 kgf = 9,8 N

3.4. LEYES DE NEWTON PARA LA MECÁNICA

Las leyes de Newton para la mecánica nos permiten explicar todos los aspectos del movimiento, y a estas leyes las podemos expresar de la siguiente forma:

3.4.1. Primera ley de Newton

Esta ley Newton la promulgó basándose en un principio de la naturaleza que es:

El principio de la inercia

Este principio que fue publicitado por Galileo se refiere a una condición inercial de la materia que en condición natural los cuerpos prefieren estar en tal condición, y se refiere a la condición inercial de reposo o de movimiento, rectilíneo uniforme relativos. El principio dice; en esencia:

“Si un cuerpo se encuentra en reposo relativo o movimiento, rectilíneo uniforme, el cuerpo permanecerá en dichos estados si no existe un efecto externo que lo haga cambiar”

Sir Isaac Newton, analizando este principio, se preguntaba y ¿Qué pasaría si sobre un cuerpo que está en reposo o MRU relativos, actuaran efectos externos (fuerzas), ¿Cuáles serían las condiciones para que continuara en dichos estados inerciales?; el mismo da la respuesta al darse cuenta de que para que esto ocurra, la condición sería: “Que tales efectos externos o fuerzas deberían compensarse” o en otras palabras sus efectos deben ser nulos. A esta importantísima conclusión se la conoce como la primera ley de Newton para la mecánica, la misma que se la puede expresar en forma cuantitativa así:

$$\sum \overrightarrow{Fext} = 0 \tag{3.1}$$

El mérito de Newton al convertir al principio de la inercia en una ley cuantitativa revoluciona al mundo, debido a que a partir de este enunciado ya se pudo diseñar sistemas que estén en reposo relativo (estática) o en MRU en los mismos que actúen muchas fuerzas, pero que sin embargo continúen en tales condiciones.

3.4.2. La segunda ley de Newton

Luego Newton se dedicó a explicar algo muy trascendental como son las relaciones existentes en las interacciones, en donde se observan que los cuerpos adquieren aceleraciones (efectos) ocasionados por otros cuerpos (Fuerzas => causas) al actuar sobre la inercia del cuerpo (masa) en el movimiento, de traslación.

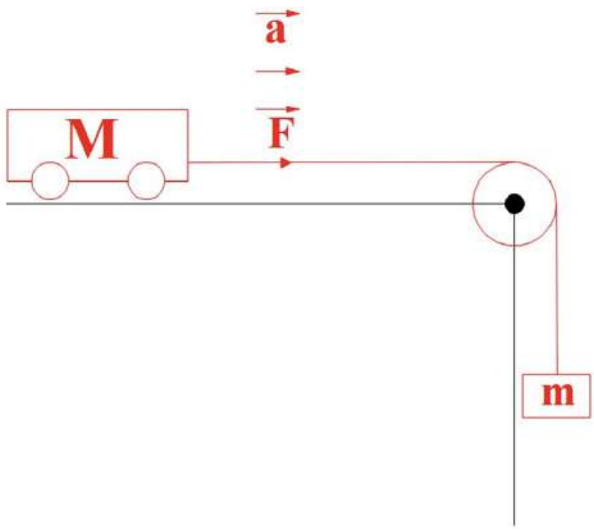


Figura 3.3. Segunda ley de Newton (en la traslación).

Para ello podemos realizar el experimento que se observa en la Figura 3.3, en donde el auto de masa M que puede encontrarse en reposo inicialmente, se lo hace interactuar con la cuerda que al estar unida a la masa m suspendida en el campo gravitacional (esta fuerza => peso => mg) se transmitirá de la cuerda al auto $|\vec{F}| = |\vec{W}|$ que será la causa de la aceleración (Efecto) que adquiere el auto al ponerse en movimiento rectilíneo uniformemente variado a la aceleración ($\vec{a}$) se la puede determinar experimentalmente con la cinemática $\left(x_{OF} = v_0 t_{OF} + \frac{1}{2} a t_{OF}\right)$ si $v_0 = 0$ (Reposo) $a = \frac{2 \cdot x_{OF}}{t_{OF}{}^2}$, midiendo el espacio recorrido (x_{OF}) y el tiempo transcurrido (t_{OF}), se pude evaluar la aceleración, y verificar que la fuerza aplicada sobre el auto(causa) es directamente proporcional (α) a la aceleración, efecto, es decir:

$F \alpha$ a $\Rightarrow F = Ka$ en donde K = cote proporcionalidad. Esta constante K se ha comprobado que es la masa del sistema ≅ M. Luego:

$$\vec{F} = M\vec{a} \tag{3.2}$$

Que es una de las leyes más importantes de la mecánica de traslación, en donde:

$\vec{F}$ = Fuerza que actúa sobre la partícula de masa (M) (Causa) generada por otras partículas. (N = newton)

$\vec{a}$ = Aceleración (Efecto) que adquiere la masa M (m/s^2)

M = Propiedad intrínseca del cuerpo de masa M.(kg)

3.4.3. Tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton explica las causas o fuerzas que se generan en las interacciones, debido a que para generar una fuerza sobre una partícula o cuerpo, pero en este fenómeno los dos interactúan entre sí, generando fuerzas el primero sobre el segundo, pero también del segundo sobre el primero, el enunciado de esta ley en esencia dice:

"Que para toda acción existe una reacción, iguales en módulo y dirección, pero de sentidos opuestos".

$$\left.\begin{array}{l} F_a = \mu_{\vec{F}a} = -\vec{\mu}_{FR} \\ F_R = \left|\vec{F}_a\right| = \left|\vec{F}_R\right| \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Donde F_a es fuerza de acción y F_R es Fuerza de reacción.

CAPÍTULO IV
4. ESTÁTICA

4.1. DEFINICIÓN

"Es la rama de la mecánica que trata sobre las condiciones que debe cumplir un cuerpo al que se le somete a un sistema de fuerzas, pero que debe permanecer en equilibrio estático, reposo relativo, tanto de movimiento, de traslación como en movimiento, de rotación".

4.2. SISTEMAS DE FUERZAS

4.2.1. Sistemas de fuerzas concurrentes

Diremos que un cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas concurrentes, cuando los puntos de aplicación de todas las fuerzas sean únicos (Figura 4.1 a) o cuando esté sometido a dos fuerzas, actúen en la misma línea de acción (Figura 4.1 b) o cuando son varias fuerzas, que sus líneas de acción coincidan en un solo punto (Figura 4.1 c) Ahora, si la condición para todos estos casos es de que los cuerpos bajo la acción de estos sistemas de fuerzas, es de que se encuentren en equilibrio estático (reposo relativo), entonces debemos asegurarnos de que no exista movimiento, de traslación y movimiento, de rotación. Condición del **equilibrio de traslación** para que un cuerpo no se traslade en ninguna dirección al ser sometido a un sistema de fuerzas, debemos aplicar la primera ley de Newton, es decir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

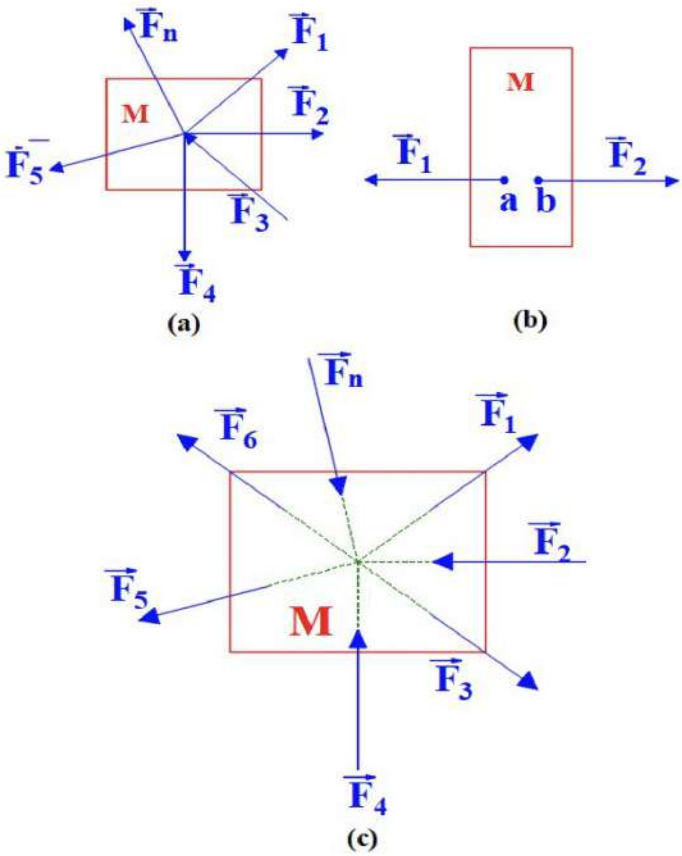


Figura 4.1. Sistema de fuerzas concurrentes.

Para los casos de la Figura 4.1 caso b como solo son únicamente dos fuerzas, al aplicar esta condición se obtendrá que estas dos fuerzas deben ser iguales en módulo y dirección y de sentidos contrarios.

Pero para los casos a y c en donde existen varias fuerzas se debe hacer la sumatoria de fuerzas vectores y el método más adecuado, es el método algebraico, que consiste en descomponer todas las fuerzas en un sistema de referencia xy (si son fuerzas coplanarias => plano) o xyz si son fuerzas en el espacio, y entonces expresar a todas las fuerzas en vectores base: $\vec{F} = F_X\vec{i} + F_Y\vec{j} + F_Z\vec{k}$, y luego se sumará y se obtendrá un único vector, que será la fuerza resultante: $\vec{F}_R = F_{RX}\vec{i} + F_{RY}\vec{j} + F_{RZ}\vec{k} = 0$

Pero este vector será igual a cero el equilibrio de traslación o sea esto lo podemos expresar así:

$$\left.\begin{aligned} F_{Rx} &= \overset{\rightarrow+}{\sum} F_x = 0 \\ F_{Ry} &= \overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \\ F_{Rz} &= \overset{\swarrow+}{\sum} F_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\rightarrow+}{\sum} F_x \\ &\overset{+}{\uparrow} \sum F_y \\ &\overset{\swarrow+}{\sum} F_z \end{aligned}\right\}$$

Se tratan de sumas algebraicas (considerando el sentido de los vectores) por ello este método de sumar fuerzas (vectores) se llama: Método Algebraico.

Condición de equilibrio de rotación

En este caso, cuando las fuerzas son concurrentes, o actúan en la misma línea de acción, no hay problema de rotación, entonces esto constituye una forma del equilibrio de rotación que las fuerzas sean concurrentes.

Torque ($\vec{\tau}$) o momento ($\vec{M}$) generado por un par de fuerzas:

Si sobre el cuerpo de masa m de la figura 4.2, actúan dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en " a y b " respectivamente como se indica, y si la condición es de que esté en equilibrio estático, se lo podría comprobar.

Equilibrio de traslación

$$\overset{\rightarrow}{\sum} \overset{+}{F}_X = 0$$

$$F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$$

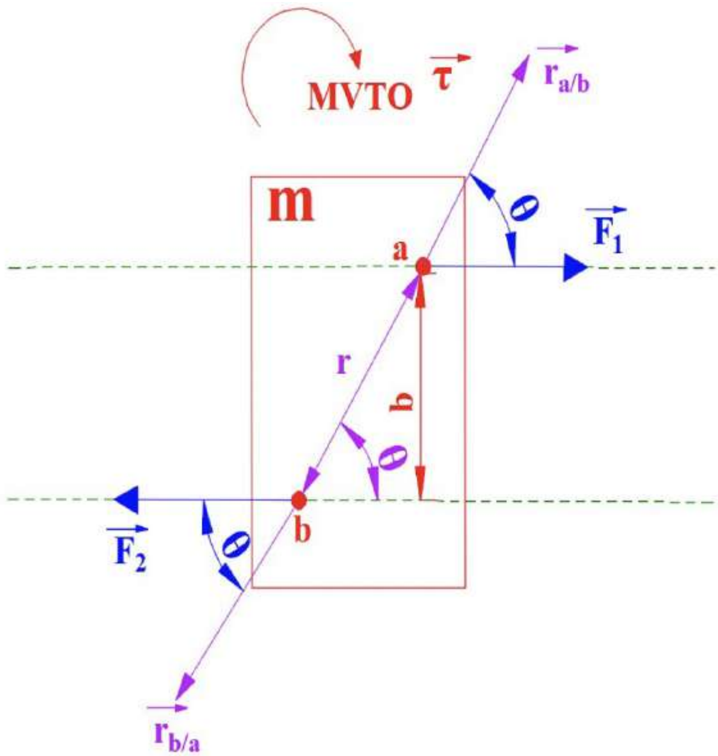


Figura 4.2. Definición del torque.

Entonces si las dos fuerzas tienen el mismo módulo y dirección, se cumplirá el equilibrio estático de traslación (no se moverá ni para la izquierda ni para la derecha).

Pero en cuanto al equilibrio de rotación, no podemos concluir que esté en equilibrio de rotación diciendo que las fuerzas son concurrentes, porque no lo son, y tampoco actúan en la misma línea de acción, es decir un par de fuerzas que se apliquen a un cuerpo en estas condiciones, no provocan traslación, pero si provocan un movimiento de rotación (Efecto) provocado por un par de fuerzas "Iguales en módulo, iguales en dirección, de sentidos opuestos y que no actúan en la misma línea de acción" (Causa).

A esta causa del movimiento., de rotación se la conoce como torque ($\vec{\tau}$) o momento ($\vec{M}$) generado por un par de fuerzas y se lo define como un vector de la siguiente manera:

$$\vec{\tau} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4.2}$$

En donde:

$\vec{\tau}$ = Torque o $\vec{M}$ = Momento (Metro Newton => mN)

$\vec{F}$ = Fuerza, que se la puede elegir a $\vec{F}_1$ o a $\vec{F}_2$

$\vec{r}$ = Vector posición del punto de aplicación de una fuerza respecto al punto de aplicación de la otra fuerza. Por ejemplo, si se elige a la fuerza $\vec{F}_1$

$\overrightarrow{r_a/b} = \overrightarrow{ba}$ = posición de "a " respecto a "b "

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{r_a/b} \times \vec{F}_1 = \vec{M}$$
$$\left|\overrightarrow{r_a/b}\right| = \left|\overrightarrow{r_a/b}\right| = r$$

Cuyo módulo es:

$$M = r\,F_1\,sen\,\theta = F_1 \cdot r\,sen\,\theta$$

Según la Figura 4.2. $r\ sen\ \theta = b$ = Brazo del momento (Distancia entre las líneas de acción de las fuerzas)

Dirección ($\vec{M} = \vec{\tau}$) la dirección del producto cruz (vectorial) es perpendicular a los dos vectores, o sea perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$, si suponemos que están en el plano "xy" el vector $\vec{M}$ tendrá la dirección del eje Z.

El sentido

Aplicando la regla del tornillo de roscas derechas, si giramos un tornillo desde $\overrightarrow{r_a/b}$ hacía $\vec{F}_1$ o sea en sentido de las manecillas del reloj, el tornillo entraría al plano "xy" o sea en el sentido Z negativo. (Figura 4.3)

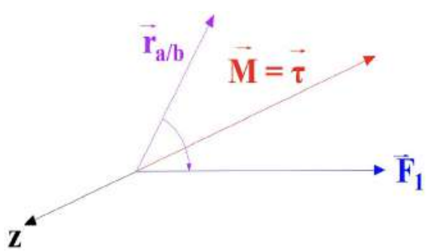


Figura 4.3. Dirección y sentido del torque eligiendo la fuerza $\vec{F}_1$.

Si para definir el momento ($\vec{M}$) o torque ($\vec{\tau}$) se elige la fuerza $\vec{F}_2$, el vector posición relativo será $\overrightarrow{r_{b/a}} = \overrightarrow{ab}$, para este caso tendríamos:

El Módulo

$M = r\ F_2\ sen\ \theta = F_2 \cdot r\ sen\ \theta = F_2 \cdot b$

Como $F_1 = F_2$, el módulo es exactamente igual.

La Dirección

Será perpendicular al mismo plano "xy" es decir Z.

El Sentido

Si un tornillo de roscas derechas gira de $\overrightarrow{r_{b/a}}$ hacía $\vec{F}_2$ en el sentido del ángulo agudo (θ) el tornillo entraría es decir nos daría exactamente el mismo vector $\vec{M}$ en módulo, dirección y sentido (Figura 4.4)

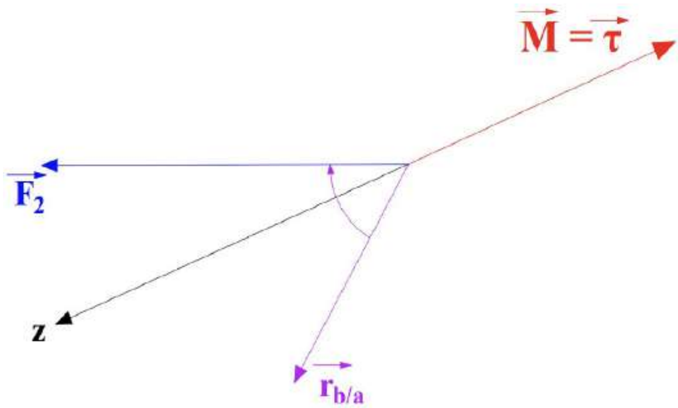


Figura 4.4. Dirección y sentido del torque eligiendo la fuerza $\vec{F}_2$.

4.2.2. Sistema de fuerzas paralelas

Si sobre la barra de masa "*m*" se aplicara un sistema de fuerzas paralelas, como el que se indica en la Figura 4.5 y si la condición fuese que la barra permanezca en equilibrio estático.

En primer lugar, aplicaríamos equilibrio de traslación:

$$\overset{+}{\Uparrow} \sum Fy = 0$$

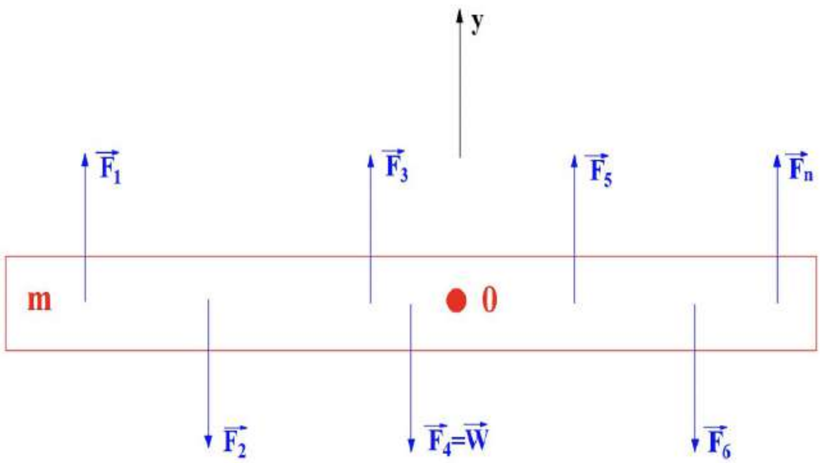


Figura 4.5. Fuerzas Paralelas.

Ahora para comprobar el equilibrio de rotación no lo podemos hacer, diciendo que las fuerzas son concurrentes, porque no lo son, más bien son fuerzas paralelas que actúan en diferentes líneas de acción verticales. En este caso se podría considerar teóricamente que se ha practicado un orificio y que por el mismo se ha hecho pasar una barra o eje perpendicular a la figura 4.5 (⊥ al plano del eje *x*) eje que pasa por el punto 0. En estas condiciones todas las fuerzas verticales podrían hacer girar a la barra unas a favor de las manecillas del reloj (↻) y otras en contra de las manecillas de reloj (↺) la condición para que estas rotaciones (Efectos) no hagan girar la barra sería:

$+z\swarrow \sum M = \nearrow \overset{-z}{\sum} M$ o considerando sus efectos

$$\sum^{\curvearrowleft} M_o = \sum^{\curvearrowright} M_o$$

Es decir que la sumatoria de momentos que hagan girar la barra en contra de las manecillas del reloj, deben ser igual a la sumatoria de momentos que hagan girar a la barra a favor de las manecillas el reloj: en otra forma

$$\sum^{\curvearrowleft} M_o = \sum^{\curvearrowright} M_o$$

$$\sum_{\curvearrowleft}^{+} M_O = 0 \tag{4.3}$$

$$\sum_{\curvearrowleft}^{+} = \text{SUMATORIA ALGEBRAICA .}$$

4.2.3. Sistema de fuerzas no paralelas no concurrentes

Ahora en la figura 4.6 se trata de una barra de masa m que está sometida a un sistema de fuerzas no paralelas-no concurrentes, y que se pide diseñar esta barra para que permanezca en equilibrio estático.

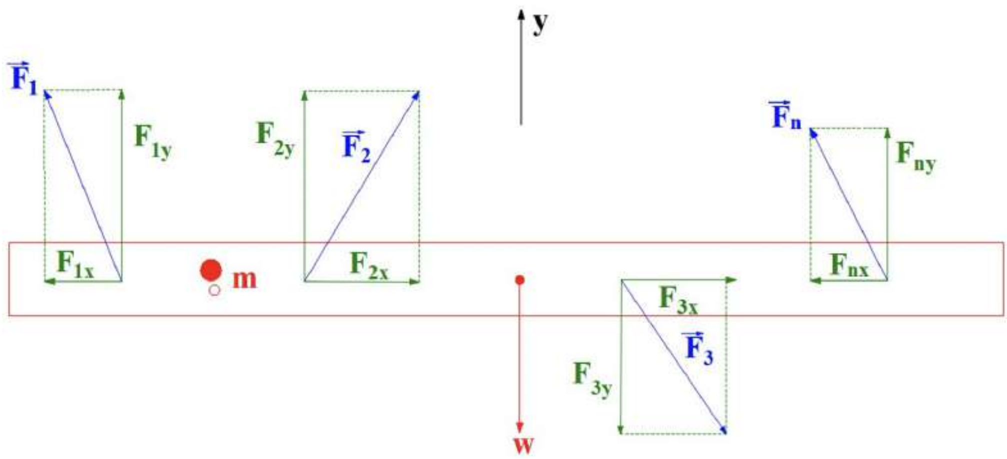


Figura 4.6. Fuerzas no paralelas-no concurrentes.

En primer lugar, comprobaríamos que no se mueva en traslación, para ello se descomponen todas las fuerzas en “x” y en “y” y se aplica la primera ley de Newton.

$$\overset{\rightarrow +}{\sum} Fx = 0 \, ; \overset{+}{\Uparrow} \sum Fy = 0$$

Y luego para que no se mueva en rotación, se aplicará la ecuación 4.3

$$\sum^{\curvearrowleft +} M_o = 0$$

En donde la posición "0" se elegirá libremente en forma conveniente.

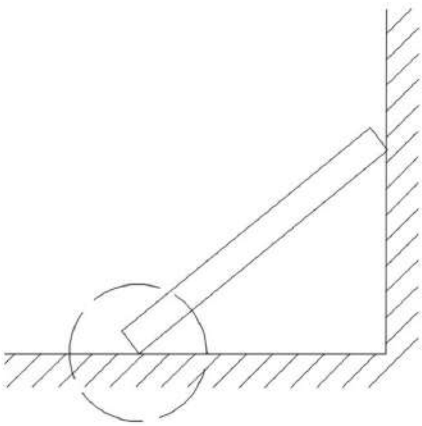
4.3. TIPOS DE APOYOS

Para que un cuerpo esté en equilibrio estático y que, si sobre este actúa un sistema de fuerzas externas, o cargas, se deben colocar apoyos para que equilibren a las cargas externas, para ello se pueden colocar apoyos fijos, móviles, deslizantes, etc.

