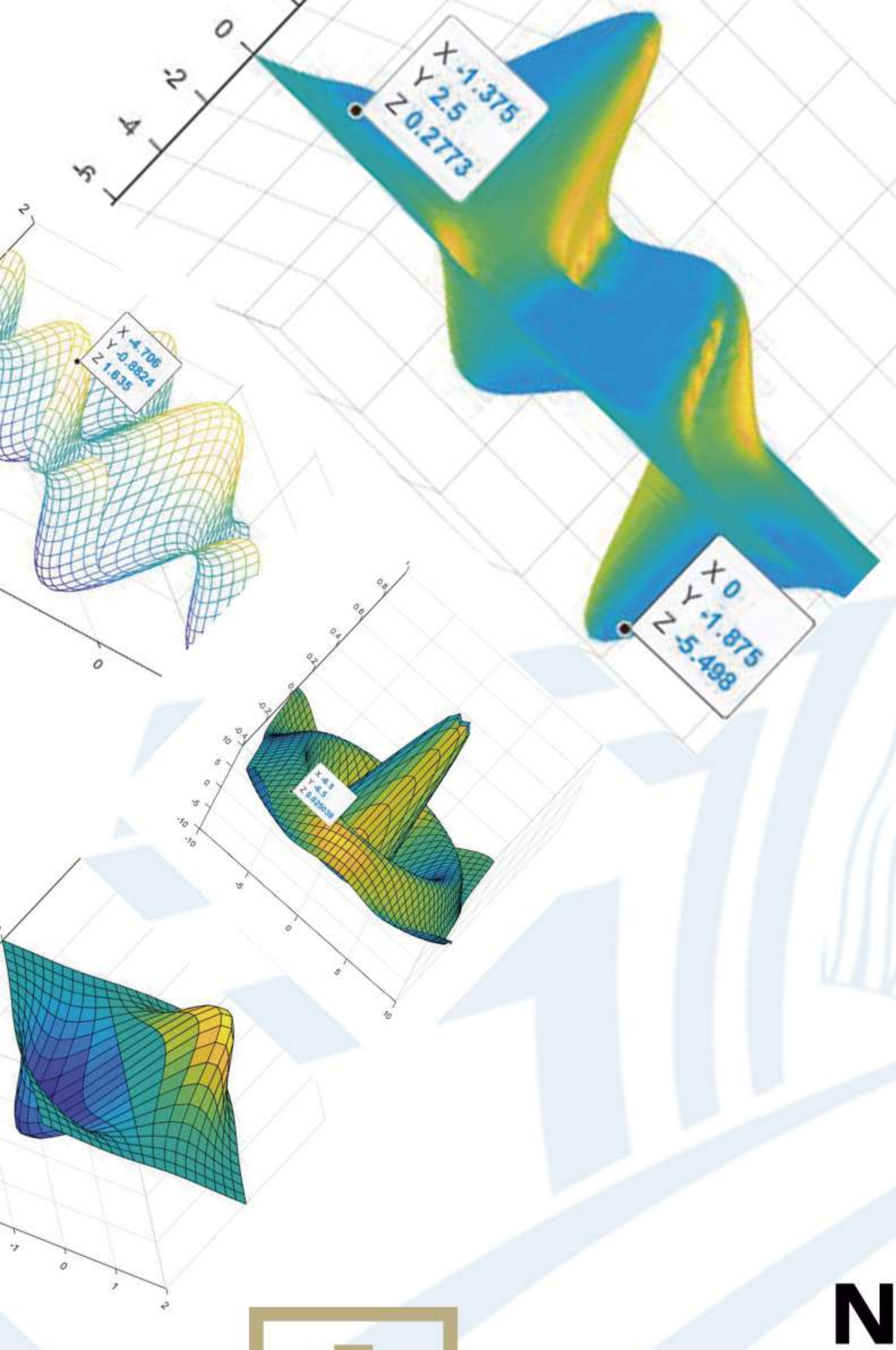


PUERTO MADERO
EDITORIAL

Métodos Numéricos

Aplicaciones en Ingeniería y Ciencias Básicas

Autores:
José Luis Pérez Rojas
Andrés Joao Noguera Cundar
Fabián Eduardo Bastidas Alarcón

espoch

1era Edición
2022

puertomaderoeditorial.com.ar
La Plata - Argentina

Métodos Numéricos

Aplicaciones en Ingeniería
y Ciencias Básicas

PUERTO MADERO EDITORIAL

espoch

Métodos Numéricos
Aplicaciones en Ingeniería y Ciencias Básicas

AUTORES:
José Luis Pérez Rojas
Andrés Joao Noguera Cundar
Fabián Eduardo Bastidas Alarcón

Métodos numéricos aplicaciones en Ingeniería y Ciencias básicas / José Luis Pérez Rojas ; Andrés Joao Noguera Cundar ; Fabián Eduardo Bastidas Alarcón ; editado por Juan Carlos Santillán Lima ; Daniela Margoth Caichug Rivera. - 1a ed. - La Plata : Juan Carlos Santillán Lima, 2022.

Libro digital, PDF/A

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-88-4941-6

1. Matemática Aplicada. 2. Ingeniería. I. Noguera Cundar, Andrés Joao. II. Bastidas Alarcón, Fabián Eduardo. III. Santillán Lima, Juan Carlos, ed. IV. Caichug Rivera, Daniela Margoth, ed. V. Título.

CDD 519.8

Primera Edición, Mayo 2022

Métodos numéricos aplicaciones en Ingeniería y Ciencias básicas
ISBN: 978-987-88-4941-6

Editado por:
Sello editorial: ©Puerto Madero Editorial Académica (J. C. Santillán Lima)
ISBN Editorial: 978-987-88-4
Nº de Alta: 933832

Editorial: ©Juan Carlos Santillán Lima
CUIL: 20630333971
Calle 45 N491 entre 4 y 5
Dirección de Publicaciones Científicas Puerto Madero Editorial Academica
La Plata, Buenos Aires, Argentina
Teléfono: +54 9 221 314 5902
+54 9 221 531 5142
Código Postal: AR1900

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review)

Corrección y diseño:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: José Luis Santillán Lima

Diseño, Montaje y Producción Editorial:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: Santillán Lima, José Luis

Director del equipo editorial: Santillán Lima, Juan Carlos

Editores: Santillán Lima, Juan Carlos
Caichug Rivera, Daniela Margoth

Hecho en Argentina
Made in Argentina

AUTORES:

José Luis Pérez Rojas

Facultad de Mecánica; Escuela Superior Politécnica de Chimborazo; Panamericana Sur $1^{1/2}$, Riobamba, Ecuador.

jose.perezl@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-8958-5556

Andrés Joao Noguera Cundar

Facultad de Mecánica; Escuela Superior Politécnica de Chimborazo; Panamericana Sur $1^{1/2}$, Riobamba, Ecuador.

andres.nogera@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0001-6763-9288

Fabián Eduardo Bastidas Alarcón

Facultad de Mecánica; Escuela Superior Politécnica de Chimborazo; Panamericana Sur $1^{1/2}$, Riobamba, Ecuador.

fbastidas@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-3238-4072

DEDICATORIA

Dedicar esta obra a Dios que es quien nos brinda el camino de la sabiduría y el conocimiento.A la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y a la Carrera de Mecánica por la apertura, para que los conocimientos adquiridos durante estos años de trabajo como profesores puedan ser compartidos y divulgados en la formación de nuevos profesionales. De una manera muy especial a nuestras familias que son la motivación mas grande que tenemos para cumplir nuestros objetivos, gracias a ustedes y a su apoyo incondicional para seguir adelante y dar lo mejor día a día. . . !!

Ing. Andrés Noguera, Msc. Ing. Fabián Bastidas, Mgs. Ing. José Luis Pérez, Msc.

Índice general

Prólogo

El estudio de las matemáticas se remonta a tiempos de la antigüedad en donde se ha tratado de encontrar soluciones reales a temas específicos, o dar una solución exacta a un problema que puede ser imposible de resolver, cuando esto sucede se recurre a la utilización de instrumentos y técnicas que permitan obtener un resultado aproximado, que en algunos casos llega a ser considerado como una respuesta útil. En este sentido los métodos numéricos son utilizados para resolver problemas matemáticos de difícil solución de manera analítica, es decir garantizar una respuesta exacta en función de las variables que se asocian al problema que se plantea, al contrario si se habla de una solución numérica se le considera como un valor numérico aproximado, estos métodos ejecutan los cálculos con la ayuda de la iteración hasta que se llegue a una exactitud deseada, considerando que estos parámetros tienen que satisfacer los requisitos planteados en los problemas que se desean resolver sin dejar de lado la exactitud y precisión del método.

El propósito de este texto es brindar una herramienta básica de los métodos numéricos, proporcionando una fundamentación básica de los diferentes métodos y su utilidad en la solución de problemas. El objetivo de esta obra dirigida a estudiantes universitarios y poner a su disposición elementos de fácil comprensión y lectura que les lleve a un primer encuentro con esta área de las matemáticas; con la ayuda de ejercicios resueltos y propuestos que les permita un mejor entendimiento de las clases desarrolladas, además del uso de software en la solución de aplicaciones que ayude en la comprensión de las mismas utilizando para ello la programación. El desarrollo de cada uno de los temas constituye el material suficiente para un curso introductorio sobre métodos numéricos, y está organizado en 6 capítulos los cuales se van desarrollando según la complejidad del caso. Como parte inicial el texto en su primer capítulo introduce al lector en aspectos de importancia de los métodos numéricos, la relación existente con los computadores y la solución que se puede dar a un problema con el uso de los errores al momento de implementar un método en un ordenador. En el segundo capítulo se describe los métodos numéricos básicos para la solución de ecuaciones y sistemas no lineales, separándolos entre directos e iterativos. El capítulo tres trata sobre los métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, considerando métodos iterativos y factorización de matrices aplicados a la ingeniería. El cuarto capítulo menciona el ajuste de curvas por el método de mínimos cuadrados y como se lo realiza mediante técnicas estadísticas de regresión e interpolación como Lagrange. A continuación, en el quinto capítulo se analiza la diferenciación e integración numérica a través de la regla del trapecio, describiendo diversas fórmulas, tanto para las derivadas como integrales. El capítulo seis abarca conceptos, tipos de ecuaciones diferenciales y se describe a cada uno de los métodos de mayor utilidad en la solución de este tipo de aplicaciones, como el método de Euler, Euler modificado y Runge-Kuta. Para finalizar se ha adjunta información relevante de bibliografía básica utilizada para la elaboración de este libro, así como referencias complementarias que ayudarán a los estudiantes a profundizar sus conocimientos en los métodos numéricos.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

1.1. Historia

En el papiro de Rhid (documento matemático más antiguo), aparecen mas de 80 problemas resueltos utilizando métodos aproximados para encontrar el volumen de varios frutos, así como también el área de una circunferencia, tomándola como la de un cuadrado cuyo lado fuera 8/9 del diámetro de la circunferencia. Las evidencias concretas del uso de los métodos numéricos indican que desde hace mucho tiempo ya que se empleaban métodos de aproximación, el elemento que respalda esta aseveración es el descubrimiento del Papiro de Rhind o Ahmes, el cual es un documento egipcio que data del año 1650 A.C. Este papiro representa la mejor fuente de información sobre la matemática egipcia, en su estructura tiene un aproximado de ochenta ejercicios resueltos de cálculo de volumen de frutas, fracciones, cálculo de áreas, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales, trigonometría básica, raíces cuadradas, etc, utilizando cálculo numérico.
En la actualidad este hallazgo arqueológico esta resguardado en el Museo Británico de Londres. Y como título lleva la frase: Çálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios". En contraste con estos datos de cultura general que relacionan conocimientos antiguos con los métodos numéricos, en 1984 Math Works desarrolla el lenguaje de programación MatLab, que surge principalmente al trabajo de Matrices, y que a través de los años se ha convertido en una herramienta importante y poderosa en todos los campos de la ingeniería.

Es importante mencionar que antes de la era de las computadoras los ingenieros contaban con tres métodos de solución de problemas.

1.- Las soluciones de algunos problemas las encontraban con métodos exactos o analíticos lo cual es limitante.

2.- Usaban soluciones gráficas para problemas mas complejos unque sus soluciones no son muy precisas, difíciles de implementar y tediosas.

3.- Utilizaban calculadoras y reglas de cálculo. Los cálculo manuales son lentos tediosos y en los resultados surgen equivocaciones al efectuar numerosos cálculos.

En la actualidad la utilización de las computadoras y los métodos numéricos ofrecen alternativas de solución a cálculos complicados, se puede aproximar los cálculos sin tener que recurrir en técnicas lentas, permitiendo resolver problemas muy complicados en menor cantidad de tiempo, dando cada vez mas importancia al planteamiento del problema y a la interpretación de los resultados.

En este texto se estudiarán de manera teórica los diferentes métodos numéricos existentes para la solución de diferentes problemas y se simularán mediante el software de simulación Matlab para la validación práctica.
MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory, "Laboratorio de matrices").

1.2. Conceptos básicos

Se define a los métodos numéricos como un conjunto de técnicas que permiten formular o plantear problemas logrando que los mismos sean resueltos usando operaciones aritméticas sencillas. El objetivo principal, es encontrar soluciones aproximadas a problemas complejos utilizando las operaciones más simples de la aritmética tradicional.La importancia de la utilización de los métodos numéricos es que con ellos Con es factible resolver problemas difíciles y complejos utilizando una combinación de pasos fáciles, aunque estos no necesariamente sean pocos.

A esta combinación de múltiples pasos se los conoce como procesos iterativos, los cuales al ser muchos hacen que su implementación requiera de un computador para agilitar los procesos y disminuir considerablemente los tiempos de solución.

Gracias al avance tecnológico los computadores año tras año se han vuelto mas eficientes y rápidOs, lo cual los hace muy útiles en las aplicaciones del campo de la Ingeniería.

Es importante mencionar que los métodos numéricos son herramientas poderosas para la solución de:

a)Ecuaciones y sistemas de ecuaciones grandes lineales y no lineales.
b)No linealidades.
c) Geometrías complicadas.
d) Análisis de estructuras.(mecánica)
e) Se puede generar y resolver un modelo matemático en base a un problema social o económico.
f) Optimización de un diseño de prótesis de cadera mediante elementos finitos.
g) Validación de modelos numéricos de intercambiadores de calor a partir de estudios experimentales.
h) Influencia de modelos de turbulencia y del bloqueo de la estela en la predicción del desempeño.
e) Hidrodinámico de una turbina tipo Darrieus.

1.3. Importancia de los métodos numéricos

A continuación se muestran algunos conceptos por los cuales los métodos numéricos son importantes conocerlos, estudiarlos e implementarlos.

- **Instrumentos fuertes:** Permiten resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales,ecuaciones geométricas,etc; las mismas que son comunes en Ingeniería. Al tomar como alternativa el método de solución analítico para encontrar su resultado éste, sería casi imposible de determinar para todos los casos, ya que su gran mayoría no poseen soluciones exactas.

- **Fácil acceso:** El desarrollo continuo de métodos numéricos ha permitido que en la actualidad exista una cantidad considerable de software disponible y libre, para aplicaciones en Ingeniería.

- **Escalabilidad:** Si se diera el caso de que no exista un software que resuelva un problema específico o que no se adecúe a una aplicación determinada, los conocimientos de métodos numéricos y programación se combinarián por parte de los lectores para obtener un nuevo programa, que sea capaz de resolver el problema señalado.

- **Adaptabilidad:** La aplicación y estudio de métodos numéricos, permite que se aproveche el potencial de las computadoras actuales en realación a su velocidad de procesamiento y almacenamiento.

  NOTA: Los métodos numéricos dan resultados aproximados, que muestran unicamente un cierto número de cifras significativas. Este resultado es aceptado debido a que conocer el valor resultante exacto suele ser innecesario.

1.4. Relación de los computadores con los métodos numérico

Absolutamente todo lo que sucede a nuestro alrededor básicamente viene como resultado de un evento físico o químico, y por tanto puede ser modelado o descrito mediante una ecuación.En este sentido, los métodos numéricos poseen la cualidad especial de permitir resolver problemas complejos mediante el desarrollo de modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos son el conjunto de términos o ecuaciones que indican las características y comportamiento de un sistema o un proceso en términos matemáticos; la dificultad que surge con estos es que, pueden ser simples relaciones algebraicas, o sistemas de ecuaciones diferenciales muy complejas. En la solución de problemas complejos se utilizá métodos numéricos, los cuales dan una solución con procesos algebraicos sencillos pero muy repetitivos y agotadores.

Entonces al tener varios procesos iterativos se utiliza la computadora para poder procesar los resultados mas rápido, quedando mas tiempo para la interpretación de resultados por parte del lector.

INICIOS

Antes de la era de los computadores los Ingenieros optaban por tres métodos de solución de problemas.

a)Las soluciones las encontraban con métodos exactos, lo cual es limitante ya que no todos los problemas los poseen.

b)Utilizaban la solución gráfica, las cuales úeden llegar a ser tediosas, difíciles de implementar así como también de ser inexactas.

c)El uso de calculadoras y reglas de cálculo los cuales permitián cálculos lentos y extensos. Provocando múltiples equivocaciones.

ACTUALIDAD

La combinación de los computadores y los métodos numéricos ofrecen diferentes alternativas de solución a problemas ingenieriles complejos.Esta solución permite aproximar los cálculos con técnicas rápidas, con el propósito de de resolver problemas en el menor tiempo; dando prioridad al planteamiento del problema y a la interpretación de los resultados.

En función de estas premisas se pretende que el lector encuentre o infiera la conexión existente entre métodos numéricos y los computadores. Solo conociendo esta, se entenderán las siguientes definiciones básicas de términos relacionados con la programación. El nexo entre los fundamentos teóricos, la modelación matemática y la programación en un computador para su simulación son temas a revisarse en este libro.

1.5. Conceptos básicos de programación

Los métodos numéricos son capaces de permitir dar la solución a problemas complejos, sin embargo requieren de ayudas para realizar los procesos iterativos de una manera mas rápida. Esta ayuda la brinda la computadora, sobre la cual se plasma un algoritmo.

- **Algoritmo:** Procedimiento que define una serie de pasos jerárquicos y decisiones que se deben llevar de forma secuencial para establecer la solución de un problema fácil o complejo.

- **Características de un Algoritmo:** Los algoritmos deben cumplir principalmente las siguientes características:
  Finito: Siempre debe terminar en un número determinado de pasos.
  Definido: Las acciones deben definirse sin ambigüedad.
  Entrada: Un algoritmo puede tener una o varias entradas.
  Salida: Un algoritmo debe tener una o varias salidas.

Efectivo: Las operaciones deben ser básicas y claras para que pueden hacerse en un determinado tiempo.

- **Ejemplo de Algortimo**
  Realizar un algoritmo que permita leer dos valores distintos, determinar cuál es el menor y mostrarlo.

  Para lograr este objetivo se utiliza un recurso muy conocido en programación llamado diagrama de flujo, ver figura 1.1, este permite resolver el problema propuesto mediante cuadros representativos para cada acción e ir verficando su correcto funcionamiento.

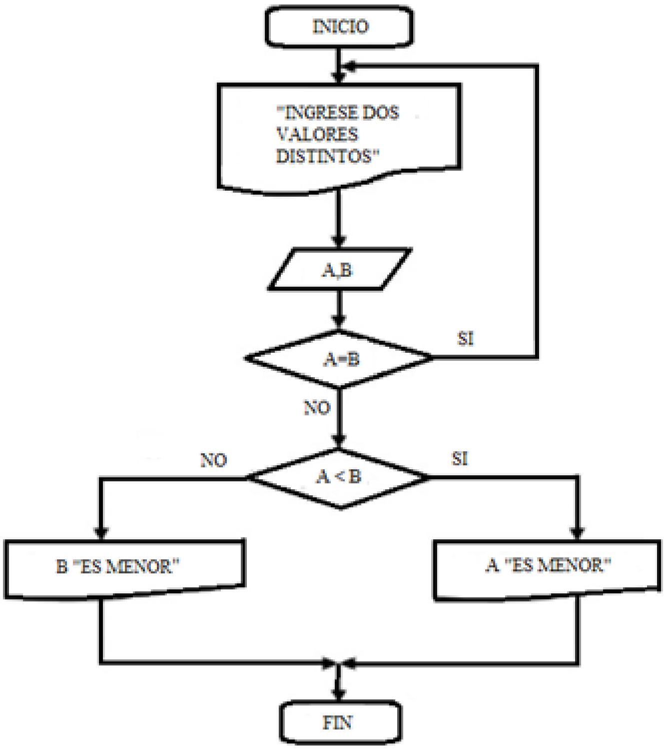


Figura 1.1. Diagrama de flujo

Se ha comentado anteriormente que los métodos numéricos y las computadoras tienen una relación estrecha. Sin embargo, no se indicado bajo ninguna circunstancia que las computadoras no resuelven problemas por sus propios medios o por si solas.

Por lo tanto el programador deberá entender el problema, establecer una solución y dar las instrucciónes al computador para que este lo ejecute, estas instrucciones son entendidas al usar un lenguaje de programación.

Para lograr que los algoritmos se transformen en un programa y que realicen una operación indicada entonces se recomienda seguir los siguientes pasos:

Especificación del problema: Consiste en identificar el problema y sus respectivas limitaciones, el conjunto de variables implicadas,las constantes y los resultados que se buscan.

Análisis del problema: Se caracteriza por formular la solución de un problema mediante la definición del algoritmo, el cual debe tener en su estructura una serie de pasos lógicos y jerarquicos.
Programación: A esta etapa se la puede definir como la transformación de un diagrama de flujo en una codificación con lenguaje de computador(programación).

Verificación: Denominada prueba de escritorio, en la cual se busca eliminar errores, logrando que el programa realice lo que se solicita. Está se realizá comparando los resultados obtenidos con algunos conocidos previamente.

Documentación: Consiste en preparar un manual de usuario que indique el funcionamiento del programa para que otros usuarios logren utilizarlo sin problemas.

Produción: Proporcionan los datos de entrada o información inicial al programa y después de ejecutarlo entregará los resultados obtenidos.

1.6. Conceptos adicionales

Como se ha analizado en la definición de métodos numéricos, estos muestran resultados aproximados y en la mayoría de casos con una cantidad considerable de decimales.A continuación, se muestran algunos términos que pueden ser útiles durante el desarrollo de este texto.

1.6.1. Números exactos

Son aquellos que representan el valor verdadero de un número, estos son valores que no están sujetos a cambios por definición estos valores no se verán modificados..
Ejemplos

Semana → 7 días
Hexágono → 6 lados
Cubo → 6 caras

1.6.2. Números aproximados

Son aquellos que presentan un error de cálculo y muestran un valor cercano al verdadero, es decir existe una proximidad entre el valor real y el valor medido.
Ejemplos.

Altura de un edificio → 15,25 m → en este caso este valor podría verse modificado dependiendo del instrumento de medida utilizado.

Radio de la tierra → 6371 km → el radio de la tierra dependerá del lugar en donde se haya realizado la medición.

Masa de caja de fósforos → 10 gramos → estará determinado por la calidad del equipo con que se realice la medición.

Se considera que los datos aproximados están relacionados principalmente con dos factores:

a) Con la precisión del instrumento de medida.
b) Capacidad de visión o percepción de la persona que realizó la medida.

Se debe tener en cuenta que absolutamente ningún instrumento es cien por ciento exacto, cada aparato de medida tiene su grado de precisión, es decir admite un error y dependerá del nivel de precisión que se desee para escoger uno u otro.

1.6.3. Notación de términos para el análisis de números exactos y aproximados

Se utilizará la siguiente nomenclatura para números exactos y aproximados.

a $\rightarrow$ número aproximado.

A $\rightarrow$ número exacto.

Aproximación por defecto y aproximación por exceso.
Si "a" es menor que "A" $\rightarrow$ se obtiene una aproximación por defecto, o "a" es más pequeña (menor) que "A".

Si "a" es mayor que "A", $\rightarrow$ se obtiene una aproximación por exceso o "a" es más grande (mayor) que "A".

Ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356$$

$$1{,}41 \rightarrow \sqrt{2} \rightarrow 1{,}42$$

Si un instrumento de cálculo (calculadora) mostrase como respuesta que:

$$\sqrt{2} = 1{,}41$$

Entonces tenemos un error por defecto pues:

$$1{,}41 < 1{,}41421356$$

Y si el instrumento de cálculo mostrase como respuesta que:

$$\sqrt{2} = 1{,}42$$

Entonces tenemos un error por exceso pues:

$$1{,}42 < 1{,}41421356$$

1.6.4. Redondeo

Técnica numérica que consiste en reemplazar un número por otro, en su estructura consiste en cambiar una cantidad con una gran cantidad de cifras por una con menor número de cifras que reprensente lo mismo.Esta técnica esta sujeta a un conjunto de reglas, descritas a continuación.

a)El último dígito que se conserva se aumenta en uno, si el primer dígito descartado es mayor que cinco.
Ejemplos:

Redondear los siguientes valores.

$$847,469 \rightarrow 4 \;\; cifras \rightarrow 847{,}3$$

El primer dígito descartado es el seis y al ser mayor que cinco, entonces el último dígito conservado que es el cuatro se aumenta en uno.

$$4931,378 \rightarrow 5 \;\; cifras \rightarrow 4931,4$$

El primer digito descartado es el siete y al ser mayor que cinco, entonces el último dígito conservado que es el tres se aumenta en uno.

b)Si el primer dígito descartado es cinco seguido de ceros, el último dígito que se conserva se incrementa en uno, solo si éste es impar.

$$39,75000 \rightarrow 3 \;\; cifras \rightarrow 9,8$$

El primer dígito descartado es cinco, entonces el último dígito conservado que es el siete (impar) se aumenta en uno.

$$563,45000 \rightarrow 4 \ \ cifras \rightarrow 563,4$$

El primer dígito descartado es cinco, entonces el último dígito conservado que es el cuatro (par) si se aumenta en uno, pues después de los ceros existe un número uno que afectaría el resultado final.

1.6.5. Truncamiento

Su objetivo en muy simple y es omitir todas las cifras a partir de una posición indicada o definida arbitrariamente.
Ejemplo Truncar el siguiente número a las cifras indicadas.

$$39,7548 \rightarrow 3 \ \ cifras \rightarrow 39,7$$

1.6.6. Precisión:

Es un término que está relacionado con la cantidad de cifras que se encuentran en un valor.

1.6.7. Exactitud:

Es un término relacionado con la cercanía que existe entre un valor aproximado con su valor real.

1.6.8. Cifras significativas:

Son todas las cifras de un número a excepción de aquellos ceros que están puestos a la izquierda de la primera cifra distinta de cero.

$$0,000956 \rightarrow 3 \ \ cifras \ \ significativas$$

$$956,00 \rightarrow 5 \ \ cifras \ \ significativas$$

$$3,76 * 10^8 \rightarrow 3 \ \ cifras \ \ significativas$$

Es importante indicar que para determinar la cantidad de cifras significativas se deben seguir algunas condiciones detalladas a continuación:

1. Si se trata de un número entero todas las cifras son significativas.
Ejemplo

$$345891 \rightarrow 6 \ \ cifras \ \ significativas$$

2.Si existe un cero el cual se encuentra entre dos cifras distintas, este también debe ser considerado cifra significativa.
Ejemplo

$$1,05 \rightarrow 3 \ \ cifras \ \ significativas$$

3. Si el número está compuesto por ceros, y los mismos se usan únicamente para la ubicación de la coma, estos no son cifras significativas.
Ejemplo

$$0,009 \rightarrow 1 \ \ cifras \ \ significativas$$

4.Cuando los ceros están después de la coma, y si antes de ésta existen otras cifras, estos ceros también tienen que ser consideradas como cifras significativas.
Ejemplo

$$17,00 \rightarrow 4 \ \ cifras \ \ significativas$$

5. Si se presentan cantidades grandes terminadas en ceros, estos pueden o no ser cifras significativas.
Ejemplo

$$12300 \rightarrow 5 \ \ o \ \ 3 \ \ cifras \ \ significativas$$

1.6.9. Fundamentos de errores

La definición más básica de lo que se conoce como: incertidumbre o error numérico, indica que estos términos son una medida de la aproximación de una magnitud con respecto al valor real o teórico de la mencionada magnitud.
Por lo tanto, existe una relación entre el valor real y el valor aproximado:

$$Valor\ verdadero = Valor\ aproximado + error \tag{1.1}$$

En la práctica profesional los errores llegan a resultar costosos y en otros insignificantes, todo depende del uso de los datos. Los errores comunes son:

REDONDEO: Debido a que dispositivos u ordenadores representan cantidades con un número finito de dígitos.

TRUNCAMIENTO: Diferencia entre una formulación matemática exacta de un problema y su aproximación obtenida por un método numérico.

Existen otros tipos de errores que no dependen del método numérico, estos son producto de equivocaciones o errores de formulación del modelo y la incertidumbre en la obtención de los datos.

Nota: En todos los problemas y operaciones matemáticas es muy importante hacer un seguimiento de los errores cometidos, a fin de lograr que al fin del cálculo se pueda estimar el grado de aproximación de la solución que se haya obtenido.

1.7. Clasificación de errores:

1.7.1. Erorres por su origen

Errores del problema: Este tipo de errores, aparecen durante la etapa de formulación del problema o durante su planteamiento.

Error numérico: Aparece con el uso de aproximaciones para representar una cantidad de datos.

Ejemplo.

$$\pi \rightarrow 3,14159265358979323846264 3 \quad \rightarrow 3{,}1416$$

El valor de π es conocido es un valor infinito que en ocasiones solo se toma como: 3.1416.

Error inicial: Aparece cuando se utilizan constantes, en los cuales sus valores son expresados mediante una aproximación.

$$y = e^x$$

Pueden aparecer al aplicar en alguna fórmula los valores aproximados.

$$me = 9{,}104 * 10^{-28}$$

$$N_A = 6{,}03 * 10^{11}$$

me:masa electrón
NA:constante de Avogadro

Errores de aplicación: Se originan cuando se utilizan operaciones con números aproximados.
Ejemplo:

$$me = 9{,}104 * 10^{-28}$$

$$A = \pi * \frac{d^2}{4}$$

Errores residuales: originado por la presencia de procesos infinitos en el análisis matemático.
Ejemplo:

Aplicación en la serie de Taylor

1.7.2. Errores por su forma de expresarlos

Cualitativo: También conocido como error absoluto y se define como la diferencia entre el valor real y el valor que se haya obtenido durante una medición, y matemáticamente esta expresado como:

$$\Delta a = |A - a| \tag{1.2}$$

Donde:

$$A = valor\ \ real; \ \ a = valor\ \ aproximado$$

Además, tomando en cuenta que:

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$$

Se puede expresar también:

$$A = a \pm \Delta a \tag{1.3}$$

Otra forma adecuada y común de encontrar esta expresión, viene dada por:

$$E_t = valor\ \ verdadero - \ \ valor\ \ aproximado \tag{1.4}$$

Donde:

$$E_t = error\ \ real$$

Cuantitativo: Se la conoce como, error relativo δa, cual es definido como el cociente entre el error absoluto y el valor exacto. Además al multiplicar este cálculo por cien, se obtiene el tanto por ciento % de error.

$$\delta a = \frac{\Delta a}{A} \tag{1.5}$$

$$\delta a = \frac{\Delta a}{A} * 100\,\% \tag{1.6}$$

Ejemplo:

En el aula de clase se han tomado medidas de tiempo mostradas en la tabla 1.1, las mismas que representa las distancias que tomo un cuerpo en recorrer cierta distancia, las medidas de los estudiantes fueron 3,02; 3,12; 3, 21; 3, 16., Si el valor que se considera exacto es de 3,13 segundos.

Calcular los errores absoluto y relativo porcentual.

$$\Delta a = |A - a|$$

Y el error relativo como:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{A} * 100\,\%$$

MEDIDAS	ERRORES ABSOLUTOS	ERRORES RELATIVOS
$3{,}02s$	$\Delta a = \|3{,}13 - 3{,}02\| = 0{,}11s$	$\delta a = \frac{0{,}11}{3{,}13} * 100\,\% = 3{,}5\,\%$
$3{,}12s$	$\Delta a = \|3{,}13 - 3{,}12\| = 0{,}01s$	$\delta a = \frac{0{,}01}{3{,}13} * 100\,\% = 0{,}3\,\%$
$3{,}21s$	$\Delta a = \|3{,}13 - 3{,}21\| = 0{,}08s$	$\delta a = \frac{0{,}08}{3{,}13} * 100\,\% = 2{,}6\,\%$
$3{,}16s$	$\Delta a = \|3{,}13 - 3{,}16\| = 0{,}03s$	$\delta a = \frac{0{,}03}{3{,}13} * 100\,\% = 0{,}95\,\%$

Tabla 1.1. Cálculo de errores absolutos y relativos

Ejemplo:
Se encarga realizar las medidas de la separación entre las orillas de un río y la altura de un edificio, y se obtienen: 9999 cm y 2499 cm respectivamente. Si los valores verdaderos son 10000cm y 2500 cm, calcular:
a) error absoluto.
b) error relativo porcentual.

a)El error absoluto en la medición de la distancia entre las orillas de un río es:

$$E_t = valor \ \ verdareo - valor \ \ aproximado$$

$$E_t = 10000 \ \ - 9999 \ \ = \ \ 1 \ \ cm$$

El error absoluto en la medición del edificio es:

$$E_t = valor \ \ verdareo - valor \ \ aproximado$$

$$E_t = 2500 \ \ - 2499 \ \ =$$

b)El error relativo en la medición de la distancia entre las orillas de un río es:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{A} * 100\,\%$$

$$\delta a = \frac{1}{1000} * 100\,\% = 0{,}01\,\%$$

El error relativo en la medición del edificio es:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{A} * 100\,\%$$

$$\delta a = \frac{1}{2500} * 100\,\% = 0{,}04\,\%$$

El objetivo principal de este problema es hacer notar que las dos medidas tienen un error absoluto de 1 cm, pero el error relativo porcentual en la medida del edificio es más grande, por tanto, se llega a la conclusión que la medición del edificio es más deficiente, sea esto resultado de una falla humana o del equipo de medida utilizado en esta operación.

1.8. Cifras significativas del error

En algunos casos es importante definir o indicar la cantidad de cifras de un error que son realmente significativas y afectan al valor aproximado en la igualdad.

$$A = a \pm \Delta a$$

Para conseguir este objetivo se pueden seguir dos alternativas, aplicando una fórmula de aplicación muy sencilla. Cada alternativa se describe a continuación:

- **Primera Alternativa**

$$\Delta \leq 0{,}5 * 10^{m-n+1} \tag{1.7}$$

$$m = numero \ \ de \ \ cifras \ \ entre \ \ la \ \ primera \ \ y \ \ el \ \ punto.$$

$$n = numero \ \ de \ \ cifras \ \ significativas \ \ de \ \ a$$

$$A = 416{,}5 \pm 0{,}05$$

Se intenta definir cuantas cifras del error afectan al valor aproximado, entonces se aplica la fórmula.

$$\Delta \leq 0{,}5 * 10^{m-n+1}$$

$$0{,}05 \leq 0{,}5 * 10^{2-4+1}$$

$$0{,}05 \leq 0{,}5 * 10^{-1}$$

$$0{,}05 \leq 0{,}05$$

Como los dos valores son iguales, esto indicaría que todas las cifras del error influyen en el valor aproximado.

- **Segunda Alternativa**

$$\Delta a \leq 0{,}5 * 10^{-n} \tag{1.8}$$

Donde:

$$n = numero\ \ de\ \ cifras\ \ significativas\ \ del\ \ error.$$

El valor de **n**, debe iniciar el cero y aumentara una unidad hasta encontrar el número de cifras que afectan al valor aproximado.
Ejemplo

$$A = 515{,}5695 \leq 1{,}32467/ * 10^{-3}$$

Se intenta definir cuantas cifras del error afectan al valor aproximado, entonces se aplica la fórmula:

$$\Delta a \leq 0{,}5 * 10^{-n}$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}5 * 10^{-0}$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}5 \rightarrow CUMPLE$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}5 * 10^{-1}$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}05 \rightarrow CUMPLE$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}5 * 10^{-2}$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}005 \rightarrow CUMPLE$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}5 * 10^{-3}$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}0005 \rightarrow NO\ \ CUMPLE$$

Como se puede ver con un valor de n=3 la condición ya no se cumple, por tanto, se llega a la conclusión de que solo dos cifras del error son significativas.

Ejemplo

$$A = 123{,}514 \leq 5{,}21 * 10^{-4}$$

Se intenta definir cuantas cifras del error afectan al valor aproximado, entonces se aplica la fórmula:

$$\Delta a \leq 0{,}5 * 10^{-n}$$

$$0{,}000521 \leq 0{,}5 * 10^{-0}$$

$$0{,}00132467 \leq 0{,}5 \rightarrow CUMPLE$$

$$0{,}000521 \leq 0{,}5 * 10^{-1}$$

$$0{,}000521 \leq 0{,}05 \rightarrow CUMPLE$$

$$0{,}000521 \leq 0{,}5 * 10^{-2}$$

$$0{,}000521 \leq 0{,}005 \rightarrow CUMPLE$$

$$0{,}000521 \leq 0{,}5 * 10^{-3}$$

$$0{,}000521 \leq 0{,}0005 \rightarrow NO\ \ CUMPLE$$

Como se puede ver con un valor de n=3 la condición ya no se cumple, por tanto, se llega a la conclusión de que solo dos cifras del error son significativas.

1.9. Exactitud y Precisión

La representación que indica que tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero se la conoce como exactitud y la que indica que tan cercanos se encuentran unos de otros datos, diversos valores calculados o medidos se la conoce como precisión. Los conceptos contrarios se los denominan: inexactitud(sesgo), imprecisión (incertidumbre).

Es importante mencionar que los métodos numéricos deben ser lo suficientemente exactos o sin sesgo para satisfacer los requisitos de un problema particular de Ingeniería. Además deben ser suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño de la Ingeniería.

1.10. Tipos de errores

Tanto para los errores de truncamiento y de redondeo, la relación entre el resultado exacto y verdadero esta dado por:

$$valor\ \ verdadero = valor\ \ aproximado + error$$

El error verdadero se lo representa por $E_t$dando la ecuación como:

$$E_t = valor\ \ verdadero - valor\ \ aproximado$$

Una manera de tomar en cuenta las magnitudes de las cantidades que se evalúan consiste en normalizar el error respecto al valor verdadero. (error relativo)

$$E_t = \frac{error\ \ verdadero}{valor\ \ verdadero} \tag{1.9}$$

Si a este último lo multiplicamos por 100 se obtiene el error relativo porcentual.

$$E_t = \frac{error\ \ verdadero}{valor\ \ verdadero} * 100 \tag{1.10}$$

Ejemplo

Si se mide la longitud de un puente y de un tornillo se obtiene 9999 y 9cm respectivamente. Si los valores verdaderos son 10000 y 10 cm calcular: a) error verdadero, b) error relativo porcentual.

a.1)

$$E_t = valor\ \ verdadero - valor\ \ aproximado$$
$$E_t = 10000 - 9999$$
$$E_t = 1cm$$

a.2)

$$E_t = valor\ \ verdadero - valor\ \ aproximado$$
$$E_t = 10 - 9$$
$$E_t = 1cm$$

b.1)

$$E_t = \frac{error\ \ verdadero}{valor\ \ verdadero} * 100$$
$$E_t = \frac{1}{10000} * 100$$
$$E_t = 0{,}01\,\%$$

b.1)

$$E_t = \frac{error\ \ verdadero}{valor\ \ verdadero} * 100$$
$$E_t = \frac{1}{10} * 100$$

$$E_t = 10\,\%$$

Es muy importante resaltar que para el ejercicio anterior se conocía la solución real. Sin embargo al utilizar los métodos numéricos solo se conocerá el valor verdadero al conocer la solución analítica. Cuando no se conoce la solución analítica una alternativa es normalizar el error usando la mejor estimación.

$$\varepsilon_a = \frac{error \;\; aproximado}{valor \;\; aproximado} * 100$$

Entonces podremos decir que el objetivo El reto de los métodos numéricos es estimar el error en ausencia de valor verdadero, ciertos métodos utilizan un método iterativo para calcular los resultados. En estos métodos se realiza una aproximación en base a la anterior y este proceso se lo realiza de forma repetitiva esperando cada vez mejores aproximaciones, en este caso el error aproximado será:

$$\varepsilon_a = \frac{aproximacion \;\; actual - anterior}{aproximacion \;\; actual} * 100 \tag{1.11}$$

¿HASTA CUANDO ESTIMARLO?

Los signos de este error pueden ser positivos o negativos (si la aproximación es menor que el valor verdadero o si la aproximación es mayor que el valor verdadero).En la práctica no influye el signo del error sino mas bien que el valor absoluto de este sea menos a una tolerancia porcentual prefijada ε_a(criterio de parada).

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s \tag{1.12}$$

Un resultado muy cercano para la estimación en función de n cifras significativas lo estipulo Scarborough en el año de 1966, la cuál esta representada a continuación.

$$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n}) \tag{1.13}$$

1.11. Errores en las operaciones

1.11.1. Errores en suma y resta

En el caso de estas dos operaciones se debe trabajar con los errores absolutos.

$$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 + ...\Delta a_n \tag{1.14}$$

Ejemplos:

a) Hallar $A + B$
b) Hallar $A - B$

$$A = 638{,}3 \pm 0{,}1$$
$$A = 47{,}4 \pm 0{,}2$$

a) Suma de valores aproximados

$$a + b = 638{,}3 + 47{,}4 = 685{,}7$$

Suma de errores:

$$\Delta a + \Delta b = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$$

Resultado:

$$A - B = 685{,}7 \pm 0{,}3$$

b) Resta de valores aproximados

$$a - b = 638{,}3 - 47{,}4 = 591{,}3$$

Resta de errores:

$$\Delta a + \Delta b = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$$

Resultado:

$$A - B = 591{,}3 \pm 0{,}3$$

1.11.2. Error del producto y cociente

Al trabajar con productos y cocientes, se debe calcular los respectivos errores relativos, luego encontrar el error relativo total.

$$\delta a = \delta a_1 + \delta a_2 \tag{1.15}$$

Ejemplo :

Sea $A = 583{,}49 \pm 0{,}01$ y $B = 79{,}352 \pm 0{,}02$, hallar A*B.
Cálculo del producto.

$$X = A * B$$

$$X = 583{,}49 * 79{,}352 = 46285, 34425$$

Cálculo del error relativo total, utilizando los errores relativos individuales.

$$\delta ab = \delta a + \delta b$$

$$\delta ab = \frac{0{,}01}{583{,}49} + \frac{0{,}02}{79{,}325} = 4{,}235 * 10^{-5}$$

Cálculo del error absoluto total.

$$\Delta ab = X * \delta ab$$

$$\Delta ab = (46285{,}34425) * 4{,}235 * 10^{-5} = 1{,}9602$$

$$X = A * B$$

$$X = 46285, 34425 \pm 1{,}9602$$

Ejemplo:

Sea $A = 1258{,}43 \pm 0{,}01$ y $B = 741{,}623 \pm 0{,}02$, hallar A/B.
Cáculo del cociente.

$$X = A/B$$

$$X = \frac{1258{,}43}{741{,}623} = 1{,}6968$$

Cálculo del error relativo total, utilizando los errores relativos individuales.

$$\delta ab = \delta a + \delta b$$

$$\delta ab = \frac{0{,}01}{1258{,}43} + \frac{0{,}02}{741{,}623} = 1{,}06432 * 10^{-5}$$

Entonces:

$$X = \frac{A}{B}$$

$$\frac{A}{B} = 1{,}6968 \pm 1{,}06432 * 10^{-5}$$

1.11.3. Errores de potencias y raíces

En el caso de estas dos operaciones, se utilizan también los respectivos errores relativos, aplicando las siguientes ecuaciones.

Potencias

$$a = a_1^n$$

$$\delta a = n * \delta a_1 \tag{1.16}$$

Raíces

$$a = \sqrt[n]{a_1}$$

$$\delta a = \frac{1}{n}\delta a_1 \tag{1.17}$$

La aplicación de las fórmulas de potencias y raíces de puede encontrar en el siguiente problema, que combina las diferentes operaciones.

Ejemplos

Resolver la siguiente expresión, utilizando las reglas de operaciones, revisadas anteriormente.

$$X = \frac{A\sqrt[4]{B} + C^2\sqrt[3]{C}}{E^2\sqrt[3]{F} + G^2\sqrt[3]{H}}$$

$$A = 94{,}75 \pm 0{,}03$$

$$B = 145{,}8 \pm 0{,}02$$

$$C = 9{,}54 \pm 0{,}03$$

$$D = 98{,}41 \pm 0{,}02$$

$$E = 7{,}64 \pm 0{,}02$$

$$G = 416{,}2 \pm 0{,}04$$

$$H = 37{,}21 \pm 0{,}04$$

Se recomienda realizar las operaciones indicadas y no simplemente el resultado final, pues estos valores serán útiles durante el desarrollo de la resolución del problema.

$$X = \frac{2955813{,}558 + 420{,}1875}{523{,}5912 + 578083{,}2728}$$

$$X = \frac{2956233{,}746}{578606{,}864}$$

$$X = 5{,}1092$$

Entre A y B existe una operación de multiplicación por tanto hay que trabajar con errores relativos. Además, existen una potencia (Cubica) en A y un raíz (Cuarta) en B, la aplicación de la regla correspondiente, está indicada con el número 3 y el número$\frac{1}{4}$.

$$\delta ab = \delta a + \delta b$$

$$\delta ab = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\delta ab = 3 * \frac{0{,}03}{94{,}75} + \frac{1}{4} * \frac{0{,}02}{145{,}8}$$

$$\delta ab = 0{,}000984$$

Entre A,B,C,D existe una suma por lo tanto la regla que se debe aplicar será la correspondiente a esta operación, en donde se debe trabajar con errores absolutos por lo tanto, se calcula el error absoluto de AB, para tenerlo listo para cuando se calcule el error absoluto de CD.

$$\Delta ab = 2955813{,}558 * 0{,}000984 = 2908{,}5205$$

Nuevamente entre C y D, hay una operación de multiplicación por lo tanto se debe usar errores relativos. Además, en C hay una potencia (cuadrada) y en D una raíz (Cubica), la regla se aplica y los números 2 y $\frac{1}{3}$, son la aplicación de esta norma de potencia y raíces.

$$\delta cd = \delta c + \delta d$$

$$\delta cd = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d}$$

$$\delta cd = 2 * \frac{0{,}03}{9{,}54} + \frac{1}{3} * \frac{0{,}02}{98{,}45}$$

$$\delta cd = 0{,}006357$$

Como se indicó, antes entre A;B;C;D existe una suma por lo tanto la regla que se debe aplicar será la correspondiente a esta operación, en donde se debe trabajar con errores absolutos por lo tanto, se calcula el error absoluto de CD, para sumarlo con el error absoluto de AB.

$$\Delta cd = 420{,}1875 * 0{,}006357 = 2911{,}916$$

Entre ABCD y EFGH, existe una operación de cociente, entonces se debe usar nuevamente errores relativos, entonces se calcula error relativo de ABCD, para tenerlo disponible en una siguiente etapa.

$$\Delta abcd = \frac{2911{,}1916}{2956233{,}746}$$

$$\Delta abcd = 0{,}0009848$$

El procedimiento se repite para el denominador.

$$\delta ef = \delta e + \delta f$$

$$\delta ef = \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta f}{f}$$

$$\delta ef = 2 * \frac{0{,}02}{7{,}64} + \frac{1}{3} * \frac{0{,}03}{721{,}8}$$

$$\delta ef = 0{,}005249$$

$$\Delta ef = 523{,}5912 * 0{,}005249 = 2{,}7483$$

$$\delta gh = \delta g + \delta h$$

$$\delta gh = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h}$$

$$\delta gh = 2 * \frac{0{,}04}{416{,}2} + \frac{1}{3} * \frac{0{,}04}{37{,}21}$$

$$\delta gh = 0{,}0005505$$

$$\Delta gh = 578083{,}2728 * 0{,}0005505 = 318{,}2348$$

$$\Delta efgh = \Delta ef + \Delta gh$$

$$\Delta efgh = 2{,}7483 + 318{,}2348 = 320{,}9399$$

Aquí se calcula el error relativo de EFGH, para combinarlo con el error relativo de ABCD que se calculó anteriormente.

$$\delta efgh = \frac{320{,}9399}{578606{,}864}$$

$$\delta efgh = 0{,}0005547$$

Los dos errores relativos de ABCD y EFGH, se deben sumar.

$$\delta abcdefgh = 0{,}0005547 + 0{,}0009848 = 0{,}001539$$

Finalmente, para presentar la respuesta final se debe obtener el error absoluto.

$$\Delta abcdefgh = 0{,}001539 * 5{,}1092 = 0{,}007873$$

$$X = 5{,}1092 \pm 0{,}007873$$

Capítulo 2

SOLUCIÓN DE ECUACIONES Y SISTEMAS NO LINEALES

2.1. Introducción

Los métodos numéricos para encontrar la solución a ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales son varios, antes de analizarlos uno a uno es importante recordar algunos conceptos.

2.1.1. Ecuación

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más variables relacionadas con valores numéricos y operaciones aritméticas básicas. A las variables se las conoce como dependientes e independientes. la forma general está definida de la siguiente manera.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ...a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{2.1}$$

Donde:

$$n = grado\ \ ecuacion$$

$$a_n = coeficientes$$

$$x = variable\ \ independiente.$$

2.1.2. Ecuación no lineal

Una ecuación no lineal se caracteriza por ser una combinación de varios tipos de funciones en una misma, es decir son las que contienen funciones trascendentes como por ejemplo: polinómica, exponencial, logarítmica, trigonométrica.

Ejemplos:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 4x - 2$$

$$f(x) = sin(x) + e^x - x$$

2.1.3. Ecuación lineal

Una ecuación lineal es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas. A estas se las denomina miembros, en las que aparecen elementos conocidos y desconocidos (denominados variables). La relación entre variables esta representada por sumas y restas de una variable elevadas a la primera potencia, es decir $n = 1$.

Ejemplos:

$$4x - 2 = 0$$

$$12x - 5 = 8$$

2.2. Resolución de ecuaciones

La solución de una ecuación conciste en encotrar el valor o conjunto de valores con los cuales la ecuación se transforma en una identidad.

Ejemplo:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones o raíces. Puesto que es una ecuación de grado dos. Entonces para que se cumpla la igualdad los dos valores de x posibles son:

Ejemplo:

$$x = 1; \quad x = 2$$

Para resolver una ecuación o encontrar sus raíces, se puede optar por alguna de las opciones, entre las más conocidad mencionaremos:

2.2.1. Método Analítico

Mediante este método se da solución a la ecuación con procesos matemáticos conocidos por el lector.

Ejemplo: Se pide encontrar las raíces de la siguiente igualdad.

$$x^2 + 5x + 3 = 0$$

Es posible factorar o aplicar fórmula general, se presenta el ejemplo con fórmula general.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = -0{,}69722$$

$$x_2 = -4{,}30278$$

2.2.2. Método Gráfico

Este método consiste en representar en gráficas asociadas a las ecuaciones del sistema para deducir su solución.Es considerado como el mas sencillo para encontrar las raíces de una ecuación f(x)=0.
El objetivo de este es graficar la ecuación y observar los cruces por el eje x, los cuales son considerados como la solución de la ecuación o las raíces.

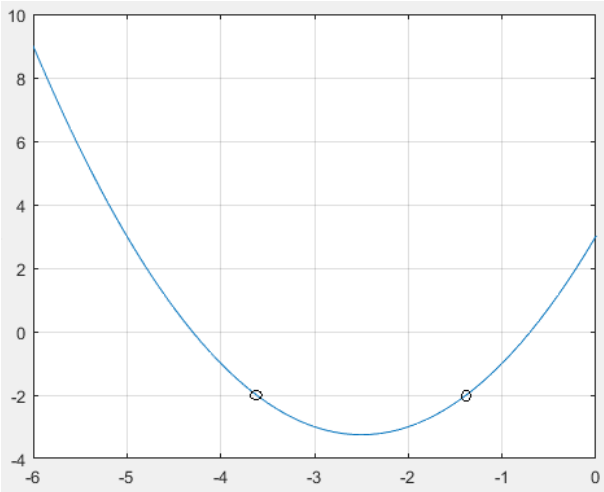


Figura 2.1. Método Gráfico

En la figura 2.1 se puede observar que los puntos de intersección con el eje x, son aproximadamente $-4{,}2$ y $-0{,}7$

A continuación, se hace referencia a los métodos numéricos, disponibles para resolver ecuaciones.

2.3. Métodos Numéricos para determinar la raíces de una ecuación

Para encontrar los valores con los cuales una ecuación se transforma en una identidad aplicaremos los métodos conocidos como: afinamiento de la raíz, los mismos que tienen la siguiente clasificación mostrados en la figura 2.2.

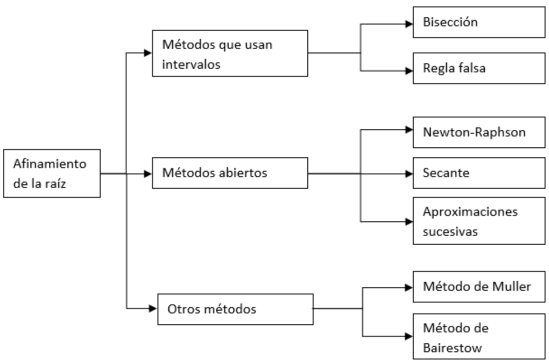


Figura 2.2. Métodos Numéricos para encontrar las raíces de una ecuación

A continuación, se revisa a detalle cada uno de los métodos indicados.

2.3.1. Método de Bisección

El método de bisección conocido como de búsqueda incremental,conciste en localizar un intervalo en donde la función cambie de signo de + a - o viceversa. La localización del cambio de signo y por ende de la raíz, se logra al hacer cada vez el intervalo mas pequeño (dividir el intervalo en sub intervalos). El proceso se repite constantemente y la aproximación cada vez es mejor, ver la siguiente figura 2.3.

El algoritmo de bisección es adecuado si se quiere realizar la evaluación de una sola raíz. Sin embargo hay muchos caso en Ingeniería en donde las cosas no suceden así. Por ejemplo se desea desarrollar un programa computacional que localice varias raíces, entonces el algoritmo anterior tendría que llamar al algoritmo muchas veces , en el transcurso de una sola ejecución.

Una función puede consistir en muchas líneas de código y su evaluación llega a tomar un tiempo importante de ejecución, llegando incluso a que una función se la representa en un programa con una computadora independiente.Se debe realizar el menor número de evaluaciones o procesos repetitivos con la finalidad de disminuir el costo computacional ya que se puede pasar fácilmente de evaluaciones 2n a n+1.

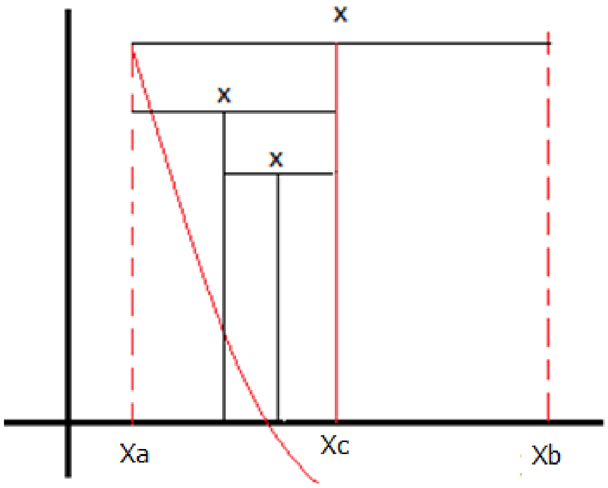


Figura 2.3. Métodos Numéricos para encontrar las raíces de una ecuación

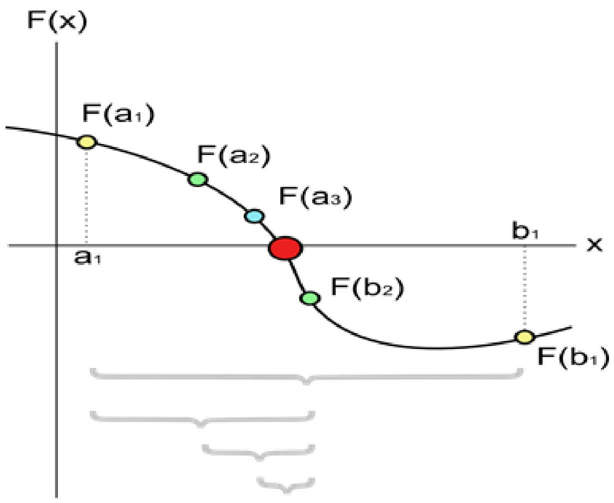


Figura 2.4. Métodos de Bisección

Criterios de parada

$$a)\ \ |X_n - X_{n-1}| < \varepsilon \tag{2.3}$$

$$b)\ \ |\frac{X_n - X_{n-1}}{X_n}| < \varepsilon \tag{2.4}$$

Los criterios de para, sirven para determinar en qué momento se debe detener el proceso, el presente utiliza el tercer criterio en donde el valor de $\varepsilon = 0{,}00001$.

- **Algoritmo del método de bisección**

  El proceso aplicable en este método se describió brevemente, sin embargo, debe seguir un algoritmo específico:
  1) Grafcar la ecuación.
  2) Se escoge los valores iniciales Xa y Xb los cuales deben encerrar a la raíz.

3) Determinar el primer valor que se está acercando a la raíz, es decir la primera aproximación, utilizando la siguiente fórmula.

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} \tag{2.5}$$

4) Se realizan las siguientes evaluaciones para determinar en qué intervalo se halla la raíz. a) La ráiz esta en el primer intervalo si:

$$f(x_a) * f(x_c) < 0 \tag{2.6}$$

b) La ráiz esta en el segundo intervalo si:

$$f(x_a) * f(x_c) > 0 \tag{2.7}$$

c) Ráiz encontrada:

$$f(x_a) * f(x_c) = 0 \tag{2.8}$$

5) Se realiza una nueva aproximación a la raíz, nuevamente utilizando la fórmula:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$$

2.3.2. Método de Bisección con Matlab

A continuación, se detalla el script correspondiente para la resolución de ecuaciones con este método de biseccion mediante Matlab.

Programa 2.1. Método de Bisección

```
% Metodo de la BisecciOn
clc
clear
syms x %declara una variable
format short % 4 decimales
y=input ('Ingrese la funcion y=');
f=inline(y); %transforma en una funcion
xmin=input('Ingrese el limite inferior de la grafica Xmin=');
xmax=input('Ingrese el limite superior de la grafica Xmax=');
fplot (char(y),[xmin xmax])
grid on
disp('Obsevre la grafica y seleccione Xa Xb')
xa= input('Ingrese el limite inferior del intervalo Xa=');
xb= input('Ingrese el limite superior del intervalo Xb=');
es=input('Ingrese el porcentaje de error Es=');
n=0;
er=100;
xxc(1,1)=0;
if ((f(xa)>0&f(xb)>0|f(xa)<0&f(xb)<0))
    disp('Los valores de Xa y Xb deben ser de signos contrarios')
else
    fprintf('\t\t N\t\t Xa\t\t Xb\t\t\t Xc\t\t f(Xa)\t f(Xc)\t\t Prod\t\t Er\n')
    while er>es
        xc=(xa+xb)/2;
        xxc(n+2,1)=xc;
        er=100*abs((xxc(n+2)-xxc(n+1))/xxc(n+2));
        disp([n+1,xa,xb,xc,f(xa),f(xc),f(xa)*f(xc),er]);

        if f(xa)*f(xc)<0
            xb=xc;
        else
            xa=xc;
        end
        n=n+1;
    end
    disp ('la raiz es');
    vpa(xc,7)
end
```

Ejemplo 1:

Encontrar la raíz de la siguiente función dentro del intervalo $[1; 1{,}8]$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

Considerar: $\varepsilon = 0{,}00001$
Al iniciar el programa se pide ingresar la ecuación y algunos datos adicionales, como se indica a continuación:

Ingrese la función: $f(x) = x.^4 - 2. * x^3 - 4. * x^2 + 4. * x + 4$
- Ingrese el límite inferior de la gráfica: $Xmin = -2$
- Ingrese el límite superior de la gráfica:$Xmin = 2$
La figura 2.5, muestra la solución del ejercicio.

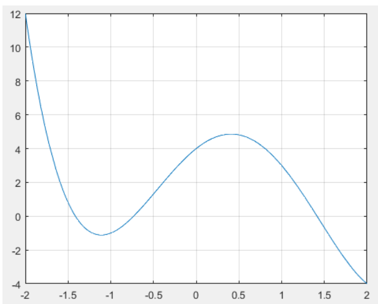


Figura 2.5. Solución gráfica ejercicio 1 Metódo de Bisección

El programa le indicará ver la gráfica y seleccionar Xa, Xb.
- Ingrese el límite inferior del intervalo $Xa = 1$
- Ingrese el límite superior del intervalo $Xb = 1{,}8$
Los resultados mostrados son los mostrados en la figura 2.5:

Ingrese el porcentaje de error Es=0.00001

N	Xa	Xb	Xc	f(Xa)	f(Xc)	Prod	Er
1.0000	1.0000	1.8000	1.4000	3.0000	0.1136	0.3408	100.0000
2.0000	1.4000	1.8000	1.6000	0.1136	-1.4784	-0.1679	12.5000
3.0000	1.4000	1.6000	1.5000	0.1136	-0.6875	-0.0781	6.6667
4.0000	1.4000	1.5000	1.4500	0.1136	-0.2867	-0.0326	3.4483
5.0000	1.4000	1.4500	1.4250	0.1136	-0.0863	-0.0098	1.7544
6.0000	1.4000	1.4250	1.4125	0.1136	0.0137	0.0016	0.8850
7.0000	1.4125	1.4250	1.4187	0.0137	-0.0363	-0.0005	0.4405
8.0000	1.4125	1.4187	1.4156	0.0137	-0.0113	-0.0002	0.2208
9.0000	1.4125	1.4156	1.4141	0.0137	0.0012	0.0000	0.1105
10.0000	1.4141	1.4156	1.4148	0.0012	-0.0050	-0.0000	0.0552
11.0000	1.4141	1.4148	1.4145	0.0012	-0.0019	-0.0000	0.0276
12.0000	1.4141	1.4145	1.4143	0.0012	-0.0004	-0.0000	0.0138
13.0000	1.4141	1.4143	1.4142	0.0012	0.0004	0.0000	0.0069
14.0000	1.4142	1.4143	1.4142	0.0004	0.0000	0.0000	0.0035
15.0000	1.4142	1.4143	1.4142	0.0000	-0.0002	-0.0000	0.0017
16.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	-0.0001	-0.0000	0.0009
17.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0004
18.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
19.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
20.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0001
21.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
22.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
23.0000	1.4142	1.4142	1.4142	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000

la raiz es

ans =

1.414214

Figura 2.6. Resultados ejercicio 1 Método de Bisección

Ejemplo 2: Encontrar la raíz de la siguiente función dentro del intervalo $[0; 2]$

$$f(x) = e^x - 2$$

Ingrese la función: $f(x) = exp(x) - 2$
- Ingrese el límite inferior de la gráfica $Xmin = -1$
- Ingrese el límite superior de la gráfica $Xmin = 1$

La solución al ejercicio 2 graficamente se ve en la figura 2.7.

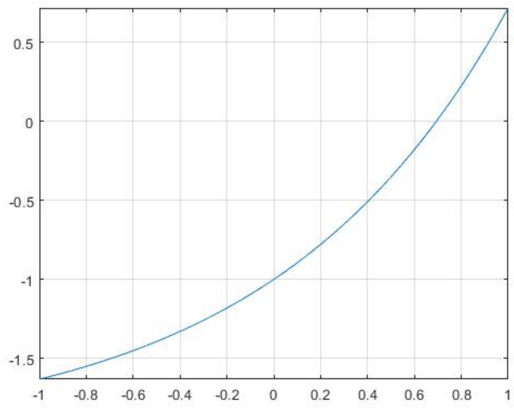


Figura 2.7. Solución gráfica ejercicio 2 Metódo de Bisección

Observe la gráfica y seleccione Xa, Xb.
- Ingrese el límite inferior del intervalo $Xa = 0$
- Ingrese el límite superior del intervalo $Xb = 2$
- Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$

Los resultados mostrados se pueden ver en la figura 2.8

N	Xa	Xb	Xc	f(Xa)	f(Xc)	Prod	Er
1.0000	0	2.0000	1.0000	-1.0000	0.7183	-0.7183	100.0000
2.0000	0	1.0000	0.5000	-1.0000	-0.3513	0.3513	100.0000
3.0000	0.5000	1.0000	0.7500	-0.3513	0.1170	-0.0411	33.3333
4.0000	0.5000	0.7500	0.6250	-0.3513	-0.1318	0.0463	20.0000
5.0000	0.6250	0.7500	0.6875	-0.1318	-0.0113	0.0015	9.0909
6.0000	0.6875	0.7500	0.7188	-0.0113	0.0519	-0.0006	4.3478
7.0000	0.6875	0.7188	0.7031	-0.0113	0.0201	-0.0002	2.2222
8.0000	0.6875	0.7031	0.6953	-0.0113	0.0043	-0.0000	1.1236
9.0000	0.6875	0.6953	0.6914	-0.0113	-0.0035	0.0000	0.5650
10.0000	0.6914	0.6953	0.6934	-0.0035	0.0004	-0.0000	0.2817
11.0000	0.6914	0.6934	0.6924	-0.0035	-0.0015	0.0000	0.1410
12.0000	0.6924	0.6934	0.6929	-0.0015	-0.0006	0.0000	0.0705
13.0000	0.6929	0.6934	0.6931	-0.0006	-0.0001	0.0000	0.0352
14.0000	0.6931	0.6934	0.6932	-0.0001	0.0002	-0.0000	0.0176
15.0000	0.6931	0.6932	0.6932	-0.0001	0.0001	-0.0000	0.0088

```
la raiz es

ans =

0.6931763
```

Figura 2.8. Resultados ejercicio 2 Método de Bisección

2.4. Método de la Regla Falsa

A pesar de que el método de bisección permite encontrar las raíces de una función, su método(fuerza bruta) es ineficiente debido a que al dividir en intervalo cada vez en mitades no se considera las magnitudes de $f(x_i)yf(x_u)$.

Esta visualización gráfica la aprovecha el método de falsa posición el cual consiste en unir con una línea recta $f(x_i)yf(x_u)$ y la intersección de esta recta con el eje de las x da una mejor aproximación de la raíz.

El nombre del método viene por que se reemplaza la curva de la función por una línea recta, dando a esta una falsa posición (regula falsi). En el método de falsa posición uno de los valores extremos puede permanecer constante y solo el otro converger hacia la raíz. La raíz en este método se conocerá con mayor exactitud que la tolerancia preestablecida en relación al método de bisección en la mayoría de los casos.
Sin embargo no se debe generalizar debido a que existirán ecuaciones en las cuales el método de bisección converge mejor que el mencionado.

La desventaja de este método es su unilateralidad, conforme avanza en iteraciones, uno de los puntos tiende a permanecer fijo, esto puede ocasionar una mala convergencia en especial en funciones con una curvatura importante, la representación gráfica de este método se puede ver en la figura 2.9.

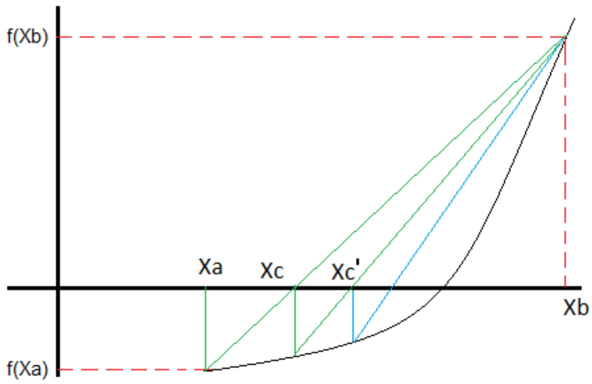


Figura 2.9. Representación gráfica del método de la Regla Falsa

- **Algoritmo del método Regla Falsa**

1.- Se escogen los valores iniciales x_a y x_b, que encierran la raíz.
2.- Determinar la primera aproximación x_c

$$x_c = x_b - \frac{f(x_b) * (x_a - x_b)}{f(x_a) - f(x_b)} \tag{2.9}$$

3.- Realizar las evaluaciones.