Debemos identificar las fuerzas equilibrantes o reacciones dependiendo del apoyo:

4.3.1. Contacto

En el contacto se generan dos reacciones: la fuerza normal y la fuerza de rotamiento (Estática).



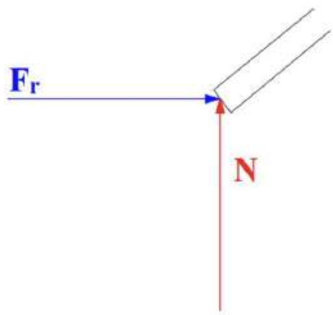


Figura 4.7. Fuerza de equilibrante de contacto.

4.3.2. Rodillo

Este es un apoyo móvil, que sólo transmite una fuerza en dirección perpendicular a las superficies de contacto.

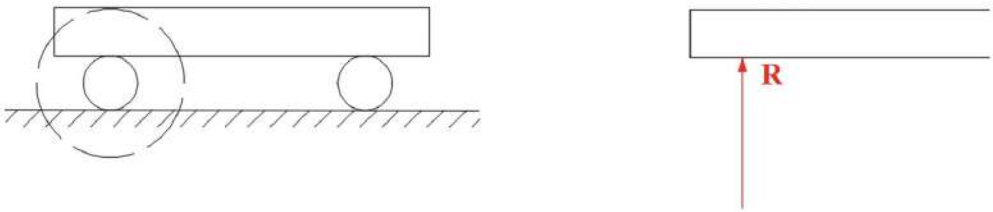


Figura 4.8. Fuerza de equilibrante de rodillo.

4.3.3. Pasador

En este apoyo se genera únicamente una reacción en el mismo plano de las fuerzas aplicadas:

Para calcularla es mejor descomponer a esta reacción en direcciones horizontal y vertical (R_x y R_y)

Este apoyo no impide la rotación del cuerpo.

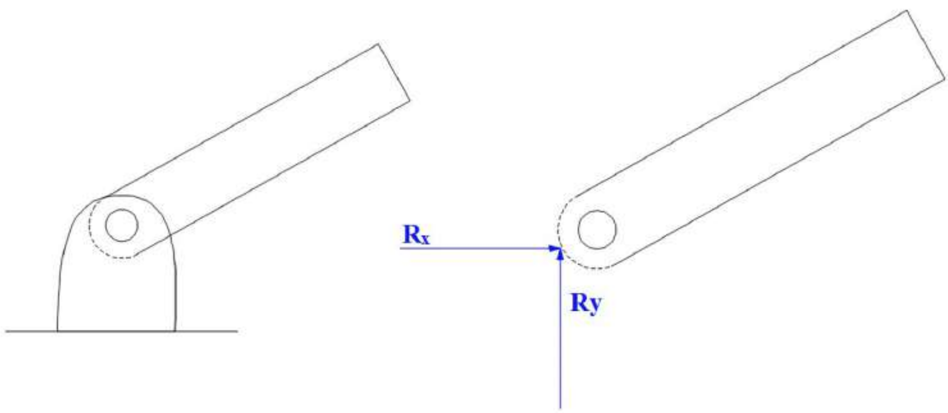


Figura 4.9. Fuerza de equilibrante de pasador.

4.3.4. Empotramiento

Este es un apoyo fijo muy rígido que, a más de una fuerza de reacción en el mismo plano de las fuerzas aplicadas, impide la rotación de un cuerpo, lo que significa que puede comunicar un torque de reacción [8].

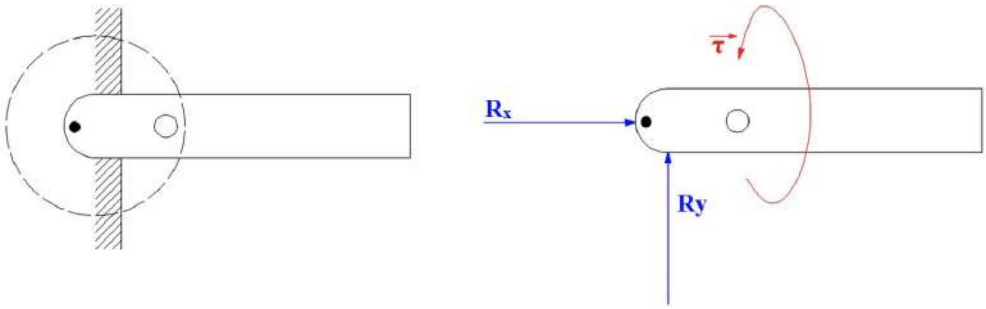


Figura 4.10. Fuerza de equilibrante de empotramiento.

CAPÍTULO V
5. DINÁMICA

5.1. PRINCIPIO

Solo nos referiremos a la dinámica de traslación. Si sobre un cuerpo de masa *M* actúa un sistema de fuerzas concurrentes, y si el cuerpo no está en equilibrio estático, este se moverá en dirección y sentido de la fuerza resultante del sistema de fuerzas ($\vec{F}_R$) adquiriendo también una aceleración resultante ($\vec{a}_R$) constante (si las fuerzas externas actuantes son constantes).

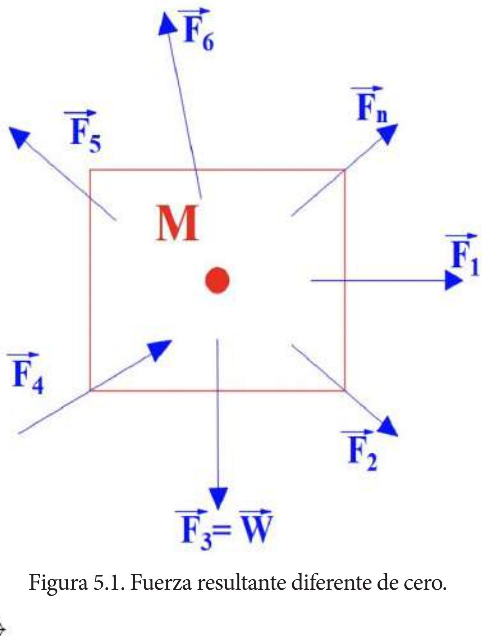


Figura 5.1. Fuerza resultante diferente de cero.

$$\sum \overrightarrow{Fext} = \overrightarrow{F_R} = m\overrightarrow{a_R}$$

$$\overrightarrow{F_R} = F_{RX}\vec{i} + F_{RY}\vec{j} = m\left(ax\vec{i} + ay\vec{j}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} F_{RX} &= \overset{\Rightarrow\ +movimiento}{\sum} Fx = m\ ax \\ F_{RY} &= {}^{+movimiento}_{\downarrow} \sum Fy = m\ ay \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

En las ecuaciones 5.1,en las sumas algebraicas debe considerarse el sentido positivo (+) el del movimiento o posible movimiento, ya que de esta forma se puede considerar en el miembro de la derecha de las ecuaciones a la aceleración como positiva (+), si es que al aplicar las sumatorias con el criterio (+) en el movimiento. y si matemáticamente resultara una aceleración positiva, se comprobaría que la hipótesis es correcta y efectivamente el sistema se movería en dicho sentido con tal aceleración, pero de resultar una aceleración negativa podríamos asegurar que no existe tal movimiento., en esa dirección y sentido y como alternativas tendríamos que:

a. El movimiento. puede que sea en sentido contrario, y lo podríamos intentar de esta otra manera.

b. Y la otra posibilidad sería que si en otro sentido, también nos sale una aceleración negativa, entonces el sistema (o cuerpo que se analiza) está en reposo relativo.

5.2. TIPOS DE FUERZAS

Si estamos únicamente en el campo de la mecánica se podrían considerar las siguientes fuerzas:

5.2.1. Fuerza gravitacional

Toda masa que se encuentra cerca de la tierra es decir dentro de su campo gravitacional siente una fuerza hacia el centro de la tierra, que hace que se dirija hacia la superficie terrestre, esta fuerza según la segunda ley de Newton es aproximadamente:

$$\vec{w} = m\,\vec{g} \tag{5.2}$$

En donde:

$\vec{w}$ = Peso ($N = kg \cdot m/s^2$)

m = Masa (kg)

$\vec{g}$ = Aceleración de la gravedad (m/s^2)

Como vector $\vec{g} \cong (-9{,}8\vec{j})$(m/s^2)

5.2.2. Tensiones (T)

Las fuerzas las podemos transmitir de un cuerpo a otro mediante un sólido y se transmiten fuerzas con la misma intensidad (o módulo), estos sólidos pueden ser (cuerdas, varillas u otros elementos sólidos), por lo general a las fuerzas transmitidas de esta forma se les llama tensiones.

5.2.3. Fuerzas o cargas externas puntuales o distribuidas uniforme o no uniformemente

Estas fuerzas externas aplicadas en diversas interacciones pueden ser, puntuales teóricamente, como también distribuidas (Figura 5.2 b) en donde la carga q1 es una carga que está distribuida uniformemente en la longitud l1 y se la define como:

$$q_1 = \frac{F_1}{l_1} \Rightarrow F_1 = q_1 \cdot l_1$$

F_1 = Fuerza concentrada teóricamente en el centro de gravedad (N)

q_1 = Carga distribuida uniformemente por una longitud (N/m)

l_1 = Longitud en donde se distribuye (m)

q_2 = Carga distribuida no uniforme por unidad de longitud (N/m)

$$F_2 = \frac{q_2 l_2}{2}$$

F_2 = Fuerza concentrada en el centro de gravedad (N)

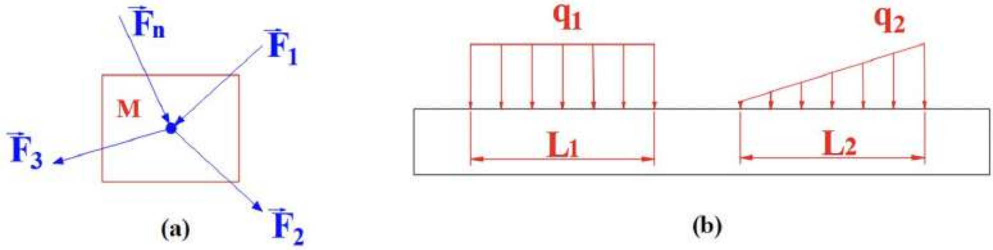


Figura 5.2. (a) Fuerzas concentradas ; (b) Fuerzas distribuidas.

5.2.4. Fuerzas normales (N)

Cuando existe una interacción entre dos cuerpos a través de hacer contacto físico entre sus superficies, aparecen las fuerzas de acción y reacción en tales superficies, que tienen una dirección perpendicular a las superficies de contacto, a estas fuerzas se las denomina fuerzas normales.

$F_{12} = N_{12}$; $F_{21} = N_{21}$

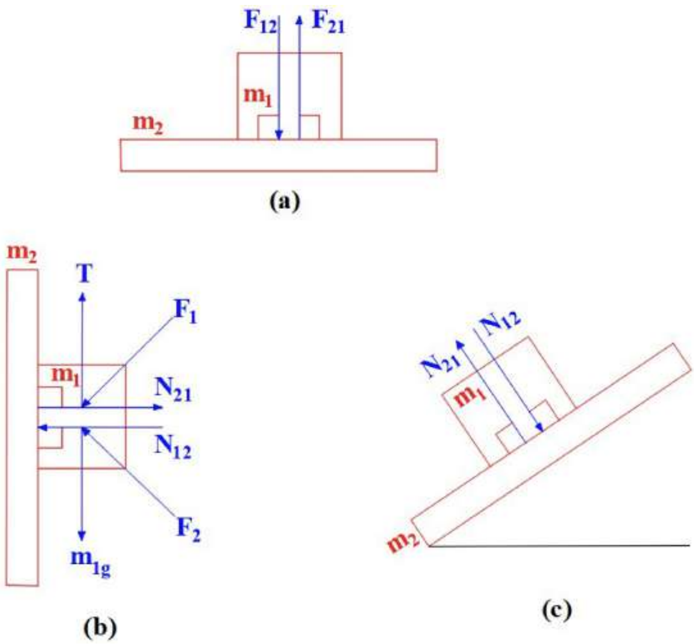


Figura 5.3. Fuerzas Normales.

N_{12} = Normal del cuerpo de (m_1) sobre (m_2)

N_{21} = Normal del cuerpo (m_2) sobre (m_1)

5.2.5. Fuerzas de razonamiento o de fricción

Cuando existen interacciones entre dos cuerpos a través de contacto físico, ejemplo si la masa (m_1) está encima de la masa (2) que puede ser incluso una superficie horizontal, como el piso (pavimento), si el bloque de masa m_1 intenta deslizarse sobre la superficie horizontal la misma se opone a que este se mueva y la fuerza F_{21} ya no sería únicamente la normal N_{21}, sino que esta fuerza F_{21} sería una fuerza inclinada como se muestra en la figura 5.4 que ahora la fuerza que actúa sobre el bloque de masa (m_1) debido a la masa (m_2) , F_{21} está inclinada como se indica, a esta fuerza la podemos expresar a través de sus componentes rectangulares:

$$\overrightarrow{F_{21}} = \overrightarrow{N_{21}} + \overrightarrow{Froz_{21}}$$

Es más comprensible, tratar a esta fuerza a través de estas componentes llamando N_{21} la fuerza normal como ya se describió y la $\overrightarrow{Froz_{21}}$ sería la fuerza de rozamiento o de fricción que ejerce la superficie (2) sobre la masa (m_1) y que tiene una dirección perpendicular a la fuerza normal o sea está en dirección de las superficies de contacto, y en este caso el sentido de esta fuerza es contrario al posible movimiento. de la masa m_1, pero según la tercera ley de Newton, también la fuerza que aplica m_1 sobre m_2 , será exactamente igual en módulo y dirección pero de sentido contrario, como se ve en la figura 5.4 $F_{12} = F_{21}$

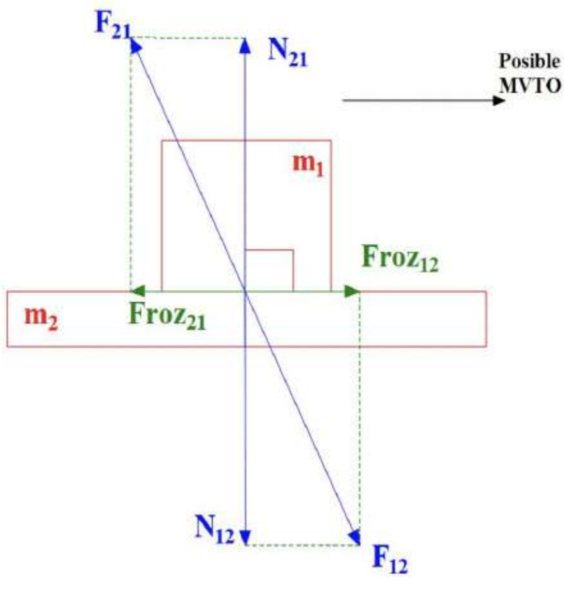


Figura 5.4. Fuerzas de Fricción.

$\overrightarrow{\mu F_{12}} = -\overrightarrow{\mu F_{21}}$, entonces también se la puede expresar así:

$\overrightarrow{F_{12}} = \overrightarrow{N_{12}} + \overrightarrow{Froz_{12}}$

Análogamente las componentes serán la normal (1) sobre (2) y la fuerza de rozamiento de la masa (1) sobre la masa (m_2), esta fuerza de rozamiento tiene el mismo sentido del posible movimiento de la masa (m_1).

Estas fuerzas de rozamiento o fricción que aparecen en los contactos físicos, cuando un cuerpo quiere deslizarse o se desliza sobre otro son fundamentales en la vida cotidiana del ser humano, gracias a ellas usted, puede caminar con tranquilidad y realizar sus actividades, caso contrario usted se resbalaría y no pararía jamás y en otros aspectos, como en el funcionamiento de motores y otros mecanismos, en donde existen muchos contactos y otros mecanismos, a estas fuerzas se las considera indeseables porque provocan desgastes de los elementos y costos de energía para sus movimientoS. Por ello se trata de reducirlas al máximo, para ello se utilizan líquidos lubricantes que permiten disminuir los contactos entre estos elementos.

Estas fuerzas de rozamiento son de dos tipos: fuerzas de rozamiento estática (Fs) y (Fc) fuerzas de rozamiento dinámicos o cinéticas.

Fuerzas de rozamiento estáticas (Fs)

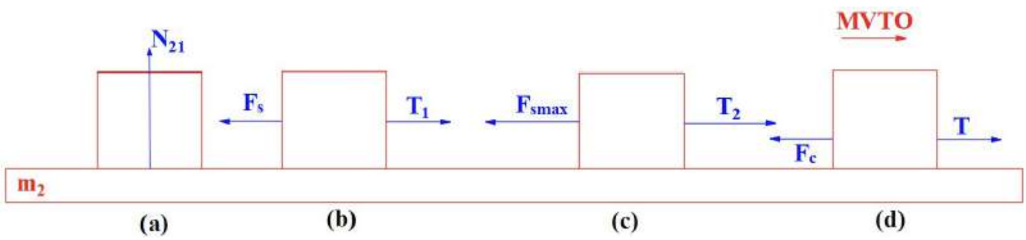


Figura 5.5. Fuerzas de rozamiento estáticas (Fs) y cinéticas (Fc).

Las fuerzas de rozamiento estáticas (Fs) son fuerzas variables, que tienen un valor de cero, cuando no actúa ninguna fuerza externa o tensión (Figura 5.5 a) y empieza a aumentar cuando se aplica una fuerza en la dirección y sentido del posible movimiento. (T_1) (Figura 5.5 b) pero el sistema continúa en equilibrio estático, si aumentamos la tensión, la fuerza de rozamiento también aumentará, de acuerdo a la tensión, pero no puede aumentar ilimitadamente cuando la tensión tenga un cierto valor (T_2), la fuerza de rozamiento llegará a su valor máximo (*Fsmax*) (Figura 5.5 c), en estas condiciones se estará llegando al límite entre el reposo y el movimiento. Y el mismo será inminente y en un instante posterior el cuerpo estará en pleno movimiento. (Figura 5.5 d), en estas condiciones las fuerzas de rozamiento que actuará es la cinética (*Fc*). Entonces como se dijo la fuerza de rozamiento estática (*Fs*) es variable, desde cero hasta *Fmax*:

$0 \leq Fs \leq Fs\ máx$

Se ha comprobado experimentalmente que el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática es directamente proporcional a la fuerza normal que actúa sobre el cuerpo, es decir:

$$Fs\,\text{máx} = \mu_s \cdot N \tag{5.3}$$

En donde: μ_S= Coeficiente de rozamiento estático (adimensional)

Para todos los casos de la figura 5.5 (a), (b) hasta el (c) se considera que el bloque está en equilibrio estático y con sus leyes se determinarán los valores correspondientes a las fuerzas de rozamiento estáticas (Fs) .

Fuerzas de rozamiento cinéticas (*Fc*)

Cuando los cuerpos se mueven (de cualquier forma), las fuerzas de rozamiento que actúan son las cinéticas, y estas no son variables, son constantes y proporcionales a la fuerza normal (*N*), es decir: (Figura 5.5 d).

$$Fc = \mu_C \cdot N \tag{5.4}$$

En donde μ_C = Coeficiente de rozamiento cinético (adimensional)

Gráfica comportamiento de la fuerza de rozamiento con el tiempo (t) figura 5.6 (La estática => *Fs*) varia hasta alcanzar un valor máximo (*Fs máx*) y luego disminuye en cierto valor , y esta permanece constante (Fuerza cinética => *Fc*)

Como se puede notar la *Fc* es menor a la (*Fs máx*) por lo tanto: $\mu_C < \mu_S$. (Ver figura 5.6).

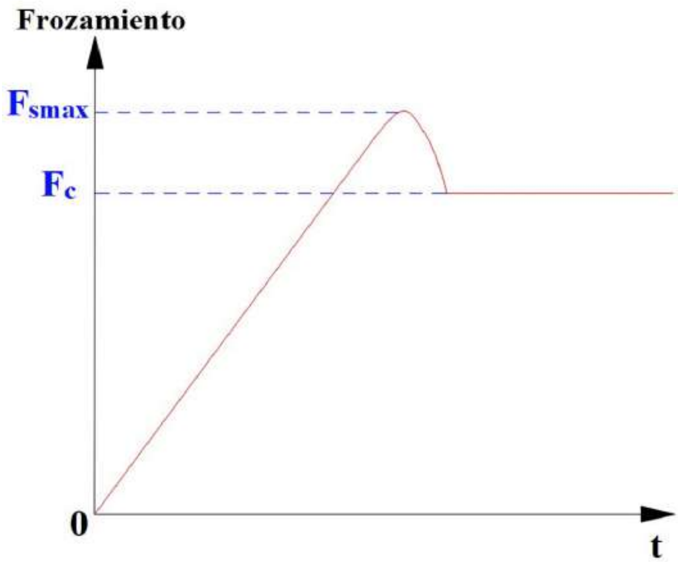


Figura 5.6. Comportamiento de la fuerza de rozamiento con el tiempo (t).

5.3. PASOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE MECÁNICA

a. Leer críticamente el enunciado del problema y realizar un gráfico esquemático del ejercicio de no existir.

b. Identificar datos e incógnitas del problema y enlistar los datos e incógnitas.

c. Elegir los cuerpos claves del problema y aislarlos individualmente con el objeto de realizar el diagrama del cuerpo libre (d.c.l.).

d. d.c.l. consiste en dibujar estimativamente todas las fuerzas (Interacciones) que actúan sobre el cuerpo elegido (Peso, fuerzas externas, tensiones, normales, fuerzas de rozamiento), se sugiere tratar a las fuerzas de rozamiento al final de todas, previo a la elección de la dirección del movimiento. o posible movimiento.

e. Elegir un sistema de coordenadas de referencias XY adecuado. Para ello es fundamental hacer coincidir uno de los ejes con la dirección del movimiento: o posible movimiento y el otro eje perpendicular al primero por supuesto y luego se deberá descomponer todas las fuerzas en "X" e "Y", solo así estará listo el diagrama del cuerpo libre.

f. Aplicar las leyes de Newton correspondientes en "X" e "Y" (Primera o segunda ley) a pesar que la segunda contiene a la 1a ley; si no es suficiente el número de ecuaciones para satisfacer el número de incógnitas, no olvide de aplicar los conceptos de fuerzas de rozamiento ($Fs\ máx = \mu_S \cdot N$) o ($Fc = \mu_C \cdot N$) según las condiciones, y también si posee variables del movimiento puro (Puede aplicar las leyes de la cinemática) recuerde que la aceleración (a) es un nexo entre la cinemática y la dinámica.

g. Resolver el sistema de ecuaciones y determinar las incógnitas planteadas.

CAPÍTULO VI
6. EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS DE ESTÁTICA Y DINÁMICA TRASLACIONAL

6.1. EJERCICIOS RESUELTOS

Estática: Fuerzas Concurrentes

1. La pierna y el yeso en la figura adjunta pesan 250 N (W1). Determine el peso (W2) y el ángulo α necesario de manera que la pierna y el yeso no ejerzan ninguna fuerza sobre la articulación de la cadera.