Raíz en el primer intervalo $f(x_a) * f(x_c) < 0$
Raíz en el segundo intervalo $f(x_a) * f(x_c) > 0$
Raíz encontrada $f(x_a) * f(x_c) = 0$

4.- Se realiza una nueva aproximación

$$x_c = x_b - \frac{f(x_b)(x_a - x_b)}{f(x_a) - f(x_b)}$$

2.4.1. Método de la Regla Falsa con Matlab

A continuación, se detalla el script correspondiente para la resolución de ecuaciones con este método de la regla falsa mediante Matlab:

Programa 2.2. Método Regla Falsa

```
% Metodo de la regla falsa
clc
clear
syms x %declara una variable
format short % 4 decimales
y=input ('Ingrese la funcion y=');
f=inline(y); %transforma en una funcion
xmin=input('Ingrese el limite inferior de la grafica Xmin=');
xmax=input('Ingrese el limite superior de la grafica Xmax=');
fplot (char(y),[xmin xmax])
grid on
disp('Observe la grafica y seleccione Xa Xb')
xa= input('Ingrese el limite inferior del intervalo Xa=');
xb= input('Ingrese el limite superior del intervalo Xb=');
es=input('Ingrese el porcentaje de error Es=');
n=0;
er=100;
xxc(1,1)=0;
if ((f(xa)>0&f(xb)>0|f(xa)<0&f(xb)<0))
    disp('Los valores de Xa y Xb deben ser de signos contrarios')
else
    fprintf('\t\t N\t\t Xa\t\t Xb\t\t\t Xc\t\t f(Xa)\t f(Xc)\t\t Prod\t\t Er\n')
    while er>es
        xc=xb-(f(xb)*(xb-xa))/(f(xb)-f(xa));
        xxc(n+2,1)=xc;
        er=100*abs((xxc(n+2)-xxc(n+1))/xxc(n+2));
        disp([n+1,xa,xb,xc,f(xa),f(xc),f(xa)*f(xc),er]);

        if f(xa)*f(xc)<0
            xb=xc;
        else
            xa=xc;
        end
        n=n+1;
    end
    disp ('la raiz es');
    vpa(xc,7)
end
```

Ejemplo 1: Encontrar la raíz de la siguiente función dentro del intervalo [1; 1,8]

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

Considerar: $\varepsilon = 0{,}00001$ **Ingrese la función:** $y = x.^4 - 2.*x^3 - 4.x^2 + 4.x + 4$
Ingrese el límite inferior de la gráfica : $Xmin = -2$
Ingrese el límite superior de la gráfica : $Xmin = 2$ En la figura 2.10 se evidencia la solución gráfica a este problema.

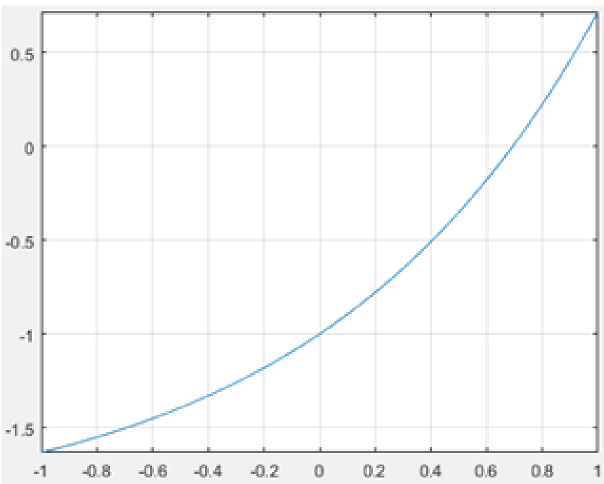


Figura 2.10. Solución gráfica ejercicio 1 Metódo Regla Falsa

- Observe la gráfica y seleccione Xa, Xb
- Ingrese el límite inferior del intervalo $Xa = 1$
- Ingrese el límite superior del intervalo $Xb = 1{,}8$
- Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$

Los resultados al problema 1 se muestran en la figura 2.11.

N	Xa	Xb	Xc	f(Xa)	f(Xc)	Prod	Er
1.0000	1.0000	1.8000	1.4050	3.0000	0.0739	0.2218	100.0000
2.0000	1.4050	1.8000	1.4147	0.0739	-0.0039	-0.0003	0.6880
3.0000	1.4050	1.4147	1.4142	0.0739	0.0000	0.0000	0.0345
4.0000	1.4142	1.4147	1.4142	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5.0000	1.4142	1.4147	1.4142	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

```
la raiz es

ans =

1.414214
```

Figura 2.11. Resultados ejercicio 1 método de la Regla Falsa

Ejemplo 2: Encontrar la raíz de la siguiente función dentro del intervalo $[1; 1{,}5]$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

Ingrese la función: $y = x^3 + 4x^2 - 10$
Ingrese el límite inferior de la gráfica : $Xmin = -2$
Ingrese el límite superior de la gráfica : $Xmin = 2$
La solución al problema 2 se puede ver en la figura 2.12.

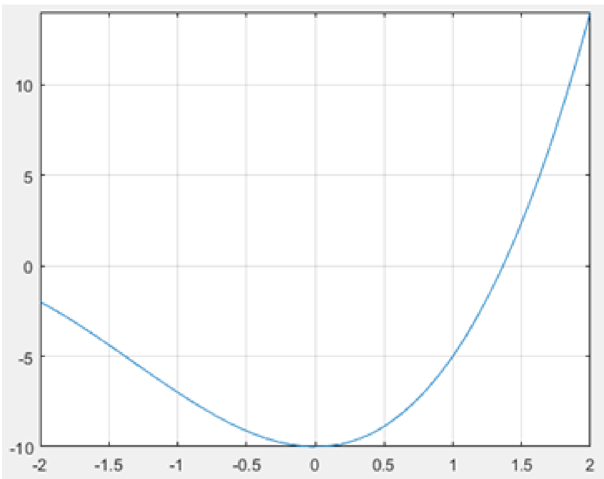


Figura 2.12. Solución gráfica ejercicio 2 Metódo Regla Falsa

- Observe la gráfica y seleccione Xa, Xb
- Ingrese el límite inferior del intervalo $Xa = 1$
- Ingrese el límite superior del intervalo $Xb = 1{,}5$
- Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$

Los resultados que arroja matlab se los puede ver en la figura 2.13.

N	Xa	Xb	Xc	f(Xa)	f(Xc)	Prod	Er
1.0000	1.0000	1.5000	1.3390	-5.0000	-0.4279	2.1393	100.0000
2.0000	1.3390	1.5000	1.3636	-0.4279	-0.0275	0.0118	1.8026
3.0000	1.3636	1.5000	1.3651	-0.0275	-0.0017	0.0000	0.1144
4.0000	1.3651	1.5000	1.3652	-0.0017	-0.0001	0.0000	0.0072
5.0000	1.3652	1.5000	1.3652	-0.0001	-0.0000	0.0000	0.0005
6.0000	1.3652	1.5000	1.3652	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
7.0000	1.3652	1.5000	1.3652	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

```
la raiz es
ans =
1.36523
```

Figura 2.13. Resultados ejercicio 2 método de la Regla Falsa

Nota. Los Métodos que usan intervalos cerrados Bisección y Regla falsa tienen la ventaja que siempre convergen y la desventaja es que son lentos.

2.5. Método de Newton Raphson

Los métodos cerrados permiten encontrar las raíz de una función cuando esta se encuentra dentro de un intervalo predeterminado por un límite superior y por un límite inferior.Cuando se realizan repeticiones continuas de estos métodos se generan aproximaciones mas cercanas a la raíz, y se dice que estas son convergentes porque se acercan de forma progresivamente a la raíz mientras se avanza en el proceso del cálculo.

Existen otros métodos considerados abiertos, los cuales se basan en fórmulas y en cálculos que requieren únicamente de un valor inicial. El inconveniente que presentan estos, es que en ocasiones divergen o se alejan de la raíz verdadera a medida que avanzan en cálculo.

El método ampliamente más utilizado para encontrar las raíces de una función es el método de Newton, ya que es mas rápido y efectivo frente a los anteriores. Si el valor inicial para la raíz es x_i, entonces se puede trazar una tangente desde el punto x_iy $f(x_i)$ de la curva. La mayor parte del tiempo esta recta corta el eje de las x, dando una aproximación mejorada de la raíz.

El error es proporcional al cuadrado del error anterior, es decir el número de cifras decimales aproximadamente se duplican en cada iteración(a este comportamiento se lo llama convergencia cuadrática.En este método se deben elegir un valor cercano a la raíz x_i, el mismo puede ser mayor o menor a la raíz, luego se debe calcular la aproximación a la raíz (x_{i+1}), el procedimiento se realiza de forma iterativa hasta cumplir con el criterio de paro. Además en este método es imprescindible calcular la derivada de la función, el método de Newton se lo puede ver en la figura 2.14.

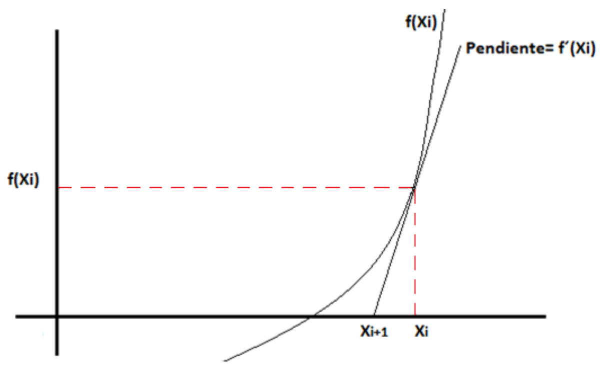


Figura 2.14. Representación gráfica del método de la Newton Rhapson

El método parte de la ecuación de la Pendiente de la tangente.

$$f'(Xi) = \frac{f(Xi)}{Xi - X_{i+1}} \tag{2.10}$$

Y reordenando, se obtiene la ecuación de la secante con la cual se calcula la aproximación de la raíz.

$$X_{i+1} = Xi - \frac{f(Xi)}{f'(Xi)} \tag{2.11}$$

A continuación, se detalla el script correspondiente para la resolución de ecuaciones con este método mediante Matlab:

2.5.1. Condiciones de convergencia del Método

- **1) Existencia de la raíz.**
  Dado un cierto intervalo de trabajo de trabajo [a,b], dentro del mismo debe cumplirse $f(a)f(b) < 0$.

- **2)Unicidad de la raíz.**
  Dado un cierto intervalo de trabajo de trabajo $[a, b]$, la derivada de $f(x)$ debe ser diferente de cero.

- **3)Concavidad**
  La gráfica de la función$f(x)$ dentro del intervalo de trabajo $[a, b]$, debe ser cóncava, hacia arriba o hacia abajo. Para ello debe verificarse que: $f''(x) <= 0$ o $f''(x) >= 0$.

- **4)Intersección de la tangente a $f(x)$, dentro de $[a, b]$**
  Asegurar que la tangente a la curva en el extremo del intervalo $[a, b]$, en el cual $f'(x)$ sea mínima intersecte el eje x dentro del intervalo.

  La convergencia por este método, depende del comportamiento de su función y de la exactitud del valor inicial, la única solución es tener un valor inicial suficientemente cercano a la raíz. Para poder tomar un valor inicial aceptable se sugiere guiarse de una gráfica de la función.Además es necesario utilizar programas computaciones que permitan reconocer la convergencia lenta o la divergencia de una función.

2.5.2. Método de la Newton Rhapson con Matlab

El algoritmo del método es: 1)Graficar la función.
2)Escoger el valor adecuado de x_0.
3)Ingresar la función.
4)Ingresar la derivada de la función.
5)Evaluar la función y su derivada.
6) Empezar el ciclo de repetición para cada iteración.
7)Establecer el criterio de parada.
8)Establecer el número de iteraciones para evitar convergencias lentas o divergencias.
9)El programa mostrará en su salida la raíz aproximada y alertará si en algún momento $f'(x) = 0$

A continuación, se detalla el script correspondiente para la resolución de ecuaciones con este método de Newton Raphson mediante Matlab.

Programa 2.3. Método de Newton Rhapson

```
% Metodo de Newton-Rapson
clc
clear
syms x %declara una variable
format short % 4 decimales
y=input ('Ingrese la funcion y=');
```

```
f=inline(y); %transforma en una funcion
d=diff(y,x);
df=inline(d);
xmin=input('Ingrese el limite inferior de la grafica Xmin=');
xmax=input('Ingrese el limite superior de la grafica Xmax=');
fplot (char(y),[xmin xmax])
grid on
disp('Observe la grafica y seleccione Xc')
xc= input('Ingrese el valor Xc=');
es=input('Ingrese el porcentaje de error Es=');
n=0;
er=100;
xxc(1,1)=0;

    fprintf('\t\t N\t\t Xc\t\t f(Xc)\t f(Xc)\t\t Xc+1\t\t Er\n')
    while er>es
        xn=xc-(f(xc))/(df(xc));
        xxc(n+2,1)=xn;
        er=100*abs((xxc(n+2)-xxc(n+1))/xxc(n+2));
        disp([n+1,xc,f(xc),df(xc),xn,er]);

        xc=xn;
        n=n+1;
    end
    disp ('la raiz es');
    vpa(xc,7)
```

Ejemplo 1: Encontrar la primera raíz positiva de la siguiente función.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

Es importante inicialmente hallar la derivada de la función.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x$$

Se utiliza en primer lugar un valor menor a la raíz 1
Ingrese la función:$y = x.^4 - 2.*x^3 - 4.*x^2 + 4.*x + 4$
Ingrese el límite inferior de la gráfica : $Xmin = -2$
Ingrese el límite superior de la gráfica : $Xmin = 2$
En la figura 2.15, se evidencia la solución gráfica del problema de Newton Rhapson.

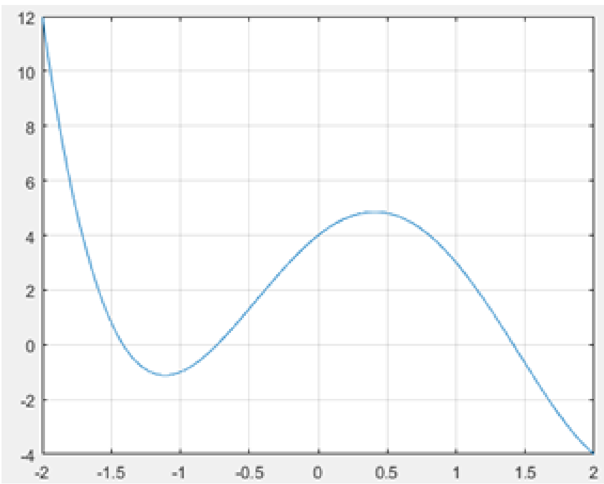


Figura 2.15. Solución gráfica ejercicio 1 Metódo Newton Rhapson

- Observe la gráfica y seleccione x_c
- Ingrese el valor de $xc = 1$
- Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$

los resultados se muestran en la figura 2.15.

N	Xc	f(Xc)	f´(Xc)	Xc+1	Er
1.0000	1.0000	3.0000	-6.0000	1.5000	100.0000
2.0000	1.5000	-0.6875	-8.0000	1.4141	6.0773
3.0000	1.4141	0.0012	-7.9999	1.4142	0.0107
4.0000	1.4142	-0.0000	-8.0000	1.4142	0.0000

```
la raiz es

ans =

1.414214
```

Figura 2.16. Resultados ejercicio 1 método de Newton Rhapson

Se utiliza en segundo lugar un valor mayor a la raíz: 2

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x$$

Ingrese la función: $y = x.^4 - 2.*x^3 - 4.*x^2 + 4.*x + 4$
Ingrese el límite inferior de la gráfica : $Xmin = -2$
Ingrese el límite superior de la gráfica : $Xmin = 2$
La figura 2.17 muestra la solución grafica para el valor mayor a r2.

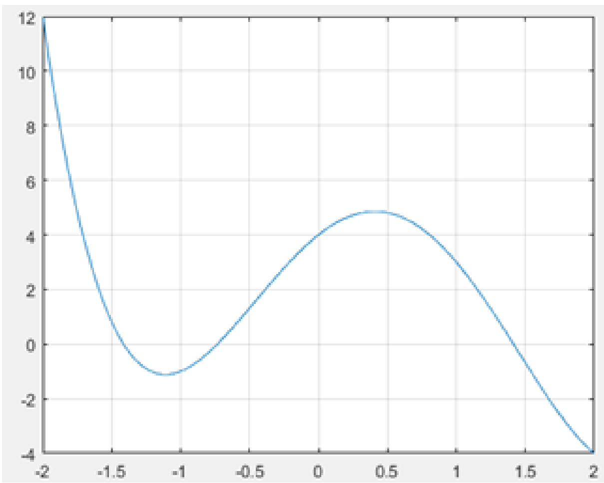


Figura 2.17. Solución gráfica ejercicio 1 Metódo Newton Rhapson valor mayor a r2

- Observe la gráfica y seleccione x_c
- Ingrese el valor de $Xc = 2$
- Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$

Los resultados con r mayor a 2 se evidencia en la figura 2.18.

```
        N        Xc       f(Xc)    f´(Xc)       Xc+1         Er
    1     2     -4     -4      1    100

    2.0000    1.0000    3.0000   -6.0000    1.5000   33.3333

    3.0000    1.5000   -0.6875   -8.0000    1.4141    6.0773

    4.0000    1.4141    0.0012   -7.9999    1.4142    0.0107

    5.0000    1.4142   -0.0000   -8.0000    1.4142    0.0000

la raiz es

ans =

1.414214
```

Figura 2.18. Resultados ejercicio 1 método de Newton Rhapson con r mayor a 2

2.6. Método de la secante o de las cuerdas

El problema a gran escala en la implementación del método de newton es la evaluación de la derivada. Existen funciones derivables fácilmente como los polinomios y otras muchas, sin embargo existen funciones que en ocasiones resultan muy difíciles de calcular.Cuando ocurren estos casos la solución es aproximar a la derivada mediante una diferencia finita dividida hacia atrás.

Una de las diferencia notorias con el método de newton es, la utilización de dos valores iniciales de x, y aunque muchos pensarían que se trata de un método cerrado, en realidad no lo es. Consiste en trazar una cuerda que corte a la curva, tal como muestra la figura 2.19.

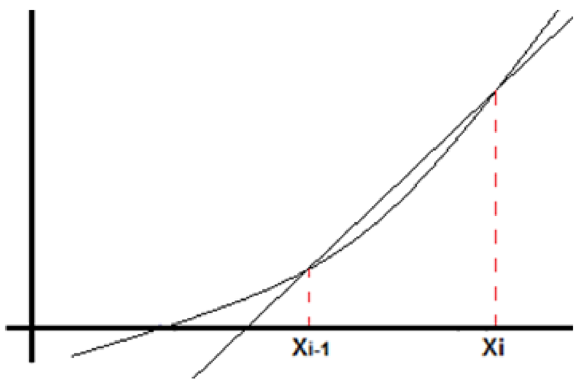


Figura 2.19. Representación gráfica del método de la Secante

Y la aplicación de la ecuación de la secante.

$$X_{i+1} = Xi - \frac{f(Xi)(X_{i-1} - Xi)}{f\left(X_{i-1}\right) - f(Xi)} \tag{2.12}$$

En este método se deben elegir dos valores cercanos a la raíz ($X_{i-1} y X_i$), los mismos pueden ser mayores o menores e incluso pueden encerrar a la raíz, luego se debe calcular la aproximación a la raíz (X_{i+1}), que representa el punto de corte de la recta secante con el eje x, el procedimiento se realiza de forma iterativa hasta cumplir con el criterio de paro. Además, en este método es imprescindible calcular la derivada de la función.

2.6.1. Método de la Secante con Matlab

El algoritmo del método de la secante consta de los siguientes pasos:

1)Graficar la función.
2)Escoger el valor adecuado de x_i y $x_i - 1$.

3)Ingresar la función.
4)Evaluar la función en x_i y $x_i - 1$.
5) Realizar el ciclo de repetición para cada iteración.
6) Establecer el criterio de parada
7)Establecer el número de iteraciones para evitar convergencias lentas o divergencias.
8)El programa mostrará en su salida la raíz aproximada y alertará si en algún momento $f'(x) = 0$.

A continuación, se detalla el script correspondiente para la resolución de ecuaciones con este método de la secante mediante Matlab.

Programa 2.4. Método de la Secante

```

% Metodo de la Secante
clc
clear
syms x %declara una variable
format short % 4 decilmales
y=input ('Ingrese la funcion y=');
f=inline(y); %transforma en una funcion
xmin=input('Ingrese el limite inferior de la grafica Xmin=');
xmax=input('Ingrese el limite superior de la grafica Xmax=');
fplot (char(y),[xmin xmax])
grid on
disp('Observe la grafica y seleccione los valores de Xc-1 y Xc')
xb= input('Ingrese el valor Xc-1=');
xc= input('Ingrese el valor Xc=');
es=input('Ingrese el porcentaje de error Es=');
n=0;
er=100;
xxc(1,1)=0;

     fprintf('\t\t N\t\t Xc-1\t Xc\t\t f(Xc-1)\t f(Xc)\t\t Xc+1\t Er\n')
    while er>es
        xn=xc-(f(xc)*(xb-xc))/(f(xb)-f(xc));
        xxc(n+2,1)=xn;
        er=100*abs((xxc(n+2)-xxc(n+1))/xxc(n+2));
         disp([n+1,xb,xc,f(xb),f(xc),xn,er]);
        xc=xn;
        n=n+1;
    end
    disp ('la raiz es');
    vpa(xc,7)
```

Ejemplo 1: Encontrar la primera raíz positiva de la siguiente función.

$$f\left(X\right) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

$$f^{,}\left(x\right) = 4x^3 - 6x^2 - 8x$$

Se utilizan en primer lugar valores menores a la raíz: 1 y 1,2

- Ingrese la función$y = x^4 - 2 * x^3 - 4 * x^2 + 4 * x + 4$.
- Ingrese el límite inferior de la gráfica $Xmin = -2$.
- Ingrese el límite superior de la gráfica $Xmax = 2$.

La figura 2.20 muestra la función con los datos ingresados.

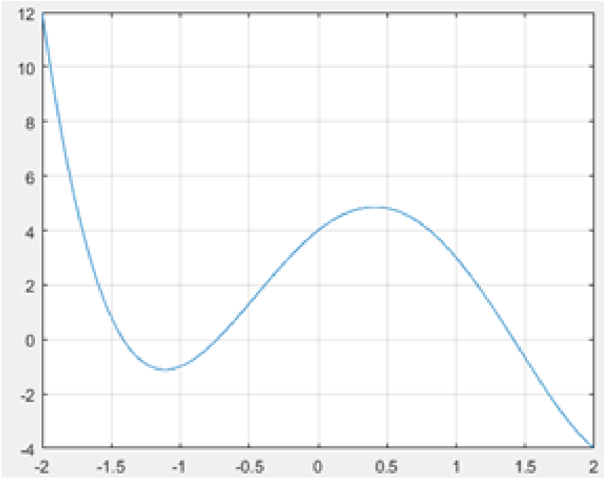


Figura 2.20. Resultados ejercicio 1 método de la Secante

- Observe la gráfica y seleccione los valores dex_{c-1} y x_c.
-Ingrese el valor $x_c - 1 = 1$.
-Ingrese el valor $x_c - 1 = 1{,}2$.
Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$.

Los resultados utilizando el método de la secante se pueden ver en la figura 2.21.

N	Xc-1	Xc	f(Xc-1)	f(Xc)	Xc+1	Er
1.0000	1.0000	1.2000	3.0000	1.6576	1.4470	100.0000
2.0000	1.0000	1.4470	3.0000	-0.2624	1.4110	2.5475
3.0000	1.0000	1.4110	3.0000	0.0256	1.4146	0.2499
4.0000	1.0000	1.4146	3.0000	-0.0027	1.4142	0.0263
5.0000	1.0000	1.4142	3.0000	0.0003	1.4142	0.0027
6.0000	1.0000	1.4142	3.0000	-0.0000	1.4142	0.0003
7.0000	1.0000	1.4142	3.0000	0.0000	1.4142	0.0000
8.0000	1.0000	1.4142	3.0000	-0.0000	1.4142	0.0000

```
la raiz es

ans =

1.414214
```

Figura 2.21. Resultados ejercicio 1 método de la Secante

- Valores mayores a la raíz: $1{,}8 y 2$.
- Ingrese la función $y = x^4 - 2 * x^3 - 4 * x^2 + 4 * x + 4$
- Ingrese el límite inferior de la gráfica $Xmin = -2$.
- Ingrese el límite superior de la gráfica $Xmax = 2$.
- Observe la gráfica y seleccione los valores de $x_{c-1} y x_c$.
- Ingrese el valor $x_{c-1} = 1{,}8$.
- Ingrese el valor $x_c = 2$.
- Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$.

Al realizar variaciones en los ingresos de datos,se muestran nuevos resultados mostrados en la figura 2.22.

N	Xc-1	Xc	f(Xc-1)	f(Xc)	Xc+1	Er
1.0000	1.8000	2.0000	-2.9264	-4.0000	1.2548	100.0000
2.0000	1.8000	1.2548	-2.9264	1.2485	1.4179	11.4980
3.0000	1.8000	1.4179	-2.9264	-0.0293	1.4140	0.2729
4.0000	1.8000	1.4140	-2.9264	0.0016	1.4142	0.0151
5.0000	1.8000	1.4142	-2.9264	-0.0001	1.4142	0.0008
6.0000	1.8000	1.4142	-2.9264	0.0000	1.4142	0.0000
7.0000	1.8000	1.4142	-2.9264	-0.0000	1.4142	0.0000

```
la raiz es

ans =

1.414214
```

Figura 2.22. Resultados ejercicio 1 método de la Secante 2

2.7. Método de las aproximaciones sucesivas

Consiste en transformar una función que se encuentra expresada de la forma $f(x) = 0$, a una nueva forma $x = g(x)$. Esta transformación se debe llevar a cabo mediante operaciones algebraicas muy sencillas, las mismas que consisten en despejar x.

Este método tiene una ventaja muy importante y es que en cada paso se cumplen operaciones matemáticas del mismo tipo, facilitando la programación en computadoras. A continuación, se muestran de forma esquemática, varios casos en los que se puede apreciar los distintos casos que pueden existir al utilizar este método, el método de las aproximaciones sucesivas se muestra en la figura 2.23.

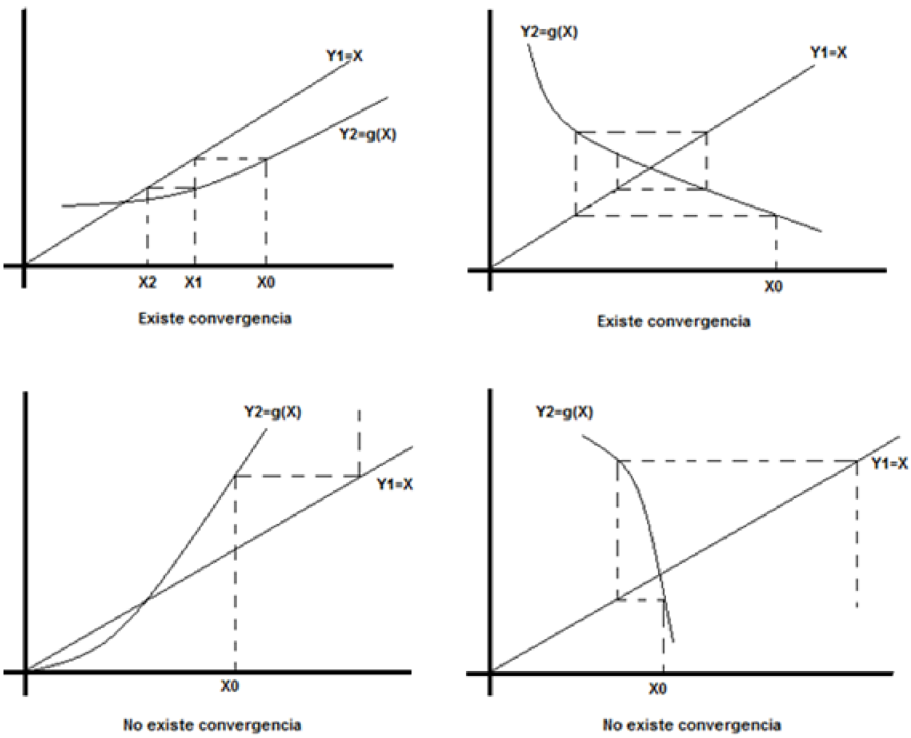


Figura 2.23. Representación gráfica de aproximaciones sucesivas

2.7.1. Ejemplos de transformación:

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \;\; forma \;\; f(x) = 0$$

Despejando x:

$$x = \frac{x^2+3}{2} \quad forma \;\; x = g(x)$$

$$x = \sqrt{2x-3} \quad forma \;\; x = g(x)$$

Aumentando x a cada lado de la igualdad.

$$x^2 - x + 3 = x \quad forma \;\; x = g(x)$$

Ejemplo 1:
Encuentre la segunda raíz positiva de la siguiente ecuación, mediante el método de las aproximaciones sucesivas.

$$f\left(X\right) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

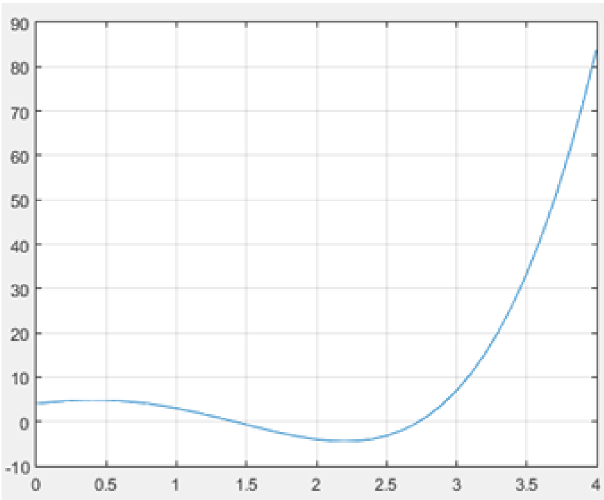


Figura 2.24. Resultados ejercicio 1 método Aproximaciones Sucesivas

Según la figura 2.24, la primera raíz positiva de esta ecuación esta ubicada aproximadamente en 2.7, se intentará a continuación encontrar un valor más adecuado. En primer lugar, se debe transformar la ecuación al tipo, $x = g(x)$. En este caso existen varias alternativas, se presentan cuatro de ellas.

$$f\left(x\right) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

$$x = \frac{-x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 4}{4}$$

$$x = \sqrt[2]{\frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 4}{4}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{x^4 - 4x^2 + 4x + 4}{2}}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{2x^3 + 4x^2 - 4x - 4}{1}}$$

Para la resolución se puede utilizar cualquiera de estas ecuaciones, una vez elegida una de ellas se debe trabajar con un valor cercano a la raíz, el cual puede ser mayor o menor a la misma. Claramente la elección de la ecuación acompañada de la elección del valor no asegura que se logre llegar a la solución, entonces habrá que probar las distintas opciones. Por tanto, se presentan algunas alternativas, para comprender este procedimiento.

- **Opción 1:** Se utiliza la ecuación.

$$x = \sqrt[3]{\frac{x^4 - 4x^2 + 4x + 4}{2}}$$

Y como valor inicial x=3, la tabla 2.1 muestra los valores obtenidos con la opción 1.

Iteración	x	x=g(x)	f(x)
1	3	3.124399	11.744259
2	3.124399	3.313266	21.108445

Tabla 2.1. Tabla opción 1

El valor de 3, se debe evaluar en la ecuación del tipo $x = g(x)$, encontrándose la "primera aproximación", este nuevo valor hay que evaluarlo en la ecuación original. Como se puede apreciar en la tabla los valores de la columna $f(x)$, son crecientes, esto nos indica que no existe convergencia, entonces hay que buscar otra alternativa.

- **Opción 2:** Se utiliza la ecuación.

$$x = \sqrt[4]{\frac{2x^3 + 4x^2 - 4x - 4}{1}}$$

Y como valor inicial x=3, los valores son mostrados en la tabla 2.2

Iteración	x	x=g(x)	f(x)
1	3	2.932972	4.861827
2	2.9329729	2.883563	3.459387
3	2.883563	2.846796	2.506731
...	...	...	...
...	2.732051	...	Menor a E

Tabla 2.2. Tabla opción 2

El procedimiento es el mismo, en este caso los valores de la columna f(x) son decrecientes, esto nos indica que si existe convergencia es decir que las opciones elegidas permiten encontrar la raíz, las iteraciones deben continuar hasta que el valor de la columna f(x) se menor que el error 0,00001 la raíz buscada es 2,732051.

- **Opción 3:** Se utiliza la ecuación.

$$x = \sqrt[3]{\frac{x^4 - 4x^2 + 4x + 4}{2}}$$

Y como valor inicial x=2, los resultados son mostrados en la tabal 2.3.

Iteración	x	x=g(x)	f(x)
1	2	1.817121	-3.036503
2	1.817121	1.648729	-1.852619
3	1.648729	1.526269	-0.897234
...	...	...	...
14	1.4192161	1.414214	$-6{,}84 * 10^{-6}$

Tabla 2.3. Tabla opción 3

- **Opción 4:** Se utiliza la ecuación.

$$x = \sqrt[2]{\frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 4}{4}}$$

Y como valor inicial x=2, mostrados en la tabla 2.4.

Iteración	x	x=g(x)	f(x)
1	2	1.732051	-2.464102
2	1.732051	1.54402	-1.038287
3	1.54402	1.457533	-0.347167
...	...	...	...
12	1.4142161	1.414214	$-5{,}84 * 10^{-6}$

Tabla 2.4. Tabla opción 4

La ecuación y el valor inicial elegidos permiten encontrar la raíz de 1.414214.

2.8. Raíces Múltiples

Algunas ecuaciones presentan soluciones conocidas como raíces múltiples, estas se presentan cuando la raíz corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje x, la representación de este método esta evidenciado en la figura 2.25.

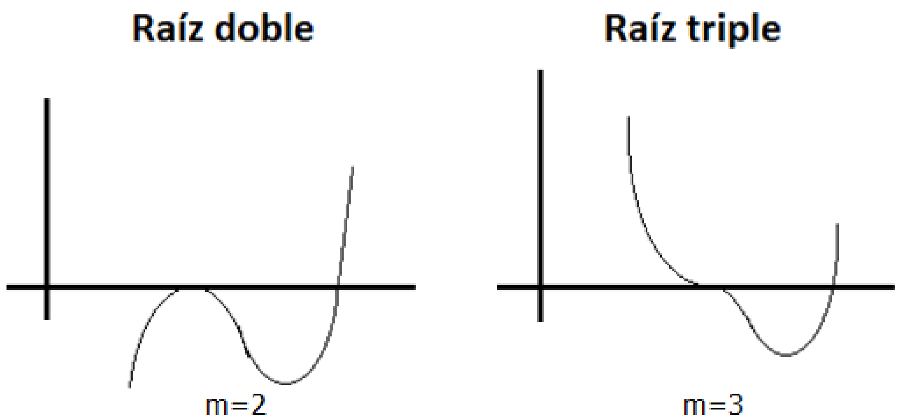


Figura 2.25. Representación gráfica de Raíces Múltiples

Cuando se presentan este tipo de ecuaciones se debe utilizar la siguiente ecuación, en donde x_{i+1}, representa la aproximación a la raíz.

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.13}$$

Tomar en cuenta que es necesario calcular la primera derivada de la ecuación.

Ejemplo 1 : Encontrar la raíz de la siguiente ecuación.

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

Observando esta ecuación se puede ver que al factorar, se tendrá una raíz triple en x=1, como se observa a continuación en la tabla 2.5.

$$f(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x-3)$$

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

$$f\prime(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$$

iter	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	m	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$
1	0	3	-10	3	0.9	0.0021
2	0.9	0.0021	-0.064	3	0.9984375	$7{,}6354 * 10^{-9}$
3	0.9984375	$7{,}635 * 10^{-9}$	$-1{,}4663 * 10^{-5}$	3	0.999999	0

Tabla 2.5. Tabla opción 4

Las iteraciones se empiezan con un valor cercano a la raíz buscada en este caso 0. El valor que debe tomar “m” es de tres pues tenemos una raíz triple. Las iteraciones se deben detener cuando la columna $f(x_{i+1})$ sea menor que 0.00001.

2.9. Método de Muller

Es un método que posee ventajas frente a los métodos anteriormente analizados y la principal es que no solo permite hallar raíces reales, además se puede calcular raíces imaginarias o complejas. Teniendo en cuenta que el método de la secante obtiene una aproximación de la raíz dirigiendo una línea recta hasta el eje x con dos valores de la función. Muller utiliza un algoritmo similar pero mediante la construcción de una parábola con tres puntos, ver figura 2.26.

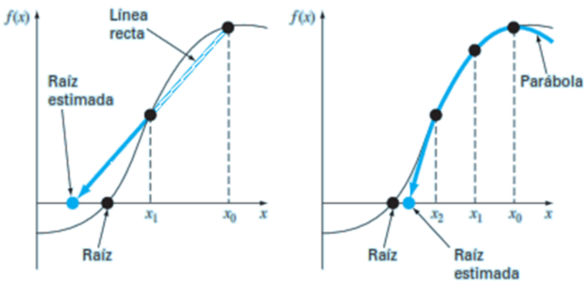


Figura 2.26. Método de Muller

El método consiste en obtener los coeficientes de la parábola que pasa por los tres puntos. Estos coeficientes se sustituyen en la fórmula cuadrática para obtener el valor donde la parábola interseca al eje x , es decir la raíz aproximada.

- **Procedimiento** 1. Se escogen tres valores iniciales:

$$x_{i-2}, x_{i-1}, x_i$$

2. Se determinan los valores de la función en esos puntos.

$$f(x_{i-2}), f(x_{i-1}), f(x_i)$$

3. Se determinan las diferencias finitas de primer y segundo orden, aplicando las siguientes relaciones.

$$f[X_{i-2}, X_{i-1}] = \frac{f(X_{i-1}) - f(X_{i-2})}{X_{i-1} - X_{i-2}} \tag{2.14}$$

$$f\left[X_{i-1}, X_i\right] = \frac{f\left(X_i\right) - f\left(X_{i-1}\right)}{X_i - X_{i-1}}$$

$$f\left[X_{i-2}, X_{i-1}, X_i\right] = \frac{f\left(X_{i-1}, X_i\right) - f\left(X_{i-2}, X_{i-1}\right)}{X_i - X_{i-2}}$$

4. Determinar los coeficientes a_0, a_1, a_2.

$$a_2 = f\left[X_{i-2}, X_{i-1}, X_i\right]$$

$$a_1 = f\left[X_{i-1}, X_i\right] - \left(X_i + X_{i-1}\right) * a_2$$

$$a_0 = f\left[X_i\right] - X_i\left[f\left(X_{i-1}, X_i\right) - X_{i-1} * a_2\right]$$

5. Determinar la primera aproximación a la raíz.

$$X_{i+1} = \frac{2a_0}{-a \pm \left(a_1^2 - 4a_0.a - a_2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.15}$$

Nota. El signo $\pm$, se escoge el signo que provoque la máxima magnitud. Los valores inicial es elegidos, pueden ser mayores o menores a la raíz, e incluso pueden contenerla.

$$X_{i+1} = \frac{2a_0}{-a \pm \left(a_1^2 - 4a_0.a - a_2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.16}$$

- **Ejemplo 1.** Calcular la primera raíz positiva de la siguiente ecuación:

$$f\left(X\right) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

- **Primera Iteración**

Primer paso:

$$f\left(X\right) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

$$X0 = 1{,}3 \rightarrow f(1{,}3) = 0{,}9021 \qquad (x_{i-2})$$

$$X1 = 1{,}4 \rightarrow f(1{,}4) = 0{,}1136 \qquad (x_{i-1})$$

$$X2 = 1{,}5 \rightarrow f(1{,}5) = -0{,}6875 \qquad (x_i)$$

Segundo paso:

$$f\left(X0,\ X1\right) = \frac{0{,}1136 - 0{,}9021}{1{,}4 - 1{,}3} = -7{,}885$$

$$f\left(X1,\ X2\right) = \frac{-0{,}6875 - 0{,}1136}{1{,}5 - 1{,}4} = -8{,}011$$

$$f\left(X0, X1,\ X2\right) = \frac{-8{,}011 + 7{,}885}{1{,}5 - 1{,}3} = -0{,}63$$

Tercer paso:

$$a_2 = f\left[X_0, X_1, X_2\right] = -0{,}63$$

$$a_1 = f\left[X_1, X_2\right] - (X_2 + X_1) * a_2 = -8{,}011 - [1{,}5 + 1{,}4]\,[-0{,}63] = -6{,}184$$

$$a_0 = f\left[X_2\right] - X_2\left[f\left(X_1, X_2\right) - X_1 * a_2\right] = -0{,}6875 - 1{,}5\left[-8{,}011 - 1{,}4\,(-0{,}63)\right] = 10{,}006$$

Cuarto paso:

$$X3 = \frac{2(10{,}006)}{+6{,}184 + \left((-6{,}184)^2 - 4\,(10{,}006)\,(-0{,}63)\right)^{1/2}}$$

$$X3 = \frac{20{,}012}{+6{,}184 + 7{,}965988} = 1{,}414276$$

$$f(X3) = |-0{,}000505|$$

Este valor calculado $f(X_3)$ aún no es menor que el error 0.00001 por tanto hay que seguir con las iteraciones.

- **Segunda iteración**

Primer paso:

$$X0 = 1{,}4 \to f(1{,}4) = 0{,}1136 \qquad (x_{i-2})$$

$$X1 = 1{,}5 \to f(1{,}5) = -0{,}6875 \qquad (x_{i-1})$$

$$X2 = 1{,}414276 \to f(1{,}414276) = -0{,}000505 \qquad (x_i)$$

Segundo paso:

$$f\left(X0,\ X1\right) = \frac{-0{,}6878 - 0{,}1136}{1{,}5 - 1{,}4} = -8{,}011$$

$$f\left(X1,\ X2\right) = \frac{-0{,}000505 + 0{,}6875}{1{,}414276 - 1{,}5} = -8{,}014098$$

$$f\left(X0, X1,\ X2\right) = \frac{-8{,}014098 + 8{,}011}{1{,}414276 - 1{,}4} = -0{,}216972$$

Tercer paso:

$$a_2 = f\left[X_0, X_1, X_2\right] = -0{,}216972$$

$$a_1 = f\left[X_1, X_2\right] - (X_2 + X_1) * a_2 = -8{,}014098 - [1{,}414276 + 1{,}5]\,[-0{,}216972] = -7{,}381781$$

$$a_0 = f\left[X_2\right] - X_2\left[f\left(X_1, X_2\right) - X_1 * a_2\right] = -0{,}000505 - 1{,}414276\left[-8{,}014098 - 1{,}5\,(-0{,}216972)\right] = 10{,}87336$$

Cuarto paso:

$$\frac{2(10{,}87336)}{+7{,}381781 + \left((-7{,}38181)^2 - 4\,(10{,}87336)\,(-0{,}216972)\right)^{1/2}} = 1{,}4142135$$

$$f(X3) = \left|2{,}87 * 10^{-7}\right|$$

Este valor calculado $f(x_3)$ es menor que el error 0.00001 por la raíz es: 1.4142135.

2.9.1. Método de Muller con Matlab

A continuación se presenta el método de Muller realizado en Matlab, para que el lector pueda entenderlo y utilizarlo.

Programa 2.5. Método de Muller con Matlab

```
% OBJETIVO DEL PROGRAMA
% Este metodo utilizado para encontrar raices de ecuaciones multiples

close all;
more off;
format shortG
warning('off');



%% Menu DE ENTRADA
% [xi,e]= f_muller(f,x,tol);
f = input('Ingrese la funcion ejemplo ---> @(x) x.^3-13*x-12:  '); %Le indica a ...
    MATLAB que x es la variable independiente,
x = input('Ingrese los valores iniciales: ');
tol = input('Ingrese la tolerancia eds: ');
met='Muller';    % Muller
 %% MeTODO ITERATIVO Y ERROR
e=1;                         % Error inical
i=0;                         % Inicial las iteraciones
while e>tol
    i=i+1;                   % Cuenta cada iteracion
    h0=x(i+1)-x(i);
    h1=x(i+2)-x(i+1);
    d0=(f(x(i+1))-f(x(i)))/(x(i+1)-x(i));
    d1=(f(x(i+2))-f(x(i+1)))/(x(i+2)-x(i+1));
    a=(d1-d0)/(h1+h0);
    b=a*h1+d1;
    c=f(x(i+2));
    if abs(b+sqrt(b^2-4*a*c))>abs(b-sqrt(b^2-4*a*c))
        deno=b+sqrt(b^2-4*a*c);
    else
        deno=b-sqrt(b^2-4*a*c);
    end
    x(i+3)=x(i+2)+((-2*c)/deno);
    e=abs((x(i+3)-x(i+2))/x(i+3));      % Error relativo
    D(i,:)=[i x(i+3) e*100];                % Guarda las respuestas en "D"
    if i==60
        break
    end
end


% Respuestas -----------------------------------------------------

xi=x;                   % Resultados
ei=D(:,end);
fprintf('\n La raiz es: :\n')
 disp(xi);
 fprintf('\n El error relativo porcentual es: :\n')
 disp(ei);
 fprintf('\n El numero de iteraciones hechas es: :\n')
 disp(length(xi));
%% Grafica --------------------------------------------------------
x=[x(1)-1:0.01:x(end)+1]';       % valores a analizar en la funcion
hold on
plot(x,f(x),'linewidth',2)       % grafica la funcion
plot(xi,f(xi),'*r')              % grafica las iteraciones
plot(xi(end),f(xi(end)),'ok')    % grafica la raiz
title(strcat('Metodo de ',"  ",met))
legend('Funcion','Iteraciones','Raiz')
xlabel('x');
ylabel('y');
grid on

```

```
% FORMA DE EJECUCIOn
% f=@(x) x.^3-13*x-12;            % Funcion
% x=[4.5 5.5 5]';                 % Datos iniciales
% tol=0.0001;                     % Tolerancia

%% INSTRUCCIONES ---------------------------------------------------
% Se escoge el metodo a aplicar, comentando los demas
% Siempre se ingresa la funcion, los puntos iniciales en forma de vector y
% la tolerancia.
% El resultado es las raices encontradas en cada iteracion por el metodo,
% y el error relativo porcentual en cada iteracio.
% La raiz encontrada entonces es el ultimo dato de las raices de la
% soluciones, al igual que el error, y el numero de iteraciones representa
% la cantidad de raices obtenidas.
```

2.10. Método de Bairestow

Este método numérico es comunmente utilizado para resolver polinomios debido a que presenta un procedimiento sencillo. A pesar de ser largos los procesos esto no resulta ser incomodo ya que con el uso del computador se agilita el proceso.

- **Procedimiento:**

  Paso 1 Se determinan los coeficientes $a_0, a_1, \ldots..a_n$. Y se escogen valores para r_0 y s_0. (cercanos a 1).

  Paso 2 Se determinan los coeficientes $b_n, b_{n-1}, \ldots\ldots\ldots b_i$.

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + rb_n$$

$$b_i = a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2}$$

  Paso 3 Se determinan los coeficientes $c_n, c_{n-1}, \ldots\ldots\ldots c_i$.

$$c_n = b_n$$

$$c_{n-1} = b_{n-1} + rc_n$$

$$c_i = b_i + rc_{i+1} + sc_{i+2}$$

  Paso 4

  Se determinan los valores Δr y Δs.

$$c_2\Delta r + c_3\Delta s = -b_1$$

$$c_1\Delta r + c_2\Delta s = -b_0$$

  Paso 5

$$r_1 = r_0 + \Delta r$$

$$s_1 = s_0 + \Delta s$$

  Paso 6

Se determinan los errores relativos de r y s, que deberán ser menores que el error.

$$|\varepsilon r| = \frac{\Delta r}{r} \tag{2.17}$$

$$|\varepsilon s| = \frac{\Delta s}{s} < 1 * 10^{-5}$$

Para encontrar el valor de x se utiliza la siguiente ecuación.

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2}$$

Ejemplo 1:

Calcular la primera raíz positiva de la siguiente ecuación:

$$f(X) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

Paso 1

Se determinan los coeficientes "a" que son los coeficientes que acompañan a la variable.

Datos:

$a_0 = 4, a_1 = 4, a_2 = -4, a_3 = -2, a_4 = 1, r = 0{,}5, s = 0{,}5$

Paso 2

$$b_4 = a_4 = 1$$

$$b_3 = a_3 + rb_4$$

$$b_3 = -2 + (0{,}5)\,1 = -1{,}5$$

$$b_2 = a_2 + rb_3 + sb_4 = -4 + 0{,}5\,(-1{,}5) + 0{,}5\,(1) = -4{,}25$$

$$b_1 = a_1 + rb_2 + sb_3 = 4 + 0{,}5\,(-4{,}25) + 0{,}5\,(-1{,}5) = 1{,}125$$

$$b_0 = a_0 + rb_1 + sb_2 = 4 + 0{,}5\,(1{,}125) + 0{,}5\,(-4{,}25) = 2{,}4375$$

Paso 3

$$c_4 = b_4 = 1$$

$$c_3 = b_3 + rc_4 = -1{,}5 + 0{,}5\,(1) = -1$$

$$c_2 = b_2 + rc_3 + sc_4 = -4{,}25 + 0{,}5\,(-1) + 0{,}5\,(1) = -4{,}25$$

$$c_1 = b_1 + rc_2 + sc_3 = 1{,}125 + 0{,}5\,(-4{,}25) + 0{,}5\,(-1) = -1{,}5$$

Paso 4

$$-4{,}25\Delta r - \Delta s = -1{,}125$$

$$-1{,}5\Delta r - 4{,}25\Delta s = -2{,}4375$$

$$\Delta r = 0{,}141509$$

$$\Delta s = 0{,}523585$$

Paso 5

$$r_1 = 0{,}5 + 0{,}141509 = 0{,}641509$$

$$s_1 = 0{,}5 + 0{,}523585 = 1{,}023585$$

Paso 6

$$|\varepsilon| = \left|\frac{0{,}141509}{0{,}641509}\right| = 0{,}220588$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{0{,}523585}{1{,}023585}\right| = 0{,}511521$$

- **Segunda Iteración Primer paso:**

$$b_4 = a_4 = 1$$

$$b_3 = a_3 + rb_4 = -2 + (0{,}641509)\,1 = -1{,}358491$$

$$b_2 = a_2 + rb_3 + sb_4 = -4 + 0{,}641509\,(-1{,}358491) + 1{,}023585\,(1) = -3{,}847899$$

Segundo paso:

$$b_1 = a_1 + rb_2 + sb_3 = 4 + 0{,}641509\,(-3{,}847899) + 1{,}023585\,(-1{,}359491) = 0{,}141006$$

$$b_0 = a_0 + rb_1 + sb_2 = 4 + 0{,}641509\,(0{,}141006) + 1{,}023585\,(-3{,}847899) = 0{,}151805$$

Tercer paso:

$$c_4 = b_4 = 1$$

$$c_3 = b_3 + rc_4 = -1{,}358491 + 0{,}641504\,(1) = -0{,}716982$$

$$c_2 = b_2 + rc_3 + sc_4 = -3{,}847899 + 0{,}641509\,(-0{,}716982) + 1{,}023585\,(1) = -3{,}284264$$

$$c_1 = b_1 + rc_2 + sc_3 = 0{,}141006 + 0{,}0{,}641509\,(-3{,}284264) + 1{,}023585\,(-0{,}716982) = -2{,}699771$$

Cuarto paso:

$$-3{,}284264\Delta r - 0{,}716982\Delta s = -0{,}141006$$

$$-2{,}69971\Delta r - 3{,}284264\Delta s = -0{,}151805$$

$$\Delta r = 0{,}040026$$

$$\Delta s = 0{,}013319$$

Quinto paso:

$$r_1 = 0{,}641509 + 0{,}040026 = 0{,}681535$$

$$s_1 = 1{,}023585 + 0{,}013319 = 1{,}036904$$

Sexto paso:

$$|\varepsilon r| = |\frac{0{,}040026}{0{,}681535}| = 0{,}058729$$

$$|\varepsilon s| = |\frac{0{,}013319}{1{,}036904}| = 0{,}012845$$

En la cuarta iteración se obtienen los siguientes valores:

$$B_4 = 1, B_3 = 1{,}317836, B_2 = -3{,}68705, B_1 = -2{,}0287 * 10^{-6}, B_0 = 1{,}6961 * 10^{-6}$$

$$C_4 = 1, C_3 = -0{,}635673, C_2 = -3{,}262063, C_1 = -2{,}883359$$

$$-3{,}262063\Delta r - 0{,}635673\ Deltas = 2{,}0287 * 10^{-6}$$

$$-2{,}883359\Delta r - 3{,}262063\ Deltas = -1{,}6961 * 10^{-6}$$

$$\Delta r = -8{,}7373 * 10^{-7}$$

$$\Delta s = 1{,}2922 * 10^{-6}$$

$$r_1 = 0{,}682163 - 8{,}7373 * 10^{-7} = 0{,}682162$$

$$s_1 = 1{,}035275 + 1{,}2922 * 10^{-6} = 1{,}035276$$

$$|\varepsilon r| = |\frac{8{,}7373 * 10^{-7}}{0{,}682162}| = 1{,}2808 * 10^{-6}$$

$$|\varepsilon s| = |\frac{1{,}2922 * 10^{-6}}{1{,}035276}| = 1{,}2482 * 10^{-6}$$

Ambos valores son menores que $1x10^{-5}$, por lo tanto se puede calcular el valor de x:

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2}$$

$$x = \frac{0{,}682162 \pm \sqrt{0{,}682162^2 + 4(1{,}035276)}}{2}$$

$$x_1 = 1{,}4142135$$

$$x_2 = -0{,}7320505$$

2.11. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Los problemas que hemos venido desarrollando hasta este momento implicaban encontrar las raíces de una sola ecuación no lineal. Al combinar varias de estas ecuaciones de forma simultanea se obtendra un sistema de ecuaciones, en donde el objetivo será encontrar raíces de este conjunto de expresiones

La solución de este sistema consta ya no solo de un valor x, sino de un conjunto de valores x_i, que al momento de sustituir en las ecuaciones hace que estas sean iguales a cero.

Existen varios métodos que permiten encontrar estas soluciones, algunas de las cuales son extensiones de los Métodos abiertos anteriormente mencionados.

A continuación se presenta un método para resolver sistemas no lineales.

2.11.1. Método de interacción de la iteración de punto fijo

Consiste en despejar una variable, de cada ecuación, e iniciar las iteraciones con valores iniciales, como se muestra a continuación.

- **Ejemplo 1** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$

Despejar x_1 de la primera ecuación:

$$x_1 = \frac{1}{5}x_1^2 + \frac{1}{80}x_2^2 + \frac{2}{5}$$

Despejar x_2 de la segunda ecuación:

$$x_2 = \frac{1}{10}x_1x_2^2 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{8}{5}$$

- Aplicar las condiciones iniciales, $x_1, x_2 = 0$,.

- Reemplazar estos valores en las ecuaciones las ecuaciones obtenidas, de donde se encuentran nuevos valores de x_1, x_2, que representan la aproximación, obteniéndose los valores siguientes,mostrados en la tabla 2.6.

$x_1(0)$	$x_2(0)$	x_1	x_2	$F(x_1)$	$F(x_2)$
0	0	0.4	1.6	8	8
0.4	1.6	0.464	1.8624	1.28	1.312
0.464	1.8624	0.48642	1.94654	0.44832	0.427
0.48642	1.94654	0.49468	1.97887	0.16534	0.16165
0.49468	1.97887	0.49789	1.99159	0.06417	0.06359
0.49789	1.99159	0.49916	1.99664	0.02536	0.02527
0.49916	1.99664	0.49966	1.99866	0.0101	0.01008
0.49966	1.99866	0.49987	1.99946	0.00403	0.00403
0.49987	1.99946	0.49995	1.99979	0.00161	0.00161
0.49995	1.99979	0.49998	1.99991	0.00064	0.00064
0.49998	1.99991	0.49999	1.99997	0.00026	0.00026
0.49999	1.99997	0.5	1.99999	0.0001	0.0001
0.5	1.99999	0.5	1.99999	$4{,}1x10^{-5}$	$4{,}1x10^{-5}$
0.5	1.99999	0.5	2	$1{,}6x10^{-5}$	$1{,}6x10^{-5}$

Tabla 2.6. Ejercicio 1 método de punto fijo

Las dos ultimas columnas resultan de evaluar las dos primeras columnas en las dos ecuaciones originales. Esta etapa del proceso sirve para determinar cuando detener las iteraciones, en donde los dos valores deben ser menores que el error 0.00001.

2.11.2. Aplicaciones en la Ingeniería

Los métodos analizados en este capítulo se pueden aplicar a problemas de ingeniería, a continuación, se presentan varios ejemplos, con su análisis y resolución.

- **Ejemplo 1** El rendimiento de un motor viene dado por la siguiente ecuación:

$$e = 1 - \frac{1}{r_k^{k-1}} \left(\frac{r_p r_c^{k-1}}{r_p - 1 + r_p k \left(r_c - 1 \right)} \right) \tag{2.18}$$

Si las relaciones $r_k = 12; r_p = 4; r_c = 8$ y si las pérdidas son del 20 %. ¿Cuál es el valor de k? Reemplazando los datos se tiene:

$$f(k) = 0{,}8 - \frac{1}{12^{k-1}} \left(\frac{4(8)^{k-1}}{3 + 28k} \right)$$

Para encontrar el valor de k, se puede aplicar cualquier método de resolución, en este caso se presenta solución con el método de la secante. En este tipo de problemas con ecuaciones más complejas hay que tomar especial atención en el ingreso de la ecuación en Matlab, para que el programa la interprete de la forma correcta. En este caso se presenta la siguiente alternativa.

- **Solución problema 1**

Ingrese la función: $y = 0{,}8 - ((1)/(12^(x-1))) * ((4 * 8^(x-1))/(3 + 28 * x))$

- Ingrese el límite inferior de la gráfica $X_{min} = 0$

- Ingrese el límite superior de la gráfica $X_{max} = 0{,}3$

En la figura 2.27 se evidencia la solución al problema mediante el método del punto fijo.

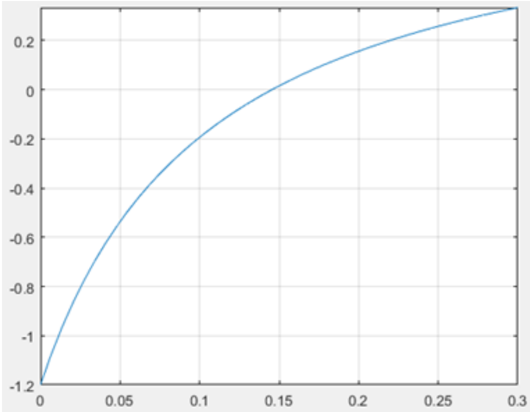


Figura 2.27. Solución gráfica ejercicio 1 Metódo Punto Fijo

Observe la gráfica y seleccione los valores de X_{c-1} y x_c

- Ingrese el valor $x_c - 1 = 0{,}12$

- Ingrese el valor $x_c = 0{,}15$

- Ingrese el porcentaje de error $Es = 0{,}00001$

Los resultados para este nivel de error son los que se muestran en la figura 2.28.

N	Xc-1	Xc	f(Xc-1)	f(Xc)	Xc+1	Er
1.0000	0.1200	0.1500	-0.0986	0.0158	0.1458	100.0000
2.0000	0.1200	0.1458	-0.0986	0.0016	0.1454	0.2882
3.0000	0.1200	0.1454	-0.0986	0.0002	0.1454	0.0291
4.0000	0.1200	0.1454	-0.0986	0.0000	0.1454	0.0029
5.0000	0.1200	0.1454	-0.0986	0.0000	0.1454	0.0003
6.0000	0.1200	0.1454	-0.0986	0.0000	0.1454	0.0000
7.0000	0.1200	0.1454	-0.0986	0.0000	0.1454	0.0000

la raiz es

ans =

0.1453813

Figura 2.28. Valores numéricos ejercicio 1 Metódo Punto Fijo

Por lo tanto, el valor de k para que se cumplen las relaciones anotadas es: 0,14538182

- **Ejemplo 2:**

Una sustancia radiactiva se desintegra en el ambiente, según la ecuación anotada a continuación:

$$A = Pe^{-0{,}0237t}$$

En este caso P representa la cantidad inicial de materia en un tiempo $t = 0$ y A es la cantidad final que resulta en “t” años. Si inicialmente se depositan 950 mg de dicha sustancia. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido para que quede el 3 % de ésta?.

$$0{,}03(950) = (950)e^{-0{,}0237t}$$

Ingresando las condiciones en Matlab se obtiene:

- Ingrese la función:$y = 950 * (exp(-0{,}0237 * x)) - 0{,}03 * 950$.

- Ingrese el límite inferior de la gráfica. $X_{min} = 0$.

- Ingrese el límite superior de la gráfica: $x_{max} = 200$.

- La figura 2.29 muestra la solución al problema.

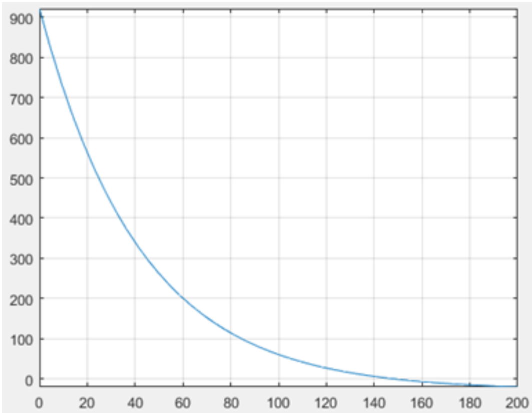


Figura 2.29. G ejercicio 2 Metódo Punto Fijo

Observe la gráfica y seleccione los valores de: x_{c-1} y x_c

- Ingrese el valor:$x_{c-1} = 140$.

- Ingrese el valor: $x_c = 160$.

- Ingrese el porcentaje de error: $Es = 0{,}00001$.
- Los resultados se presentan en la figura 2.30.

N	Xc-1	Xc	f(Xc-1)	f(Xc)	Xc+1	Er
1.0000	140.0000	160.0000	5.9139	-7.0771	149.1047	100.0000
2.0000	140.0000	149.1047	5.9139	-0.7654	148.0614	0.7046
3.0000	140.0000	148.0614	5.9139	-0.0711	147.9657	0.0647
4.0000	140.0000	147.9657	5.9139	-0.0065	147.9569	0.0059
5.0000	140.0000	147.9569	5.9139	-0.0006	147.9561	0.0005
6.0000	140.0000	147.9561	5.9139	-0.0001	147.9560	0.0000
7.0000	140.0000	147.9560	5.9139	-0.0000	147.9560	0.0000

la raiz es

ans =

147.956

Figura 2.30. Valores numéricos ejercicio 2 Metódo Punto Fijo

Por lo tanto, el tiempo para que la fuente se reduzca al 3 %, es $t = 147{,}956$ años.

- **Ejemplo 3**

Una viga con sección rectangular tiene un esfuerzo máximo de tensión T_{max} de $1700lb/plg^2$ y un momento de torsión T de $700lb - plg$.
Si la viga tiene un ancho w es de $5plg$. Determinar el espesor (t) ideal, para esta barra.

$$\tau_{max} = \frac{T}{wt^2}\left(3 + 1{,}8 * \frac{t}{w}\right)$$

$$f\left(t\right) = \frac{700}{5t^2}\left(3 + 1{,}8 * \frac{t}{5}\right) - 17000$$

$$f\left(t\right) = \frac{140}{t^2}\left(3 + 0{,}36 * t\right) - 17000$$

- Ingrese la función: $y = (140/x^2) * (3 + 0{,}36 * x) - 17000$.

- Ingrese el límite inferior de la gráfica: $x_m in = 0{,}05$.

- Ingrese el límite superior de la gráfica: $x_m in = 0{,}4$.

La figura 2.31, muestra la solución a problema de manera gráfica.

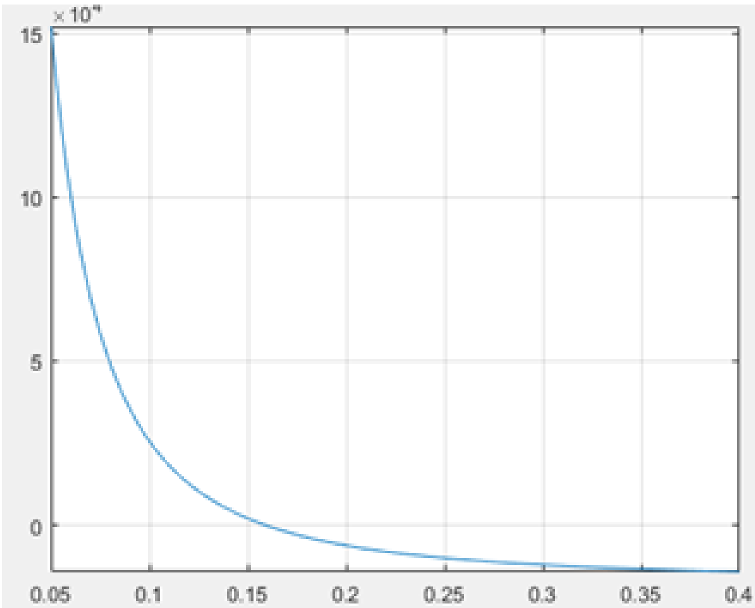


Figura 2.31. Solución ejercicio 3 Metódo Punto Fijo

Observe la gráfica y seleccione los valores de x_{c-1} y x_c

- Ingrese el valor:$x_c - 1 = 0{,}15$.

- Ingrese el valor:$x_c = 0{,}17$.

- Ingrese el porcentaje de error:$Es = 0{,}0001$.

N	Xc-1	Xc	f(Xc-1)	f(Xc)	Xc+1	Er
0.0010	0.0001	0.0002	2.0027	-2.1707	0.0002	0.1000
0.0020	0.0001	0.0002	2.0027	-0.1951	0.0002	0.0005
0.0030	0.0001	0.0002	2.0027	-0.0159	0.0002	0.0000
0.0040	0.0001	0.0002	2.0027	-0.0013	0.0002	0.0000
0.0050	0.0001	0.0002	2.0027	-0.0001	0.0002	0.0000
0.0060	0.0001	0.0002	2.0027	-0.0000	0.0002	0.0000

```
la raiz es

ans =

0.1586704
```

Figura 2.32. Solución ejercicio 3 Metódo Punto Fijo

Por lo tanto, el espesor adecuado para esta barra es $t = 0{,}1586704plg.$, los cuales se muestran en la figura 2.30.

- **Ejemplo 4**

Los vehículos están equipados con sistemas de amortiguación, con un funcionamiento descrito por la siguiente ecuación:

$$x\left(t\right) = e^{-nt}\left(x_0 \cos\left(pt\right) + \ x_0 \frac{n}{p}\ sen\ \left(pt\right)\right) Ejm \tag{2.19}$$

Donde:

$$n = \frac{c}{2m}, p = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} y \frac{k}{m} > \frac{c^2}{4m^2}$$

Los valores de los parámetros son $c = 1{,}6x10^7 g/seg, k = 1{,}4x10^9 g/seg^2, ym = 2{,}1x10^6 g.$
Si $x_0 = 0{,}4$, determinar la primera y segunda ocasión en el que el auto pasa a través de punto de equilibrio, ver figura 2.31.

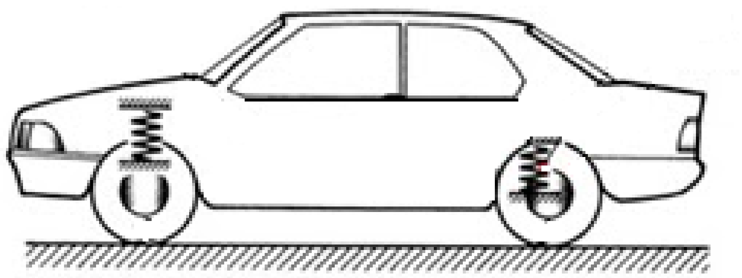


Figura 2.33. Representación gráfica del ejercicio 4 del método de punto fijo

Reemplazando los valores en la formulas se debe calcular los valores de n y p:
$p = 25{,}537$, $n = 3{,}80952$.

$$x\left(t\right) = e^{-3{,}80952t}\left(0{,}4 \cos\left(25{,}537t\right) + \ 0{,}4 * \frac{3{,}80952}{25{,}537}\ sen\ \left(25{,}537t\right)\right)$$

$$x\left(t\right) = e^{-3{,}80952t}\left(0{,}4 \cos\left(25{,}537t\right) + \ 0{,}05967\ sen\ \left(25{,}537t\right)\right)$$

Esta ecuación debe ser ingresada en Matlab para obtener los resultados. El problema requiere calcular primera y segunda ocasión en el que el auto pasa a través de punto de equilibrio, es decir los dos primeros puntos de corte de la curva con el eje x.