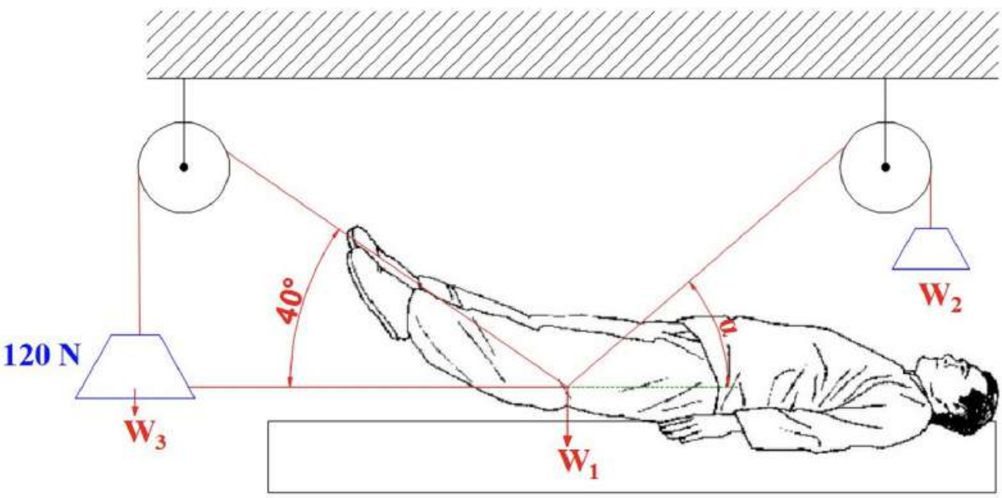


Figura 6.1. Ejercicio de estática.

Solución:

Datos:

$W_1 = 250N$

$W_3 = 120N$

$W_2 = ?$

$\alpha = ?$

Equilibrio estático: Realizamos el diagrama del cuerpo libre del punto "O" donde concurren las fuerzas. Comprobamos el equilibrio de traslación del punto "O".

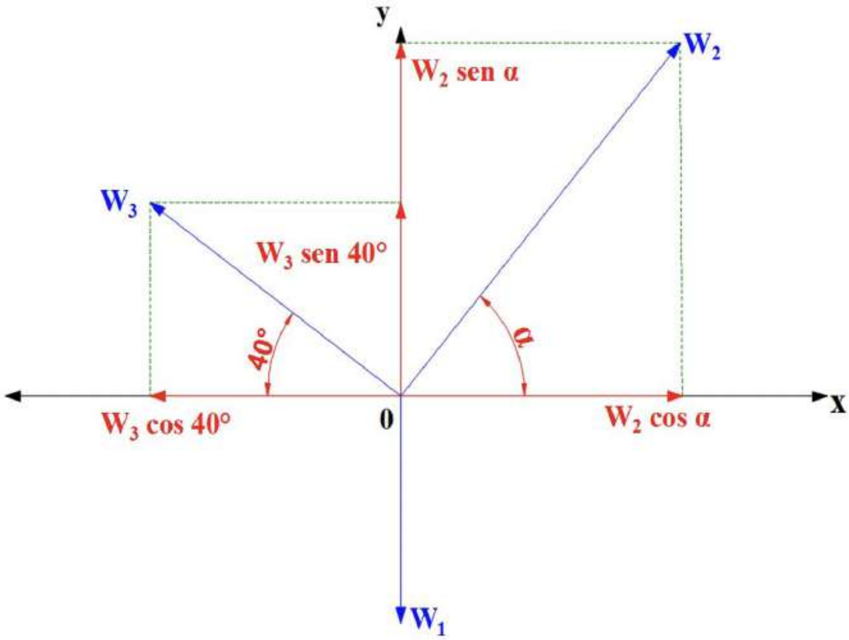


Figura 6.2. Ejercicio de estática d.c.l.

$$\overset{+\rightarrow}{\sum F_x} = 0 \therefore W_2 \cos\alpha - W_3 \cos\ 40° = 0 \quad (Ec,1)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore W_2 \operatorname{sen}\alpha + W_3 \operatorname{sen} 40° - W_1 = 0 \quad (Ec,2)$$

$$\text{de}\,(Ec,1) \quad W_2 = \frac{W_3 \cos 40°}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{En}\,(Ec,2)$$

$$\frac{W_3 \cos 40°}{\cos\alpha} \cdot \operatorname{sen}\alpha = W_1 - W_3 \operatorname{sen} 40°$$

$$\tan\alpha = \frac{250 - 120\cos\ 40°}{120\cos 40°} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1{,}7196) = \alpha = 59{,}8°$$

$$\text{Luego} : W_2 = \frac{120\cos 40°}{\cos 59{,}8°} \Rightarrow W_2 = 182{,}70\,\text{N}$$

2. En la estructura plana de la figura adjunta, se consideran los elementos (cuerdas) de pesos despreciables. Para que la estructura se mantenga en equilibrio estático determinar:

a) Las fuerzas que soportan (o tensiones) cada uno de los elementos, para que soporten una masa suspendida de 500 kg como se indica.

b) Las fuerzas de reacción en los puntos de apoyo (pared) (solo el módulo o magnitud) para mantener la estructura en equilibrio.

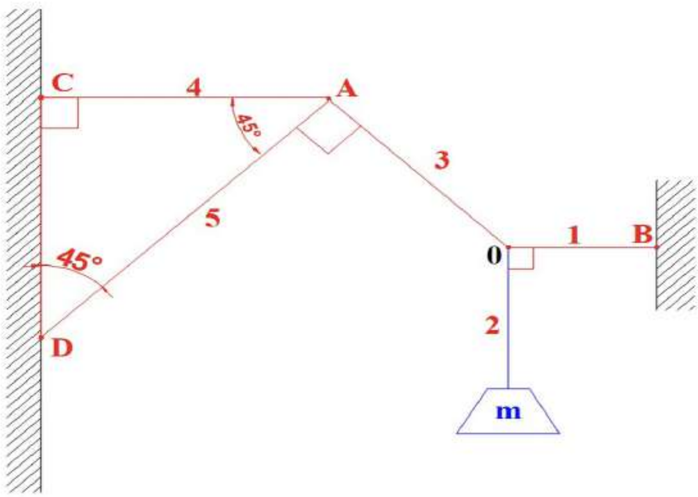


Figura 6.3. Ejercicio de estática.

Solución:

Datos:

$m = 500$ kg

T1 =?

a) T3 =?

T4 =?

T5 =?

RB =?

b) RC =?

RD =?

Iniciamos realizando el diagrama del cuerpo libre, del punto "0" considerando que la tensión ($T_2 = W$)

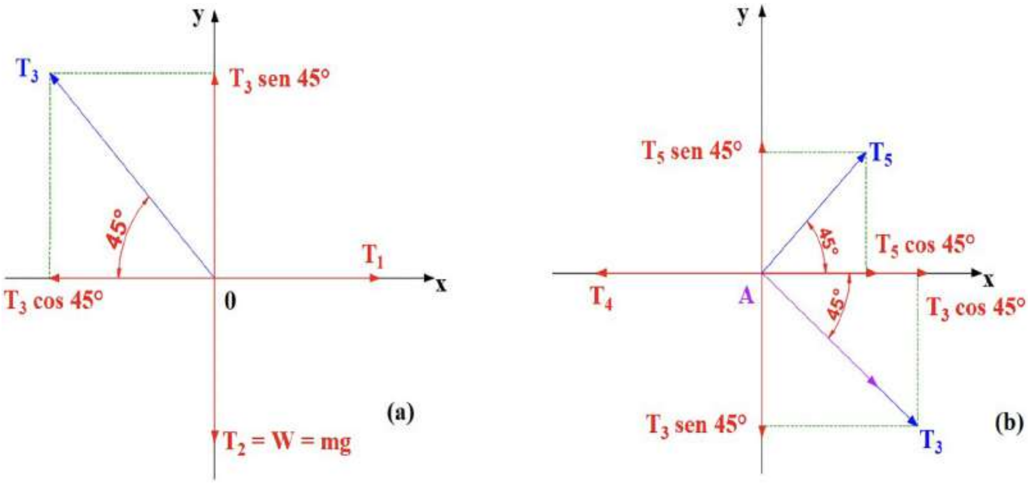


Figura 6.4. Ejercicio de estática d.c.l.

$$\overset{\rightarrow+}{\sum F_x} = 0$$

$$T_1 - T_3 \cos 45° = 0$$

$$T_1 = T_3 \cos 45° \; (Ec{,}1)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0$$

$$T_3 \operatorname{sen} 45° - \mathrm{mg} = 0$$

$$T_3 = \frac{500(9{,}8)}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow T_3 = 6\,929{,}6\,\mathrm{N}$$

$$\text{En}\,(Ec{,}1) \quad T_1 = 6\,929{,}4\,(\cos\, 45°)$$

$$T_1 = 4\,900\,\mathrm{N}$$

$$\text{En}\,(Fig.b) : \overset{\rightarrow+}{\sum F_x} = 0$$

$$T_5 \cos 45° + T_3 \cos 45° - T_4 = 0 \; (Ec{,}2)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore T_5 \operatorname{sen} 45° - T_3 \operatorname{sen} 45° = 0$$

$$T_5 = T_3 = 6\,939{,}6\,\mathrm{N}$$

$$\text{En}\,(Ec{,}2)\quad T_4 = 6\,939{,}6\ \cos\ 45° + 6\,939{,}6\ \cos 45°$$

$$T_4 = 9\,800\,N$$

Respuesta:

$$a)\ \begin{array}{l} T_1 = 4\,900\,\mathrm{N}\ ;\ T_2 = 4\,900\,\mathrm{N}\ ;\ T_3 = 6\,939{,}6\,\mathrm{N} \\ T_4 = 9\,800\,\mathrm{N}\ ;\ T_5 = 6\,939{,}6\,\mathrm{N} \end{array}$$

$$b)\ R_B = T_1 = 4\,900\,\mathrm{N}\ ;\ R_C = T_4 = 9\,800\,\mathrm{N}\ ;\ R_D = T_5 = 6\,939{,}6\,\mathrm{N}$$

Estática: Fuerzas Paralelas

3. La viga horizontal CD de la figura adjunta es uniforme y pesa 600 N. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas que soportan la viga. Cuando se suspende un peso de P= 200 N, en la posición indicada en la figura.

Solución:

Datos:

$W_{CD} = 600N$

$P = 200N$

$T_C = ?$

$T_D = ?$

Realizamos el diagrama del cuerpo libre de la viga CD:

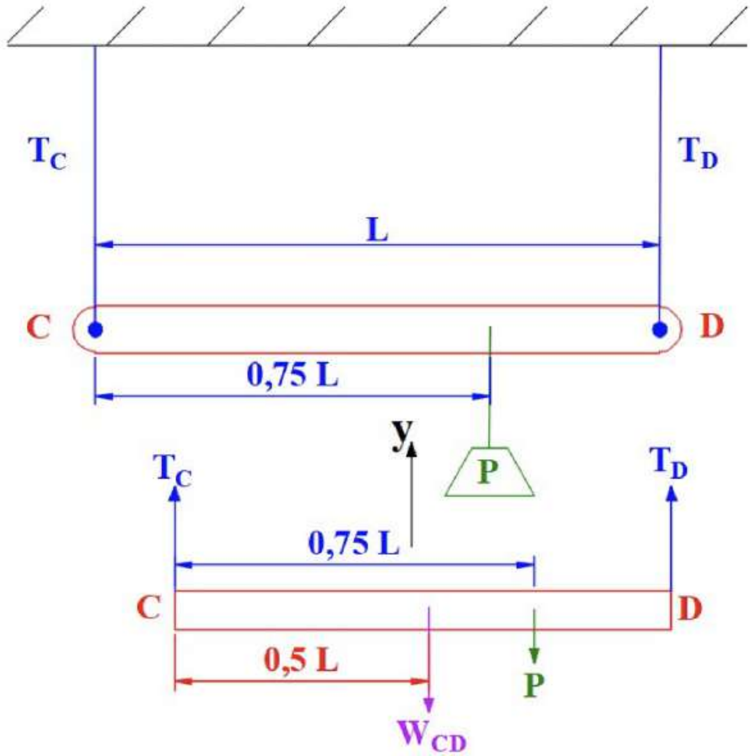


Figura 6.5. Ejercicio de estática d.c.l.

Aplicamos el equilibrio de traslación:

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0$$

$$T_C + T_D - W_{CD} - P = 0 \quad (Ec{,}1)$$

Aplicamos el equilibrio de rotación: Fuerzas Paralelas:

$$\sum \overset{\overset{\leftarrow}{+}}{M_C} = 0 \therefore T_C\,(0) - W_{CD} \cdot (0{,}5L) - P\,(0{,}75L) + T_D \cdot L = 0$$

$$T_D = \frac{[600(05)+200(0{,}75)]L}{L} \Rightarrow T_D = 450\,\mathrm{N}$$

Reemplazamos en la (Ec.1)

$$T_C = W_{CD} + P - T_D = 600 + 200 - 450 \Rightarrow T_C = 350\,\mathrm{N}$$

Respuestas: $T_C = 350N$, $T_D = 450N$

Estática: Fuerzas no concurrentes – no paralelas

4. En la figura adjunta, si la barra pesa 800 *N*, soporta las cargas (fuerzas) que se muestran. Determinar las reacciones en los apoyos A y B, causadas por las cargas que actúan sobre la viga, para que se mantenga en equilibrio.

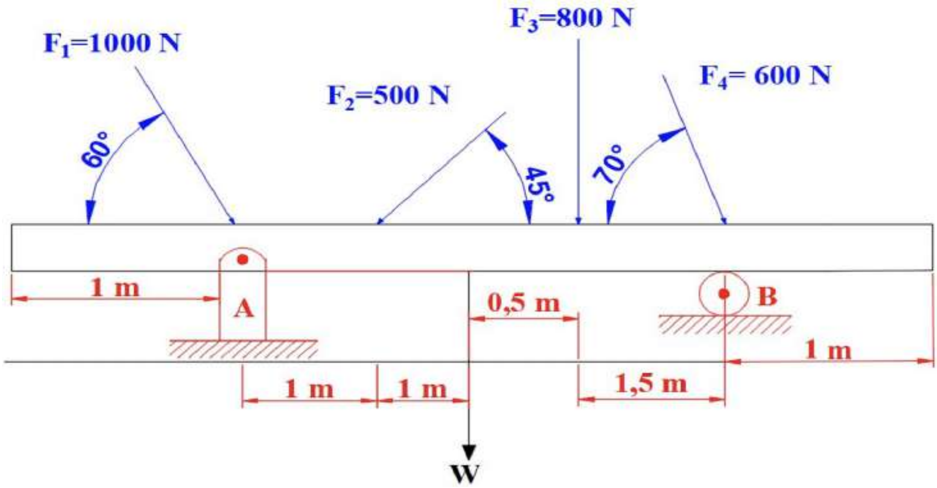


Figura 6.6. Ejercicio de estática.

Solución:

Realizamos el diagrama del cuerpo libre la viga:

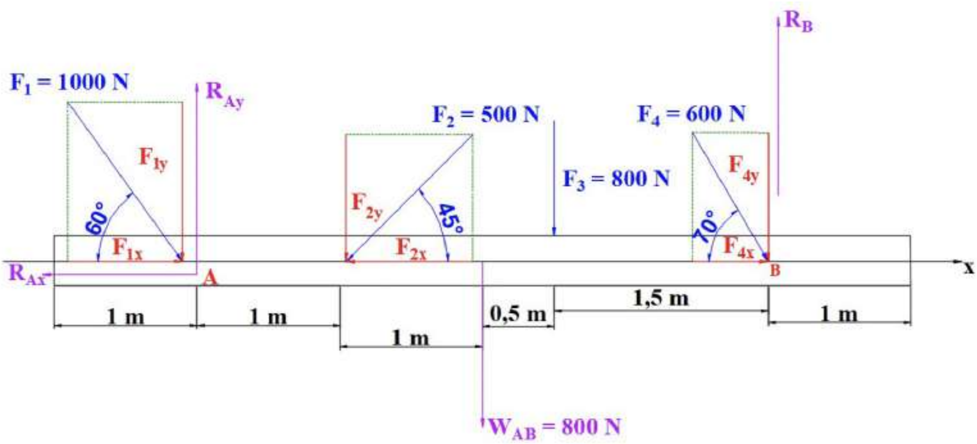


Figura 6.7. Ejercicio de estática d.c.l.

En primer lugar, determinamos la fuerza resultante de todas las cargas incluido el peso (W_{AB}). Que sería:

$$\overrightarrow{F_R} = F_{Rx} \times \overrightarrow{i} + F_{Ry}\overrightarrow{J}\ (Ec{,}1)$$

$$F_{Rx} = \overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = F_{1x} - F_{2x} + F_{4x} = F_1 \cos 60° - F_2 \cos 45° + F_4 \cos 70°$$

$$F_{Rx} = 1\,000 \cos 60° - 500 \cos 45° + 600 \cos 70° = 351{,}7\,\text{N}$$

$$F_{Ry} = \overset{+}{\underset{\uparrow}{}} \sum F_y = -F_{1y} - F_{2y} - W_{AB} - F_3 - F_{4y}$$

$$F_{Ry} = -1\,000 \,\text{sen}\, 60° - 500 \,\text{sen}\, 45° - 800 - 800 - 600 \,\text{sen}\, 70°$$

$$F_{Ry} = -3\,383{,}4\,\text{N en}\ \ (Ec{,}1)$$

$$\overrightarrow{F_R} = \left(351{,}7\overrightarrow{i} - 3383{,}4\overrightarrow{J}\right)\text{N}$$

Esta fuerza resultante, es una fuerza única, que puede reemplazar a todas las cargas realizando el mismo efecto de traslación y rotación de todas juntas. Por ende, vamos a reemplazar esta fuerza única por todas las cargas, que nos facilitaría, la resolución de las reacciones en los puntos de apoyo, A (apoyo fijo) y en B (apoyo móvil), solo que en estas condiciones no sabemos dónde actuaría la fuerza resultante, por ende, la colocamos en un punto desconocido, a una distancia "X" desde el punto "A". Y así procedemos a realizar un nuevo diagrama en equilibrio, considerando las reacciones en los apoyos.

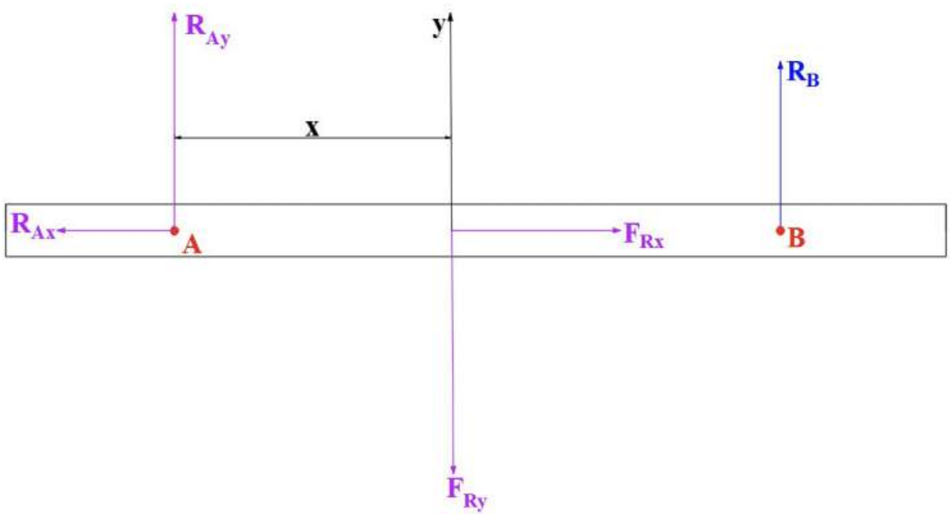


Figura 6.8. Ejercicio de estática d.c.l.

En este diagrama (Figura de la fuerza resultante) para que el sistema este en equilibrio solo debemos anular a la fuerza resultante: para ello debemos anular a F_{RX} , que es una fuerza horizontal para la derecha, para ello el apoyo fijo en "A" , es el único que puede soportar fuerzas en cualquier dirección y seria encargado de realizar una reacción en "X", para la izquierda (R_{AX}) y anular a esta fuerza resultante. Ahora para anular a la resultante en "Y" (F_{RY}) hacia abajo, se requiere reacciones hacia arriba, en este caso tanto el apoyo fijo (En A) y el apoyo móvil en "B", si pueden soportar cargas en "Y", entonces habría dos reacciones (R_{AY} , R_B) hacia arriba, luego tendríamos cuatro incógnitas, R_{AX}, R_{AY}, R_B, y "X". Para ello aplicamos las leyes de equilibrio de traslación y rotación en estos diagramas, añadimos también las reacciones en la (Figura del diagrama de cuerpo libre), para que este también en equilibrio estático. Aplicamos en primer lugar el equilibrio de traslación, para ello lo hacemos en la (Figura de la feurza resultante), que tiene menos cargas:

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore R_{Ay} + R_B - F_{Ry} = 0 \quad (Ecuacin1)$$

$$\overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = 0 \therefore F_{Rx} - R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 351{,}7\,\mathrm{N}$$

Ahora aplicamos el equilibrio de rotación, lo hacemos en la (Figura b) porque en ella se conocen todas las posiciones (distancias) de las cargas $\sum \overset{\leftarrow}{\overset{+}{M}} A = 0$, y solo provocanmomentos las fuerzas en "Y".

$$-F_{2y}\,(1) - W_{AB}\,(2) - F_3\,(2{,}5) - |F_{4y}\,(4) + R_B\,(4) = 0$$

$$R_B = \frac{500\,sen\,45°\,(1)+800(2)+800(2{,}5)+600\,sen\,70°\,(4)}{4}$$

$$R_B = 1\,552{,}2\,\mathrm{N}$$

Reemplazamos en la (Ec.1)

$$R_{Ay} = F_{Ry} - R_B = 3\,383{,}4 - 1\,552{,}2$$

$$R_{Ay} = 1\,831{,}2\ \mathrm{N}$$

Luego las reacciones en A y en B sería:

Respuestas:

$$\overrightarrow{R_A} = \left(-351{,}7\,\vec{i} + 1\,831{,}2\,\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

$$\overrightarrow{R_B} = \left(0\,\vec{i} + 1\,552{,}2\,\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

Y además podríamos hallar el punto de aplicación de la fuerza resultante ($\vec{F}_R$) y de la equilibrante ($\vec{F}_E = \vec{R}_A + \vec{R}_B$) hallando "x" en el diagrama de la figura (c), aplicamos equilibrio de rotación así:

$$\sum \overset{\overset{\leftarrow}{+}}{M_A} = 0$$

$$-F_{Ry}\,(x) + R_B\,(4) = 0$$

$$x = \frac{(1\,552{,}2)(4)}{3\,383{,}4} = 1{,}835\ \mathrm{m}$$

$x = 1{,}835\ \mathrm{m} \Rightarrow$ Posición respecto a "A" (Hacia la derecha)

5. La viga EF de la figura adjunta tiene un peso de 25 000 N, soporta una carga de 15 000 N en el punto F, y esta equilibrada por un apoyo fijo en E y un cable colocado en el extremo F, como indica la figura.

Determinar:

a) La tensión en el cable

b) La reacción en el apoyo E.