- **Ingrese la función:** $y = (exp(-3{,}80952 * x)) * (0{,}4 * cos(25{,}537 * x) + 0{,}05967 * sin(25{,}537 * x))$

- **Ingrese el límite inferior de la gráfica:** $x_{min} = 0$

- **Ingrese el límite superior de la gráfica:** $x_{min} = 0{,}6$

La figura 2.34, muestra la solución al problema.

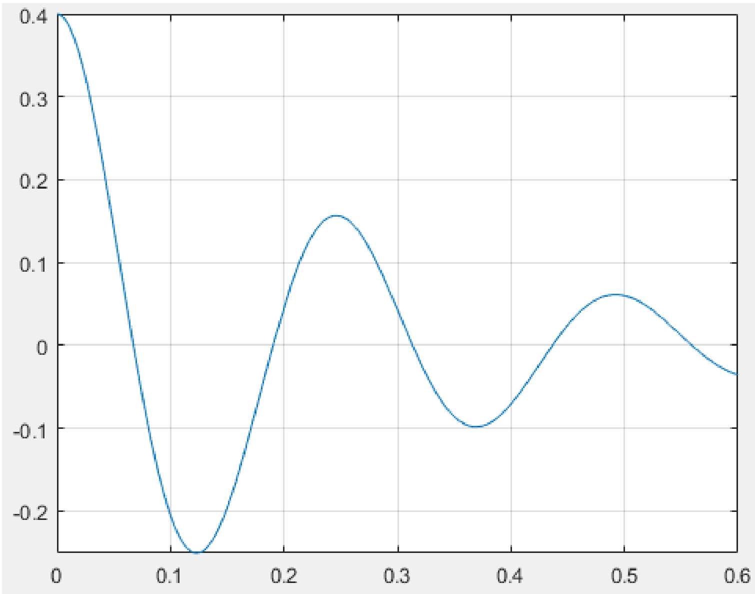


Figura 2.34. Solución ejercicio 4 Metódo Punto Fijo

Observe la gráfica y seleccione los valores de: x_{c-1} y x_c

- Ingrese el valor: $X_{c-1} = 0{,}05$

- Ingrese el valor: $x_c = 0{,}1$

Los resultados se pueden evidenciar en la figura 2.35.

N	Xc-1	Xc	f(Xc-1)	f(Xc)	Xc+1	Er
1.0000	0.0500	0.1000	0.1430	-0.2048	0.0706	100.0000
2.0000	0.0500	0.0706	0.1430	-0.0256	0.0674	4.6312
3.0000	0.0500	0.0674	0.1430	-0.0010	0.0673	0.1806
4.0000	0.0500	0.0673	0.1430	-0.0000	0.0673	0.0059
5.0000	0.0500	0.0673	0.1430	-0.0000	0.0673	0.0002
6.0000	0.0500	0.0673	0.1430	-0.0000	0.0673	0.0000

la raiz es

ans =

0.06730937

Figura 2.35. Solución numérica ejercicio 4 Metódo Punto Fijo

- **Segundo punto de equilibrio**

Ingrese la función:$y = (exp(-3{,}80952 * x)) * (0{,}4 * cos(25{,}537 * x) + 0{,}05967 * sin(25{,}537 * x))$

- Ingrese el límite inferior de la gráfica: $x_{min} = 0$
- Ingrese el límite superior de la gráfica:$Xmax = 0{,}6$

Observe la gráfica y seleccione los valores de: $x_{c-1} y x_c$
- Ingrese el valor:$x_{c-1} = 0{,}15$

- Ingrese el valor:$x_c = 0{,}2$

- Ingrese el porcentaje de error:$Es = 0{,}00001$
Con los valores ingresados los resultados se pueden verificar en la figura2.36.

N	Xc-1	Xc	f(Xc-1)	f(Xc)	Xc+1	Er
1.0000	0.1500	0.2000	-0.1958	0.0461	0.1905	100.0000
2.0000	0.1500	0.1905	-0.1958	0.0007	0.1903	0.0720
3.0000	0.1500	0.1903	-0.1958	-0.0000	0.1903	0.0021
4.0000	0.1500	0.1903	-0.1958	0.0000	0.1903	0.0001
5.0000	0.1500	0.1903	-0.1958	-0.0000	0.1903	0.0000

```
la raiz es

ans =

0.1903306
```

Figura 2.36. Solución numérica 2 ejercicio 4 Metódo Punto Fijo

Entonces la primera y la segunda ocasión en que el auto pasa por la posición de equilibrio es de 0,06730937 seg y 0,11903306 seg.

Capítulo 3

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Antes de revisar los diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, es importante revisar algunos conceptos generales básicos.

- **Ecuación Lineal** Una ecuación lineal es una ecuación de la forma.

$$a_0x + a_1 = 0 \tag{3.1}$$

- **Sistemas de Ecuaciones** Un sistema de ecuaciones se puede representar de varias maneras.
  a) Forma desarrollada

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = C_1 \tag{3.2}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n = C_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n = C_n$$

$a =$coeficientes de las incógnitas

$c =$términos independientes

$x_1, x_2 ... x_n =$ incógnitas

b) Forma matricial

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{vmatrix}$$

Vector incógnitas

$$\begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{vmatrix}$$

Vector de términos independientes

c) Forma simbólica

$$Ax + C = 0$$

A=matriz de coeficientes

X=vector de incógnitas

X=vector de términos independientes

3.2. Tranformaciones elementales

Si el número de ecuaciones es menor o igual que tres, se las puede resolver mediante técnicas sencillas(sustitución, sumas y restas, etc.), sin embargo si el número de ecuaciones es mayor a este se recomienda el uso de un computador junto a un algoritmo para su solución en el menor tiempo posible. En la antigüedad, debido a la falta de recursos en la solución de sistemas de ecuaciones grandes mediante alternativas rápidas, la creatividad de su implementación a nivel de la ingeniería eran nulas.

Con la aparición de las computadoras se enfatizó en resolver problemas mas complicados y ya no en la solución del sistema sino mas bien en la formulación del problema y en la interpretación de resultados.

La mayoría de las ecuaciones fundamentales de la Ingeniería se basan en las leyes de la conservación entre ellas la masa, la energía y el momento.En términos matemáticos estos conceptos nos conducen a ecuaciones de balance que relacionan el comportamiento del sistema. Mediante su representación sujeta al modelamiento del sistema mediante sus propiedades y estímulos externos que actúan sobre el mismo.

Para resolver sistemas además es necesario recordar que se pueden realizar algunas operaciones básicas con las ecuaciones individuales.

a) Intercambio de filas y columnas.

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51$$

$$-4x_2 + 4x_1 + 9x_3 = 61$$

$$3x_3 - x_2 + 12x_1 = 8$$

Reordenando tenemos:

$$12x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51$$

$$4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 61$$

b) Multiplicación de todos los elementos de una fila o columna por un mismo número distinto de cero.

$$4 * (x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51)$$

$$4x_1 + 28x_2 - 12x_3 = -204$$

c)Operaciones de suma o resta entre 2 filas o columnas

$$4x_1 + 28x_2 - 12x_3 = -204$$

$$-(\ 4x_1 - 4x_2 \ + \ 9x_3 \ = \ 61 \ )$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$32x_2 - 21x_3 = -265$$

3.3. Métodos para resolver grandes sistemas lineales

Existen diferentes mètodos numéricos para la soluciòn de sistemas de ecuaciones lineales, en la figura 3.1 se muestra los diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones a nivel superior.

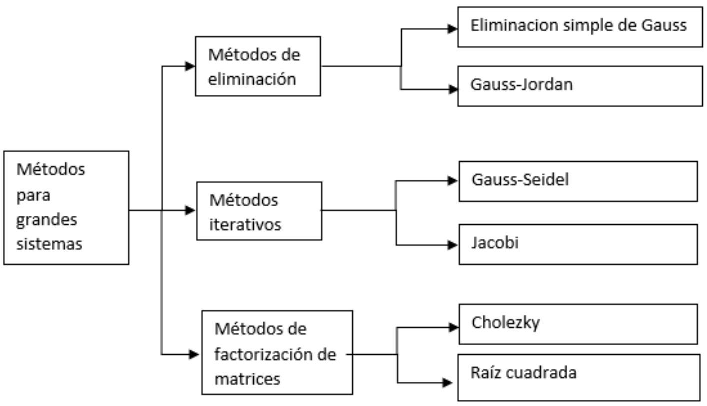


Figura 3.1. Métodos de solución de sistemas lineales

3.3.1. Eliminación simple de Gauss

Este método está diseñado para resolver un conjunto de M ecuaciones con n incógnitas. Además este proceso puede considerarse compuesto de dos etapas:
a) Eliminación de incógnitas hacia adelante, procedimiento mediante el cual se obtiene una matriz de coeficientes triangular.
b) Solución mediante sustitución hacia atrás.
Ejemplo 1 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 17$$

Se inicia con la etapa de eliminación de incógnitas hacia adelante.

PRIMERA FILA NORMALIZADA

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 3 & | & -9 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & | & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & | & -11 \\ 2 & -3 & -4 & 5 & | & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1/4 \\ (2F1)+F2 \\ (-3F1)+F3 \\ (-2F1)+F4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75 & | & -2{,}25 \\ 0 & 6 & 1 & 0{,}5 & | & 10{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & 2{,}5 & -1{,}25 & | & -4{,}25 \\ 0 & -2 & -5 & 3{,}5 & | & 21{,}5 \end{bmatrix}$$

SEGUNDA FILA NORMALIZADA

$$\begin{bmatrix} ... \\ F2/6 \\ -3{,}5F2+F3 \\ 2F2+F4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75 & | & -2{,}25 \\ 0 & 1 & 0{,}166667 & 0{,}083333 & | & 1{,}75 \\ 0 & 0 & 1{,}916667 & -1{,}541667 & | & -10{,}375 \\ 0 & 0 & -4{,}666667 & 3{,}666667 & | & 25 \end{bmatrix}$$

TERCERA FILA NORMALIZADA

$$\begin{bmatrix} ... \\ ... \\ F3/1{,}916667 \\ 4{,}666667F3+F4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75 & | & -2{,}25 \\ 0 & 1 & 0{,}166667 & 0{,}083333 & | & 1{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}804348 & | & -5{,}413043 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}086957 & | & -0{,}26087 \end{bmatrix}$$

En este último paso se ha obtenido la matriz de coeficientes triangular, a partir de la cual se inicia con la segunda etapa de solución mediante sustitución hacia atrás, tomando la última fila como inicio.

$$-0{,}086957x_4 = -0{,}26087$$

$$x_4 = \frac{-0{,}26087}{-0{,}086957} = 3$$

$$x_3 - 0{,}804348x_4 = -5{,}413043$$

$$x_3 - 0{,}804348(3) = -5{,}413043$$

$$x_3 = -3$$

$$x_2 + 0{,}166667x_3 + 0{,}083333x_4 = 1{,}75$$

$$x_2 = 1{,}75 - 0{,}166667\,(-3) - 0{,}083333(3)$$

$$x_2 = 2$$

$$x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}75x_4 = -2{,}25$$

$$x_1 = 0{,}5\,(2) - 0{,}5(-3) + 0{,}75(3) - 2{,}25$$

$$x_1 = -2$$

Con esta revisión del proceso a realizarse, se plantea una opción de resolución de sistemas de ecuaciones por este método en Matlab, el Script a utilizarse se presenta a continuación.

Programa 3.1. Resolución de sistemas de ecuaciones con matlab

```
clc
clear
format rat
a=[4 -2  2  3 -9;
   2 5 2  2 6;
   3 2 4 1 -11;
   2 -3 -4 5 17]
a(2,1:5)=a(2,1)*a(1,1:5)-a(2,1:5)
a(3,1:5)=a(3,1)*a(1,1:5)-a(3,1:5)
a(4,1:5)=a(4,1)*a(1,1:5)-a(4,1:5)
a(2,1:5)=a(2,1:5)/a(2,2)
a(3,1:5)=a(3,2)*a(2,1:5)-a(3,1:5)
a(4,1:5)=a(4,2)*a(2,1:5)-a(4,1:5)
a(3,1:5)=a(3,1:5)/a(3,3)
a(4,1:5)=a(4,3)*a(3,1:5)-a(4,1:5)
a(4,1:5)=a(4,1:5)/a(4,4)
```

El sistema debe escribirse dentro del Script como se ve observa, separando cada elemento con un espacio y para la siguiente fila separar con punto y coma. Si hay más incógnitas solamente hay que añadir fila.

3.3.2. Programación de Gauss con Matlab

A continuación se presenta el método de Gauss con Matlab, se deja que el lector interprete el código relacionando la parte teórica, además es importante mencionar que en la parte final del script esta la forma de ejecución del mismo.

Programa 3.2. Método de Gauss con Matlab

```

function [x,U,iter] = GAUSS_31(a,b,c,d,h,k,f0,f1,tol,maxiter)
x = a:h:b;
nx = (b-a)/h;
ny = (d-c)/k;
lambda = k/h;
lambda2 = lambda^2;
beta = 2*(1+lambda2);
beta2 = beta-2*h*lambda2;
f0x = feval(f0,x);
f1x = feval(f1,x);
g0 = f0x(1):-k/2:f1x(1);
g1 = g0;
u0 = (sum(f0x+f1x)/(nx+1)+sum(g0+g1)/(ny+1))/4;
% inicializacion
U = u0*ones(nx+1,ny+1);
U(1,:) = g0;
U(nx+1,:) = g1;
U(:,1) = f0x(:);
U(:,ny+1) = f1x(:);
incr = tol+1;
iter = 0;
while incr>tol && iter<maxiter
incr = 0;
for i = 2:nx
for j = 2:ny
U(1,j) = (2*lambda2*U(2,j)+U(1,j-1)+U(1,j+1))/(beta-h*lambda2);
v = (lambda2*(U(i-1,j)+U(i+1,j))+U(i,j-1)+U(i,j+1))/beta;
U(nx+1,j) = (2*lambda2*U(nx,j)+U(nx+1,j-1)+U(nx+1,j+1))/beta2;
incr = max(incr,abs(U(i,j)-v));
U(i,j) = v;
end
end
iter = iter+1;
surf(U)
end
%% ejecutar com0
%
% [U,iter] =GSEDP3(-1,1,-1,1,0.25,0.25,inline('1+0*x'),inline('0*x'),.00001,200)
%
```

3.3.3. Gauss-Jordan

Este método es una variante de la eliminación analizada en el tema anterior. La diferencia consiste en que en el método de Gauss Jordan se debe eliminar una incógnita de todas las ecuaciones y no solamente de la ecuación siguiente. Es decir que durante la etapa de eliminación se obtiene una matriz identidad en vez de una matriz triangular. Esto permite eliminar la etapa de sustitución hacia atrás, obteniéndose directamente los resultados del sistema.

Ejemplo 1 Resuelva el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 17$$

PRIMERA FILA NORMALIZADA

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 3 & | & -9 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & | & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & | & -11 \\ 2 & -3 & -4 & 5 & | & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1/4 \\ (2F1)+F2 \\ (-3F1)+F3 \\ (-2F1)+F4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75 & -2{,}25 \\ 0 & 6 & 1 & 0{,}5 & 10{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & 2{,}5 & -1{,}25 & -4{,}25 \\ 0 & -2 & -5 & 3{,}5 & 21{,}5 \end{bmatrix}$$

SEGUNDA FILA NORMALIZADA

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0{,}5 & 10{,}5 \end{pmatrix} /6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}166667 & 0{,}083333 & 1{,}75 \end{pmatrix} segunda\ fila\ normalizada * (0{,}5, -3{,}5, 2)$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}75 & -2{,}25 \\ -0{,}5 & 0{,}083333 & 0{,}041667 & 0{,}875 \\ .... & .... & .... & ... \\ 0 & 0{,}583333 & 0{,}791667 & -1{,}375 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}5 & 2{,}5 & -1{,}25 & -4{,}25 \\ -3{,}5 & -0{,}583333 & -0{,}291667 & -6{,}125 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 1{,}916667 & -1{,}541667 & -10{,}375 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 3{,}5 & 21{,}5 \\ 2 & -0{,}333333 & 0{,}166667 & 3{,}5 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & -4{,}666667 & 3{,}666667 & 25 \end{bmatrix}$$

La matriz quedaría como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}583333 & 0{,}791667 & -1{,}375 \\ 0 & 1 & 0{,}166667 & 0{,}083333 & 1{,}75 \\ 0 & 0 & 1{,}916667 & -1{,}541667 & -10{,}375 \\ 0 & 0 & -4{,}666667 & 3{,}666667 & 25 \end{bmatrix}$$

TERCERA FILA NORMALIZADA

$$\begin{pmatrix} 1{,}916667 & -1{,}541667 & -10{,}375 \end{pmatrix} /1{,}916667$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}804348 & -5{,}413043 \end{pmatrix} tercera\ fila\ normalizada * (-0{,}583333, -0{,}166667,\ 4{,}666667)$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}583333 & 0{,}791667 & -1{,}375 \\ -0{,}58333 & -0{,}469203 & 3{,}157609 \\ .... & .... & .... \\ 0 & 1{,}26087 & 1{,}782609 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}166667 & 0{,}0833333 & -1{,}75 \\ -0{,}166667 & 0{,}134058 & 0{,}902174 \\ .... & .... & .... \\ 0 & 0{,}217391 & 2{,}652174 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4{,}666667 & 3{,}666667 & -25 \\ 4{,}666667 & -3{,}753623 & -25{,}26087 \\ .... & .... & .... \\ 0 & -0{,}086957 & -0{,}26087 \end{bmatrix}$$

La expresión sería:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1{,}26087 & 1{,}782609 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}217391 & 2{,}652174 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}804348 & -5{,}413043 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}086957 & -0{,}26087 \end{bmatrix}$$

Cuarta fila normalizada

$$\begin{pmatrix} -0{,}086957 & -0{,}26807 \end{pmatrix} / -0{,}086957$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} cuarta\ fila\ normalizada * (-1{,}26087, -0{,}217391,\ 0{,}804348)$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}26087 & 1{,}782609 & \\ -1{,}26087 & -3{,}782609 & \\ .... & .... & .... \\ 0 & -2 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}217391 & 2{,}652174 & \\ -0{,}217391 & -0{,}652174 & \\ .... & .... & .... \\ 0 & 2 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}804348 & -5{,}413043 & \\ 0{,}804348 & 2{,}413043 & \\ .... & .... & .... \\ 0 & -3 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -2; x_2 = 2; x_3 = -3; x_4 = 3$$

Se presenta entonces una alternativa para resolución de sistemas de ecuaciones con Matlab, el Script se detalla a continuación.

Programa 3.3. Resolución de sistemas de ecuaciones con matlab 2

```
clc
clear

a=[4 -2  2 3;
    2  5  2 2;
    3  2  4 1;
    2  -3  -4 5]
b=[-9;6;-11; 17]
resultado=rref([a,b])   %primera opcion
x=inv(a)*b              %segunda opcion

xx=a\b                  %tercera opcion
```

En este caso se pueden apreciar dos matrices, en la primera (matriz "a")se detallan los coeficientes de las incógnitas y la segunda es en realidad un vector (vector "b") de términos independientes, si existieran más incógnitas, habría que añadir filas en la matriz de coeficientes y por su puesto los elementos correspondientes en el vector de términos independientes.

3.3.4. Gauss Jordan con Matlab

A continuación se presenta la programación del Método de Gauss Jordan con Matlab, dejandole al usuario la verificación junto a la parte teórica analizada en el apartado anterior.

Programa 3.4. Gauss Jordan con matlab

```
function [x] = Gauss_Jordan(a,b)
n=length(b);
% Creamos matriz aumentada
for i=1:n
   a(i,n+1)=b(i);
end
[nrow,ncol]=size(a);
% Buscamos pivot mayor
for k=1:nrow
   pivot=a(k,k);
   il=k;
   for l=k+1:nrow
      if abs(a(l,k))<abs(pivot)
         % No hacemos nada
      elseif abs(a(l,k)) ≥ abs(pivot)
      pivot=a(l,k);
      il=l;
   end
end
% pivot cero significa matriz singular
if pivot ==0
   disp('Matriz Singular')
else
   % intercambio de filas para obtener el pivot mayor
   for ll=1:ncol
      temp=a(k,ll);
      a(k,ll)=a(il,ll);
      a(il,ll)=temp;
   end
end
% Normalizar la fila pivot
for j=1:ncol
   c(k,j)=a(k,j)/pivot;
end
% Ahora la eliminacion Gauss_Jordan
for i=1:nrow
   if i==k
      % No hacemos nada
   else
      for j=1:ncol
         c(i,j)=a(i,j)-a(i,k)*c(k,j);
      end
   end
end
```

```
% Ahora ponemos el resultado c() en a()
a=c;
for j=1:nrow
   x(j)=a(j,ncol);
end
end
disp('*********** Matriz [a|x] aumentada *************')
%
```

3.4. Métodos iterativos

3.4.1. Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es un procedimiento iterativo de resolución de sistemas de ecuaciones, en el cual el sistema debe cumplir con una condición importante para poder aplicar el método: la matriz debe tener una diagonal dominante.

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -11$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 17$$

$$|4| > |-2+2+3| = |3| \rightarrow si$$

$$|5| > |-2+2+2| = |6| \rightarrow no$$

$$|4| > |3+2+1| = |6| \rightarrow no$$

$$|5| > |2-3-4| = |-5| \rightarrow no$$

Los valores absolutos de los elementos de la diagonal deben ser mayores a los valores absolutos de la sumatoria de los elementos restantes de la fila. Si esto no sucede como se aprecia en el ejemplo, quiere decir que no existirá convergencia.

- **Criterio de paro** Al ser un método iterativo, se debe prestar especial atención al punto en el cual se deben detener las iteraciones, para ello se debe aplicar la siguiente ecuación.

$$\varepsilon_{a,i} = |\frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j}| * 100\,\% < \varepsilon_s \tag{3.3}$$

En donde $\varepsilon_s = 10\,\%$

Para toda i en donde j y j-1 denotan la iteración actual y anterior.
Los valores de las variables que se encuentran se reemplazan directamente en la ecuación siguiente.

- **Ejemplo 1** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$10x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24{,}5$$

$$x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -9$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -50$$

Primero se debe determinar si el sistema cumple con la condición de matriz con diagonal dominante:

$$|10| > |-3+6| = |3| \rightarrow si$$
$$|8| > |1-2| = |-1| \rightarrow si$$
$$|-9| > |-2+4| = |2| \rightarrow si$$

Luego de cada ecuación se debe despejar cada una de las incógnitas.

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3x_2 - 6x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8}$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9}$$

Para las iteraciones se debe arrancar con valores iniciales en este caso: $x_2 y x_3 = 0$, y los valores que se encuentran se reemplazan directamente en la ecuación siguiente.

Primera Iteración

Si $x_2 = x_3 = 0$

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(0) - 6(0)}{10} = 2{,}45$$

Si $x_3 = 0$

$$x_2 = \frac{2(0) - 2{,}45 - 9}{8} = -1{,}43125$$

Se reemplaza los valores.

$$x_3 = \frac{50 - 2(2{,}45) + 4(-1{,}43125)}{9} = 4{,}375$$

Segunda Iteración

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(-1{,}43) - 6(4{,}38)}{10} = -0{,}604375$$

$$x_2 = \frac{2(4{,}38) - (-0{,}61) - 9}{8} = 0{,}04625$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0{,}61) + 4(0{,}046)}{9} = 5{,}709549$$

Tercera Iteración

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(0{,}046) - 6(5{,}71)}{10} = -0{,}962440$$

$$x_2 = \frac{2(5{,}71) - (-0{,}96) - 9}{8} = 0{,}422692$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0{,}96) + 4(0{,}42)}{9} = 5{,}957294$$

Cuarta Iteración

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(0{,}42) - 6(5{,}95)}{10} = -0{,}9997569$$

$$x_2 = \frac{2(5{,}95) - (-0{,}99) - 9}{8} = 0{,}48902$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0{,}99) + 4(0{,}49)}{9} = 5{,}994579$$

Criterio de Parada

$$\varepsilon_{a,i} = |\frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j}| * 100\,\% < \varepsilon_s$$

$$\varepsilon_{a,1} = |\frac{0{,}96 - 0{,}99}{0{,}99}| * 100\,\% = 3{,}03 < \varepsilon_s = 10$$

$$\varepsilon_{a,2} = |\frac{0{,}42 - 0{,}49}{0{,}49}| * 100\,\% = 14{,}28 > \varepsilon_s = 10$$

$$\varepsilon_{a,3} = |\frac{5{,}95 - 5{,}99}{5{,}99}| * 100\,\% = 0{,}67 > \varepsilon_s = 10$$

Como el error de x_2 es mayor que el 10 % se debe continuar con las iteraciones.

A continuación, se presenta una alternativa en Matlab que permite calcular sistemas de ecuaciones.

Programa 3.5. Resolución de sistemas de ecuaciones con matlab 3

```
clc
clear
format short

A=[10 -3 6;1 8 -2;-2 4 -9] %INGRESAR MATRIZ DE COMPONENTES NUMRICAS
B=[24.5;-9 ;-50]           %INGRESAR VECTOR DE VALORES numericos

```

```
x=[0; 0; 0]                  %APROXIMACION INICIAL
n=length(B);
es=10                        %INGRESAR EL PORCENTAJE DE ERROR
error=100;

while error>es
for ii=1:n
xold=x;
    Ax=0;
    for jj=1:n
        if jj==ii

        else
            Ax=Ax+A(ii,jj)*x(jj);
        end
    end
x(ii)=(B(ii)-Ax)/A(ii,ii);
end
x;
errorx=abs((x-xold)./x)*100;
error=max(errorx);
end
x
```

En la estructura del Script se encuentra el espacio para ingresar la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes, si existiesen más ecuaciones e incógnitas, se debe añadir elementos en la matriz y vector correspondientes.

3.4.2. Método de Gauss Seidel con matlab

A continuación se presenta el método programado en Matlab, dejando que el lector lo pueda interpretar según la fundamentación teórica analizada en el apartado anterior.

Programa 3.6. Método Numérico de Gauss Seidel con Matlab

```
function[x,iter,incr]=Gauss_Seidel(A,b,x0,tol,maxiter)
n=length(b);
M=tril(A);                % matriz triangular inferior
U=triu(A,1);                 % los elementos que estan por encima
iter=1;
incr=tol+1;
x=zeros(n,1);
while iter≤maxiter && incr>tol % condiciones para seguir iterando
 d=b-U*x0 %vector de terminos independientes
 x(1)=d(1)/M(1,1); % primera ecuacion
 for k =2:n
     x(k,1)=(d(k)-M(k,1:k-1)*x(1:k-1,1))/M(k,k);

incr=norm(x-x0,inf)/norm(x,inf);


iter= iter+1;
x0=x;
end
if iter>maxiter
    disp('se alcanzo el maximo de iteraciones')

end

end


%  A=[ 10 -1 2 0 ;-1 11 -1 3 ;2 -1 10 -1 ;0 3 -1 8] matriz de A
% b=[6 25 -11 15]'                                 matriz de terminos independientes
% ejecucion
% [x,iter,incr]=Gauss_Seidel([ 10 -1 2 0 ;-1 11 -1 3 ;2 -1 10 -1 ;0 3 -1 8],[6 25 ...
    -11 15]',zeros(4,1),1e-3,20)
% valor propio
```

3.4.3. Método de Jacobi

Este método de resolución es similar al método de Gauss Seidel, pero los valores obtenidos en una determinada iteración se utilizan para el cálculo de una próxima iteración, a diferencia que en el caso anterior en donde los reemplazos se hacían directamente en la siguiente ecuación.

Ejemplo 1 Resolver el sisguiente sistema de ecuaciones.

$$10x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24{,}5$$

$$x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -9$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -50$$

Se despeja de cada ecuación, cada una de las variables.

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3x_2 - 6x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8}$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9}$$

Primera iteración
En este método todos los valores iniciales son cero. Si x_2 y $x_3 = 0$, por tanto, x_1 es:

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(0) - 6(0)}{10} = 2{,}45$$

Si x_3 y $x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{2(0) - (0) - 9}{8} = -1{,}125$$

Si x_2 y $x_1 = 0$

$$x_3 = \frac{50 - 2(0) + 4(0)}{9} = 5{,}555556$$

En la segunda iteración se repite el mismo proceso trabajando con los valores obtenidos en la iteración anterior, es decir.

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(-1{,}125) - 6(5{,}555556)}{10} = -1{,}220833$$

$$x_2 = \frac{2(5{,}555556) - (2{,}45) - 9}{8} = -0{,}042361$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(2{,}45) + 4(-1{,}125)}{9} = 4{,}511111$$

En la tercera iteración se obtiene:

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(-0{,}042361) - 6(4{,}511111)}{10} = -0{,}269375$$

$$x_2 = \frac{2(4{,}511111) - (-1{,}220833) - 9}{8} = 0{,}155382$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-1{,}220833) + 4(-0{,}042361)}{9} = 5{,}808024$$

En la cuarta iteración de igual forma:

$$x_1 = \frac{24{,}5 + 3(0{,}155382) - 6(5{,}808024)}{10} = -0{,}9882$$

$$x_2 = \frac{2(5{,}808024) - (-0{,}269375) - 9}{8} = 0{,}360678$$

$$x_3 = \frac{50 - 2(-0{,}269375) + 4(0{,}155382)}{9} = 5{,}684475$$

En la iteración número 29, se tendrá que:

$$x_1 = -1; x_2 = 0{,}5; x_3 = 6$$

El siguiente Script de Matlab permite encontrar los valores de las variables con el método de Jacobi.

Programa 3.7. Resolución de sistemas de ecuaciones con matlab 3

```
clc
clear
format short
A=[10 -3 6;1 8 -2;-2 4 -9]    %INGRESAR MATRIZ DE COMPONENTES NUMERICAS
B=[24.5;-9 ; -50]             %INGRESAR VECTOR DE VALORES NUMERICOS

n=length(B)
x=[0; 0; 0]                    %APROXIMACION INICIAL
es=0.1                         %INGRESAR EL PORCENTAJE DE ERROR
err=100;
while (err>es)
    for ii=1:n
        summ=0;
        for jj=1:n
            if (jj==ii)
            else
                summ=summ+A(ii,jj)*x(jj);
            end
        end
    newx(ii)=(1/A(ii,ii))*(B(ii)-summ);
    errr(ii)=abs((newx(ii)-x(ii))/newx(ii))*100;
    end
x=newx;
err=max(errr);
end
err
x
```

3.4.4. Método de Jacobi con matlab

A continuación se muestra en método de Jacobi elaborado en Matlab.

Programa 3.8. Método de Jacobi con Matlab

```
function[x,iter,incr]=JACOBI1(A,b,x0,tol,maxiter)
%n=length(b);
% HACEMOS EL ESPLITIN / DIVIDIR LA MATRIZ A EN LA SUMA
L=tril(A,-1);              % matriz triangular inferior
U=triu(A,1);               % los elementos que estan por encima
```

```
d=diag(A);                % diagonal de A
iD=diag(1./d);            % la inversa de cada elemento de la matriz A
iter=1;
incr=tol+1;
while iter≤maxiter && incr>tol % condiciones para seguir iterando
x=-iD*(L+U)*x0+iD*b;      % programa principal
incr=norm(x-x0,inf)/norm(x,inf);      % calculo de la norma infinito de un vector
iter= iter+1;
x0=x;
end
if iter>maxiter
    disp('se alcanzo el maximo de iteraciones')

end

%  A=[ 10 -1 2 0 ;-1 11 -1 3 ;2 -1 10 -1 ;0 3 -1 8] matriz de A
% b=[6 25 -11 15]'                                  matriz de terminos independientes
% ejecucion
% [x,iter,incr]=jacobi([ 10 -1 2 0 ;-1 11 -1 3 ;2 -1 10 -1 ;0 3 -1 8],[6 25 -11 ...
    15]',zeros(4,1),1e-3,20)
% norm(x-A\b,inf) norma infinito de la socion exacta
% solucion exacta A\b
% no debe haber un cero en la diagonal
% valor propio de la matriz A  eig(A) se escoge el mayor en valor absoluto
```

3.5. Métodos de factorzación de matrices

3.5.1. Método de Cholesky

El método de Cholesky, es un proceso matemático utilizado para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones, es basado en la aplicación de una descomposición matricial, en donde se factoriza una matriz en el producto de dos matrices, es decir:

- Se tiene un sistema de ecuaciones que tiene la forma $Ax = b$.

- Se factora la matriz A, es decir se descompone en dos matrices B y C.

La matriz A será igual a:

$$A = B \ * \ C$$

Donde:

$$B \ matriz \ triangular \ inferior$$

$$C \ matriz \ triangular \ superior \ con \ diagonal \ 1.$$

A continuación se detalla como obtener los elementos de cada matriz B y C.

Primera columna de la matriz B

$$b_{ij} = a_{ij}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

Primera fila de la matriz C

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}$$

$$j = 2, 3, \ldots\ldots., n$$

Segunda columna de la matriz B

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \tag{3.4}$$

Segunda columna de la matriz C

$$c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \tag{3.5}$$

El orden de cálculo de los elementos de B y C debe respetarse, tal como se ha indicado.

Ejemplo 1

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 7$$

$$7x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 6$$

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -5$$

Primera columna de B

$$b_{11} = a_{11} = 4$$

$$b_{21} = a_{21} = 7$$

$$b_{31} = a_{31} = 3$$

$$b_{31} = a_{31} = 2$$

Primera fila de C

$$c_{12} = \frac{a_{12}}{b_{11}} = \frac{-3}{4} = -0{,}75$$

$$c_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$c_{14} = \frac{a_{14}}{b_{11}} = \frac{-5}{4} = -1{,}25$$

Segunda columna de B

$$b_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = -2 - (7)\,(-0{,}75) = 3{,}25$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12} = -2 - (3)\,(-0{,}75) = 0{,}25$$

$$b_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12} = 3 - (2)\,(-0{,}75) = 4{,}5$$

Segunda fila de C

$$c_{23} = \frac{1}{b_{22}}\,(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \frac{1}{3{,}25}\,(-3 - (7)(0{,}25)) = -1{,}4615385$$

$$c_{24} = \frac{1}{b_{22}}\,(a_{24} - b_{21}c_{14}) = \frac{1}{3{,}25}\,(-2 - (7)(-1{,}25)) = 2{,}076923$$

Tercera columna de B

$$b_{33} = a_{33} - (b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23}) = 5 - [(3)\,(0{,}25) + (0{,}25)\,(-1{,}461538)] = 4{,}615385$$

$$b_{43} = a_{43} - (b_{41}c_{13} + b_{42}c_{23}) = 5 - [(2)\,(0{,}25) + (4{,}5)\,(-1{,}461538)] = 11{,}076921$$

Tercera fila de C

$$c_{34} = \frac{1}{b_{33}}\left(a_{34} - \left(b_{31}c_{14} + b_{32}c_{24}\right)\right) = \frac{1}{4{,}615385}\left(-2 - \left((3)\left(-1{,}25\right) + (0{,}25)\left(2{,}076923\right)\right)\right) = 0{,}266667$$

Cuarta columna de B

$$b_{44} = a_{44} - (b_{41}c_{14} + b_{42}c_{24} + b_{43}c_{34}) = 4 - [(2)(-1{,}25) + (4{,}5)(2{,}076923) + (11{,}076921)(0{,}266667)] = -5{,}800002$$

Con todos los elementos calculados, es posible escribir las dos nuevas matrices. Con las cuales se llegará a la solución final.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3{,}25 & 0 & 0 \\ 3 & 0{,}25 & 4{,}615365 & 0 \\ 2 & 4{,}5 & 11{,}076921 & -5{,}800002 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}75 & 0{,}25 & -1{,}25 \\ 0 & 1 & -1{,}461538 & 2{,}076923 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}266667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se plantea el primer sistema $By = b$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3{,}25 & 0 & 0 \\ 3 & 0{,}25 & 4{,}615365 & 0 \\ 2 & 4{,}5 & 11{,}076921 & -5{,}800002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Se resuelve:

$$4y_1 = 7 \rightarrow y_1 = 1{,}75$$

$$7y_1 + 3{,}25y_2 = 6 \rightarrow y_2 = -1{,}923077$$

$$3y_1 + 0{,}25y_2 + 4{,}615385y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -1{,}033333$$

$$2y_1 + 4{,}5y_2 + 11{,}076921y_3 - 5{,}800002y_4 = -5 \rightarrow y_4 = -2$$

Se plantea el segundo sistema Cx=y

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}75 & 0{,}25 & -1{,}25 \\ 0 & 1 & -1{,}461538 & 2{,}076923 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}266667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -1{,}923077 \\ -1{,}033333 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$1x_4 = -2 \rightarrow x_4 = -2$$

$$x_3 + 0{,}266667x_4 = -1{,}033333 \rightarrow x_3 = -0{,}5$$

$$x_2 - 1{,}461538x_3 + 2{,}076923x_4 = -1{,}923077 \rightarrow x_2 = 1{,}5$$

$$x_1 - 0{,}75x_2 + 0{,}25x_3 - 1{,}25x_4 = 1{,}75 \rightarrow x_1 = 0{,}5$$

3.5.2. Método de Cholesky

A continuación se muestra el método de programado en matlab, se deje al lector la verificación del mismo según la fundamentación teórica.

Programa 3.9. Método Numérico de Cholesky con Matlab

```

A=input('Ingresa la matriz A = \n'); % Almacena la matriz A
b=input('\nIngresa el vector b, correspondite a los terminos independientes b=\n');% ...
    Almacenar la matriz b
maxiter=input('Ingresa las iteraciones maximas que deseas tener ') %numero maximo de ...
    iteraciones
err=input('Ingrese el error al que deseas llegar:') %Error al que deseo llegar

[n,m]=size(A);% Crea un vector de filas n y columnas m, con respecto a A
C=[A,b];% la matriz C, es la forma de la matriz aumentada [Ab]
disp(C)% Llama y muestra la matriz C
%Ciclo de repeticion.
%% METODO ITERATIVO
if n==m % LLamada una igualacion, debe de ser una matriz de igual numero de filas y ...
    columnas es decir nxn
for k=1:n %Crea y Navega por las n variables que tiene la matriz K desde 1 hasta n
%La instruccion iterativa for permite repetir estamentos a un numero especIfico de veces
suma1=0; %contador o acumulador inicial desde 0
for p=1:k-1 %Crea y Navega por las n variables que tiene mi matriz p desde 1 hasta k-1
suma1=suma1+L(k,p)*u(p,k); % Se va actualizando mi contador de suma
end %Fin de condicion
L(k,k)=sqrt(A(k,k)-suma1); %crea el vector L(K,K) con los datos anteriores, ademas ...
    sqrt es la raiz cuadrada de cada elemento de L
u(k,k)=L(k,k); % Senala el principio del metodo iterativo
for i=k+1:n %crea un vector i que empieze desde k+1 hasta n
suma2=0; %contador o acumulador de Suma2 desde inicio
for q=1:k-1 %Crea y Navega por las n variables que tiene la matriz q desde 1 hasta k-1
suma2=suma2+L(i,q)*u(q,k);%actualiza contador suma 2 en el proceso
end %Fin de condicion
L(i,k)=(A(i,k)-suma2)/L(k,k); % Se halla la matriz L
end % Fin condicion
for j=k+1:n %Crea y Navega por las n variables que tiene la matriz j desde k+1 hasta n
suma3=0; %contador o acumulador de Suma3 desde inicio
for r=1:k-1 %Crea y Navega por las n variables que tiene la matriz r desde 1 hasta k-1
suma3=suma3+L(k,r)*u(r,j);%actualiza contador suma3 en el proceso
end %Fin de condicion
u(k,j)=(A(k,j)-suma3)/L(k,k); % Se halla la matriz u, a partir de los valores hallados
end %Fin de Proceso
end %Fin proceso
producto=det(L)*det(u) % se calcula de determinante de l*u
if producto≠0 %Simbolo y condicion que indica que el producto debe de ser diferente ...
    de 0
for i=1:n % Navega a i por las n variables que tiene, desde la primera hasta la ...
    ultima fila
suma=0; %contador o acumulador de Suma desde inicio
for p=1:i-1 %Crea y Navega por las n variables que tiene la matriz r desde 1 hasta k-1
suma=suma+L(i,p)*z(p); %actualiza contador suma en el proceso de p
end %Fin de la condkyicion
z(i)=(b(i)-suma)/L(i,i); % Se halla la matriz z
end %Fin de condicion
for i=n:-1:1 %crea un vector i de los elementos disminuyen en -1 desde n hasta 1
suma=0; %contador o acumulador de Suma desde inicio
for p=i+1:n %Crea y Navega por lasvariables que tiene la matriz p desde i+1 hasta n
suma = suma+u(i,p)*x(p);%actualiza contador suma en el proceso de p
end % Fin condicion
x(i)=(z(i)-suma)/u(i,i); %Es la solucion de mis variables halladas despues de ...
    terminar el proceso iterativo
end %Fin condicion
else % condicion mas
fprintf('\nEl determinante es igual a cero, por lo tanto el sistema tiene infinita o ...
    ninguna solucion\n') %imprime si la solucion no converge
end %Fin de condicion
end %Fin proceso
%% RESULTADOS
fprintf('\n Matriz Ab:\n') %Imprime el valor de matriz Ab
```

```
disp(C) %Llama y muestra a la matriz c
fprintf('\n Matriz L:\n') %Imprime el valor de matriz L
disp(L) %Llama y muestra a la matriz l
fprintf('\n Matriz U:\n') %Imprime el valor de matriz u
disp(u) %Llama y muestra a la matriz u
fprintf('\n El vector Z:\n') %Imprime el valor de vector z
disp(z) %Llama y muestra vector z
fprintf('\n\nLa solucion de X1 hasta Xn es:\n'); %Imprime mis soluciones
%a continuacion de utiliza una instruccion for, para mostrar el usuario,
%los resultados de una manera mas ordenada
iterac=0; %contador de iteraciones
cc=zeros(1,n); %Ayuda a calcular el error
error=err+1; % se calcula el error aproximado
%Condicional
%% ERROR
while iterac<maxiter & error>err % orden de convergencia o de parada
iterac=iterac+1; % se actualiza mi contador de iteraciones
fprintf('Estas en la iteracion # %d \n',iterac) %Imprime el numero de cada iteracion
for i=1:n % %crea un vector i de los elementos que van desde 1 hasta n
xi=x(1,i); %se crea un vector 1,j, a partir del proceso anterior
fprintf('\nX%g=',i) %Se instaura una variable i de la solucion
disp(xi); %Imprime el valor de xi
end %Fin del subproceso
error=norm(x(1,i)-cc); % Hallamos el valor de nuestro error absoluto que esperabamos
cc=x(1,i); % Las siguientes iteraciones en la matriz cc valdran xi
if iterac>maxiter % Criterio o parametro de salida del ciclo repetitivo
disp('La operacion diverge, hace falta mas iteraciones')%
break; % terminar abruptamente si se cumple le criterio establecido
end %Fin condicion
if error<err %Criterio de salida del ciclo repetitivo
break; %terminar abruptamente si se cumple le criterio establecido
end %Fin condicion
end % Fin proceso
disp('iteraciones requeridas') %Muestra las iteraciones
disp(iterac) %Muestra el vector de iteraciones
disp('error alcanzado') %Muestra el error alcanzado
disp(error) %Muestra el vector de error absoluto
%% FORMA DE EJECUCION
%A=[2 -1 0 0 0;-1 2 -1 0 0;0 -1 2 -1 0;0 0 -1 2 -1;0 0 0 -1 2]
%B=[5;6;7;8;9]
%15
%0.005
```

3.5.3. Método de la raíz cuadrada

Es un método de descomposición de matrices en donde:
Se tiene un sistema de ecuaciones que tiene la forma: $Ax = c$
Se debe descomponer en dos matrices L y L^T.

$$L : matriz\ triangular\ superior$$

$$L^T : matriz\ transpuesta\ de\ L$$

Primer elemento de L

$$L_{11} : \sqrt{a_{11}}$$

Elementos de la primera fila:

$$L_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{1i}}$$

$$i = 1 j = 2, 3, \ldots\ldots, n$$

Elementos diagonales

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki}^2} \tag{3.6}$$

Elementos siguientes

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki}L_{kj}}{L_{ii}} \tag{3.7}$$

Ejemplo

$$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 29$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 12x_4 = -20$$

Primer elemento

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$L_{11} = \sqrt{5} = 2{,}236068$$

Demás elementos de la primera fila.//

$$L_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{1i}}$$

$$L_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = \frac{-3}{2{,}236068} = -1{,}341641$$

$$L_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = \frac{2}{2{,}236068} = 0{,}894427$$

$$L_{14} = \frac{a_{14}}{L_{11}} = \frac{1}{2{,}236068} = 0{,}447214$$

Segundo elemento de la diagonal, y resto de elementos de la próxima fila.

$$L_{22} = \sqrt{a_{22} - L_{12}^2} = \sqrt{4 - (-1{,}341641)^2} = 1{,}483239$$

$$L_{24} = \frac{a_{24} - L_{12}L_{14}}{L_{22}} = \frac{2 - (-1{,}341641)\,(0{,}447214)}{1{,}483239} = 1{,}752920$$

Tercer elemento de la diagonal y próxima fila.

$$L_{33} = \sqrt{a_{33} - (L_{13}^2 + L_{23}^2)} = \sqrt{5 - ((0{,}894427)^2 + (1{,}483240)^2} = 1{,}414214$$

$$L_{34} = \frac{a_{34} - (L_{13}L_{14} + L_{23}L_{24})}{L_{33}} = \frac{-1 - ((0{,}894427)\,(0{,}447214) + (1{,}483240)\,(1{,}752920) =}{1{,}414214} = -2{,}828427$$

Última diagonal.

$$L_{34} = \frac{a_{34} - (L_{13}L_{14} + L_{23}L_{24})}{L_{33}} = \frac{-1 - ((0{,}894427)\,(0{,}447214) + (1{,}483240)\,(1{,}752920) =}{1{,}414214} = -2{,}828427$$

$$L_{44} = \sqrt{a_{44} - (L_{14}^2 + L_{24}^2 + L_{34}^2)} = \sqrt{12 - ((0{,}447214)^2 + (1{,}752920)^2 + (-2{,}828427)^2} = 0{,}852803$$

Se obtienen las matrices L y L^T.

$$[L] = \begin{bmatrix} 2{,}236068 & -1{,}341641 & 0{,}894427 & 0{,}447214 \\ 0 & 1{,}483239 & 1{,}483240 & 1{,}752920 \\ 0 & 0 & 1{,}414214 & -2{,}828427 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}852803 \end{bmatrix}$$

$$[L^T] = \begin{bmatrix} 2{,}236068 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}341641 & 1{,}483239 & 0 & 0 \\ 0{,}894427 & 1{,}483240 & 1{,}414214 & 0 \\ 0{,}447214 & 1{,}414214 & -2{,}828427 & 0{,}852803 \end{bmatrix}$$

Se plantea el primer sistema $L^T y = c$

$$\begin{bmatrix} 2{,}236068 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}341641 & 1{,}483239 & 0 & 0 \\ 0{,}894427 & 1{,}483240 & 1{,}414214 & 0 \\ 0{,}447214 & 1{,}414214 & -2{,}828427 & 0{,}852803 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 29 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 3{,}1330495$$

$$y_2 = 6{,}876842$$

$$y_3 = 11{,}313701$$

$$y_4 = -1{,}705643$$

Segundo sistema $Lx = y$

$$\begin{bmatrix} 2{,}236068 & -1{,}341641 & 0{,}894427 & 0{,}447214 \\ 0 & 1{,}483239 & 1{,}483240 & 1{,}752920 \\ 0 & 0 & 1{,}414214 & -2{,}828427 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}852803 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}130495 \\ 6{,}876842 \\ 11{,}313701 \\ -1{,}705643 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = 2$$

El Script de Matlab que resuelve sistemas de ecuaciones con este método se detalla.

Programa 3.10. Método Raíz Cuadrada

```
clc
clear
a=[5 -3 2 1;-3 4 1 2;2 1 5 -1;1 2 -1 12];
b=[7;6;29;-20];
LT=chol(a)
L=LT'
y=inv(L)*b
x=inv(LT)*y
```

3.6. Aplicaciones en la Ingeniería

La resolución de sistemas de ecuaciones se aplica a varios campos de la ingeniería, en esta sección se presentan algunos casos y ejemplos varios.

- **Ejemplo 1**
  Calcular los esfuerzos a que están sometidos los elementos de la siguiente armadura presentados en la figura 3.2.

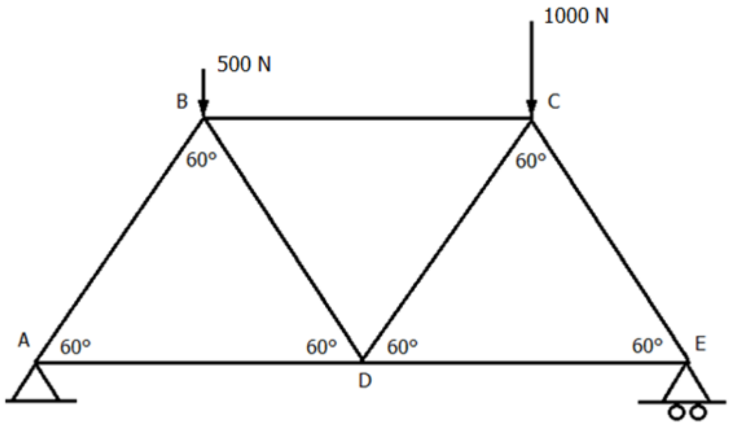


Figura 3.2. Ejercicio 1 aplicado a la Ingeniería

El problema debe abordarse, realizando un análisis de fuerzas en cada nodo o punto de unión (A,B,C,D), aplicando las condiciones de equilibrio estático $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0$

$$\sum F_x = 0$$

NODO A

$$-R_{Ax} + AD + AB\ cos\ 60 = 0$$

NODO B

$$-AB\ sen\ 30 + BC + BD\ sen\ 30 = 0$$

NODO C

$$-BC + CE\ sen\ 30 - DC\ sen\ 30 = 0$$

NODO D

$$-AD + DE + DCcos60 - DBcos60 = 0$$

NODO E

$$-DE - CE\ cos\ 60 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

NODO A

$$R_{Ay} + AB\ sen\ 60 = 0$$

NODO B

$$-AB\ cos\ 30 - BD\ cos\ 30 - 500 = 0$$

NODO C

$$-AB\ cos\ 30 - BD\ cos\ 30 - 500 = 0$$

NODO D

$$DB\ sin\ 60 + DC\ sen\ 60 = 0$$

NODO E

$$EC\ sen\ 60 + R_{Ey} = 0$$

Se puede apreciar que se han obtenido un conjunto de ecuaciones, de cada una de ellas se deben ir obteniendo las incógnitas para ordenarlas en una matriz de coeficientes, debajo de cada incógnita se han de ubicar los coeficientes obteniéndolos de cada ecuación, además tendremos el vector de incógnitas y el vector de términos independientes, como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} AB & AD & BC & BD & CD & CE & DE & Rax & Ray & Rey \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}8 & 0 & 0 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}8 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .. \\ AB \\ AD \\ BC \\ BD \\ CD \\ CE \\ DE \\ Rax \\ Ray \\ Rey \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .. \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema se puede resolver de forma manual con alguno de los métodos analizados o utilizando Matlab a continuación se muestran los resultados obtenidos.

$$AB = -721{,}7N$$

$$AD = 360{,}9N$$

$$BC = -433N$$

$$BD = 144{,}3N$$

$$CE = -144{,}3N$$

$$DE = -1010{,}4N$$

$$AB = 505{,}2N$$

$$R_{Ax} = -0{,}0000N$$

$$R_{Ay} = 625N$$

$$R_{Ey} = 875N$$

Ejemplo 2 Encontrar los valores de las corrientes y los voltajes del circuito representado en la figura 3.3.

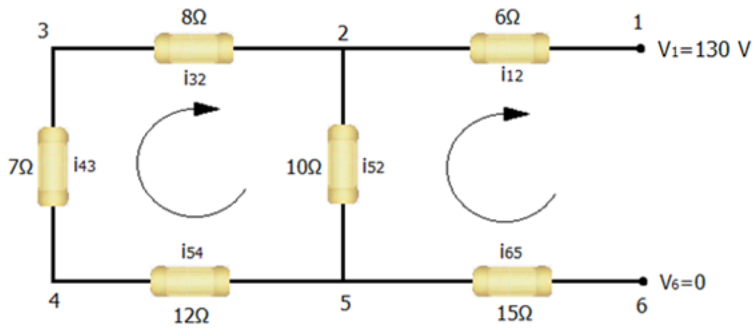


Figura 3.3. Ejercicio 2 aplicado a la Ingeniería

Se procede a dar direcciones a las corrientes, como se muestra en la figura 3.3. Luego se debe aplicar las leyes de Kirchof y Ohm para obtener siguientes ecuaciones.

$$\sum i_k = 0$$

$$i_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

- **Ecuaciones de corriente**

Nodo 2

$$i_{32} + i_{52} - i_{12} = 0$$

Nodo 3

$$i_{43} - i_{32} = 0$$

Nodo 4

$$i_{54} - i_{43} = 0$$

Nodo 5

$$i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$$

- **Ecuaciones de voltaje**

$$i_{12} = \frac{V_1 - V_2}{R_{12}}$$

$$i_{12} = \frac{120 - V_2}{6}$$

$$6i_{12} + V_2 = 130$$

$$i_{32} = \frac{V_3 - V_2}{R_{32}}$$

$$i_{32} = \frac{V_3 - V_2}{8}$$

$$8i_{32} + V_2 - V_3 = 0$$

$$i_{43} = \frac{V_4 - V_3}{R_{43}}$$

$$i_{43} = \frac{V_4 - V_3}{7}$$

$$7i_{43} + V_3 - V_4 = 0$$

$$i_{54} = \frac{V_5 - V_4}{12}$$

$$12i_{54} + V_4 - V_5 = 0$$

$$i_{52} = \frac{V_5 - V_2}{R_{52}}$$

$$i_{52} = \frac{V_5 - V_2}{10}$$

$$10i_{52} + V_2 - V_5 = 0$$

$$i_{65} = \frac{V_6 - V_5}{R_{65}}$$

$$i_{65} = \frac{0 - V_5}{15}$$

$$15i_{65} + V_5 = 0$$

Con este conjunto e ecuaciones se procede a ordenar las incógnitas, y a obtener la matriz de coeficientes, el vector de incógnitas y el vector de términos independientes.

$$\begin{bmatrix} i_{12} & i_{32} & i_{43} & i_{52} & i_{54} & i_{65} & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .. \\ i_{12} \\ i_{32} \\ i_{43} \\ i_{52} \\ i_{54} \\ i_{65} \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .. \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 130 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema se puede resolver de forma manual con alguno de los métodos analizados o utilizando Matlab a continuación se muestran los resultados obtenidos.

$$i_{12} = -7{,}97\ A; i_{32} = -2{,}15\ A; i_{43} = -2{,}15\ A$$

$$i_{52} = -5{,}82\ A; i_{54} = -2{,}15\ A; i_{65} = -7{,}97\ A$$

$$V_2 = 177{,}86\ V; V_3 = 160{,}61\ V; V_4 = 145{,}52\ V; V_5 = 119{,}65\ V$$

- **Ejemplo 3** Se requiere fabricar tres aleaciones de Hierro-Cromo-Níquel, cuya composición se muestra a continuaciónla tabla 3.1.

Aleaciones	Hierro	Cromo	Niquel
1	90	6	4
2	85	9	6
3	80	13	7

Tabla 3.1. Aplicaciones en Ingeniería ejercicio3

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$x_1 = 5{,}833$$

$$x_2 = 4{,}333$$

$$x_3 = 1{,}333$$

Estos resultados deben reinterpretarse, por lo tanto, se deben producir583,3kgde la aleación 1,433,3kg de la aleación 2, y 133,3kg de la aleación3.

Capítulo 4

AJUSTE DE CURVAS E INTERPOLACIÓN

4.1. Introducción

En el campo de la ingeniería se estudia el comportamiento de sistemas mediante la adquisición de datos, para poder procesarlos y establecer cual es la función o funciones que representan el comportamiento de este sistema. En esta sección se estudia principalmente el manejo de datos, por lo tanto es necesario identificar que ellos pueden clasificarse en dos tipos, ver figura 4.1.

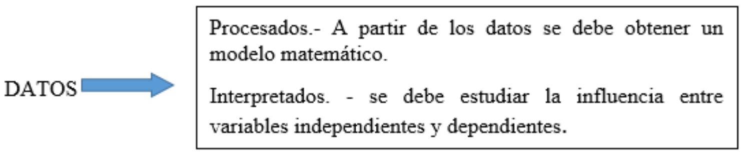


Figura 4.1. Tipos de datos

A un conjunto de datos se los puede someter principalmente a dos diferentes procesos:

4.1.1. Extrapolación

Es el proceso que consiste en obtener nuevos valores más allá de los límites de los datos observados.

4.1.2. Interpolación

Es un procedimiento que consiste en obtener nuevos valores dentro del rango de los datos observados.

- **Ejemplo**

  ¿Cuál será la producción en $2010, 2015, 2020$**?, mostrado en la tabla 4.1**

  El proceso que permite responder a esta pregunta se conoce como extrapolación.

  ¿Cuál será la producción en $2001, 20032005, 20070$**?, mostrado en la tabla 4.1**

  El proceso que permite responder a esta pregunta se conoce como interpolación.

Año	Producción
2000	1090
2002	1120
2004	1250
2006	1490
2008	1650

Tabla 4.1. Ejemplo Ajuste de curvas

4.1.3. Aplicaciones

El análisis e interpretación de datos, tiene muchas aplicaciones, las más importantes se mencionan a continuación:

Análisis de tendencias $\Longrightarrow$ Pronóstico de producciones.

Prueba de hipótesis $\Longrightarrow$ Consiste en comparar un modelo matemático.

Integración numérica $\Longrightarrow$ Funciones complejas, datos tabulados.

Diferenciación numérica $\Longrightarrow$ Funciones complejas, datos tabulados.

4.2. Conceptos de estadística a utilizar

- **Media**

  El concepto de estadística mas común es la media, que se define como la sumatoria de un conjunto de datos dividida entre en número total de datos. Escrito matemáticamente tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \tag{4.1}$$

- **Desviación estándar**

  Es una medida de dispersión respecto a la media. Su fórmula es:

$$S_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} \tag{4.2}$$

  En donde el termino S_t, representa la suma de los cuadrados de las diferencias entre el dato y la media, es decir:

$$S_t = \sum (x_i - \bar{x})^2 \tag{4.3}$$

  Al calcular estos valores es posible llegar a la siguiente conclusión: Si las mediciones se encuentran muy dispersas alrededor de la media, S_t(y por consiguiente S_y,) tendrán valores grandes. Por el contrario, si las mediciones están agrupadas cerca de la media, la desviación estándar será pequeña.

4.3. Regresión Lineal (mínimos cuadrados)

En este método se conoce una función tabular (conjunto de datos), a partir de los cuales se trata de obtener los valores de los coeficientes de la función, es decir ajustar una línea recta a un conjunto de parejas de datos observados: $(x1, y1); (x2, y2)$, etc.
En palabras más sencillas, se intenta hacer pasar una línea a través de un cierto número de puntos, ver figura 4.2.

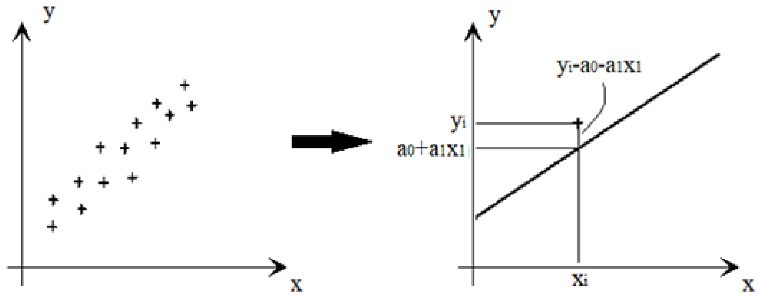


Figura 4.2. Modelo de regresión lineal

La ecuación de la recta que se ajusta al conjunto de datos tendrá la forma:

$$y = a_0 + a_1 x + \varepsilon \tag{4.4}$$

En donde:

$$a_0 = interseccion\ de\ la\ recta\ con\ el\ eje\ y$$

$$a_1 = pendiente\ de\ la\ recta$$

$$\varepsilon = error\ o\ residuo$$

Reordenando, se puede calcular el error.

$$\varepsilon = y - a_0 - a_1 x \tag{4.5}$$

$$Error = valor\ real\ -\ valor\ aproximado \tag{4.6}$$

El método de los mínimos cuadrados consiste en determinar los valores de los coeficientes a_0 y a_1 de manera que hagan la mínima suma de los cuadrados de los residuos S_r.

$$S_r = \sum \varepsilon^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \tag{4.7}$$

Con esta expresión se obtendrán dos ecuaciones:

$$0 = \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i$$

$$0 = \sum y_i x_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 {x_i}^2$$

Que se transformarán en dos nuevas expresiones, después de realizar derivadas parciales con respecto a cada uno de los coeficientes y considerando que:
$\sum a_0 = n a_0$

$$n a_0 + \sum a_1 x_i = \sum y_i$$

$$\sum a_0 x_i + \sum a_1 {x_i}^2 = \sum y_i x_i$$

Estas dos ecuaciones también se pueden escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{bmatrix}$$

De donde se puede obtener ya los valores de $a_0 y a_1$, para formar la ecuación de la recta. Sin embargo, es evidente que esta ecuación no pasara exactamente por cada uno de los puntos, entonces hay que determinar el error de la regresión realizada. Para determinar el error en la regresión lineal se puede utilizar dos alternativas:

4.3.1. Cálculo del error en la regresión lineal

Para determinar el error en la regresión lineal se puede utilizar dos alternativas.

1)Determinar el error estándar

$$s_{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{s_r}{n-2}} \tag{4.8}$$

En donde si el error estándar es menor que la desviación estándar se dice que el modelo de regresión lineal es aceptable.

2)Calcular los coeficientes de correlación o de determinación

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \tag{4.9}$$

Revisando la estructura de esta ecuación se puede decir que:

$$Si\ r^2 = 1 \Longrightarrow Ajuste\ perfecto$$

$$Si\ s_r = 0 \Longrightarrow Ajuste\ perfecto$$

Si se tiene un ajuste perfecto significa que, el modelo de regresión encontrado pasa por todos y cada uno de los puntos correspondientes a los datos observados.

- **Ejemplo 1**

La producción anual de vehículos de una empresa ensambladora es:

Año	Vehículos
2000	1090
2002	1120
2004	1250
2006	1490
2008	1650

Tabla 4.2. Ejemplo 1 con Ajuste de curvas

Realizar la proyección para el año 2010 y 2014, según la tabla 4.2.

En este caso, para poder determinar una proyección de producción para años fuera del limite de datos observados (extrapolación) es necesario determinar en primer lugar una ecuación que se ajuste al conjunto de datos.

Para esto debe construir una tabla que contenga los valores requeridos para el sistema de ecuaciones que permite calcular los coeficientes a_0 y a_1, mostrados en la tabal 4.2.

Año(x)	Vehículos(y)	x^2	$x*y$	s_t
$2000 \longrightarrow 0$	1090	0	0	$(1090-1320)^2 = 52900$
$2002 \longrightarrow 2$	1120	4	2240	$(1120-1320)^2 = 40000$
$2004 \longrightarrow 4$	1250	16	5000	$(1250-1320)^2 = 49000$
$2006 \longrightarrow 6$	1490	36	8940	$(1490-1320)^2 = 28900$
$2008 \longrightarrow 8$	1650	64	13200	$(1650-1320)^2 = 108900$
$\sum = 20$	6600	120	29380	235600

Tabla 4.3. Ejemplo 1 para el cálculo del sistema de ecuacioes

Entonces el sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6600 \\ 29380 \end{bmatrix}$$

De donde los valores de a_0 y a_1 son:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1022 \\ 74{,}5 \end{bmatrix}$$

Es decir que la ecuación buscada es:

$$y = 1022 + 74{,}5x$$

En donde si se reemplazan los años 2010 y 2014 se obtiene la proyección de producción.

$$y = 1022 + 74{,}5\,(10) = 1767$$

$$y = 1022 + 74{,}5\,(14) = 2065$$

- **Evaluación del error de la regresión**

$$S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \tag{4.10}$$

La tabla 4.4 resume los datos calculados.

$(y_i - a_0 - a_1x_i)^2$	Resultado
$(1090 - 1022 - 74{,}5(0))^2$	4624
$(1120 - 1022 - 74{,}5(2))^2$	2601
$(1250 - 1022 - 74{,}5(4))^2$	4900
$(1490 - 1022 - 74{,}5(6))^2$	441
$(1650 - 1022 - 74{,}5(8))^2$	1024
S_t	13590

Tabla 4.4. Cálculos de S_r

$$S_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} = \sqrt{\frac{235600}{5-1}} = 242{,}62$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} = \sqrt{\frac{13590}{5-2}} = 67{,}3$$

Como $67{,}32 \prec 42{,}62$, entonces el ajuste es aceptable.

$$r^2 = \frac{St - Sr}{St} = \frac{235600 - 13590}{235600} = 0{,}94231749$$

Este valor indica una fiabilidad del 94,23 % .
Se comprueban todos estos valores, con el uso del siguiente Script de Matlab que a su aplicación muestra como resultados los valores de las incógnitas a_0 *y* a_1, la ecuación de la recta, los valores S_t, S_r, r^2, y una gráfica de los puntos y la recta obtenida.

Los números de la tabla se deben ingresar separados de espacios dentro de las matrices x=[ ],y=[ ].

4.3.2. Regresión lineal con Matlab

A continuación se presenta el algoritmo de Regresión lineal con la utilización de Matlab, es importante que el lector pueda verificar la su funcionamiento con la ejecución.

Programa 4.1. Regresión lineal con matlab

```
clc
clear
syms X

x=[0 2 4 6 8]
y=[1090 1120 1250 1490 1650]
n=length(y)

sx=sum(x)
x2=x.^2
sx2=sum(x2)
sy=sum(y)
yx=y.*x
syx=sum(yx)

plot(x,y, '*')
grid on
A=[n sx;
   sx sx2]
B=[sy;syx]
a=inv(A)*B

Y=a(1,1)+a(2,1)*X
hold on
fplot(char(Y),[x(1,1) x(1,n) ])
sr=(y-a(1,1)-a(2,1)*x).^2
```

```
srr=sum(sr)

ym=sy/n
st=(y-ym).^2

stt=sum(st)
r2=(stt-srr)/stt
```

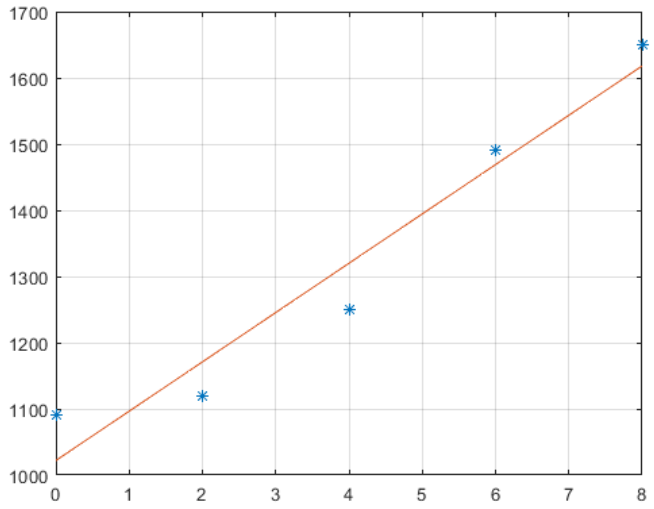


Figura 4.3. Regresión lineal ejemplo 1

4.4. Regresión Polinomial

En el método anterior se observó como ajustar un conjunto de datos a una línea recta, es decir a una ecuación de primer grado.En este apartado se analizará el procedimentos de mínimos cuadrados para extender y ajustar los datos a un polinomio de n-ésimo grado, con la forma:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_m x^m \tag{4.11}$$

Para este caso específico, la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots\ldots.. - a_m x_i^m)^2 \tag{4.12}$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, se toma la derivada de la ecuación con respecto a cada uno de los coeficientes polinomio, para obtener:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots\ldots.. - a_m x_i^m) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots\ldots.. - a_m x_i^m)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i^2 (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots\ldots.. - a_m x_i^m)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2 \sum x_i^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots\ldots.. - a_m x_i^m))$$

Estas ecuaciones se pueden igualar a cero y redondear de tal forma que se obtenga el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + \dots\dots\dots + a_m \sum x_i^m = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \dots\dots\dots + a_m \sum x_i^{m+1} = \sum x_i y_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + \dots\dots\dots + a_m \sum x_i^{m+2} = \sum x_i^2 y_i$$

....

$$a_0 \sum x_i^m + a_1 \sum x_i^{m+1} + a_2 \sum x_i^{m+2} + \dots\dots\dots + a_m \sum x_i^{2m} = \sum x_i^m y_i$$

En donde todas las sumatorias van desde i=1 hasta m. Nótese que las m+1 ecuaciones anteriores son lineales y tienen m+1 incógnitas: $a_0, a_1, ..., a_m$..