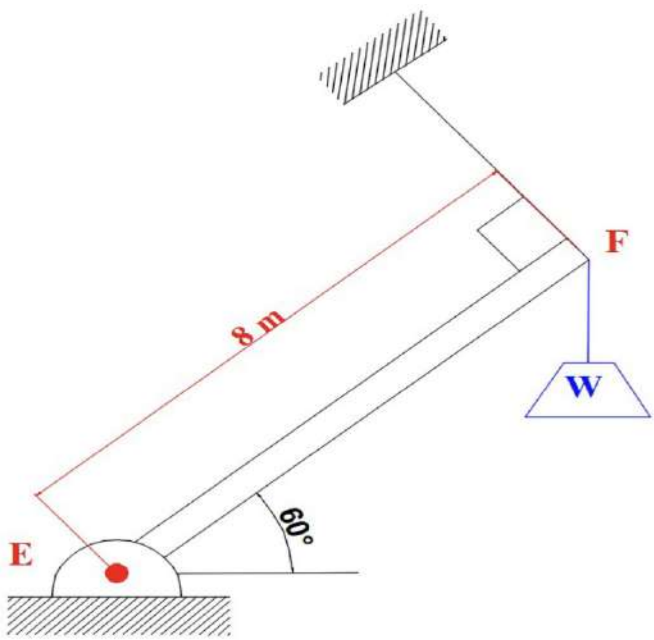


Figura 6.9. Ejercicio de estática.

Solución:

Datos:

$W_{EF} = 25\,000\,\mathrm{N}$

$W = 15\,000\,\mathrm{N}$

$T_F = ?$

$\overrightarrow{R_E} = R_{Ex}\overrightarrow{i} + R_{Ey}\overrightarrow{j} = ?$

Realizamos el diagrama del cuerpo libre de la viga EF:

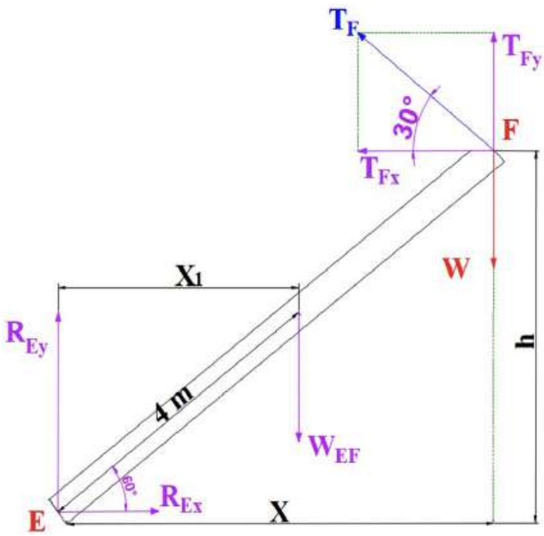


Figura 6.10. Ejercicio de estática.

Aplicamos equilibrio de traslación (Primera ley de Newton)

$$R_{Ex} - T_{Fx} = 0 \Rightarrow R_{Ex} = T_F \cos 30° \; (Ec{,}1)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore R_{Ey} + T_{Fy} - W_{EF} - W = 0 \Rightarrow$$

$$R_{Ey} = 25\,000 + 15\,000 - T_F \operatorname{sen} 30°$$

$$R_{Ey} = 40\,000 - T_F \operatorname{sen} 30° \; (Ec{,}2)$$

Aplicamos equilibrio de rotación: $\sum \overset{\overset{\leftarrow}{+}}{M_E} = 0$

$$-W_{EF} \cdot x_1 - W\,(x) + T_{Fy}\,(x) + T_{Fx}\,(h) = 0$$

$$T_F \operatorname{sen} 30°\,(4) + T_F\ \cos 30°\,(6{,}39) = 25\,000\,(2) + 15000\,(4)$$

$$T_F = \frac{110\,000}{8} \Rightarrow T_F = 13750\,\mathrm{N}\ \ ,\ \ \mathrm{En}\,(Ec{,}1y2)$$

$$R_{Ex} = 13\,750 \cos 30° = 11\,907{,}85\,\mathrm{N}$$

$$R_{Ey} = 40\,000 - 13\,750 \operatorname{sen} 30° = 33125\,\mathrm{N}$$

Respuestas:

$$\overrightarrow{T_F} = (13\,750\,N\ ;\ 150°)$$

$$\overrightarrow{R_E} = \left(11\,907{,}85\,\overrightarrow{i} + 33\,125\,\overrightarrow{j}\right)\ \mathrm{N}$$

6. El bloque A de la figura adjunta pesa 10 000 N. El coeficiente estático entre el bloque y la superficie es 0,3. El peso *W* es de 2 000 N, y el sistema está en equilibrio estático.

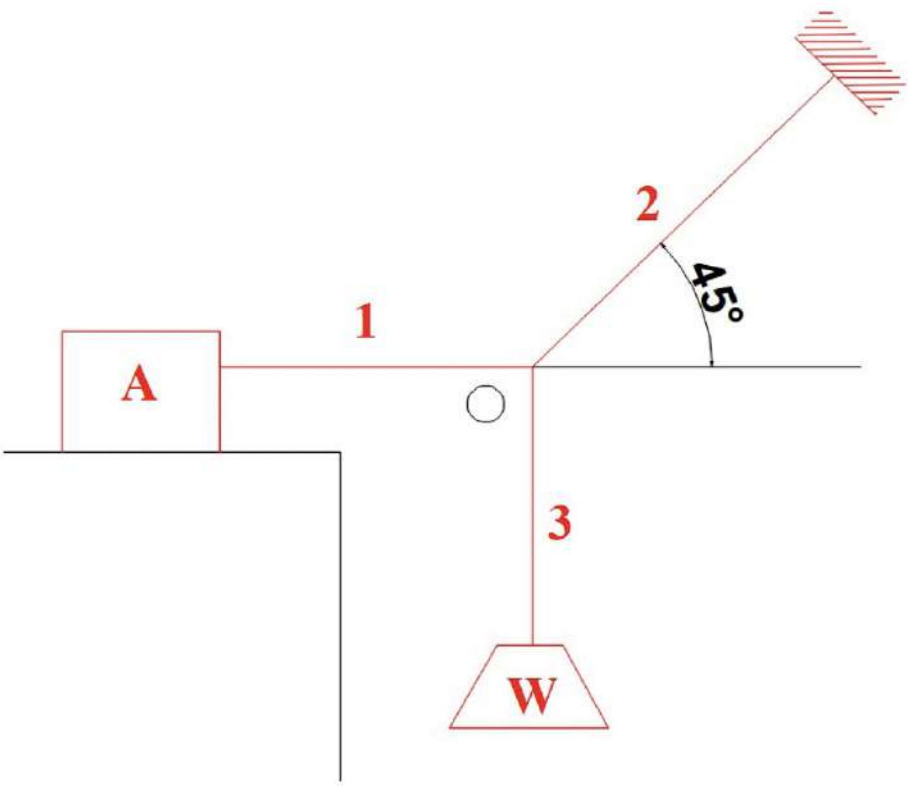


Figura 6.11. Ejercicio de estática.

Determinar:

a) La fuerza de rozamiento ejercida sobre el bloque A.

b) ¿Para que peso máximo W permanecerá en equilibrio el sistema?

Solución:

Datos:

$W_A = 10\,000\,\text{N}$

$\mu_S = 0{,}3$

$W = 2\,000\,\text{N}$

$a)\ F_{S_A} = ?$

$b)\ W_{\text{máx}} = ?$

Realizamos el diagrama del cuerpo libre del bloque A:

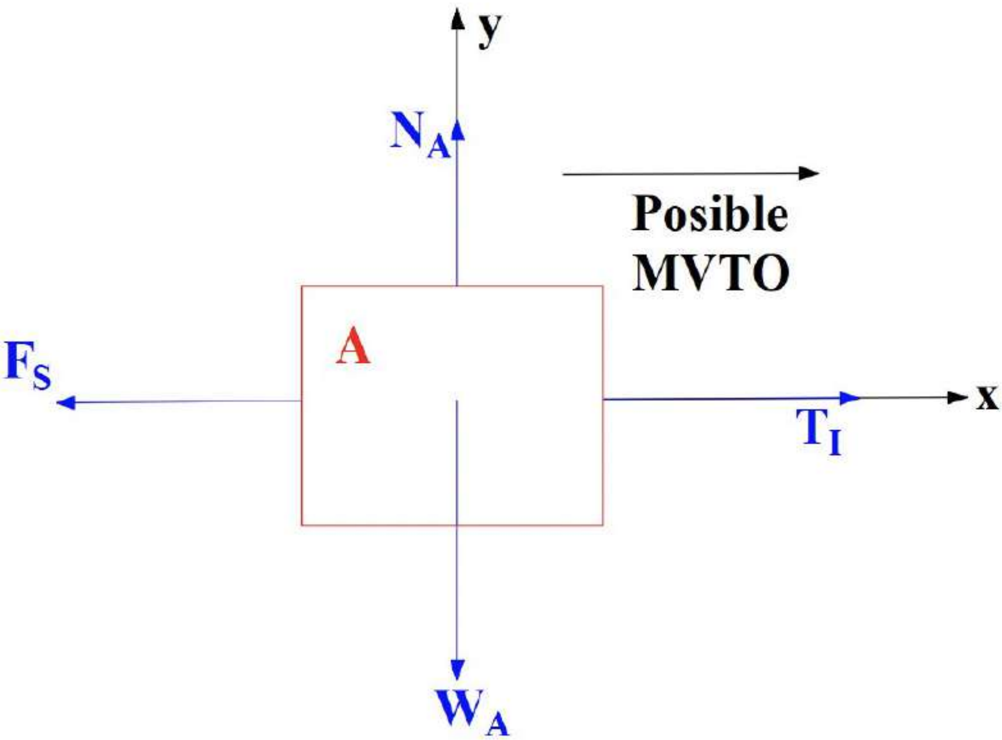


Figura 6.12. Ejercicio de estática.

$$\overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = 0$$

$$T_1 - F_{S_A} = 0$$

$$F_{S_A} = T_1 \, (Ec{,}1)$$

Ahora realizamos el diagrama del cuerpo libre del punto “0”.

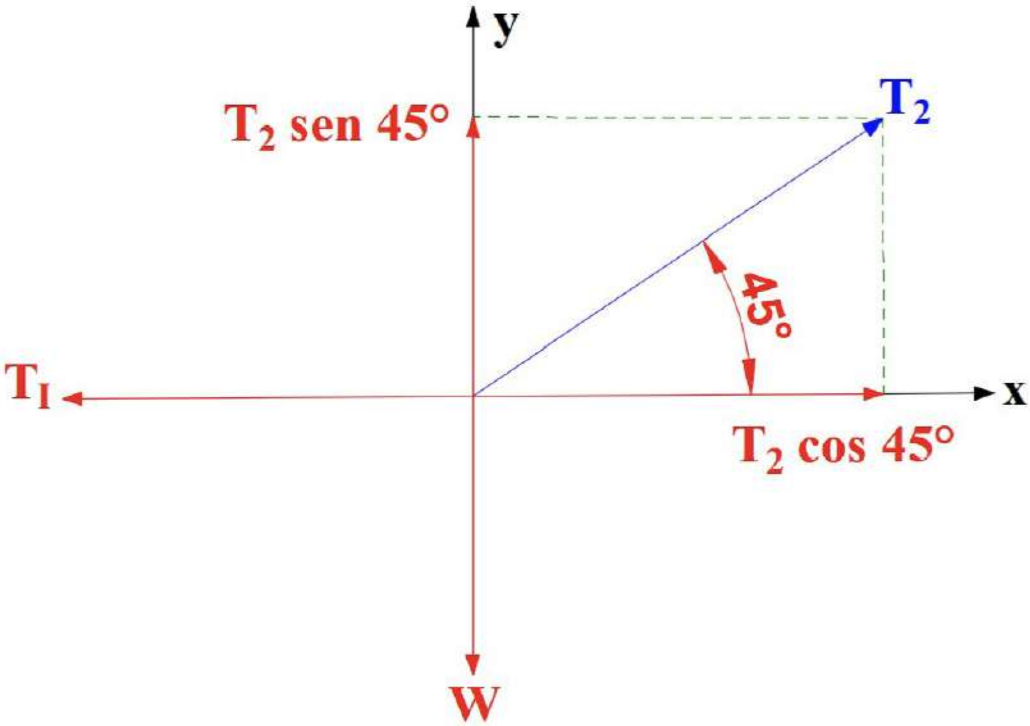


Figura 6.13. Ejercicio de estática d.c.l.

$$\overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = 0$$

$$T_2 \cos 45° - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 \operatorname{sen} 45° \, (Ec{,}2)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore T_2 \operatorname{sen} 45° - W = 0 \Rightarrow$$

$$T_2 = \frac{W}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{2\,000\,\mathrm{N}}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow T_2 = 2\,828{,}4\,\mathrm{N}$$

En $(Ec{,}2)$ $T_1 = 2\,828{,}4 \operatorname{sen} 45° \Rightarrow T_1 = 2\,000\,\mathrm{N}$ en $(Ec{,}1)$

$F_{S_A} = 2\,000\,\mathrm{N} \Rightarrow$ Resp. (a)

Wmáx ⇒ Cuando limite equilibrio y movimiento: $F_S = F_{S\,máx} = \mu_S \cdot N$ en Fig. (b)

$$\overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = 0 \therefore T_1{}' - F_{s\,\text{máx}\,A} = 0 \Rightarrow T_1{}' = F_{s\,\text{máx}\,A} = \mu_S \cdot N_A\,(Ec.3)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore N_A - W_A = 0 \Rightarrow N_A = 10\,000\,\text{N} \Rightarrow T_1{}' = 0{,}3\,(10\,000\,\text{N}) \Rightarrow T_1{}' = 3\,000\,\text{N}$$

$$\text{En } (Fig.\,c) : W = W_{\text{máx}} : \overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = 0 \therefore T_2{}' \cos 45° - T_1{}' = 0 \Rightarrow$$

$$T_2{}' = \frac{T_1{}'}{\cos 45°} = \frac{3\,000}{\cos 45°} = T_2{}' = 4\,242{,}64\,\text{N}$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore T_2{}' \,\text{sen}\, 45° - W_{\text{máx}} = 0 \Rightarrow W_{\text{máx}} = 4\,242{,}64 \,\text{sen}\, 45° W_{mx} = 3\,000\,\text{N} \Rightarrow \text{Resp(b)}$$

7. Un bloque que pesa 2 000 N se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,40, y el coeficiente cinético de rozamiento es 0,20. Determinar:

a) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida sobre el bloque?

b) Si se aplica una fuerza de 300 N (en “X” +) sobre el bloque, ¿Cuál será la fuerza de rozamiento sobre el bloque?

c) ¿Cuál es el valor de la fuerza mínima hacia (x +) que pondría al bloque en movimiento?

d) ¿Cuál es la fuerza mínima que mantendrá el movimiento del bloque, una vez iniciado el mismo?

e) Si la fuerza horizontal (x +) es de 1 200 N, ¿Cuánto valdrá la fuerza de rozamiento y la aceleración?

Solución:

Datos:

$W = 2\,000\text{N}$

$\mu_S = 0{,}40$

$\mu_C = 0{,}20$

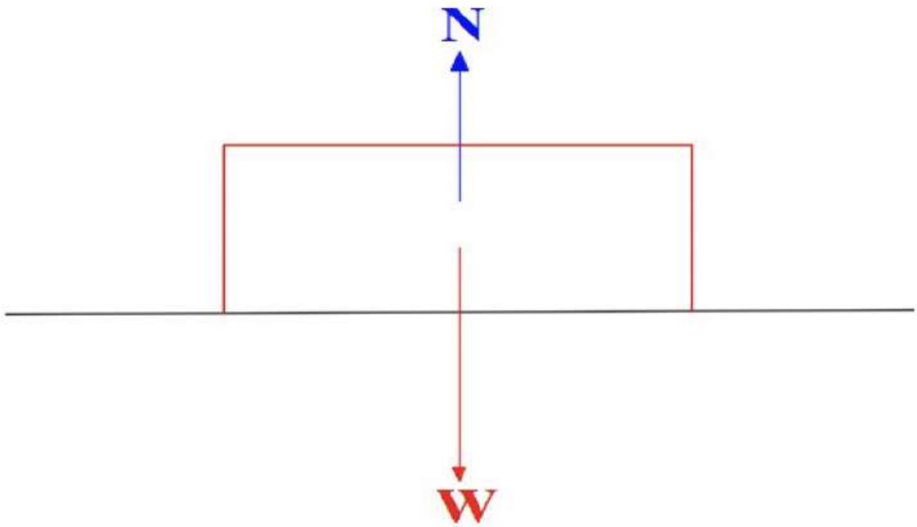


Figura 6.14. Ejercicio de estática d.c.l.

$Froz = ?$

$Froz = F_S = 0 \Rightarrow \text{Resp (a)}$

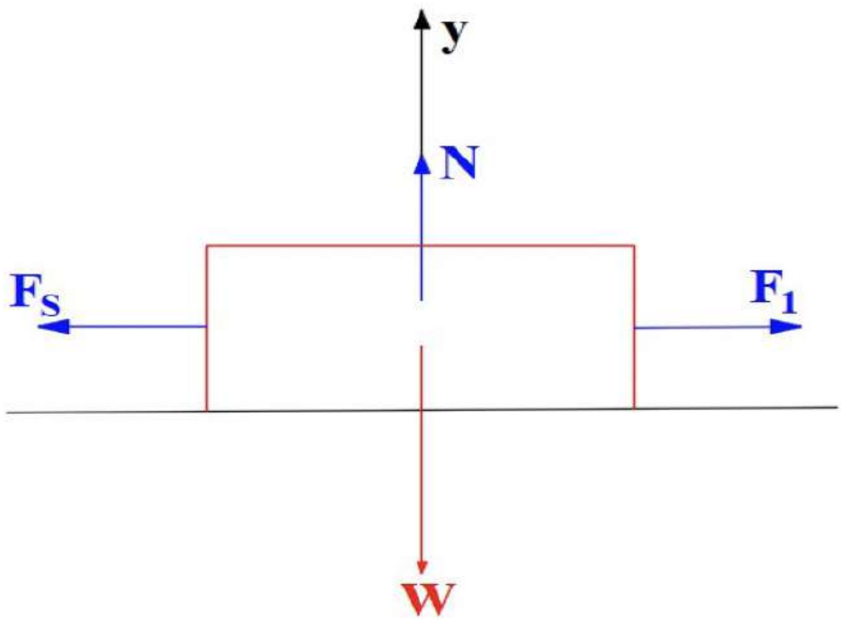


Figura 6.15. Ejercicio de estática d.c.l.

$F_1 = 300\ N$

$Froz = ?$

Como $F_{S\,máx} = \mu_S \cdot N = 0{,}4\ (2\ 000\ N)$

$F_{S\,máx} = 800\ N > F_1 = 300\ N$

El bloque está en reposo

$$\overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = 0 \Rightarrow$$
$$F_1 - F_S = 0 \Rightarrow F_S = F_1 = 3\,000\,\mathrm{N} = Froz \Rightarrow \text{Resp. } (b)$$

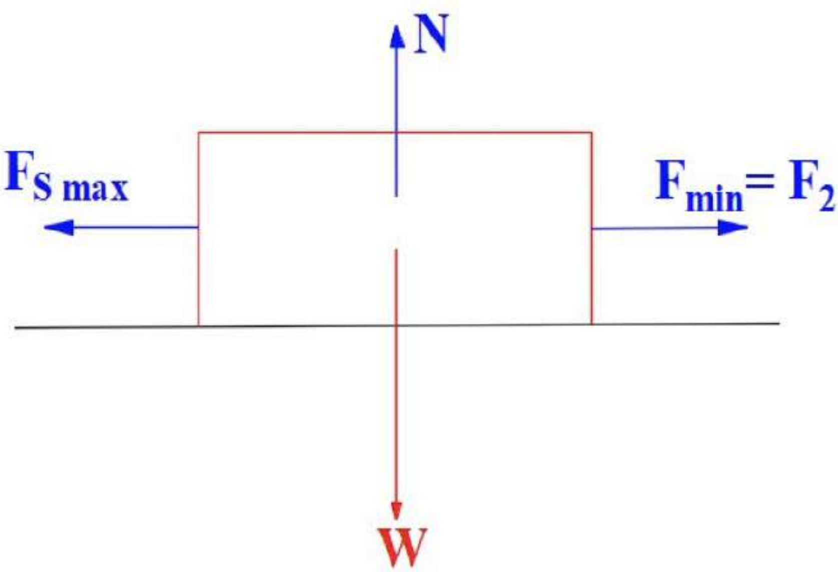


Figura 6.16. Ejercicio de estática d.c.l.

$$F_{\text{mín}} = F_2 = ?\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore N = W$$

Límite entre el reposo y el movimiento.

$$\overset{\rightarrow +}{\sum} F_x = 0 \therefore F_{\text{mín}} - F_{s\,\text{máx}} = 0 \Rightarrow F_{\text{mín}} = \mu_S \cdot \mathrm{N} = 0{,}4\,(2\,000\,\mathrm{N})$$
$$F_{\text{mín}} = 800\,\mathrm{N} \Rightarrow \text{Resp. } (c)$$

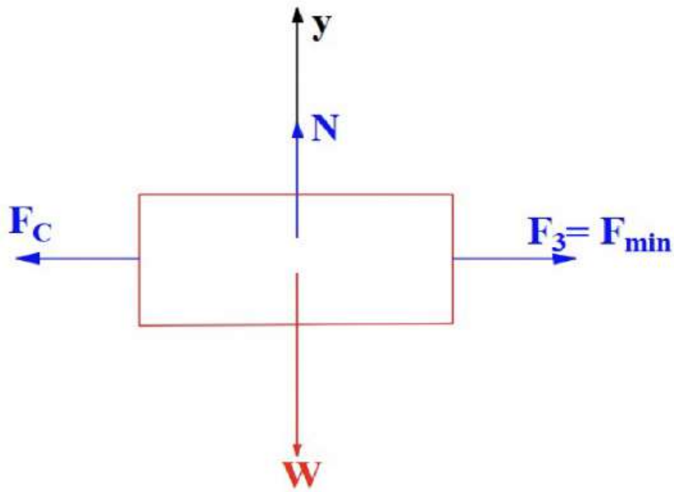


Figura 6.17. Ejercicio de estática d.c.l.

$F_{\text{mín}} = F_3 =?\,(Mantengaelmovimiento) \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow v = constante$

$\sum^{\xrightarrow{+}} F_x = m \cdot a_x$

$F_3 - F_C = ma$

$F_3 = \mu_C \cdot \mathrm{N} + ma$

$F_3 = F_{s\,\text{máx}} \Rightarrow a = 0$

$v = constante$

$F_3 = F_{\text{mín}} = 0{,}20\,(2\,000) = 400\,\mathrm{N}\,(movimiento) \Rightarrow \text{Resp. }(d)$

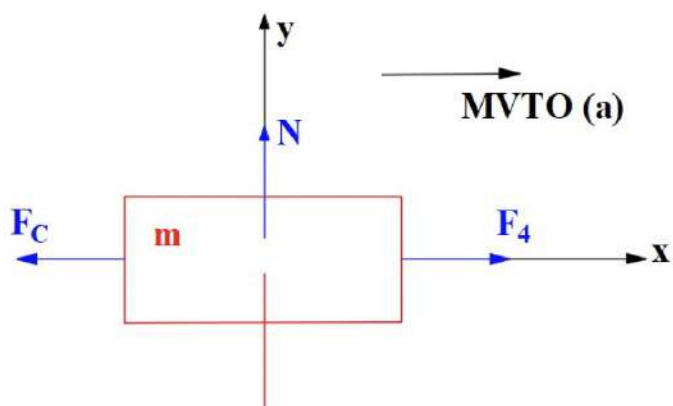


Figura 6.18. Ejercicio de estática d.c.l.

$F_4 = 1\,200\,\text{N}$

$Froz = ?$

$a = ?$

$$\overset{\rightarrow + movimiento}{\sum F_x} = m \cdot a_x$$

$F_4 - F_C = m\,a\,(Ec{,}1)$

$F_C = \mu_C \cdot \text{N} = 0{,}20\,(2\,000\,\text{N})$

$F_C = 400\,\text{N} \Rightarrow \text{Resp.}\ (e)\ \text{en}\ \ (Ecuacion1)$

$W = m\,g \Rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{2\,000}{9{,}8}$

$m = 204\,\text{kg}$

$a = \frac{1\,200 - 400}{204} \Rightarrow a = 3{,}92\,\text{m/s}^2 \Rightarrow \text{Resp.}\ (e)$

8. Un cuerpo de 50 kg parte del reposo en el punto más bajo de un plano inclinado liso, que forma un ángulo de 30° con la horizontal y tiene 19,6 m de longitud. Si alcanza el punto más elevado del plano en 10 segundos ¿Qué fuerza exterior, paralela al plano, se ha ejercido sobre el cuerpo?

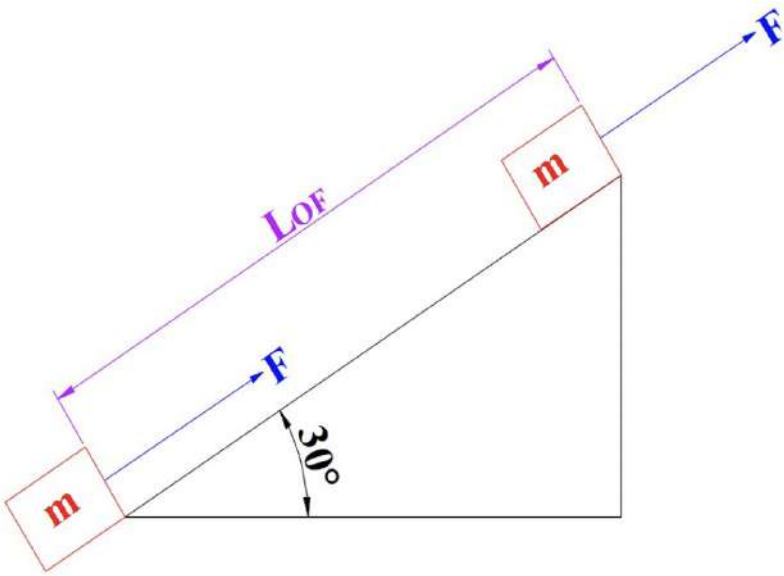


Figura 6.19. Ejercicio de estática.

Solución:

Datos:

$x_{OF} = L = 19{,}6m$

$t_{OF} = 10$ s

$v_0 = 0$

$F = ?$

Liso $\Rightarrow$

Froz $\cong 0$

$m = 50$ kg

Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la masa "m":

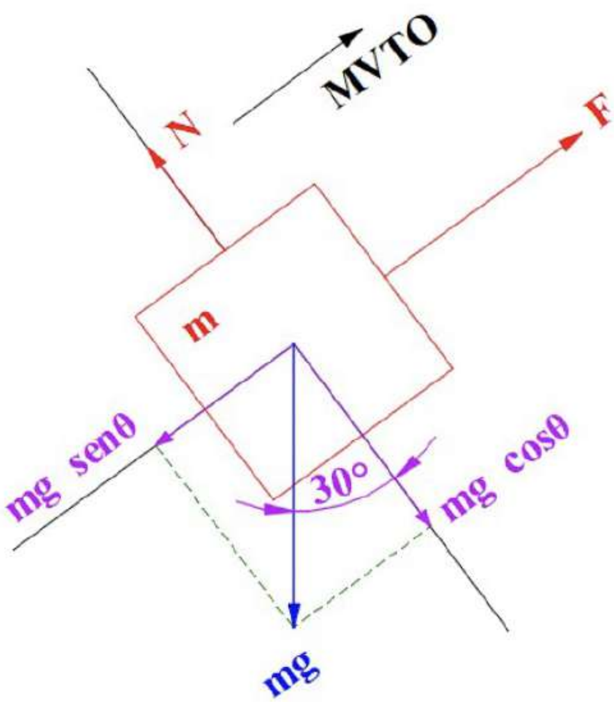


Figura 6.20. Ejercicio de estática d.c.l.

$$\sum^{\rightarrow + movimiento} F_x = m \cdot a_x$$

$$F - \text{mg}\, sen\, \theta = m\, a$$

$$F = m\, a + \text{mg}\, sen\, \theta\, (Ecuacion 1)$$

$$x_{OF} = \cancel{v_0} \cdot t_{OF} + \tfrac{1}{2} a \cdot {t_{OF}}^2$$

$$a = \frac{2 \cdot x_{OF}}{{t_{OF}}^2} = \frac{2(19{,}6)}{(10)^2}$$

$$a = 0{,}392\, \text{m/s}^2 \text{en (Ecuacion,1)}$$

$$F = 50\,(0{,}392) + 50\,(9{,}8)\,\text{sen}\,30°$$

$$F = 264{,}6\,\text{N}$$

9. Dos bloques A y B están dispuestos como lo indica la figura adjunta (a) y unidos por una cuerda al bloque C, tanto A como B tienen una masa de 60 kg, y el coeficiente cinético de rozamiento para cada bloque y la superficie es de 0,25. Si el bloque C desciende con velocidad constante.

Determinar:

a) La tensión en la cuerda que une A y B.

b) El peso del bloque "C"

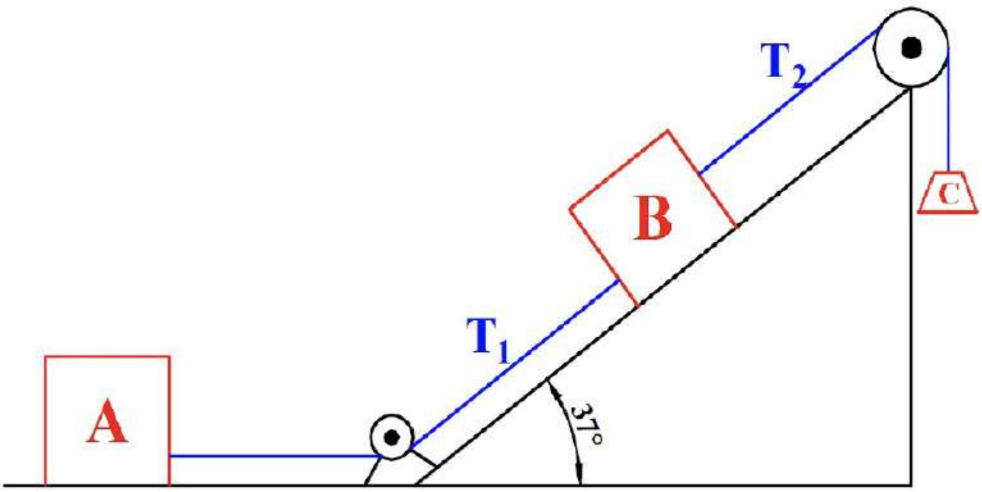


Figura 6.21. Ejercicio de estática.

Solución:

Datos:

$m_A = m_B = 60$ kg

$\mu_C = 0{,}25$

$\downarrow v =$ constante

a) $T_1 = ?$

b) $W_C = ?$

Realizamos los diagramas de cuerpo libre:

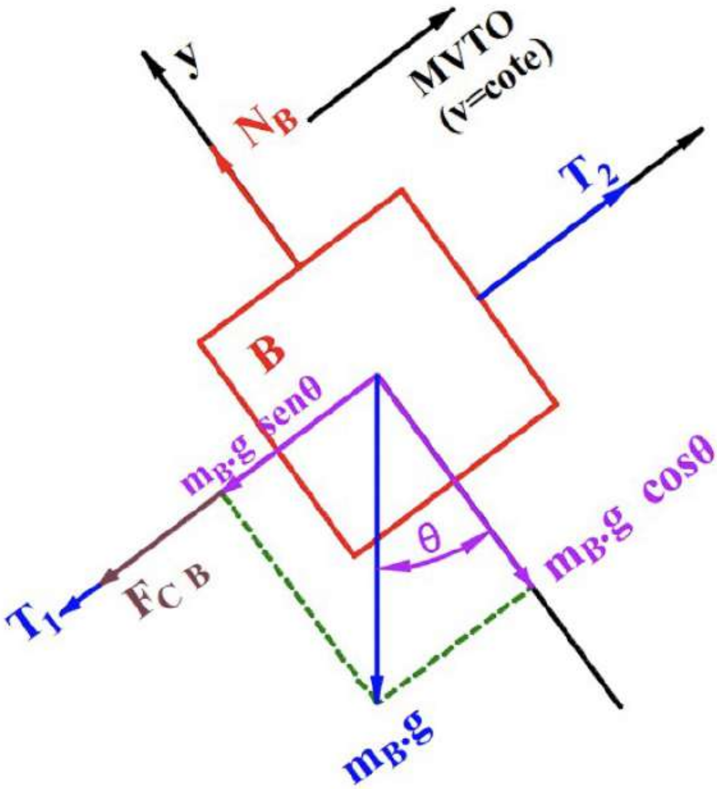


Figura 6.22. Ejercicio de estática d.c.l.

En la Fig. (b)

$$\sum^{\rightarrow + movimiento} F_x = m \cdot a_x$$

$$T_1 - F_{CA} = m \cdot a_x^{\rightarrow (v-cote)}$$

$$T_1 = F_{CA} = \mu_C \cdot N_A \, (Ecuacion1)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0$$

$$N_A - m_A \cdot g = 0$$

$$N_A = m_A \cdot g \;\; en \, (Ec,1)$$

$$T_1 = 0{,}25\,(60\,\text{kg})\left(9{,}8\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$T_1 = 147\,\text{N} \Rightarrow \text{Resp.}\,(a)$$

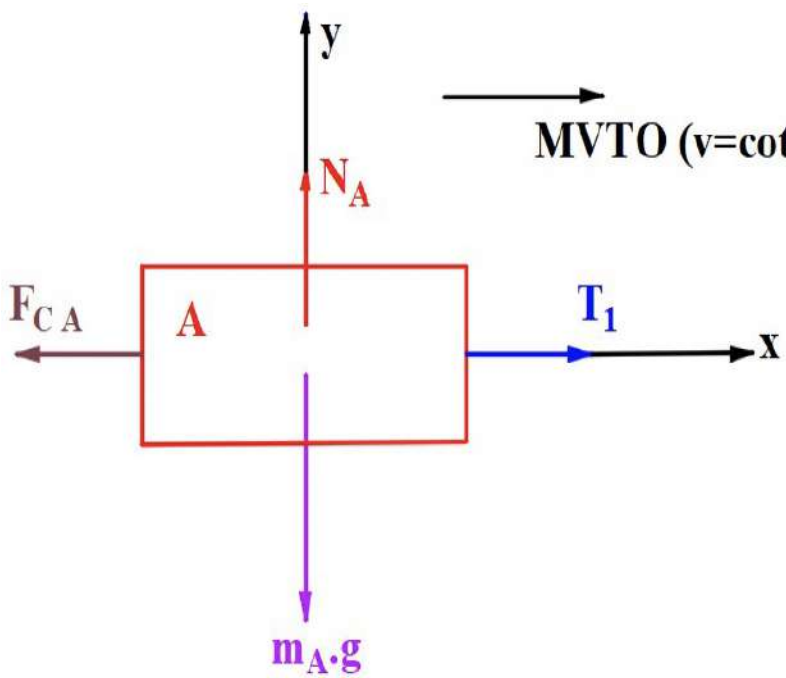


Figura 6.23. Ejercicio de estática d.c.l.

En la figura d

$$\overset{movimiento}{\overset{+}{\downarrow}\sum F_y} = m \cdot a_y \Rightarrow m_C g - T_2 = 0\,(v = \text{cote})\,(Ec{,}2) \Rightarrow$$

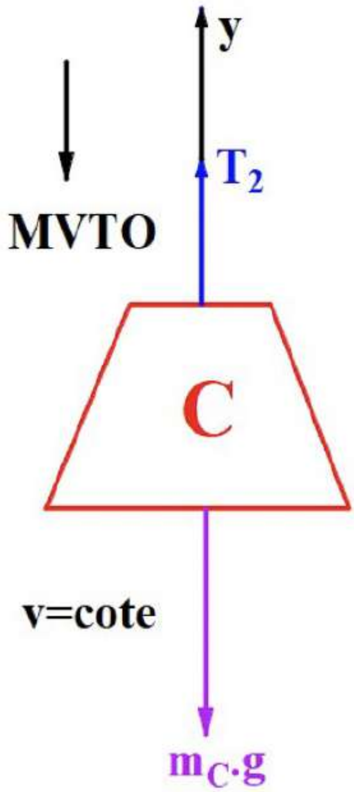


Figura 6.24. Ejercicio de estática d.c.l.

En la figura c

$$\overset{\rightarrow + movimiento}{\sum F_x} = m \cdot a_x \therefore T_2 - T_1 - F_{CB} - m_B g \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 + F_{CB} + m_B \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta\,(Ec{,}3)$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \therefore N_B - m_B \cdot g \cdot \cos\,\theta$$

$$N_B = 60\,(9{,}8)\cos\,37°$$

$$N_B = 469{,}6\,\text{N}$$

$F_{CB} = \mu_C \cdot N_B = 0{,}25\,(469{,}6) = 117{,}4\,\mathrm{N}$

en $(Ec.\,3)$:

$T_2 = 147 + 117{,}4 + 60\,(9{,}8)\,\mathrm{sen}\,37°$

$T_2 = 618{,}3\,\mathrm{N}\;$ en $(Ec{,}2)$

$m_C = \frac{T_2}{g} = \frac{618{,}3}{9{,}8}$

$m_C = 63\,\mathrm{kg} \Rightarrow W_C = m_C \cdot g = 63\,(9{,}8) = 617{,}4\,\mathrm{N} \Rightarrow \mathrm{Resp.}\,(b)$

10. En el sistema de la figura adjunta, la masa mA, se desliza sobre el plano inclinado “S”, y la masa mB se desliza , hacia abajo sobre la masa mA, si los coeficientes de rozamiento tienen un valor de $\mu_{C1} = \mu_{C2}$; y la masa $m_A = m_B = 100$ kg.

Determinar:

a) La aceleración de “A”

b) La aceleración de “B”

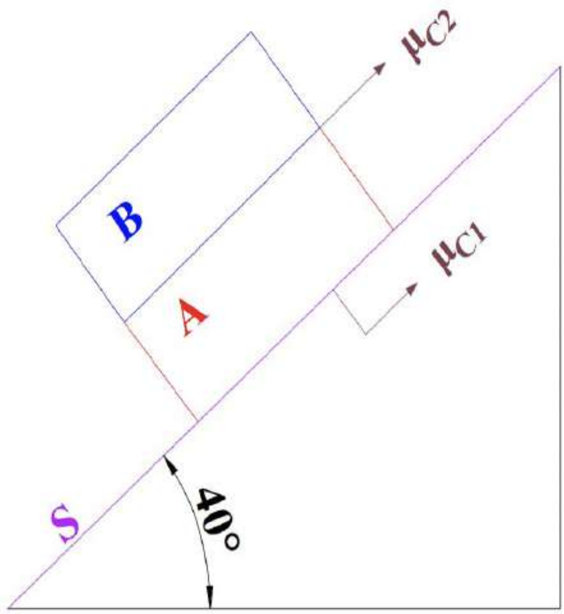


Figura 6.25. Ejercicio de estática d.c.l.

Solución:

Datos:

$m_A = m_B = 100$ kg

$\mu_{C1} = 0{,}10$

$\mu_{C2} = 0{,}25$

a) $a_A = ?$

b) $a_B = ?$

Realizamos el diagrama de cuerpo libre de "B"

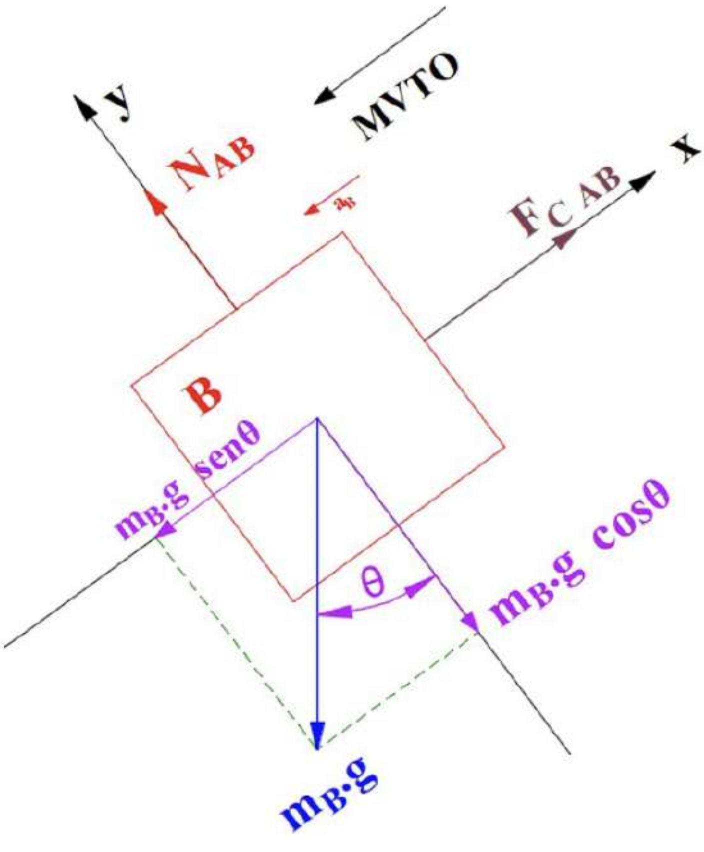


Figura 6.26. Ejercicio de estática.

$$\sum F_x^{\rightarrow + movimiento} = m\, a_x$$

$$m_A \cdot g \cdot \text{sen}\theta + F_{C_{AB}} - F_{C_{SA}} = m_A \cdot a_A \,(Ec{,}3)$$

$$F_{C_{SA}} = \mu_{C1} \cdot N_{SA} \,(Ec{,}4)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore N_{SA} - m_A g \cos\theta - N_{BA} = 0$$

$$N_{SA} = 100\,(9{,}8) \cos 40° + 750{,}7 = 1\,501{,}4\,\text{N}$$

en $(Ec{,}4)$:

$$F_{C_{SA}} = 0{,}10\,(1\,501{,}4) = 150{,}4\,\text{N}$$

en $(Ec{,}3)$:

$$a_A = \frac{100(9{,}8)\text{sen}\,40° + 187{,}68 - 150{,}14}{100}$$

$$a_A = 6{,}67\,\text{m}/_{\text{s}^2} \Rightarrow \text{Resp}\,(a)$$

Realizamos el diagrama de cuerpo libre de A

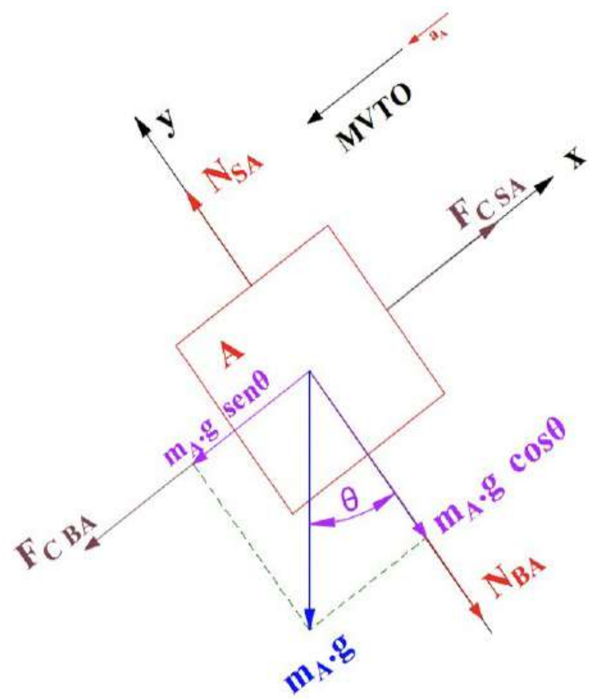


Figura 6.27. Ejercicio de estática d.c.l.

$$\overset{\leftarrow + movimiento}{\sum F_x} = m \cdot a_x$$

$$m_B \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - F_{C_{AB}} = m_B \cdot a_B \,(Ecuacion1)$$

$$F_{C_{AB}} = \mu_{C2} \cdot N_{AB} \,(Ecuacion2)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0$$

$$N_{AB} - m_B \cdot g \cdot \cos\theta = 0$$

en $(Ec{,}2)$

$$N_{AB} = 100\,(9{,}8)\cos 40° = 750{,}7\,\mathrm{N}$$

$$F_{C_{AB}} = 0{,}25\,(750{,}7) = 187{,}68\,\mathrm{N} = F_{C_{BA}}$$

en $(Ec{,}1)$

$$a_B = \frac{100(9{,}8)\mathrm{sen}40° - 187{,}68}{100}$$

$$a_B = 4{,}42\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \text{Resp. }(b)$$

11. La masa del bloque A es de 120 kg, mientras que la de B es de 20 kg, si el coeficiente de rozamiento cinético entre A y la superficie es de 0,15.

Determinar:

a) La aceleración de “A”

b) La aceleración de “B”

c) Las tensiones T1 y T2

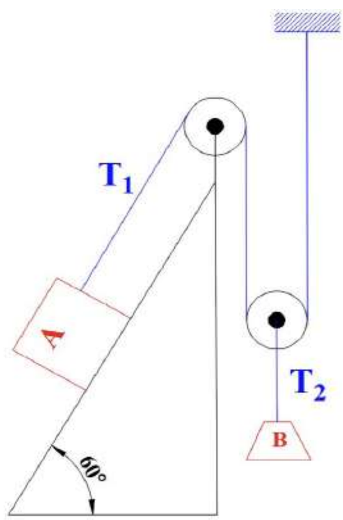


Figura 6.28. Ejercicio de estática d.c.l.

Solución:

Datos:

$m_A = 120$ kg

$m_B = 20$ kg

$\mu_C = 0{,}15$

a) $a_A = ?$

b) $a_B = ?$

c) $T_1 = ?$

$T_2 = ?$

Realizamos el diagrama del cuerpo libre de A:

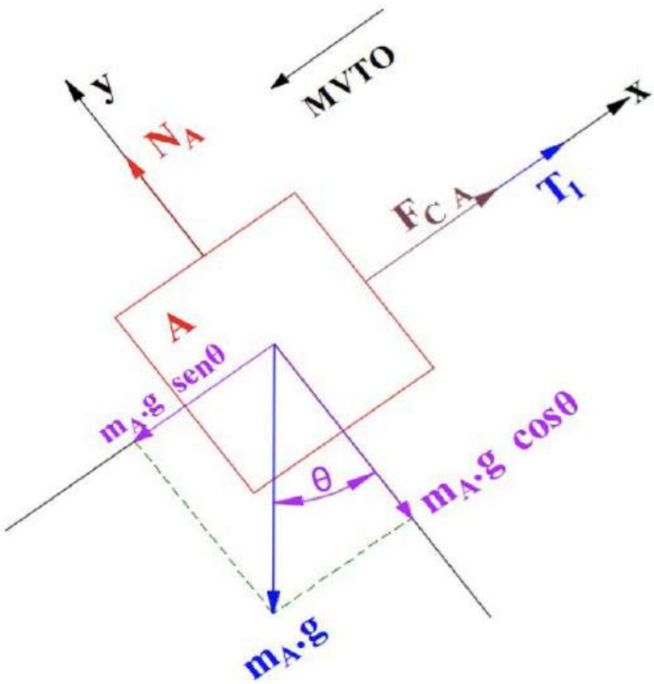


Figura 6.29. Ejercicio de estática d.c.l.