De donde los coeficientes de las incógnitas se pueden calcular de forma directa desde los datos observados.

En forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots\dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots\dots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots\dots & \sum x_i^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \dots \\ \dots \\ \sum x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

Y de igual manera que en la regresión lineal, el error de la regresión polinomial se puede cuantificar mediante el error estándar de la aproximación.

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}} \tag{4.14}$$

En donde m es el orden del polinomio, esta cantidad se divide $n-(m+1)$ ya que se usaron $m+1$ coeficientes $a_0, a_1, \dots\dots\dots,\ a_m$ derivados de los datos para calcular S; entonces, se han perdido $m+1$grados de libertad.

Para el caso de la regresión polinomial, también se puede calcular el coeficiente de correlación:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \tag{4.15}$$

- **Ejemplo 1**

  Usando la regresión polinomial encontrar una ecuación (polinomio de orden tres) de ajuste, de los siguientes datos mostrados en la tabla 4.5 y verificar su aceptabilidad.

x	1	3	5	7	10
y	2	4	7	11	18

Tabla 4.5. Ejercicio 1 regresión polinomial

La tabla 4.6 y 4.7 se requiere en este caso necesita el cálculo de las sumatorias de: $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x*y, x^2*y, x^3*y$.

x	y	x^2	x^3	x^4	x^5
1	2	1	1	1	1
3	4	9	27	81	243
5	7	25	125	625	3125
7	11	49	343	2401	16807
10	18	100	1000	10000	100000
26	42	184	1496	13108	120176

Tabla 4.6. Valores de x, y, x^2, x^3, x^4, x^5

x^6	xy	x^2y	x^3y	S_t	S_T
1	2	2	2	40.96	$5{,}437 * 10^{-5}$
729	12	36	108	19.36	0,00080781
15625	35	175	875	1.96	0,001592808
117649	77	539	3773	6.76	0,000478297
1000000	180	1800	18000	92.16	$1{,}681 * 10^{-5}$
1134004	306	2552	22758	161.2	0,002950101

Tabla 4.7. Valores de $x^6, xy, x^2y, x^3y, S_t, s_T$

Según los datos obtenidos se puede represntarlos en la figura 4.4 en donde se evidencia el ajuste polinomial.

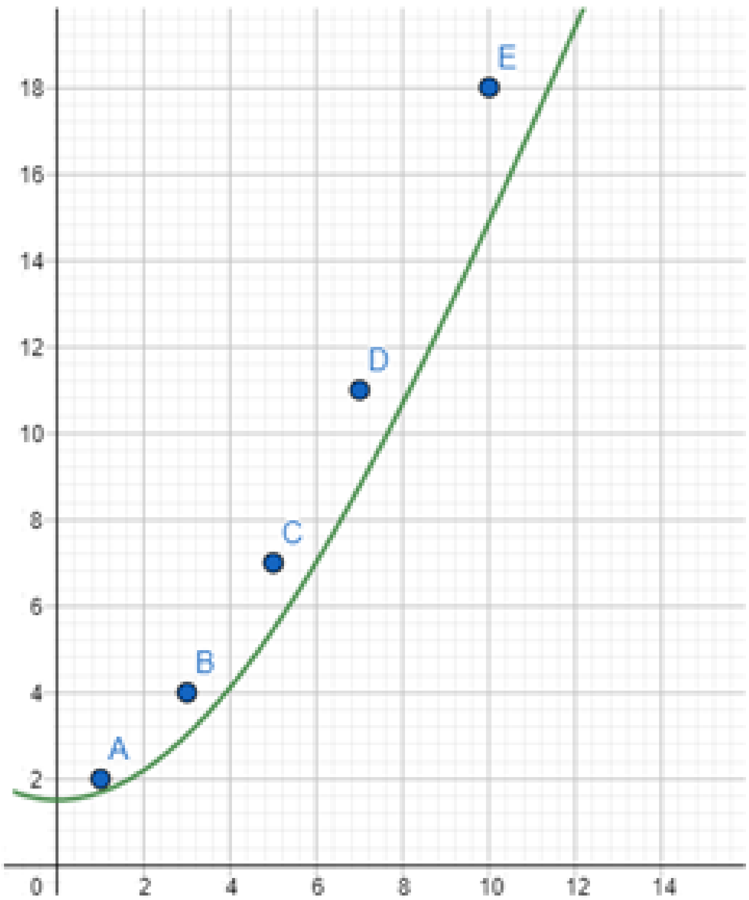


Figura 4.4. Representación gráfica de los datos y de la curva de ajuste polinomial

Se plantea el sistema para determinar los coeficientes $a_0,\ a_1,\ \ a_2,\ a_3,\ a_4$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 26 & 184 & 1496 \\ 26 & 184 & 1496 & 13108 \\ 184 & 1496 & 13108 & 120176 \\ 1496 & 13108 & 120176 & 1134004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 306 \\ 2552 \\ 22758 \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema se obtiene:

$$a_0 = 1{,}51252$$
$$a_1 = 0{,}317798$$
$$a_2 = 0{,}181936$$
$$a_3 = -0{,}00488$$

Por lo tanto, la ecuación del ajuste es:

$$y = -0{,}0048x^3 + 0{,}181936x^2 + 0{,}317798x + 1{,}51252$$

Determinando S_t *y* S_r se calcula el coeficiente de correlación.

$$r^2 = \frac{161{,}2 - 0{,}002950}{161{,}2} = 0{,}99992$$

Este valor indica una fiabilidad de 99,99 %.

4.4.1. Regresión Polinolial con Matlab

El Script de Matlab que permite ajustar un conjunto de datos a un polinomio de tercer grado se muestra a continuación. Este programa muestra la ecuación, una gráfica de los puntos y la respectiva curva, así como todas las columnas y sumatorias de la tabla.

Programa 4.2. Regresión polinomial con matlab

```
clc
clear

format short
syms x
xx=[1 3 5 7 10]
y=[2 4 7 11 18]
n=length(y)
plot(xx,y,'*')
grid on
hold off
sx=sum(xx);
x2=xx.^2
sx2=sum(x2)
x3=xx.^3
sx3=sum(x3)
x4=xx.^4
sx4=sum(x4)
x5=xx.^5
sx5=sum(x5)
x6=xx.^6
sx6=sum(x6)
sy=sum(y)
xy=xx.*y
sxy=sum(xy)
x2y=x2.*y
```

```
sx2y=sum(x2y)
x3y=x3.*y
sx3y=sum(x3y)

A=[n  sx  sx2  sx3;
   sx  sx2  sx3  sx4;
   sx2  sx3  sx4  sx5;
   sx3  sx4  sx5  sx6;]

b=[sy;sxy;sx2y;sx3y]
a=inv(A)*b
f=a(1,1)+a(2,1)*x+a(3,1)*x^2+a(4,1)*x^3;
f=vpa(f,4)
hold on
fplot(char(f),[xx(1,1) xx(1,n)])
```

La figura 4.5, muestra los resultados del ejemplo utilizando regrresión lineal.

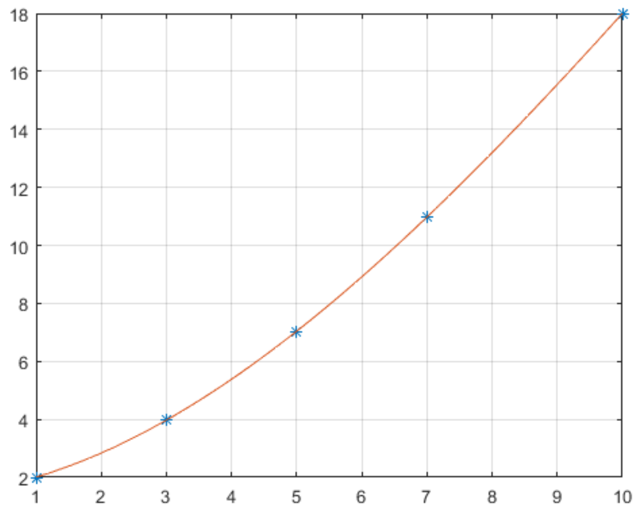


Figura 4.5. Resultados regresión polinomial

4.5. Regresión Lineal Múltiple

La regresión lineal es utiizada cuando la variable "y" es una función de dos o más variables independientes de la forma.

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_{3+} \ldots + a_m x_m \tag{4.16}$$

Es necesario utilizar, regresión lineal múltiple.

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i})^2 \tag{4.17}$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, se toma la derivada de la ecuación con respecto a cada uno de los coeficientes del polinomio, para obtener:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i}) \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i (y_i - a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum x_i(y_i - a_0 - a_1x_{1,i} - a_2x_{2,i} - \ldots - a_mx_{m,i})$$

– –

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2\sum x_{m,i}(y_i - a_0 - a_1x_{1,i} - a_2x_{2,i} - \ldots - a_mx_{m,i})$$

Y en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & ... & \sum x_m \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 & ... & \sum x_1x_m \\ \sum x_2 & \sum x_2x_1 & \sum x_2^2 & ... & \sum x_2x_m \\ ... & ... & ... & ... & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... \\ \sum x_m & \sum x_mx_1 & \sum x_mx_2 & ... & \sum x_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ ... \\ ... \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_iy_i \\ \sum x_2y_i \\ ... \\ ... \\ \sum x_my_i \end{bmatrix}$$

El error estándar y el coeficiente de correlación son:

$$S_{y/x_1,x_2,\ldots,x_m} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1}} \tag{4.19}$$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

- **Ejemplo 1**

  Resolver el siguiente ejercicio a partir de la tabla 4.8.

x_i	1	1.5	2	3	5
x_2	1	2	3	5	6
v	15	14.5	17	16	18

Tabla 4.8. Datos ejercicio 1

Los datos procesados se muestran en la tabla 4.9.

y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y	s_t	s_r
15	1	1	1	15	15	1.21	$1{,}6 * 10^{-11}$
14.5	2.25	4	3	21.75	29	2.56	0.73469927
17	4	9	6	34	51	0.81	1.65305535
16	9	25	15	48	80	0.01	0.18367396
18	25	36	30	90	108	3.61	$2{,}49 * 10^{-11}$
80.5	41.25	75	55	208.75	283	8.2	2.57142857

Tabla 4.9. Datos y,x_1^2,x_2^2,x_1x_2,x_1y,x_2y,$s_t.s_r$

Se plantea el sistema para determinar los coeficientes a_0, a_1, a_2.

$$\begin{bmatrix} 5 & 12{,}5 & 17 \\ 12{,}5 & 41{,}25 & 55 \\ 17 & 55 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80{,}5 \\ 208{,}75 \\ 283 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene:

$$a_0 = 14,2381$$

$$a_1 = 0,809524$$

$$a_2 = -0,04762$$

Por lo tanto, la ecuación del ajuste es:

$$y = 14,2381 + 0,809524x_1 - 0,04762x_2$$

Determinando $S_t y S_r$ se calcula el coeficiente de correlación.

$$r^2 = \frac{8,2 - 2,571428}{8{,}2} = 0,686411$$

La fiabilidad del modelo es del 68,64 %

4.5.1. Regresión lineal múltiple con matlab

Se indica a continuación el Script para este método, el cual muestra como resultados lo valores de los coeficientes para construir la ecuación y los valores de S_t, S_r, r^2.

Programa 4.3. Regresión lineal múltiple con matlab 2

```
clc
clear

format short
syms x
x1=[1 1.5 2 3 5 ]
x2=[1 2 3 5 6]
y=[15 14.5 17 16 18]
n=length(y)

sx1=sum(x1)
sx2=sum(x2)

x12=x1.^2

sx12=sum(x12)

x1x2=x1.*x2

sx1x2=sum(x1x2)

x22=x2.^2

sx22=sum(x22)

sy=sum(y)

x1y=x1.*y

sx1y=sum(x1y)

x2y=x2.*y

sx2y=sum(x2y)

A=[n sx1 sx2;
   sx1 sx12 sx1x2;
   sx2 sx1x2 sx22]

b=[sy; sx1y; sx2y]

```

```
a=inv(A)*b

ym=sy/n

sr=(y-a(1,1)-a(2,1)*x1-a(3,1)*x2).^2
srt=sum(sr)

st=(y-ym).^2
stt=sum(st)
r2=(stt-srt)/stt
```

4.6. Linealización de funciones no lineales

Aplicando los mismos conceptos y utilizando como base los primeros temas de este capítulo, es posible linealizar funciones y encontrar sus respectivas ecuaciones.

En las siguientes imágenes, se puede observar la función original con su correspondiente gráfica a la izquierda, y su respectiva linealización y ecuación a la derecha, mostrada en la figura 4.6.

- **Función exponecial** La función potencia se puede ver en la figura 4.6.

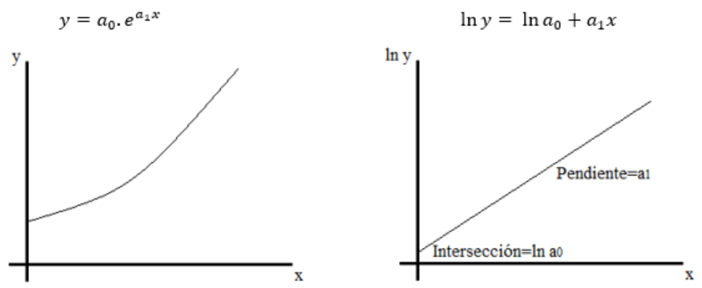


Figura 4.6. Función exponencial

- **Función potencia**

  La función potencia se puede ver en la figura 4.7.

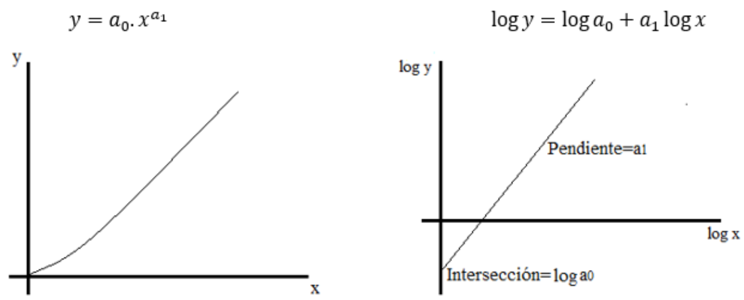


Figura 4.7. Función potencia

- **Función del promedio de crecimiento**

  La función del promedio de crecimiento se puede ver en la figura 4.8.

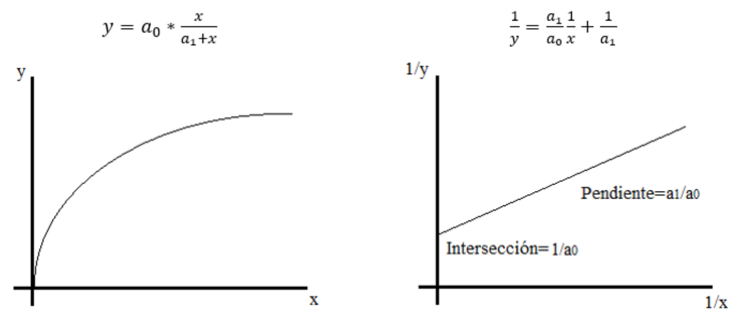


Figura 4.8. Función del promedio de crecimiento

- **Función logarítmica**

La función logarítmica se puede ver en la figura 4.9.

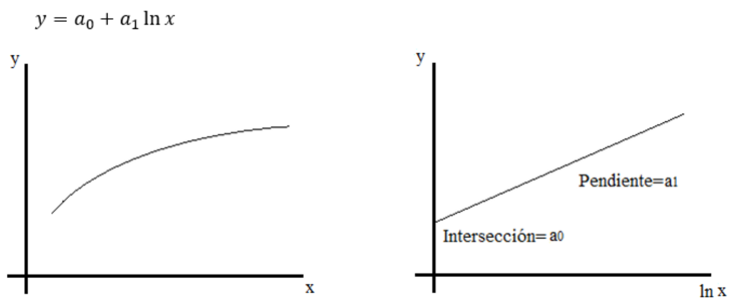


Figura 4.9. Función logarítmica

- **Ejemplo 1** Determine el mejor modelo que se ajuste al siguiente conjunto de datos dela tabla 4.10.

X	Y
0.1	0.002
0.2	0.016
0.3	0.054
0.4	0.128
0.5	0.25

Tabla 4.10. Datos ejercicio 1

Al graficar estos datos se obtiene la curva de la figura 4.10.

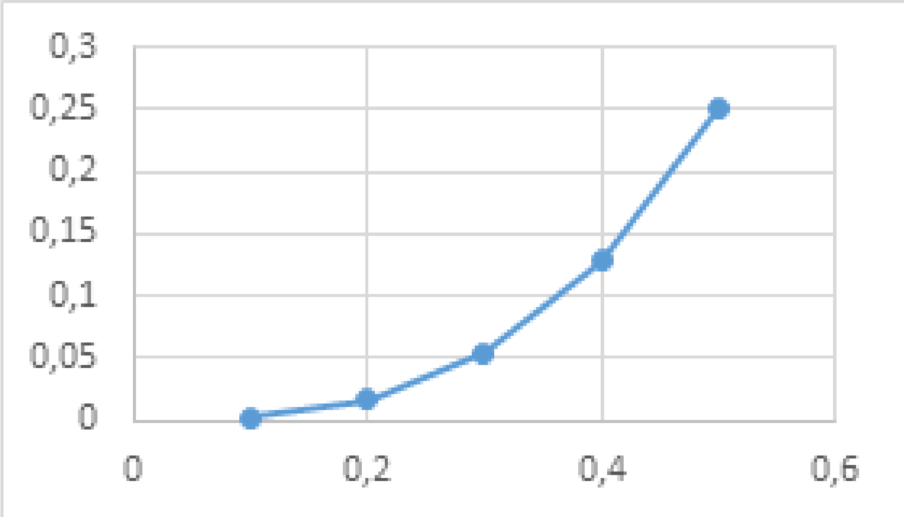


Figura 4.10. Ejercicio 1 datos graficados

Al observar esta imagen, se puede definir que se trata de una función potencia, y por consiguiente se trabajará bajo este tipo de función.

x	y	log x	log y	$logx^2$	$logx.logy$
0.1	0.02	-1	-2.69897	1	2.69897
0.2	0.016	-0.69897	-1.79588	0.488559	1.255266
0.3	0.054	-0.522879	-1267606	0.273402	0.662804
0.4	0.128	-0.39794	-0.89279	0.158356	0.355277
0.5	0.25	-0.30103	-0.60206	0.090619	0.181238
...	0.45	-2.920819	-7.257306	2.010937	5.153556

Tabla 4.11. Aplicaciones en Ingeniería ejercicio3

La tabla 4.11, muestra la estructura con que se debe construir la tabla, y en la parte superior se muestran lo que las nuevas columnas representan.

Entonces se puede plantear una matriz tal como se hizo en la regresión lineal, pero con las nuevas incógnitas.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2{,}920819 \\ -2{,}920819 & 2{,}010937 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} loga_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}257306 \\ 5{,}153556 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\log a_0 = 0{,}30163$$

$$a1 = 3$$

Despejando a_0 se obtiene:

$$a_0 = 10^{0{,}30163} = 2$$

Entonces la ecuación buscada es:

$$y = 2x^3$$

S_t

$$(0{,}002 - 0{,}09)2 = 0{,}007744$$
$$(0{,}016 - 0{,}09)2 = 0{,}005476$$
$$(0{,}054 - 0{,}09)2 = 0{,}001296$$
$$(0{,}128 - 0{,}09)2 = 0{,}001444$$
$$(0{,}25 - 0{,}09)2 = 0{,}0256$$
$$s_t = 0{,}04156$$

S_r

$$(0{,}002 - 2(0{,}1)3)^2 = 1{,}88079 * 10^{-37}$$
$$(0{,}016 - 2(0{,}2)3)^2 = 1{,}20371x10^{-35}$$
$$(0{,}054 - 2(0{,}3)3)^2 = 0$$
$$(0{,}128 - 2(0{,}4)3)^2 = 7{,}7037x10^{-34}$$
$$(0{,}25 - 2(0{,}5)3)^2 = 0$$
$$S_r = 7{,}82597 * 10^{-34}$$
$$r^2 = \frac{0{,}04156 - 7{,}82597x10^{-34}}{0{,}04156} \approx 1$$

- **Ejemplo 2.** Determine el mejor modelo que se ajuste al siguiente conjunto de datos, mostrado en la tabla 4.12.

x	y
1	2
2	4.08
3	5.29
4	6.16
5	6.83

Tabla 4.12. Ejercicio 2

Al graficar estos datos se obtiene la siguiente curva mostrada en la figura 4.11.

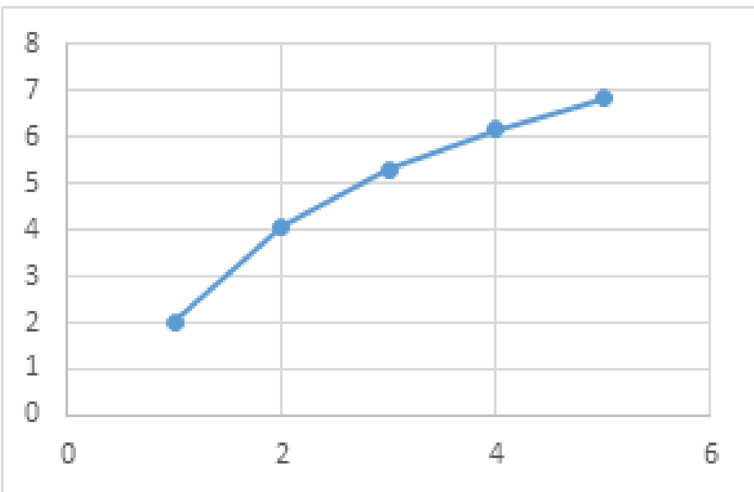


Figura 4.11. Ejercicio 2

En función de la gráfica e procesan los datos en la tabla 4.13.

x	y	lnx	ln^2x	$lnx.y$
1	2	0	0	0
2	4.08	0.693147	0.480453	2.828240
3	5.29	1.098612	1.206949	5.811659
4	6.16	1.386294	1.921812	8.539573
5	6.83	1.609438	2.590290	10.992461
...	24.36	4.787492	6.199504	28.171734

Tabla 4.13. Datos tabulados del ejercicio 2

La tabla anterior muestra la estructura con que se debe construir la tabla, y en la parte superior se muestran lo que las nuevas columnas representan. En este caso solamente la columna x debe cambiar por lnx, debido a las características propias de este conjunto de datos.

Entonces se puede plantear una matriz tal como se hizo en la regresión lineal, pero con las nuevas incógnitas.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4{,}787492 \\ 4{,}787492 & 6{,}199504 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24{,}36//28{,}171734 \end{bmatrix}$$

De donde los valores de $a_0 y a_1$ son:

$$a_0 = 1{,}999145$$

$$a_1 = 3{,}00376$$

Finalmente, la ecuación que se ajusta a los datos es:

$$y = 1{,}999145 + 3{,}00376 \ln x$$

Para verificar si el modelo es adecuado se debe calcular:
S_t

$$(2 - 4{,}872)^2 = 8{,}248364$$

$$(4{,}08 - 4{,}872)^2 = 0{,}627264$$

$$(5{,}29 - 4{,}872)^2 = 0{,}174724$$

$$(6{,}16 - 4{,}872)^2 = 1{,}656944$$

$$(6{,}83 - 4{,}872)^2 = 3{,}833764$$

$$= 14{,}54308$$

S_r

$$(2 - 1{,}999145 - 3{,}00376 \ln 1)^2 = 7{,}15716 * 10^{-7}$$

$$(4{,}08 - 1{,}999145 - 3{,}00376 \ln 2)^2 = 1{,}30836 * 10^{-6}$$

$$(5{,}29 - 1{,}999145 - 3{,}00376 \ln 3)^2 = 2{,}92026 * 10^{-5}$$

$$(6{,}16 - 1{,}999145 - 3{,}00376 \ln 4)^2 = 2{,}07841 * 10^{-6}$$

$$(6{,}83 - 1{,}999145 - 3{,}00376 \ln 5)^2 = 3{,}71377 * 10^{-6}$$

$$S_r = 3{,}0 * 10^{-5}$$

$$r^2 = \frac{14{,}54308 - 3{,}0x10^{-5}}{14{,}54308} \approx 1$$

4.7. Interpolación

Con frecuencia se tiene que estimar valores intermedios dentro de un rango de valores dados o conocidos. El método más utilizado para este propósito es la interpolación polinomial. Es decir que se intente encontrar un polinomio que se ajuste a un conjunto de datos en donde la fórmula general de un polinomio de n-ésimo orden es:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{4.20}$$

Entonces el polinomio de interpolación consiste en determinar un único polinomio de n-ésimo orden que se ajusta a los puntos dados.
A continuación, se describen algunos métodos que permiten determinan el polinomio de n-ésimo orden.

4.7.1. Polinomios de interpolación con diferencias divididas de Newton

- **Interpolación lineal**

  Es la interpolación entre dos puntos. La forma más simple de interpolación es unir dos puntos con una recta, entonces se encontrará una ecuación de primer grado o ecuación de una recta.

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{4.21}$$

$$f_1(x) = \textit{polinomio de interpolacion de primer grado.}$$

Ejemplo 1

Calcular el polinomio de interpolación entre el tercer y cuarto dato de la tabla 4.14, utilizando interpolación lineal.

x	-1	0	1	2	4	5
$f(x)$	-20	5	8	1	5	40

Tabla 4.14. Datos ejericicio 1

$$p_{3,4}(x) = f(x_3) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}(x - x_3)$$

$$p_{3,4}(x = 8 + \frac{1-8}{2-1}(x-1)$$

$$p_{3,4}(x) = 15 - 7x$$

4.8. Interpolación Cuadrática

Es aquella interpolación de tres puntos. En donde se logra mejorar la aproximación introduciendo cierta curvatura en la línea que conecta a los puntos. Este tipo de ajuste se logra si se dispone de tres datos, para calcular un polinomio de segundo grado (polinomio cuadrático o parábola).

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{4.22}$$

Por tanto, es necesario encontrar $b_0, b_1 y b_2$.

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$$

- **Ejemplo con interpolación cuadrática**

Calcular el polinomio de interpolación entre el tercer y el quinto punto, usando interpolación cuadrática, con los datos de la tabla 4.15.

x	-1	0	1	2	4	5
f(x)	-20	5	8	1	5	40

Tabla 4.15. Interpolación cuadrática ejemplo 1

El polinomio que se pretende encontrar tiene la forma.

$$f_{3,5}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f_{3,5}(x) = b_0 + b_1(x - 1) + b_2(x - 1)(x - 2)$$

En esta ecuación primero deben calcularse los valores de; $b_0, b_1 y b_2$.

$$b_0 = f(x_3) = 8$$

$$b_1 = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = \frac{1-8}{2-1} = -7$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4} - \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}}{x_5 - x_3} = \frac{\frac{5-1}{4-2} - \frac{1-8}{2-1}}{4-1} = 3$$

Entonces la ecuación de segundo grado sería:

$$f_{3,5}(x) = 8 - 7(x-1) + 3(x-1)(x-2) = 3x^2 - 16x + 21$$

4.9. Polinomio de grado n

Es un polinomio que se ajustará de manera más adecuada a un conjunto de varios datos y se fundamente en la aplicación de diferencias finitas.

El polinomio tendrá la siguiente forma.

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots\ldots\ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\,.\ \ldots.(x - x_{m-1}) \tag{4.23}$$
$$fxi = fxi + 1 - fxixi + 1 - xi$$

En esta expresión los valores:$x_i y x_{i+1}$, representan las posiciones de los datos de izquierda a derecha en la tabla de datos.

- **Ejemplo 1 Polinomio de grado n** Encontrar un polinomio de quinto grado que se ajuste a todos los datos indicados en la tabla 4.16.

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	2.1	2.3	2.4	2.45	2.35	2.25

Tabla 4.16. Datos Ejemplo 1 Polinomio de grado n

Se inicia calculando los coeficientes b.

$$b_0 = f(x_0) = 2{,}1$$

- **Diferencias finitas de primer orden.**

$$b_1 \to f[x_0, x_1] = \frac{2{,}3 - 2{,}1}{2 - 1} = 0{,}2$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{2{,}4 - 2{,}3}{3 - 2} = 0{,}1$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{2{,}45 - 2{,}4}{4 - 3} = 0{,}05$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{2{,}35 - 2{,}45}{5 - 4} = -0{,}1$$

$$f[x_4, x_5] = \frac{2{,}25 - 2{,}35}{6 - 5} = -0{,}1$$

- **Diferencias finitas de segundo orden.**

$$b_2 \to f[x_0, x_1, x_2] = \frac{0{,}1 - 0{,}2}{3 - 1} = -0{,}05$$

$$f[x_1, x_{2,}\ x_3] = \frac{0{,}05 - 0{,}1}{4 - 2} = -0{,}025$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{-0{,}1 - 0{,}05}{5 - 3} = -0{,}075$$

$$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{-0{,}1 + 0{,}1}{6 - 4} = 0$$

- **Diferencias finitas de tercer orden.**

$$b_3 \rightarrow f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right] = \frac{-0{,}025 + 0{,}05}{4 - 1} = 0{,}008333$$

$$f\left[x_1, x_{2,}\ x_3, x_4\right] = \frac{-0{,}075 + 0{,}025}{5 - 2} = -0{,}016667$$

$$f\left[x_2, x_3, x_4, x_5\right] = \frac{0 + 0{,}075}{6 - 3} = 0{,}025$$

- **Diferencias finitas de cuarto orden.**

$$b_4 \rightarrow f\left[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\right] = \frac{-0{,}016667 - 0{,}008333}{5 - 1} = -0{,}00625$$

$$f\left[x_1, x_{2,}\ x_3, x_4, x_5\right] = \frac{0{,}025 + 0{,}016667}{6 - 2} = 0{,}010417$$

- **Diferencias finitas de quinto orden.**

$$b_5 \rightarrow f\left[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right] = \frac{0{,}010417 + 0{,}00625}{6 - 1} = 0{,}003333$$

Con el cálculo de coeficientes se procede a plantear el polinomio de quinto grado que en este caso se ajusta a todos los datos de la tabla, es decir entre en primer y el sexto dato.

$$f_5\left(x\right) = 2{,}1 + 0{,}2\left(x-1\right) - 0{,}05\left(x-1\right)\left(x-2\right) + 0{,}008333\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right) - 0{,}00625\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right.$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$f_5\left(x\right) = 0{,}00333x^5 - 0{,}056245x^4 + 0{,}354138x^3 - 1{,}068673x^2 + 1{,}667405x + 1{,}200042$$

Y si se requiere calcular un valor intermedio se puede reemplazar en la ecuación, por ejemplo $f(1{,}8)$.

$$f_5\left(1{,}8\right) = 2{,}276746$$

Además, con los mismos coeficientes calculados con las diferencias finitas, se pueden encontrar ecuaciones de primer orden, por ejemplo:

- **Ecuación entre el primer y el segundo dato.**

$$f_1\left(x\right) = 2{,}1 + 0{,}2\left(x-1\right)$$

$$f_1\left(x\right) = 1{,}9 + 0{,}2x$$

$$f_1\left(1{,}8\right) = 1{,}9 + 0{,}2\left(1{,}8\right) = 2{,}26$$

- **Ecuación entre el cuarto y el quinto dato.**

$$f_1\left(x\right) = 2{,}45 - 0{,}1\left(x-4\right)$$

$$f_1\left(x\right) = 2{,}85 - 0{,}1x$$

$$f_1\left(4{,}5\right) = 2{,}85 - 0{,}1\left(4{,}5\right) = 2{,}4$$

4.9.1. Interpolación con Matlab

A continuación se muestrael algoritmo de interpolación con Matlab.