En la figura b:

$$\overset{\leftarrow + movimiento}{\sum F_x} = m \cdot a_x \therefore m_A g \operatorname{sen}\theta - F_{CA} - T_1 = m_A \cdot a_A \, (Ec{,}1)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore N_A = m_A g \cos\theta, \text{ Luego :}$$

$$F_{CA} = \mu_C \cdot N_A$$

$$F_{CA} = 0{,}15\,(120)\,(9{,}8)\cos 60^\circ = 88{,}2\,\mathrm{N}$$

$$En\, la\, figura(c) :$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = m_P \cdot a_y \therefore m_P = \text{masa polea} \cong 0$$

$$2T_1 = T_2\,(Ecuacion2)$$

$$a_A = 2a_B\,(Ecuacion3) \Rightarrow \text{Porque } \; x_1 = 2x_2$$

$$x_A = 2x_B$$

$$\tfrac{dx_A}{dt} = 2\tfrac{dx_B}{dt} \Rightarrow v_A = 2v_B$$

$$\tfrac{dv_A}{dt} = 2\tfrac{dv_B}{dt} \Rightarrow a_A = 2a_B \quad (\mathrm{Ec{,}3})$$

Un desplazamiento de B corresponde a dos desplazamientos de A.

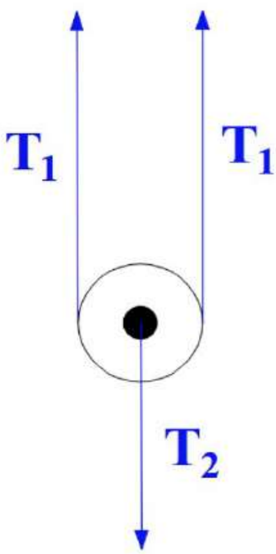


figura c

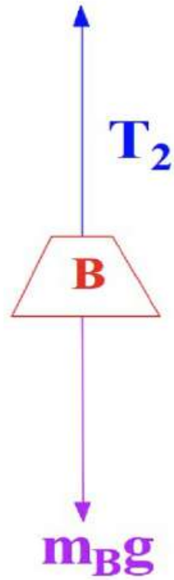


figura d

En la figura d

$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = m \cdot a_y \therefore T_2 - m_B g = m_B \cdot a_B$

$T_2 = 20a_B + 20\,(9{,}8) \Rightarrow T_2 = 196 + 20a_B\,(Ecuacion4)$

$(Ecuacion2)$ en $(Ecuacion4)$

$2T_1 = 20a_B + 196 \Rightarrow T_1 = 98 + 10a_B\,(Ecuacion5)$

en $(Ecuacion1)$

$120\,(9{,}8)\,sen60° - 88{,}2 = 120\,(2a_B) + 98 + 10a_B \Rightarrow$

$250a_B = 930{,}25 - 98 \Rightarrow a_B = \frac{832{,}5}{250} \Rightarrow a_B = 3{,}33\ \mathrm{m/s^2} \Rightarrow \mathrm{Resp}\,(b)$

$a_A = 2a_B = 2\,(3{,}33) \Rightarrow a_A = 6{,}66\ \mathrm{m/s^2} \Rightarrow \mathrm{Resp}\,(a)$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 98 + 10\,(3{,}33) \Rightarrow T_1 = 131{,}3\,\mathrm{N} \\ T_2 = 2T_1 = 2\,(131{,}3) \Rightarrow T_2 = 262{,}6\,\mathrm{N} \end{array}\right\rangle \mathrm{Resp}\,(c)$$

[2, 3, 5]

6.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

Estática

1. Para cada una de las estructuras planas de la figura. Determinar:

a) Las fuerzas (tensiones) que actúan en cada uno de los elementos para que permanezcan en equilibrio.

b) El tipo de esfuerzos (tracción o compresión) en cada elemento.

c) Las reacciones en las paredes o en los techos para los valores de masa m = 1 000 kg

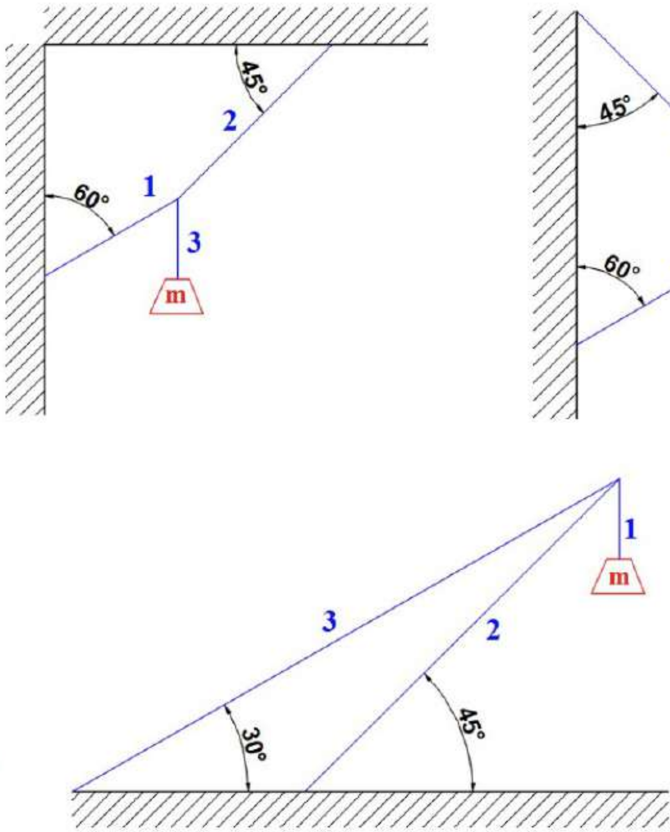


Figura 6.30. Ejercicio de estática.

2. El cuerpo representado en la figura pesa 4 000 N. Se mantiene en equilibrio por medio de una varilla AB y bajo la acción de la fuerza horizontal F. Suponiendo que AB =150 cm, y que la distancia entre la pared y el cuerpo es de 90 cm. Determinar:

a) El valor de la fuerza F.

b) La tensión de la cuerda (varilla) AB.

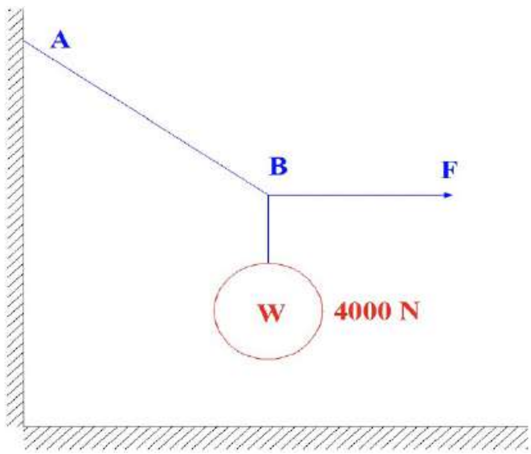


Figura 6.31. Ejercicio de estática.

3. La barra de la figura tiene un peso de 3 000 N y está sometida a las fuerzas (cargas) que se indican en la misma. Determinar:

a) La fuerza resultante de las cargas externas.

b) Las reacciones en C y D para que la barra permanezca en equilibrio.

c) El punto de aplicación de la resultante y equilibrante.

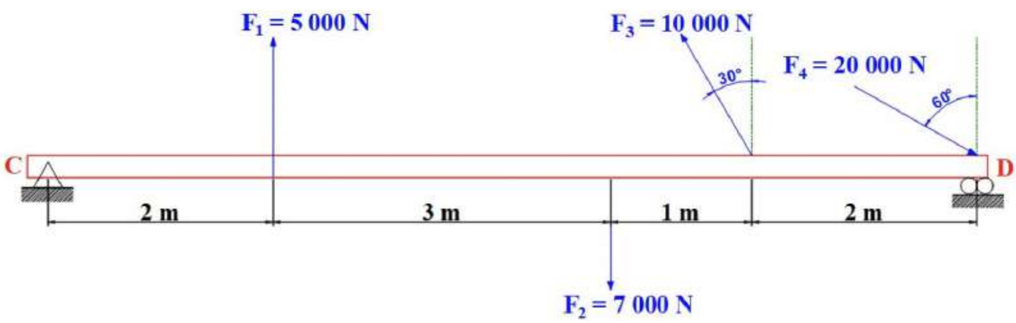


Figura 6.32. Ejercicio de estática.

4. Determine las reacciones en el punto C de la pared que sostiene a la viga en cantilever, en la que actúan las cargas (fuerzas) indicadas en la figura para que permanezca en equilibrio, si el peso de la viga es de 10 000 N.

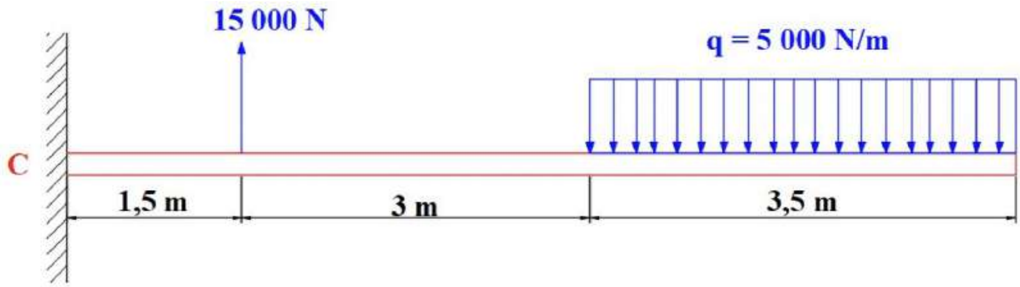


Figura 6.33. Ejercicio de estática.

5. Para mantener en equilibrio una barra de peso de 12 000 N en la posición representada en la figura ha de aplicarse una sola fuerza. Determinar:

a) Las componentes en X y en Y de la fuerza necesaria.

b) Cuál es el módulo de esta fuerza.

c) Cuál es el ángulo que la fuerza ha de formar con la barra.

d) Dónde debería aplicarse esta fuerza.

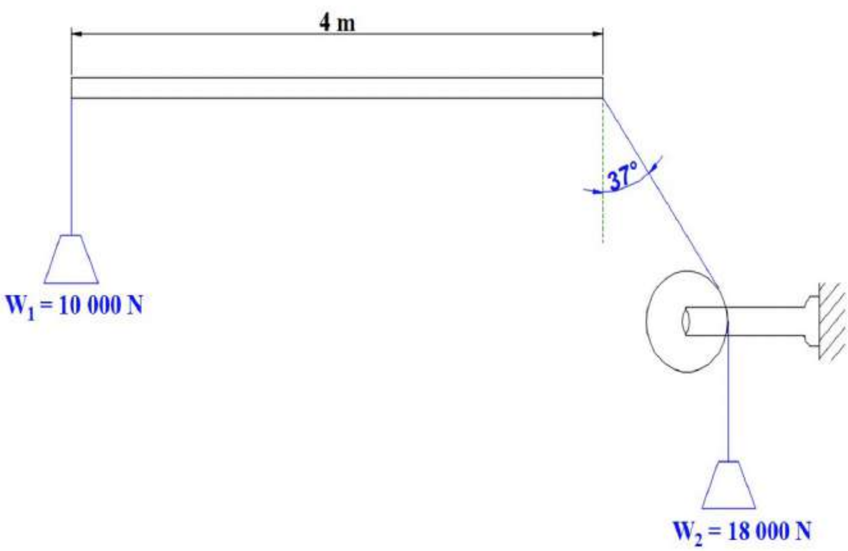


Figura 6.34. Ejercicio de estática.

6. Para la figura determinar:

a) El esfuerzo (fuerza o tensión) que debe soportar el cable CD para mantener al puntal AB en equilibrio.

b) El esfuerzo que debe hacer el apoyo A para mantener el sistema en equilibrio.

Despreciar el peso del cable y del puntal.

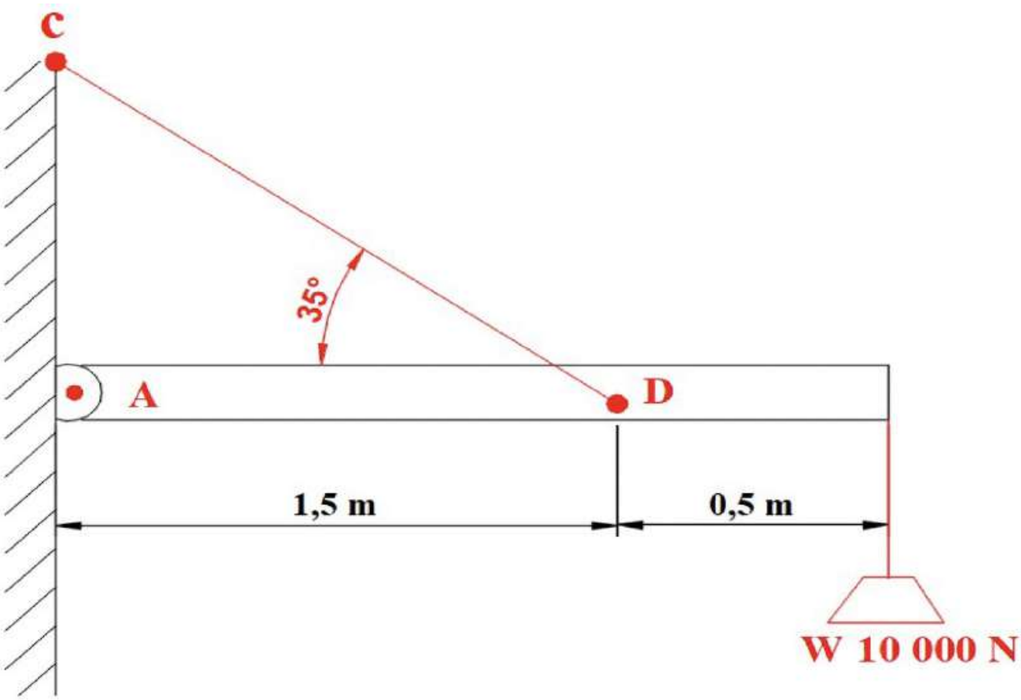


Figura 6.35. Ejercicio de estática.

7. La barra de la figura está sometida a la carga qI uniformemente repartida y a las fuerzas F_2 y F_3 indicadas. Para mantener el equilibrio está apoyada en el apoyo móvil en C y en el fijo D, si el peso de la barra CD es de 10 000 N. Determinar:

a) La resultante de las cargas externas en forma gráfica y en función de unitarios base.

b) Las reacciones que deben ejercer los apoyos Cy y D para mantener la barra en equilibrio en función de (i, j) y gráficamente.

c) El punto de aplicación de la resultante para que produzca el mismo efecto que las cargas actuando juntas.

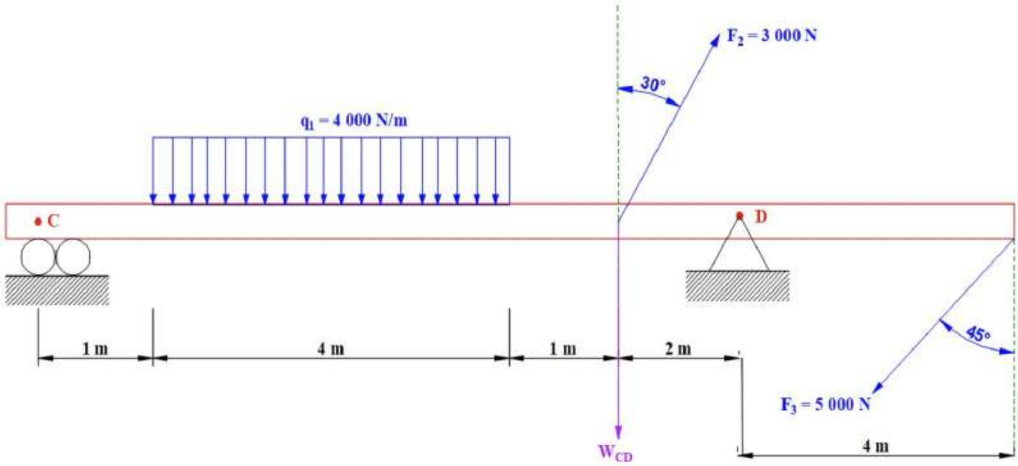


Figura 6.36. Ejercicio de estática.

8. Una puerta de 2,40 m de largo y un ancho de 1,20 m pesa 4 000 N, y su centro de gravedad coincide con su centro geométrico, y está suspendida en A y B. Para aliviar el esfuerzo sobre el gozne superior se dispone un cable CD como indica la figura, y se aumenta la tensión en CD hasta que la fuerza horizontal sobre el gozne A sea nula.

a) Cuál es el esfuerzo (tensión) en el cable CD.

b) Cuál es el valor de la componente horizontal de la fuerza que soporta el gozne B.

c) Cuál es la fuerza vertical ejercida en conjunto por los goznes A y B para mantener la en equilibrio.

Las dimensiones de los goznes es despreciable.

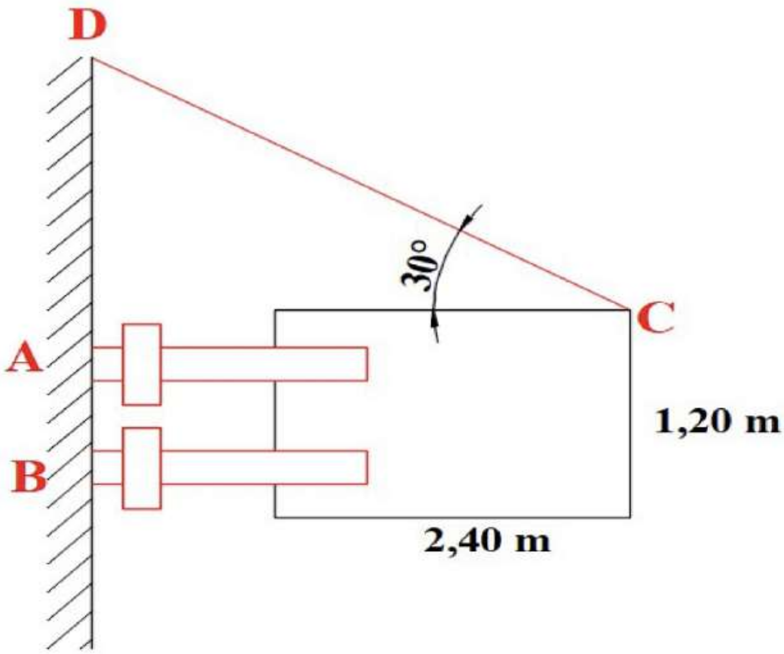


Figura 6.37. Ejercicio de estática.

9. Una regla graduada de 1 m se equilibra con un apoyo en su centro, si se coloca un cuerpo de masa 200 g en la marca de 70 cm, ¿En qué marca debería colocarse otra masa de 120 g para que la regla siga en equilibrio?

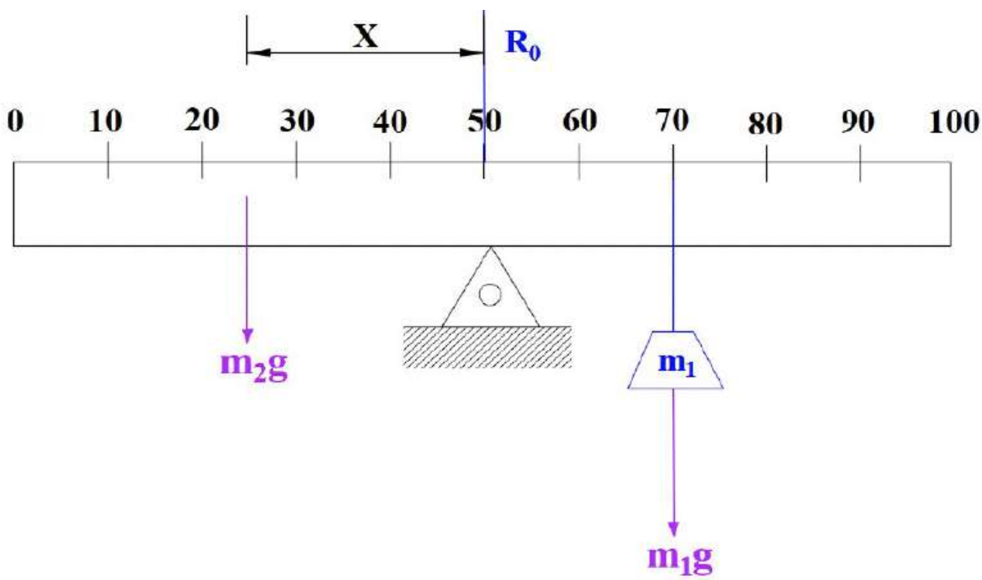


Figura 6.38. Ejercicio de estática.

10. ¿Cuál debe ser el valor de la distancia "x" en metros, para que el sistema de la figura permanezca en equilibrio?, se considera despreciable el peso de la barra.

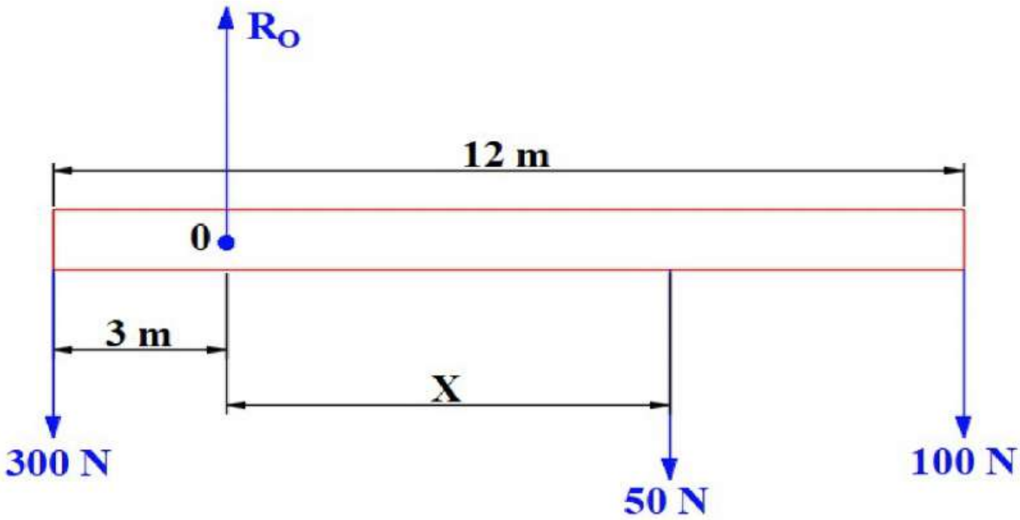


Figura 6.39. Ejercicio de estática.

11. En la figura, determinar las reacciones en los apoyos A y B causadas por las cargas que actúan sobre la viga, cuyo peso es despreciable.

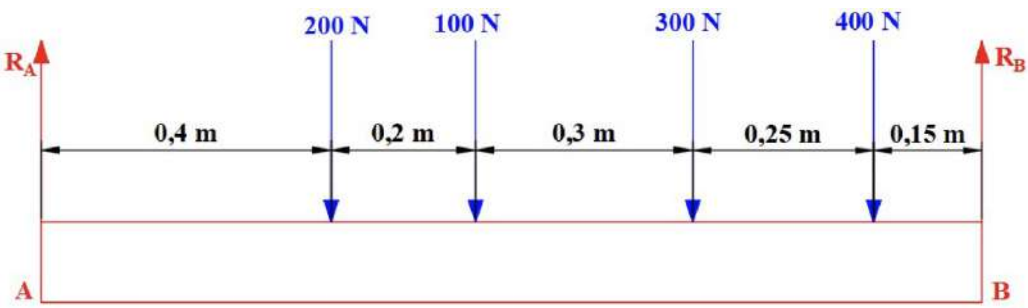


Figura 6.40. Ejercicio de estática.

12. En la figura la barra AB pesa 300 (N) por metro de longitud y esta sostenida por el cable BC y un pasador en A. Determinar la tensión en el cable y la reacción en A.

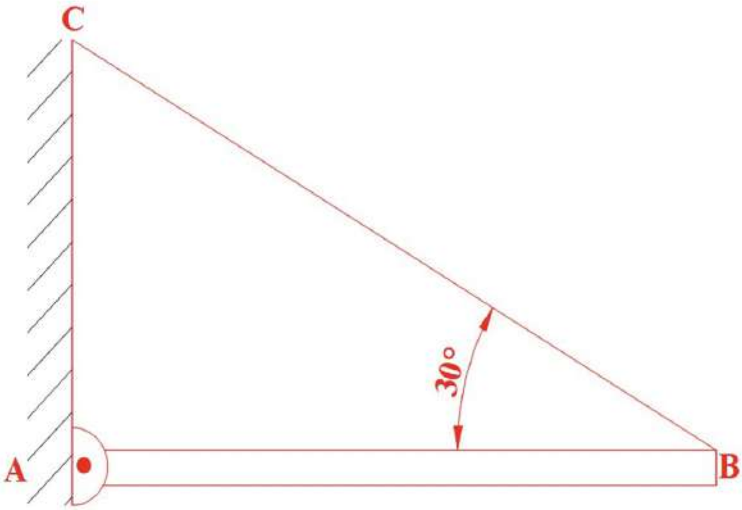


Figura 6.41. Ejercicio de estática.

13. La viga homogénea de la figura tiene un peso de 400 N, Determinar:

a) La fuerza que hace el pasador A sobre la viga.

b) La tensión en el cabe horizontal.

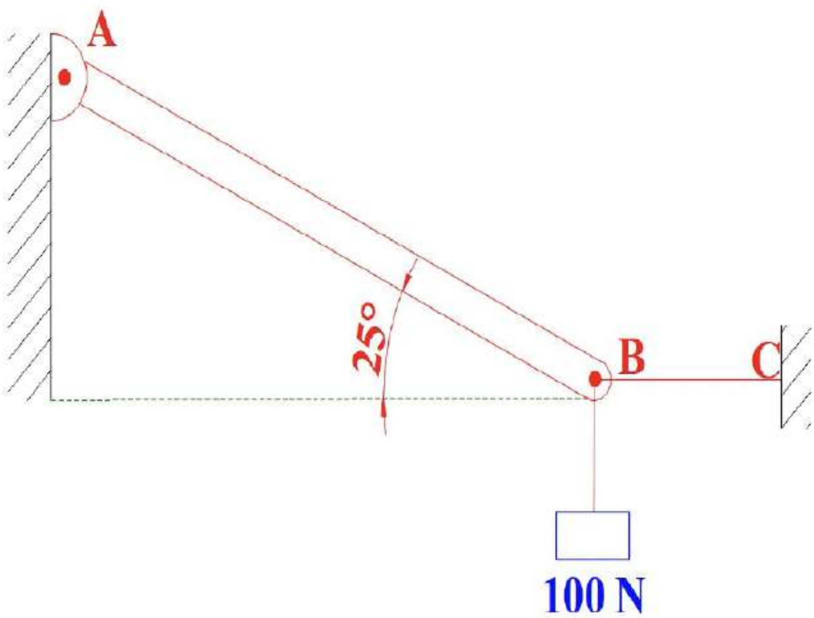


Figura 6.42. Ejercicio de estática.

14. En la figura, la viga AB tiene un peso de 600 N por metro de longitud. Determinar:

a) La tensión sobre el cable.

b) La fuerza del pasador A sobre la viga.

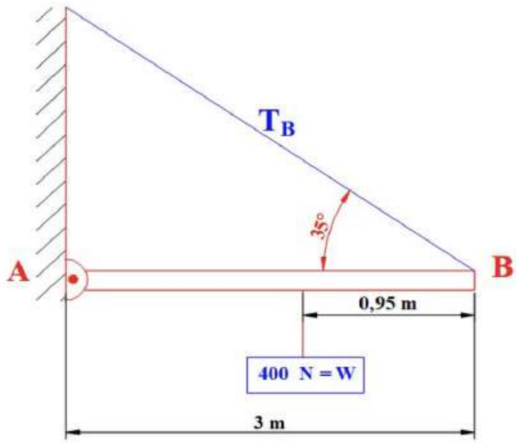


Figura 6.43. Ejercicio de estática.

15. En la figura la barra AB de 400 N de peso y 6 m de longitud, esta pivoteada en el extremo izquierdo. Determinar:

a) La tensión en el cable de apoyo.

b) La fuerza del pasador A sobre la barra.

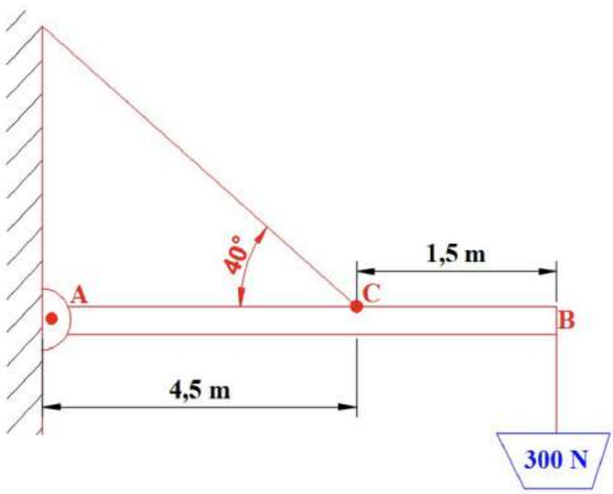


Figura 6.44. Ejercicio de estática.

16. En la figura, la viga AB tiene un peso de 1 600 N. Determinar:

a) La tensión en el cable de apoyo.

b) La fuerza del pasador A sobre la viga.

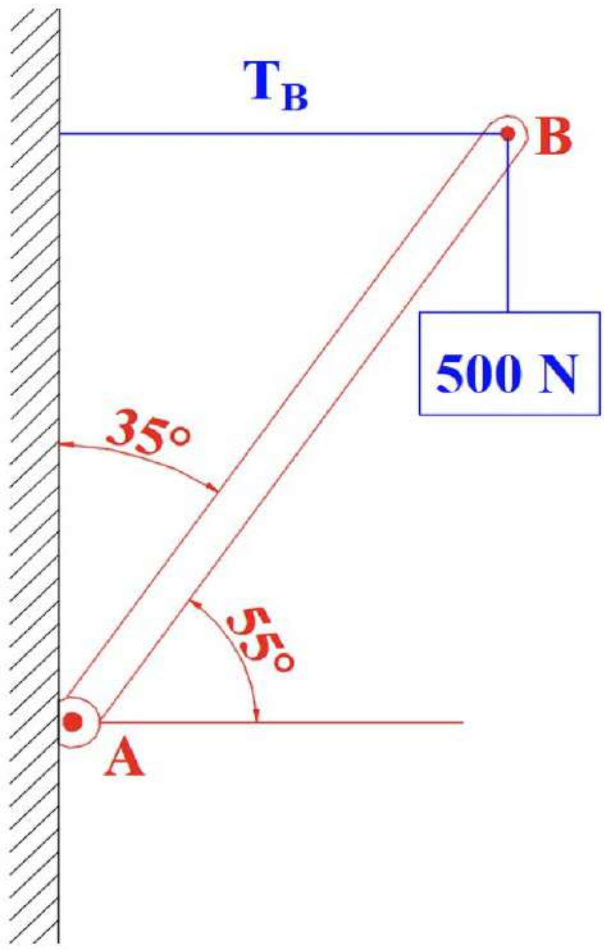


Figura 6.45. Ejercicio de estática.

17. La barra AB de peso 500 N y 12 m de longitud, se mantiene en la posición de la figura por la acción de dos cuerdas AD y BC, si se coloca un peso de 700 N a 2 m del extremo superior. Determinar las tensiones en las cuerdas.

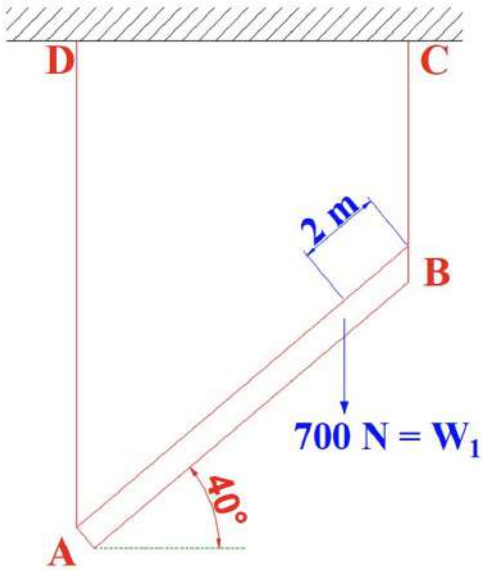


Figura 6.46. Ejercicio de estática.

18. Una esfera de 2 000 N de peso se apoya en dos planos lisos como se indica en la figura.

Determinar las reacciones que actúan sobre la esfera.

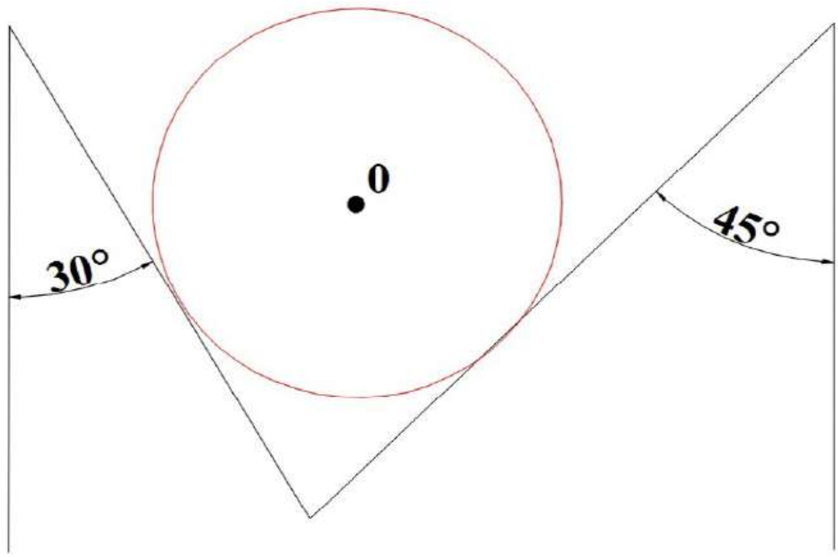


Figura 6.47. Ejercicio de estática.

19. Dos rodillos lisos e iguales de peso 1 000 N están colocados como se indica en la figura.

Hallar las reacciones en los puntos de contacto A, B, C.

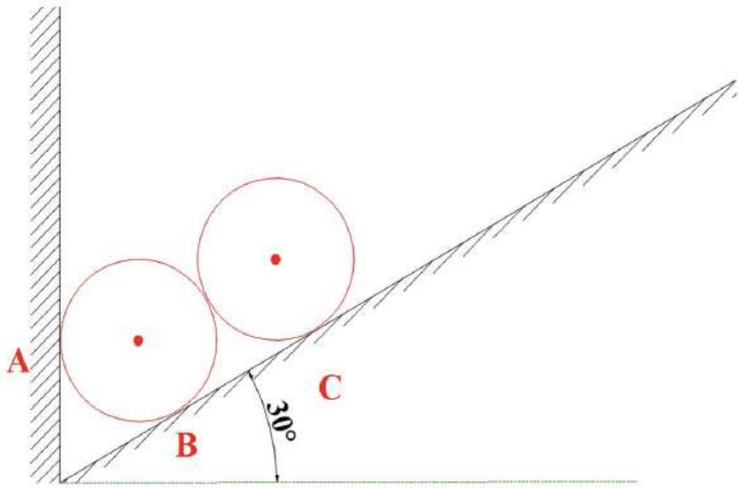


Figura 6.48. Ejercicio de estática.

20. Una escalera de 6 metros de longitud y 20 kg de peso está apoyada contra una pared vertical, como se indica en la figura. Cuando un hombre de peso 80 kg alcanza un punto a 4,5 m del extremo inferior A, la escalera está a punto de resbalar. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y la pared es 0,2. Determine el coeficiente de rozamiento entre el piso y la escalera.

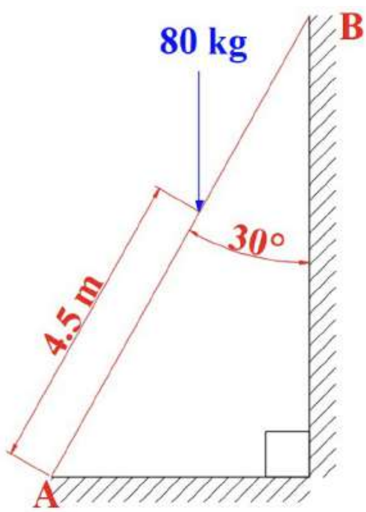


Figura 6.49. Ejercicio de estática.

21. En el sistema de figura, determinar el valor de W_1 para una condición de equilibrio.

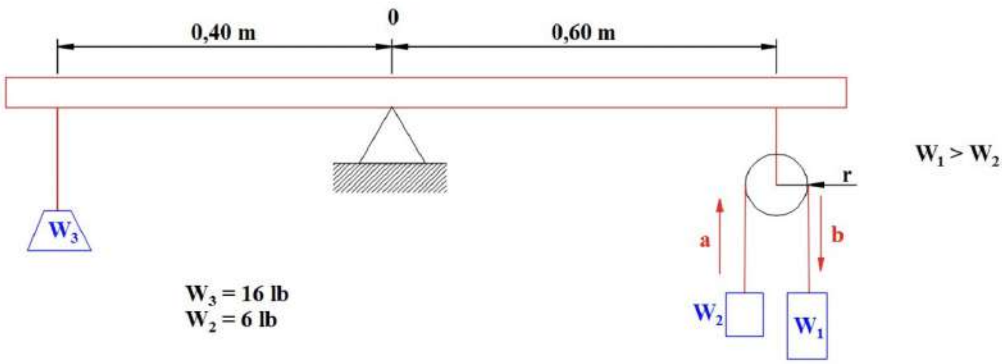


Figura 6.50. Ejercicio de estática.

Dinámica de Traslación

1. Utilizar el método de la descomposición rectangular para encontrar la resultante del siguiente conjunto de fuerzas: 2 000 N., a lo largo del eje *x* ,hacia la derecha; 3 000 N en y hacia arriba; 600 N en el eje x hacia la izquierda; 1 000 N formando un ángulo de 45° por encima del eje x (primer cuadrante) y 2 000 N verticalmente hacia abajo. Expresar la resultante en vectores base $(\vec{i}\ ,\vec{j})$ y en coordenadas polares.

2. ¿Qué fuerza P, paralela a la superficie sin rozamiento de un plano inclinado 30°, será capaz de empujar un bloque de 20 kg, a la velocidad constante sobre dicho plano? Según la siguiente figura.

a) ¿Qué fuerza horizontal lo empujaría hacia arriba del plano, a velocidad constante? (Figura a)

b) ¿Qué fuerza inclinada un ángulo de 20° respecto a la horizontal producirá el mismo efecto? (Figura b)

c) ¿Cuál es la fuerza normal ejercida por el bloque sobre el plano, en cada ejemplo? (Figura c)

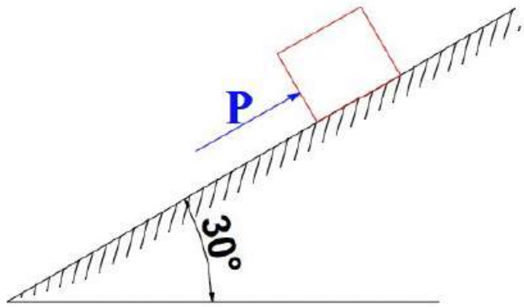


Figura (a)

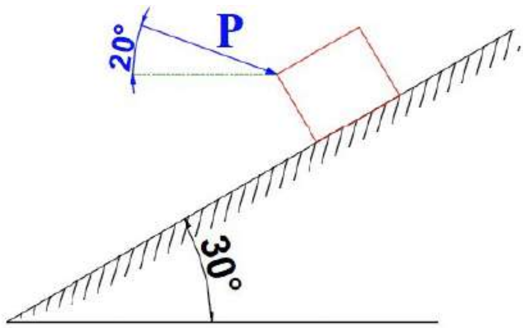


Figura (b)

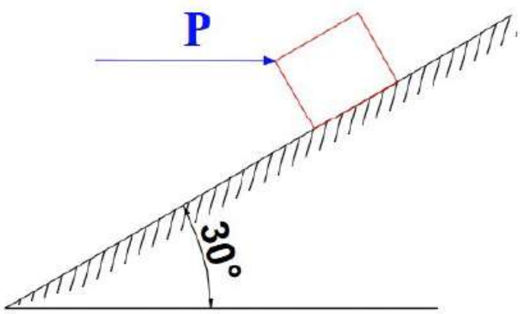


Figura (c)

Figura 6.51. Ejercicio de dinámica.

3. Un bloque de 30 kg, es arrastrado a velocidad constante sobre la superficie constante sobre la superficie lisa de un plano inclinado, por la acción de su peso de 100 N pendiente de una cuerda atada al bloque y que pasa por una polea sin rozamiento colocada en lo alto de dicho plano. Hallar:

a) El ángulo de inclinación del plano.

b) La tensión de la cuerda.

c) La fuerza normal ejercida sobre el bloque por el plano.

4. Una caja que pesa 6 000 N ha de bajarse de un camión que tiene 1,20 m de altura, haciéndola deslizar sobre tablones de 2,4 m de longitud. El coeficiente cinético de rozamiento entre la caja y los tablones es de 0,30 y se debe deslizar a velocidad constante. Decir:

a) Será necesario tirar de la caja hacia abajo, o sostenerla desde arriba.

b) Qué fuerza paralela al plano será precisa.

5. Una fuerza horizontal constante de 5 kgf, actúa sobre un cuerpo que se mueve sobre una superficie horizontal lisa. El cuerpo parte del reposo y se observa que recorre un espacio de 75 m en 5 s. Determinar:

a) Cuál es la masa del cuerpo.

b) Si cesa de actuar al cabo de 5 s., ¿qué espacio recorrerá en los 5 s. siguientes?

6. Un bloque de 5 kg., está sujeto a una cuerda, es arrastrado hacia arriba con aceleración constante de 2 m/s^2. Determinar:

a) Cuál es la tensión de la cuerda.

b) Después de iniciado el movimiento del bloque, la tensión de la cuerda se reduce a 49 N. ¿Qué clase de movimiento tendrá en ese lugar?

c) Si se afloja completamente la cuerda, se observa que el bloque continúa moviéndose, recorriendo todavía 2m antes de detenerse. ¿Qué velocidad tenía?

7. Un cuerpo de masa 10 kg, se mueve con velocidad constante de 5 m/s sobre una superficie horizontal. El coeficiente cinético de rozamiento entre el cuerpo y la superficie es 0,20. determinar:

a) ¿Qué fuerza horizontal se requiere para mantener el movimiento?

b) Si se suprime la fuerza, ¿Cuánto tardará el bloque en detenerse?

8. Un bloque de 16 kg se encuentra sobre una superficie horizontal. El coeficiente cinético de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,25 el coeficiente estático de rozamiento es 0,30. determinar:

a) Cuál es la fuerza resultante ejercida sobre el bloque cuando se le aplica una fuerza horizontal de 80 N .

b) Si la fuerza resultante de 80 N actúa durante 4 s y después se suprime, qué distancia total recorrerá el bloque antes de alcanzar el reposo .

9. Un cuerpo que pesa 64 lbf desliza hacia abajo sobre un plano de longitud 16 pies, inclinado un ángulo de 37°, recorriendo todo el plano en 2 s. si el cuerpo parte del reposo. En el punto más elevado del plano, ¿cuál es el coeficiente cinético de rozamiento?.

10. Se sabe que un bloque desliza sobre un plano inclinado 45°, con una aceleración de 2,4 m/s^2 para que ángulo de inclinación deslizaría sobre el mismo plano a velocidad constante?.

11. Un bloque se desliza hacia abajo, a velocidad constante, cuando la pendiente del plano es de 14°.Calcular la aceleración del mismo bloque moviéndose también hacia abajo, cuando la pendiente del plano aumenta hasta 37°.

12. Qué fuerza horizontal es necesaria para empujar hacia arriba un bloque de 10 kg, sobre la superficie de un plano inclinado 37°, con una aceleración de 4 m/s^2 ,si el coeficiente cinético de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,20.

13. Una fuerza horizontal de 10 N arrastra un bloque de 5 kg con velocidad constante sobre determinada superficie horizontal. Si se inclina dicha superficie un ángulo de 37° respecto a la horizontal. Qué fuerza paralela al plano será necesaria para hacerlo deslizar hacia arriba con una aceleración de 2,4 m/s^2?

14. Un bloque A descansa sobre una superficie horizontal lisa, y se encuentra unido por una cuerda que pasa por una polea a otro bloque B suspendido. Se desprecian la inercia de la cuerda y la de la polea. La masa del bloque B es 10 kg. Se abandona el sistema partiendo del reposo, y se observa que el bloque B desciende 80 cm en 4 s. Hacer:

a) Representar en un diagrama todas las fuerzas que actúan sobre el bloque B, y calcular la tensión de la cuerda.

b) Representar en un diagrama todas las fuerzas ejercidas sobre el bloque A, y calcular su masa.

15. Calcular la aceleración y la tensión de cada cuerda en el sistema de la figura si el coeficiente cinético de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,20.

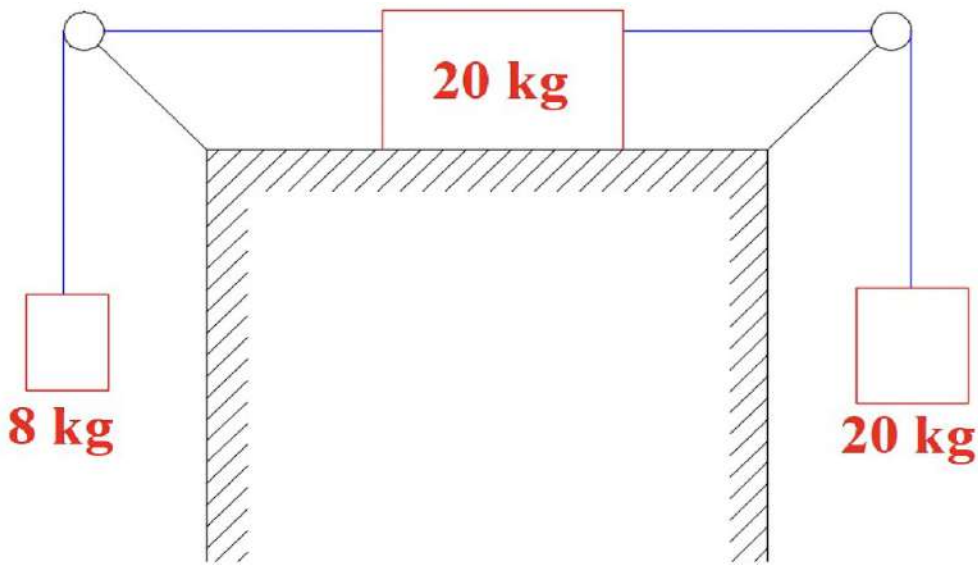


Figura 6.52. Ejercicio de dinámica.

16. Dos bloques de 100 g están suspendidos de los extremos de una cuerda ligera y flexible que pasa por una pequeña polea sin rozamiento, como indica en la figura, se coloca un bloque de 40 g sobre el bloque de la derecha, y se quita al cabo de 2 s. Determinar:

a) Qué espacio recorrerá cada bloque durante el primer segundo, una vez separado el bloque de 40 g.

b) Cuál era la tensión de la cuerda antes de suprimir el bloque de 40 g.

c) Cuál era la tensión de la cuerda que sostiene la polea antes de quitar el bloque de 40 g.

Despréciese el peso de la polea.

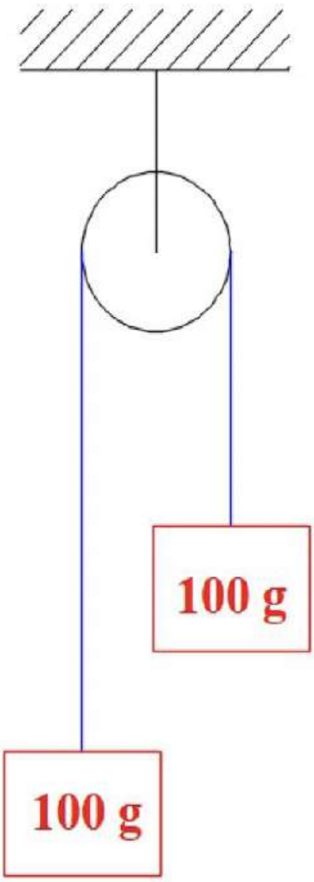


Figura 6.53. Ejercicio de dinámica.

17. Dos bloques de 5 kg penden de los extremos de una cuerda, como en la figura. Qué peso ha de añadirse a uno de los bloques para que recorra hacia abajo una distancia de 1,20 m en 2s.

18. Se ejerce una fuerza horizontal de 100 N sobre un bloque de 60 N, el cual, a su vez, empuja a otro bloque de 40 N, como muestra la figura, si los bloques se encuentran sobre una superficie lisa, ¿qué fuerza ejerce cada uno sobre el otro?

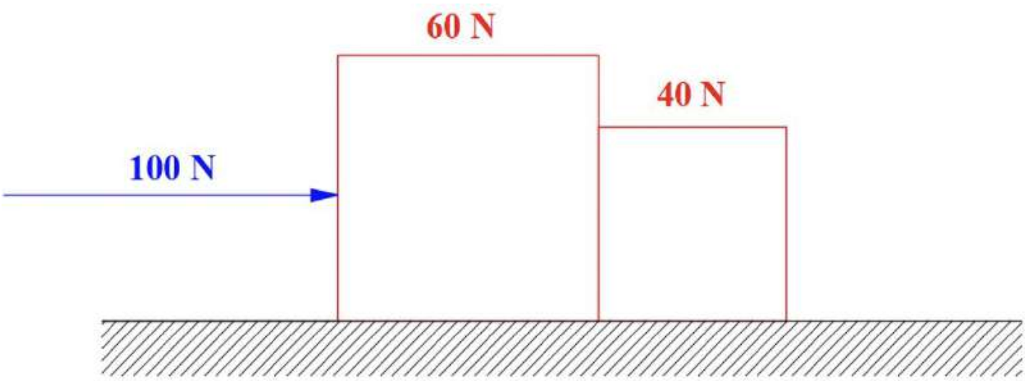


Figura 6.54. Ejercicio de dinámica.

19. Si en el problema anterior el coeficiente de rozamiento entre el bloque de 60 kg y la superficie es 0,05, y entre el bloque de 40 kg y la superficie es 0,10, ¿Cuál es la aceleración y que fuerza ejerce cada bloque sobre el otro?

20. El bloque A de las siguientes figuras, tiene una masa de 6 kg, y el bloque B, 12 kg. El coeficiente cinético de rozamiento entre todas las superficies es 0,25. Calcular la fuerza P necesaria para arrastrar el bloque B hacia la izquierda a velocidad constante.

a) Si A queda sobre B y se mueve con él (Figura c)

b) Si A se mantiene en reposo (Figura b)

c) Si A y B están unidos con una cuerda que pasa por una polea fija sin rozamiento (Figura a)

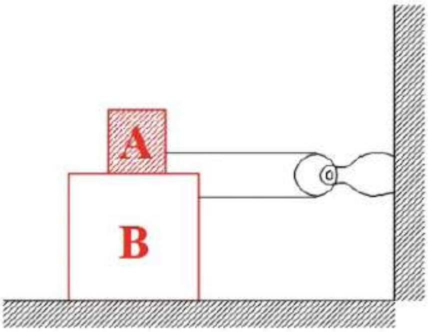


Figura (a)

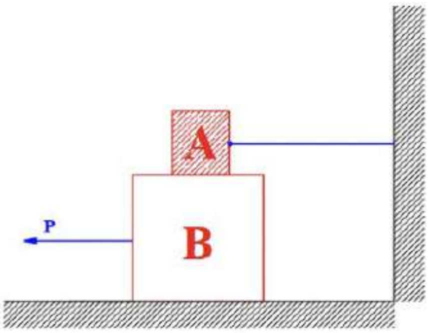


Figura (b)

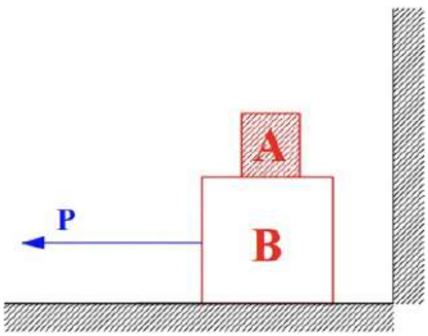


Figura (c)

Figura 6.55. Ejercicio de dinámica.

21. El bloque A, de peso W, desliza hacia abajo con velocidad constante sobre el plano inclinado S cuya pendiente es 40°, mientras la tabla B también de peso W, descansa sobre la parte superior de A. La tabla está unida mediante una cuerda al punto más alto del plano.

a) Dibujar un diagrama del cuerpo libre indicando todas las fuerzas que actúan sobre el bloque A y B.

b) Si el coeficiente cinético de rozamiento entre las superficies A y B y entre S y A es el mismo, determinar su valor.

c) Determine la tensión que una B con el soporte.

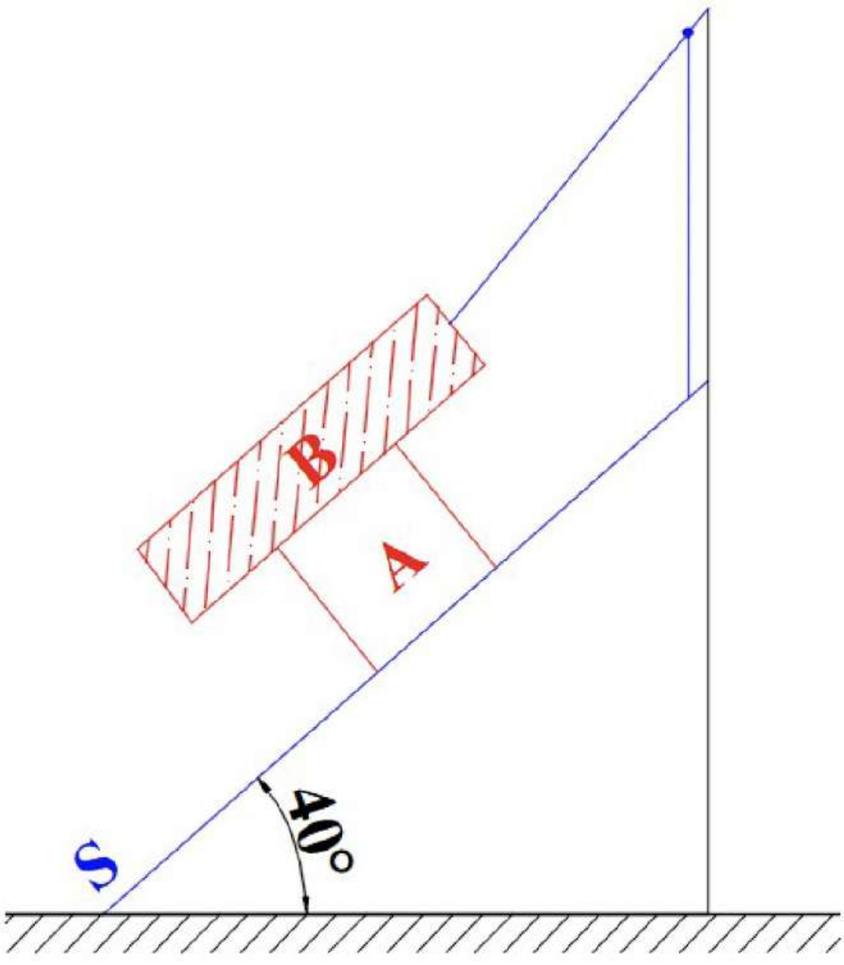


Figura 6.56. Ejercicio de dinámica.

22. Dos bloques que tienen una masa: m_1 = 8 kg y m_2 = 16 kg, están unidos por una cuerda de masa despreciable y deslizan hacia abajo sobre un plano Inclinado 30° como Indica la figura. El coeficiente cinético de rozamiento entre ml y el plano es 0,25 y entre m2 y el plano es 0,50.

a) Hállese la aceleración de cada bloque.

b) Calcular la tensión de la cuerda

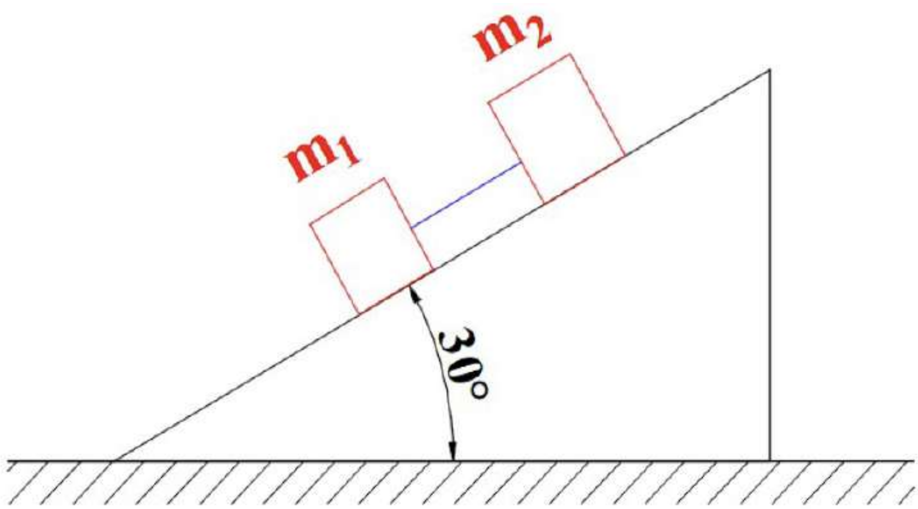


Figura 6.57. Ejercicio de dinámica.

23. Determinar el coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto de las masas m_2 y m_3; Si al soltarse del reposo el sistema representado en la figura, las masas m_2 y m_3; se desplazan sin separarse entre sí. La superficie del plano inclinado es lisa.

m_1= 10 kg.

m_2= 2 kg.

m_3= 1 kg.

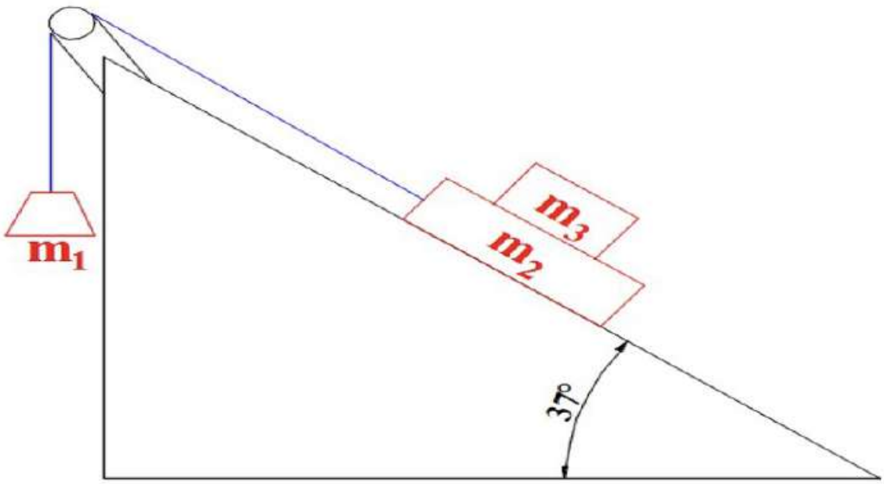


Figura 6.58. Ejercicio de dinámica.

24. A un automóvil de 1 200 kg que va por una carretera recta se le acciona con una fuerza constante de 780 N durante 12 s, llegando a tener una velocidad de 28 m/s. Determinar:

a) La velocidad que tenía el automóvil antes de que se le aplique la fuerza, es decir, antes de acelerar.

b) Qué velocidad leva cuando recorre 200 m después que empezó a acelerar.

25. Un cuerpo de 4 kg. se encuentra en el punto (10, 0, 4)m en t = 3 s, con una velocidad de (−7i + 3k) m/s. Se aplica sobre él una fuerza constante de (−175i + 75k) N durante 9 s, determinar:

a) La posición final del cuerpo

b) El desplazamiento realizado por el cuerpo.

c) La velocidad final del cuerpo.

26. En la figura adjunta, si el bloque es de 20 kg y μc = 0,15. Determinar:

a) El valor de F para que el bloque suba con velocidad constante.

b) El valor de F para que el bloque suba con una aceleración de 1,4 m/s^2

c) El valor de F para que el bloque baje con velocidad constante.

d) El valor de F para que el bloque baje con una aceleración de 1,4 m/s^2

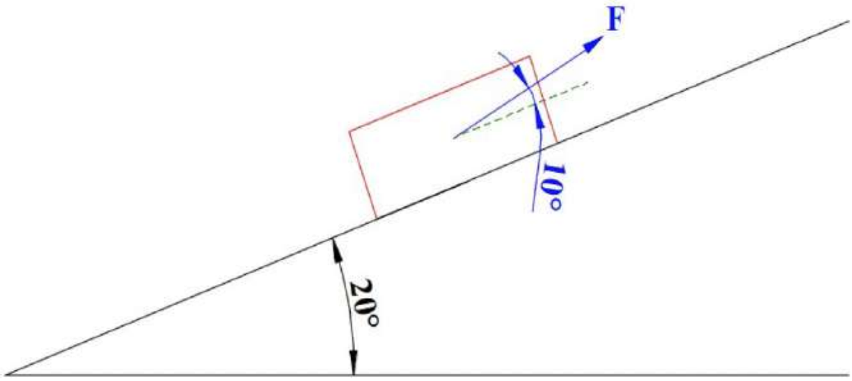


Figura 6.59. Ejercicio de dinámica.

27. Un cuerpo de 10 kg es empujado hacia arriba de un plano inclinado mediante una fuerza de 60 N, como se indica en la figura.

a) La fuerza que ejerce el plano sobre el cuerpo.

b) La aceleración del bloque

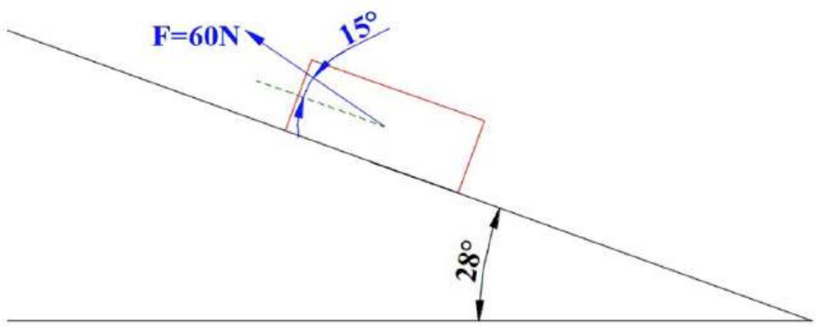


Figura 6.60. Ejercicio de dinámica.

28. En la figura los bloques A y B son de 65 y 25 kg respectivamente. Si μc = 0,25 para todas las superficies, determinar:

a) La aceleración de cada bloque.

b) En qué sentido se mueven los bloques.

c) La velocidad del bloque A, 4 s después de partir del reposo .

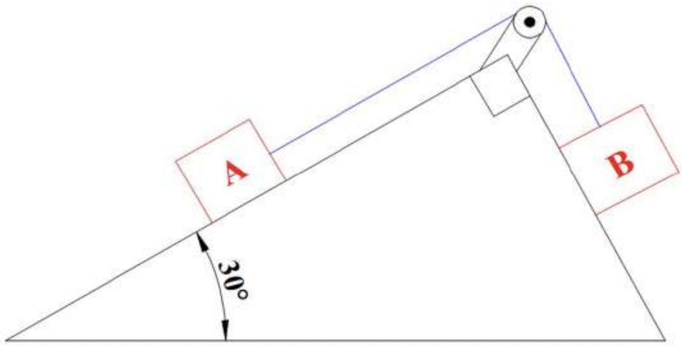


Figura 6.61. Ejercicio de dinámica.

29. En el sistema de la figura se tiene que $m_B = m_C = 0$ kg. Si $\mu_A = 0{,}1$; $\mu_B = 0{,}2$ y $\mu_C = 0{,}3$, Determinar:

a) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la derecha con velocidad constante.

b) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la izquierda con velocidad constante.

c) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la derecha con una aceleración de 1,6 m/s^2.

d) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la izquierda con un aceleración de 1,6 m/s^2.

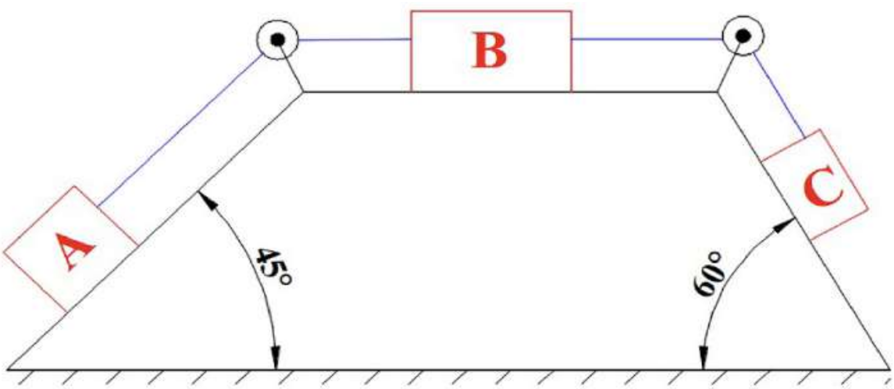


Figura 6.62. Ejercicio de dinámica.

30. En el sistema de figura. Determinar en función de: m, θ, μ y la constante g.

a) La aceleración de cada bloque

b) La tensión de la cuerda A.

c) Determine los valores cuantitativos para:

m = 20 kg

θ = 30°

μ =0,2

g =9,8 m/s^2

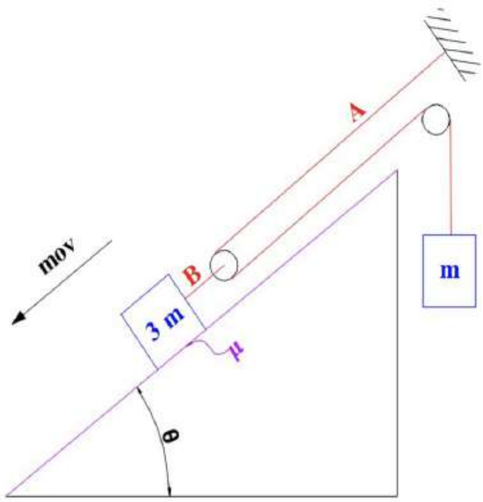


Figura 6.63. Ejercicio de dinámica.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. A. Serway and L. D. Kirkpatrick, *Física para ciencias e ingeniería*, séptima ed ed., 1988, vol. 26, no. 4.

[2] P. Vallejo and J. Zambrano, *Física Vectorial I*, septima ed ed., Ediciones RODIN, Ed., 2010, vol. 1.

[3] R. Resnick, D. Halliday, and K. Krane, *Física 1*, 2001.

[4] M. Alonso and O. Rojo, *Física: mecánica y termodinámica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1986. [Online]. Available: https://books.google.com.ec/books?id=McPUJwAACAAJ

[5] M. Alonso and E. J. Finn, *Física Vol I Mecanica*, 1986.

[6] J. Mckelvey and H. Grotch, *Física para ciencias e ingenieria*, primera ed ed., Harla, Ed., 1980.

[7] A. Beiser, *Física aplicada*, mcgraw-hil ed., 1991.

[8] P. Nuñez, *Física vectorial elemental 1*, octava edi ed., E. RODIN, Ed., Quito, 1999.

Diego Guillermo Barba Maggi nació en Riobamba, Ecuador en el año de 1980, experto en procesos *e-learning* por la Fundación FATLA, ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador, magíster en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato, Ecuador y doctor de la Universidad de Buenos Aires, Área Ingeniería en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, Argentina. Actualmente docente investigador de la ESPOCH desde el año 2004, profesor de Física, Matemáticas y Seguridad Industrial, director del proyecto de investigación internacional orientado al control de la estructura granular a través de inestabilidades hidrodinámicas.
Coautor de varias publicaciones en revistas indexadas relacionadas a medios granulares inmersos vibrados. Director y cofundador del Grupo de investigación GIICYT – ESPOCH, galardonado durante su formación doctoral con el primer premio SEVYT-FIUBA por la ponencia de la tesis doctoral titulada *Dinámica de suspensiones concentradas sometidas a vibración mecánica*, calificada con una nota de sobresaliente en el año 2020.

Bernardo Ezequiel Barba Barba nació en Colta, Ecuador en el año de 1957, especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente e ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador, magíster en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato, Ecuador. Docente investigador de ESPOCH durante 37 años, actualmente jubilado. Mejor egresado de la carrera de Ingeniería Mecánica en el año 1980, profesor de Física, socio fundador del Colegio de Ciencias Pitágoras, Riobamba, actualmente director fundador de ACIBAG, Riobamba. Decano encargado de la FIE-ESPOCH en el año 2007.

ISBN: 978-9942-44-993-1