Programa 4.4. Método Numérico de Interpolación con Matlab

```

clear;clc
x=[1 4 6 5];y=[0 1.386294 1.791759 1.609438]; % entrada de datos.
% No tienes que digitar modificar mas nada.

%Cuerpo del programa
xa=x;ya=y;
% Formacion de las diferencias divididas
d=zeros(length(y));
d(:,1)=y';
for k=2:length(x)
    for j=1:length(x)+1-k
        d(j,k)=(d(j+1,k-1)-d(j,k-1))/(x(j+k-1)-x(j));
    end
end
% Formacion del polinomio
for w=1:length(x)
    ds=num2str(abs(d(1,w)));
    if w>1
      if x(w-1)<0
          sg1='+';
    else
          sg1='-';
       end
    end
    if d(1,w)<0
       sg2='-';
    else
       sg2='+';
    end
    if w==1
       acum=num2str(d(1,1));
    elseif w==2
       polact=['(x' sg1 num2str(abs(x(w-1))) ')' ];
       actual=[ds '*' polact];
    acum=[acum sg2 actual];
    else
       polact=[polact '.*' '(x' sg1 num2str(abs(x(w-1))) ')' ];
       actual=[ds '*' polact];
    acum=[acum sg2 actual];
    end
end

% Presentacion de resultados
fprintf('n Valores de X y Y n ');
disp(xa);
disp(ya);
fprintf('n Polinomio interpolacion Newton : %s n',acum);
x=input(' X interp = ');
if x>max(xa)|x<min(xa)
   fprintf('t Punto fuera de rango. El resultado puede ser equivocado n');
end
xinterp=x;
yinterp=eval(acum);
fprintf(' Y(%g) = %g n',x,yinterp);
% Grafica de los puntos
fprintf(' Pulse cualquier tecla para ver la grafica de los puntos n');
pause
xg=linspace(min(xa),max(xa));
x=xg;yg=eval(acum);
plot(xg,yg,xa,ya,'.r',xinterp,yinterp,'or');
grid
```

Programa 4.5. Interpolación Numérica con Newton y Matlab

```
% MENus DE ENTRADA
n=input('INGRESE EL GRADO DEL POLINOMIO, n=');
fprintf('SE NECESITAN INGRESAR  %.0f puntos\n',n+1);
disp('ingrese los puntos');
X=input('INGRESE LOS VALORES DE X, X=');
Y=input('INGRESE LOS VALORES DE Y, Y=');
%Y=[log(X)]
vr=input('valor real ');

%% METODO ITERATIVO
DD=zeros(n+1);% generar una matriz de n+1*n+1 de zeros
DD(:,1)=Y;% asignar en la primera columna los valores de Y
% calculo de las diferencia finitas
for i=2:n+1
for j=i:n+1
DD(j,i)=[DD(j,i-1)-DD(j-1,i-1)]/[X(j)-X(j-i+1)];
end
end
%% IMPRIMIR LA MATRIZ DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS
disp('LA MATRIZ DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS ES:');
disp(DD);
disp('El polinomio de Newton es');
syms x;
%% FORMAR EL POLINOMIO DE NEWTON
polinomioNewton=DD(1,1);% formar de una fila y una columna
P=1;% valor para establecer los coeficientes
for i=1:n
P=P*(x-X(i));
polinomioNewton=polinomioNewton+P*DD(i+1,i+1);
end
% colocar de forma expandida el polinomio es decir hecho algebra
pretty(polinomioNewton);% mostrar el polinomio simplificado
%% GRafICA
x=input('ingrese el valor de x a interpolar,x=');% ingresar un valor intermedio para ...
    interpolar
vi=eval(polinomioNewton);% evaluar el polinomio en el punto dado
fprintf('el valor interpolado es %.2f\n',vi);
hold on;
grid on
ezplot(polinomioNewton,[X(1) X(n+1)]);% graficar el polinomio
plot(x,vi,'ro');
legend('Funcion','Aproximacion')
%% ERROR
disp('Calculo del Error')
disp(' ');
et=abs((vr-vi))/(vr);
fprintf('\nError : %d',et');
disp(' ');
disp('En porcentaje ');
disp(et*100);
disp(' ')
% FORMA DE EJECUCIoN
%%n= 7
%x=[0 1 2 3 4 5 6 7]
%y=[0 25 34 72 115 92 71 65]
% valor real = 4
```

4.10. Aplicaciones en la Ingeniería, ajuste de curvas e interpolación.

Durante la sección anterior se ha revisado como ajustar ecuaciones a datos, los mismos que representaban simplemente a una variable x y su correspondiente $f(x)$, sin embargo, en condiciones reales se pueden encontrar datos provenientes de situaciones reales o experimentales, a continuación se detallan algunos ejemplos:

- **Ejemplo 1**

Para el desarrollo de una investigación es necesario determinar la conductividad térmica (K) del cobre puro a 500^oC, este dato se desconoce pues en un libro de transferencia de calor se ha encontrado la tabla 4.17.

$T(^oC)$	0	100	200	300	400	600
$k(W/M^ok)$	386	379	374	369	363	353

Tabla 4.17. Aplicaciones en Ingeniería ejemplo 1

Entonces se requiere encontrar el valor (K) para los 500^oC lo más adecuado posible, para lo cual se aplicará el polinomio de n-ésimo orden.

- **Cálculo de coeficientes b**

$$b_0 = 386$$

- **Diferencias finitas primer orden**

$$b_1 \to f\left[x_0, x_1\right] = \frac{379 - 386}{100 - 0} = -0{,}07$$

$$f\left[x_1, x_2\right] = \frac{374 - 379}{200 - 100} = -0{,}05$$

$$f\left[x_2, x_3\right] = \frac{369 - 374}{300 - 200} = -0{,}05$$

$$f\left[x_3, x_4\right] = \frac{363 - 369}{400 - 300} = -0{,}06$$

$$f\left[x_4, x_5\right] = \frac{353 - 363}{600 - 400} = -0{,}05$$

- **Diferencias finitas segundo orden**

$$b_2 \to f\left[x_0, x_1, x_2\right] = \frac{-0{,}05 + 0{,}07}{200 - 0} = 0{,}0001$$

$$f\left[x_1, x_2,\ x_3\right] = \frac{-0{,}05 + 0{,}05}{300 - 100} = 0$$

$$f\left[x_2, x_3, x_4\right] = \frac{-0{,}06 + 0{,}05}{400 - 200} = -0{,}00005$$

$$f\left[x_3, x_4, x_5\right] = \frac{-0{,}05 + 0{,}06}{600 - 300} = 0{,}00003333$$

- **Diferencias finitas tercer orden**

$$b_3 \to f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right] = \frac{0 - 0{,}0001}{300 - 0} = -3{,}3333 * 10^{-7}$$

$$f\left[x_1, x_2,\ x_3, x_4\right] = \frac{-0{,}0005 - 0}{400 - 100} = 1{,}6667 * 10^{-7}$$

$$f\left[x_2, x_3, x_4, x_5\right] = \frac{3{,}3333 * 10 - 5 + 0{,}00005}{600 - 200} = 2{,}0833 * 10^{-7}$$

- **Diferencias finitas cuarto orden**

$$b_4 \rightarrow f\left[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\right] = \frac{-1{,}6667 * 10 - 7 + 3{,}3333 * 10 - 7}{400 - 0} = 4{,}1667 * 10^{-10}$$

$$f\left[x_1, x_{2,}\ x_3, x_4, x_5\right] = \frac{2{,}0833 * 10 - 7 + 1{,}6667 * 10 - 7}{600 - 100} = 7{,}5 * 10^{-10}$$

- **Diferencias finitas quinto orden**

$$b_5 \rightarrow f\left[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right] = \frac{7{,}5 * 10 - 10 + 4{,}1667 * -10}{600 - 0} = 5{,}5556 * 10^{-13}$$

Al obtener la ecuación correspondiente el valor para $f(500)$es:

$$f\left(500\right) = 356{,}66$$

- **Ejemplo 2** El tamaño de grano influye sobre el flujo de esfuerzos, este efecto esta dado por la ecuación:

$$\sigma = \sigma_0 + kd^{-\frac{1}{2}} \tag{4.24}$$

Donde σ es el flujo de esfuerzos, σ_0y k son constantes que dependen del material analizado y d representa el tamaño de grano.

Después de realizar un experimento se han obtenido los siguientes resultados mostrados en la tabla 4.18. Encontrar el modelo correspondiente.

Tamaño de grano(d)	Flujo de esfuerzos(kg/mm^2)
1.1	32.7
2.0	28.4
3.3	26.0
28.0	19.7

Tabla 4.18. Aplicaciones en Ingeniería ejercicio 2

PASO 1 Primero se debe calcular $1/\sqrt{d}$debido a la naturaleza de la ecuación dada:

$$\frac{1}{\sqrt{d}}$$

0,953462589

0,707106781

0,550481883

0,188982237

A partir de todos estos datos se procede a calcular una ecuación que se ajuste a los valores utilizando una regresión en la tabla 4.19.

$\frac{1}{\sqrt{d}}$	σ	$\frac{1}{\sqrt{d}}^2$	$\frac{1}{\sqrt{d}}\sigma$
0.953462589	32.7	0.90909091	31.1782267
0.707106781	28.4	0.5	20.0818326
0.550481883	26.0	0.3030303	14.3125289
0.188982237	19.7	0.03571429	3.72295006
2.40003349	106.8	1.7478355	69.2955383

Tabla 4.19. Valores calculados Aplicaciones en Ingeniería ejercicio 2

$$\begin{bmatrix} 4 & 2{,}40003349 \\ 2{,}40003349 & 1{,}747835 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106{,}8 \\ 69{,}29 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0 = 26{,}6869361$$

$$k = 0{,}05480633$$

Por tanto, la ecuación que rige a este fenómeno es:

$$\sigma = 26{,}6869361 + 0{,}05480633 d^{-\frac{1}{2}}$$

Capítulo 5

INTEGRACIÓN Y DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

5.1. Introducción

Bajo el criterio fundamental que el cálculo es la matemática del cambio, todos los ingenieros al trabajar de forma continua con sistemas y procesos variantes en el tiempo deberán usar el cálculo como una herramienta poderosa de solución de problemas de nuestro entorno.Los conceptos del cálculo definen a la diferanciación como la razón de cambio entre la varible dependiente frente a la variable independiente.

El concepto de integrar es el proceso contrario a la diferenciación y relacionado su concepto con el de un diccionario, integrar es unir, o juntar, hacer de varias partes un todo. Los orígenes del Cálculo Infinitesimal, cuando Newton y Leibniz descubren que el problema del cálculo de áreas puede abordarse mediante esta operación.Además integrar significa unir todas las partes en un todo.

Las funciones con las cuales se puede realizar estas dos grandes operaciones del cálculo están representadas de la siguiente manera.

- **1.**Una función continua formada por un polinomio, una función exponencial, trigonométrica o logaritmica.
- **2.** Una función compleja, producto de la combinación de las funciones del apartado anterior mediante operaciones combinadas, lo cual hace difícil la resolución de la derivada o la integral.
- **3.** Una función obtenida de la tabulación de datos x y $f(x)$, de un experimento o pruebas de campo experimentales.

  Para la resolución del primer caso se puede utilizar reglas de cálculo establecidas en los métodos de derivación e integración respectivamente.Para el segundo y tercer caso las soluciones analíticas resultan difíciles y casi imposibles de resolver por los cual se busca una alternativa de solución mediante métodos numéricos para establecer la solución más aproximada posible. En esta unidad se estudiarán los diferentes métodos que permiten dar la solución a estos problemas de una manera muy rápida y efectiva. Se iniciará el estudio de esta unidad con la integración numérica.

  La fórmulas de Newton Cotes son los tipos de métodos de integración numérica más utilizados por su facilidad al reemplazar una función compleja por un polinomio de aproxcimación más fácil de integrar.

5.2. Método del Trapecio

Consiste en reemplazar una función complicada por un polinomio de primer orden, es decir:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_1(x)dx \tag{5.1}$$

$$f_1(x) = polinomio\ de\ primer\ orden.$$

$$I \approx (b-a)\quad \frac{f(b)+f(a)}{2}$$

$$base......promedio\ de\ alturas$$

El método simplificado del trapecio se muestra en la figura 5.1.

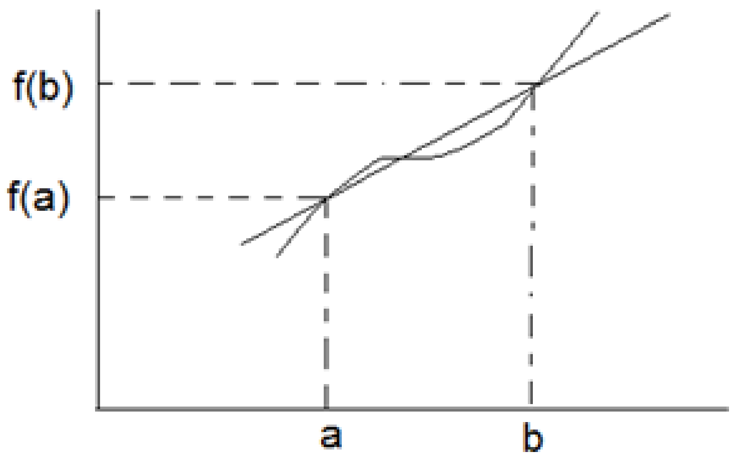


Figura 5.1. Regla del trapecio

Al reemplazar la curva por una línea es evidente que el cálculo tendrá un error, el cual debe ser calculado para que el valor aproximado sea lo mas cercano posible al resultado real.

$$E = \frac{-1}{12} * \bar{f}" * (b-a)^3$$

$$\bar{f}" = segunda\ derivada\ media$$

$$\bar{f}" = \frac{\int_a^b f"(x)dx}{b-a}$$

- **Ejemplo 1** Calcular el valor aproximado de la integral definida entre uno y seis de la siguiente función.

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 9x + 2$$

Desde $a = 1$, hasta $b = 6$

$$\int_1^6 \left(x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 9x + 2\right) dx = 5083{,}75 \quad \rightarrow \quad valor\ exacto$$

- **Utilización de la Regla del trapecio**

$$a = 1 \rightarrow f(1) = 3$$

$$b = 6 \rightarrow f(6) = 5168$$

$$I \approx (b-a) \quad \frac{f(b)+f(a)}{2}$$

$$I \approx (6-1) \quad \frac{5168+3}{2} = 12927{,}5 \quad valor\ aproximado$$

- **Cálculo del error**

$$f'(x) = 5x4 - 12x3 + 15x2 + 14x - 9$$

$$f'' = 20x^3 - 36x^2 + 30x + 14$$

$$\bar{f}'' = \frac{\int_1^6 \left(20x^3 - 36x^2 + 30x + 14\right) dx}{6-1}$$

$$\bar{f}'' = \frac{\frac{20x^4}{4} - \frac{36x^3}{3} + \frac{30x^2}{2} + 14x}{5}, \ de\ 1\ a\ 6$$

$$\bar{f}'' = 898$$

$$E = \frac{-1}{12} * \bar{f}'' * (b-a)^3$$

$$E = \frac{-1}{12} * 898 * (6-1)^3 = -9354{,}166667$$

$$Iexacta = Iaprox + error$$

$$Iexacta = 12927{,}5 - 9354{,}16$$

$$Iexacta = 3573{,}333$$

5.2.1. Implementación del método de Trapecios con Matlab

A continuación se presenta el algoritmo del método de trapecios implementado en Matlab para lo cual se tomó como base la fundamentación teórica, se deja a criterio del lector la verificación y funcionamiento del mismo con el ejercicio resuelto en el apartado anterior.

Programa 5.1. Método de Trapecios

```
% function [h,z,et]=TRAPEZIO(f,a,b,n,vv)
%% funcion DE ENTRADA
f = input('Ingrese la funcion ejemplo ---> @(x) -0.1295.*(x).^2-0.3796.*(x)+0.9154 : ...
    '); %Le indica a MATLAB que x es la variable independiente,
a = input('Ingrese el extremo inferior a: ');
b = input('Ingrese el extremo superior b: ');
n = input('Ingrese el numero de trazos ');
vv = input('Ingrese el valor verdadero: ');

h=(b-a)/n; %calculo del incremento entre segmentos
x=a:h:b; %formar los nodos de cuadratura o el vector x,desde a hasta b con ...
    incrementos de h
```

```
y=feval(f,x);
p=[1 2*ones(1,n-1) 1];%pasos cuadratura
z=(h/2)*sum(p.*y);%aproximacion de la integral de trapecio
grid on
hold on
fill(x,y,'r')%graficar la funcion y pintar el area bajo la curva
title('METODO DE LOS TRAPECIOS')
%% GRaFICA
%Grafica del Polinomio
x = a:0.00001:b;
y =-0.1295.*x.^2-0.3796.*x+0.9154;
plot(x,y,'b','linewidth',1)
xlabel('Eje x'),
ylabel('Eje y'),
legend('Trapecio','Polinomio')
%% ERROR
et=abs((vv-z)/(vv))*100;
%% RESULTADOS
fprintf('\n Paso :\n')
 disp(h);
fprintf('\n Valor aproximado :\n')
 disp(z);
fprintf('\n Error :\n')
 disp(et);


%% FORMA DE EJECUCIoN
% @(x) -0.1295.*(x).^2-0.3796.*(x)+0.9154
% 0
% 1
% 2
% 2.25
```

5.3. Trapecio segmentos múltiples

Una alternativa que sirve para de mejorar la exactitud de la fórmula trapezoidal es, dividir el intervalo o límites de integración de a hasta b en un conjunto de segmentos más pequeños. A continuación se aplica el método a cada uno de los segmentos para finalmente sumar las áreas de los segmentos individuales y de esta forma obtener la integral del intervalo completo.
La ecuación que se utiliza aplicando esta base teórica se conoce como fórmula de integración de segmentos múltiples, ver figura 5.2.

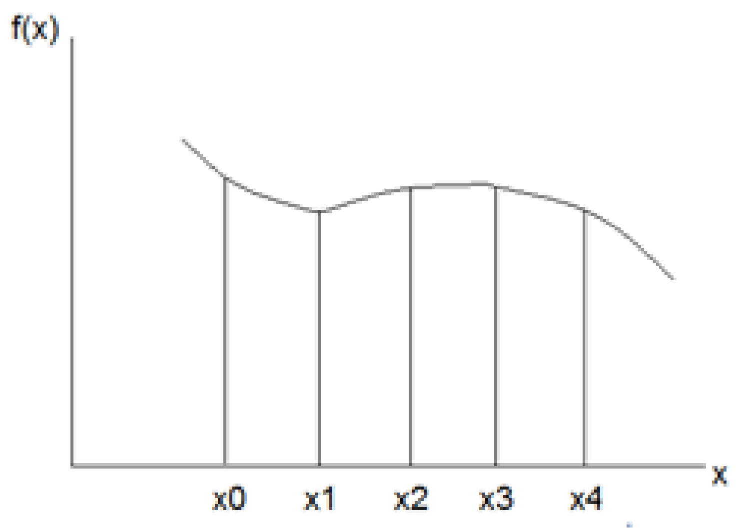


Figura 5.2. Trapecio segmentos múltiples

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{5.2}$$

$$I \approx (b-a)\,\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n} \tag{5.3}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

En donde:

$$h = paso$$

$$n = \ de\ divisiones$$

De igual forma que en el caso del método del trapecio simple, es necesario calcular un error, el cual viene dado por:

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} * \bar{f}"$$

- **Ejemplo 1** : Calcular la siguiente integral, utilizando el método del trapecio de segmentos múltiples.

$$\int_1^6 \left(x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 9x + 2\right) dx$$

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 9x + 2$$

$$n = 10$$

$$h = \frac{6-1}{10} = 0{,}5$$

Para facilitar el cálculo, se debe construir una tabla 5.1, con los respectivos valores de x y $f(x)$.

x	$f(x)$
1	3
1.5	15.53125
2	36
2.5	81.8437
3	173
3.5	345.6563
4	654
4.5	1173.969
5	2007
5.5	3283.781
6	5168

Tabla 5.1. Datos ejercicio 1

$$I \approx \frac{0{,}5}{2}\left[3 + 2 * (13{,}53 + 36 + 81{,}84 + 173 + 345{,}6563 + 654 + 117{,}969 + 2007 + 3283{,}781) + 5168\right]$$

Con los datos de la tabla se reemplaza en la ecuación 5.2 obteniendo :

$$I \approx 5177{,}141$$

- **Cálculo del Error**

$$E = -\frac{(6-1)^3}{12\,(10)^2} * 898 = -93{,}54$$

$$Iexacta = 5177{,}141 - 93{,}54 = 5083{,}59$$

5.3.1. Método de trapecios con matlab

Para resolver una integral utilizando Matlab se plantea el siguiente script, que aplica el criterio de integración por segmentos múltiples, en este caso especifico se muestra la división del intervalo de integración en ocho partes.

Al aplicar este Script, Matlab Muestra una gráfica de la función, y el resultado aproximado.

Programa 5.2. Resolución de sistemas de ecuaciones con matlab 2

```
clc
clear

syms x

f1=x^5-3*x^4+5*x^3+7*x^2-9*x+2

a=1
b=6
n=8
h=(b-a)/n


fplot(char(f1),[a b])
grid on


f=inline(f1)

Ir=vpa(int(f1,a,b),5)

fx0=f(a)
fx1=f(a+h)
fx2=f(a+2*h)
fx3=f(a+3*h)
fx4=f(a+4*h)
fx5=f(a+5*h)
fx6=f(a+6*h)
fx7=f(a+7*h)
fx8=f(a+8*h)

Itm=(b-a)*(fx0+2*(fx1+fx2+fx3+fx4+fx5+fx6+fx7)+fx8)/(2*n)
```

Los resultados se muestran a continuación en la figura 5.3.

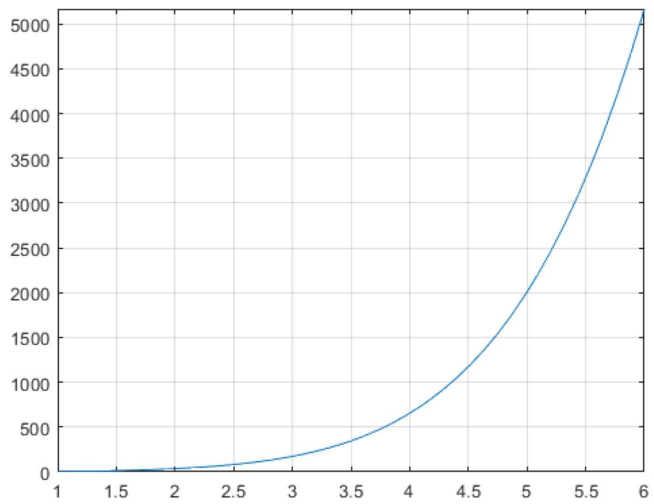


Figura 5.3. Ejercicio 1 con la regla del trapecio

5.4. Regla de Simpson de 1/3

El meétodo de Simpson es una mejora al método de trapecios, ya que este consite en aproximar la solución mediante un polinomio de orden dos o superiorer.

En este método se debe dividir al segmento de integración en dos partes, esto acarrea la necesidad de tener tres puntos disponibles o tres datos, además que el valor de $n = 2$ es obligatorio.

$$I = \int_a^b f\left(x\right)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx \tag{5.4}$$

$$f_2\left(x\right) = polinomio\ de\ segundo\ orden.$$

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f\left(x_0\right) + 4f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)\right]$$

$$I \approx (b-a)\frac{\left[f\left(x_0\right) + 4f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)\right]}{6}$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

- **error**

$$E = \frac{-1}{90} * h^5 * \bar{f}^{""} = -\frac{(b-a)^5}{2880} * \bar{f}^{""}$$

$$\bar{f}^{""} = cuarta\ derivada\ media$$

$$Cuarta\ derivada\ media = \frac{\int_a^b f^{""}\left(x\right)dx}{b-a}$$

- **Ejemplo 1** Calcular el valor aproximado de la siguiente integral utilizando la regla de Simpson 1/3.

$$\int_1^6 \left(x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 9x + 2\right)dx$$

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 9x + 2$$

$$n = 2$$

$$h = \frac{6-1}{2} = 2{,}5$$

La tabla 5.2, necesaria consta de tres datos, como se indicó en la primera parte teórica de este método.

x	f(x)
1	3
3.5	345.6563
6	5168

Tabla 5.2. Datos ejercicio 1 con Simpson 1/3

$$I \approx (6-1)\frac{[3 + 4(345{,}6563) + 5168]}{6} = 5461{,}354$$

Cuarta derivada media para el error:

$$f'x = 5x4 - 12x3 + 15x2 + 14x - 9$$

$$f\text{''}(x) = 20x^3 - 36x^2 + 30x + 14$$

$$f'''x = 60x2 - 72x + 30$$

$$f''''(x) = 120x - 72$$

$$\bar{f''''} = \frac{\int_1^6 (120x - 72)\,dx}{6-1}$$

$$\bar{f''''} = \frac{\frac{120x^2}{2} - 72x}{5},\ de\ 1\ a\ 6$$

$$\bar{f''''} = 348$$

- **Error**

$$E = \frac{-1}{90} * (2{,}5)^5 * 348 = -377{,}604166$$

$$Iexacta = 5461{,}354 - 377{,}604166 = 5083{,}749835$$

5.4.1. Método de Simpson 1/3 con Matlab

A continuación se presenta al algoritmo de Simpson 1/3 con matlab, el cual fue elaborado para que en su ejecución sea bastante intuitivo, además en la parte final del mismo se deja como comentario la forma de ejecución para que el lector pueda ejecutar sin problema.

Programa 5.3. Método de Simpson 1/3

```
clc %Permite borrar la Pantalla
clear %Permite borrar las variables almacenadas
format short %Trabajamos con decimales
disp('METODO DE SIMPSON 1/3')

%% menu DE ENTRADA
syms x;
f=input('Ingrese el valor de la funcion:'); %Ingreso de la funcion a trabajar
a=input('Ingrese el valor del extremo a:'); %Ingreso de variables a trabajar
b=input('Ingrese el valor del extremo b:'); %Ingreso de variables a trabajar
n=input('Ingrese el valor del numero de segmentos: '); %Ingreso de variables a ...
    trabajar
vv=input('Ingrese el valor verdadero vv:'); %Ingreso de variables a trabajar
% ITERATIVO
d1=diff(f); %Calculo de la Primera derivada
d2=diff(d1); %Calculo de la Segunda derivada
d3=diff(d2); %Calculo de la Tercera derivada
d4=diff(d3); %Calculo de la Cuarta derivada
f=inline(f);

for i=1:n %Crea un vector i que empieze en 1 hasta n valores
g=sum(int(d4,a,b)/(b-a)); %Calculo de la derivada y la integral
end


h=(b-a)/n; %Calculo del incremento entre segmentos
x=a:h:b; %Formar los nodos de cuadratura o el vector x,desde a hasta b con ...
    incrementos de h
y=f(x); %Evalua la funcion

%pasos cuadratura
p=ones(1,n+1);
p(2:2:n)=4;
p(3:2:n-1)=2;
z=((3*h)/8)*sum(p.*y);
integral=(h/3)*sum(p.*y);%Aproximacion de la Integral de trapecio
% GRaFICA
fill(x,y,'g') %Graficar la funcion y Pinta el area bajo la curva
grid on
title('METODO DE SIMPSON 1/3') %Titulo de la tabla
%% CALCULO DEL ERROR
et=abs((vv-integral)/(vv))*100; %Calculo del Error Estimado


ea=(-((b-a)^5 /(180*n^4))*g); %Calculo del Error Verdarero

%% RESULTADOS
disp('El Valor de la Aproximacion es :, '); %Imprime el texto
disp(z); %Imprime la variable


disp('El Incremento de Segmentos es :, '); %Imprime el texto
disp(h); %Imprime la variable

disp('El Error Verdadero es :, '); %Imprime el texto
disp(et); %Imprime la variable

fprintf('\nEl Error Aprox = %12.10f \n',ea) %Imprime el texto
%% GRAFICA
hold on
t=linspace(a,b);
s=feval(f,t);
plot(t,s)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('SIMPSON 1/3')
grid on
legend("Real","Aproximado")

%% FORMA DE EJECUCIoN
%0.2+25.*x-200.*x.^2+675.*x.^3-900.*x.^4+400*x.^5
%0
```

```
%0.8
%6
%1.640533
```

5.5. Regla de Simpson 1/3 de Segmentos múltiples

El método presentado a continuación es un procedimiento mediante el cual se logra mejorar la exactitud de la regla de Simpson 1/3, dividiendo el intervalo de integración de a hasta b en un conjunto de segmentos y aplicar el método a cada uno de los segmentos.

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f\left(x_0\right)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f\left(x_i\right)+2\sum_{i=2,4,6}^{n-1} f\left(x_j\right)+f\left(x_n\right)\right] \tag{5.5}$$

$$I \cong (b-a)\frac{\left[f\left(x_0\right)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f\left(x_i\right)+2\sum_{i=2,4,6}^{n-1} f\left(x_j\right)+f\left(x_n\right)\right]}{3n} \tag{5.6}$$

$$E=\frac{-8}{45}*h^5*f^{''''}=-\frac{(b-a)^5}{180\ n^4}*f^{''''} \tag{5.7}$$

- **Ejemplo 1** Calcular el valor aproximado de la siguiente integral utilizando la regla de Simpson 1/3 de segmentos múltiples

$$\int_1^6 \left(x^5-3x^4+5x^3+7x^2-9x+2\right)dx$$

$$f\left(x\right)=x^5-3x^4+5x^3+7x^2-9x+2$$

$$n=10$$

$$h=\frac{6-1}{10}=0{,}5$$

Los datos encontrados se resúmen en la tabla 5.3

x	f(x)
1	3
1.5	13.53125
2	36
2.5	81.8437
3	173
3.5	345.6563
4	654
4.5	1173.969
5	2007
5.5	3283.781
6	5168

Tabla 5.3. Ejercicio 1 simpson 1/3 segmentos múltiples

Con los datos de la tabla 5.3 se procede a realizar los cálculos.

$$I \approx \frac{0{,}5}{3}\left[3+4\left(13{,}53+81{,}84+345{,}65+1173{,}96+3283{,}78\right)+2\left(36+173+654+2007\right)+5168\right]$$

$$I \approx 5084{,}35$$

- **Error**

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180\ n^4} * f^{''''} = -\frac{(6-1)^5}{180 * 10^4} * 348 = -0{,}60417$$

$$Iexacta = 5084{,}35 - 0{,}60417 = 5083{,}74$$

5.5.1. Regla de Simpson 1/3 de Segmentos múltiples con Matlab

Se muestra a continuación un script que aplica este método en la resolución de la integral utilizando doce divisiones dentro del intervalo a,b.

Programa 5.4. Resolución de sistemas de ecuaciones con matlab 2

```
clc
clear

syms x

f1=x^5-3*x^4+5*x^3+7*x^2-9*x+2

a=1
b=6
n=12
h=(b-a)/n

fplot(char(f1),[a b])
grid on

f=inline(f1)

Ir=vpa(int(f1,a,b),5)

fx0=f(a);
fx1=f(a+h);
fx2=f(a+2*h);
fx3=f(a+3*h);
fx4=f(a+4*h);
fx5=f(a+5*h);
fx6=f(a+6*h);
fx7=f(a+7*h);
fx8=f(a+8*h);
fx9=f(a+9*h);
fx10=f(a+10*h);
fx11=f(a+11*h);
fx12=f(a+12*h);

Ism=(b-a)*(fx0+4*(fx1+fx3+fx5+fx7+fx9+fx11)+2*(fx2+fx4+fx6+fx8+fx10)+fx12)/(3*n)
```

La solución grafica se presenta en la figura 5.4.

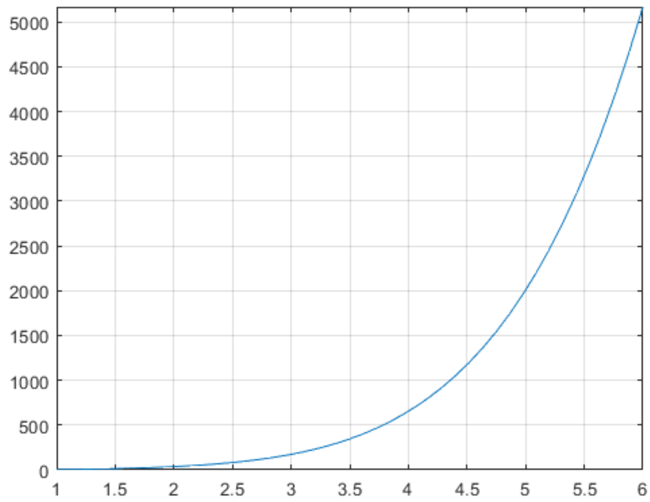


Figura 5.4. Ejercicio 1 resuelto con simpson

5.6. Regla de Simpson 3/8

Consiste en reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulados por un polinomio de tercer orden, en donde dicho polinomio se calcula utilizando la fórmula:

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f\left(x_0\right)+3f\left(x_1\right)+3f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right] \tag{5.8}$$

$$I \cong (b-a)\frac{\left[f\left(x_0\right)+3f\left(x_1\right)+3f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right]}{8}$$

$$E=\frac{-3}{80}*h^5*f^{\bar{''}''}=-\frac{(b-a)^5}{6480}*f^{\bar{''}''}$$

5.6.1. Método de Simpson 3/8 con Matlab

A continuación se presenta el algoritmo programado en Matlab con el objetivo que el lector lo pueda validar su funcionamiento.

Programa 5.5. Método de Simpson 3/8

```
clc %Permite borrar la Pantalla
clear %Permite borrar las variables almacenadas
format short %Trabajamos con decimales
disp('METODO DE SIMPSON 3/8')
%% datos dE ENTRADA
syms x;
f=input('Ingrese el valor de la funcion:'); %Ingreso de la funccion a trabajar
a=input('Ingrese el valor del extremo a:'); %Ingreso de variables a trabajar
b=input('Ingrese el valor del extremo b:'); %Ingreso de variables a trabajar
n=input('Ingrese el valor del numero de segmentos: '); %Ingreso de variables a trabajar
vv=input('Ingrese el valor verdadero vv:'); %Ingreso de variables a trabajar

%% MeTODO ITERATIVO
d1=diff(f); %Calculo de la Primera derivada
d2=diff(d1); %Calculo de la Segunda derivada
d3=diff(d2); %Calculo de la Tercera derivada
d4=diff(d3); %Calculo de la Cuarta derivada
f=inline(f);

```

```
for i=1:n %Crea un vector i que empieze en 1 hasta n valores
g=sum(int(d4,a,b)/(b-a)); %Calculo de la derivada y la integral
end

h=(b-a)/n; %Calculo del incremento entre segmentos
x=a:h:b; %Formar los nodos de cuadratura o el vector x,desde a hasta b con ...
    incrementos de h
y=f(x); %Evalua la funcion

p=ones(1,n+1);p(2:2:n)=3;p(3:2:n)=3;p(4:3:n)=2 %Pasos cuadratura
%% GRaFICA
z=((3*h)/8)*sum(p.*y); %Aproximacion de la Integral de trapecio
fill(x,y,'g') %Graficar la funcion y Pinta el area bajo la curva
grid on
title('METODO DE SIMPSON 3/8') %Titulo de la tabla
%% CALCULO DEL ERROR
et=abs((vv-z)/(vv))*100; %Calculo del Error Estimado
ea=-((b-a)^5 /(6480))*g; %Calculo del Error Verdarero
%% RESULTADOS
disp('El Valor de la Aproximacion es :, '); %Imprime el texto
disp(z); %Imprime la variable
disp('El Incremento de Segmentos es :, '); %Imprime el texto
disp(h); %Imprime la variable
disp('El Error Verdadero es :, '); %Imprime el texto
disp(et); %Imprime la variable
fprintf('\nEl Error Aprox = %12.10f \n',ea) %Imprime el texto
%% GRAFICA
c=linspace(a,b);
d=feval(f,c);
title('METODO DE SIMPSON 3/8')
fill(c,d,'b')
hold on
fill(x,y,'g')%graficar la funcion y pintar el area bajo la curva
grid on
legend("Real","Aproximado")
title('METODO DE SIMPSON 3/8') %Titulo de la tabla

%% FORMA DE EJECUCIonN
%0.2+25.*x-200.*x.^2+675.*x.^3-900.*x.^4+400*x.^5
%0
%0.8
%6
%1.640533

% Ingreso de valores
% x.*exp(2.*X)
%0
%1
%2
%2.0973


% Ingreso de valores
% x.^(-x)
%0
%1
%2
%1.2913

% Ingreso de valores
%sqrt(1+(-0.2+3*x).^2)
%0
%2*pi
%6
%35843.7891
```

5.7. Integración de datos desigualmente espaciados.

Como se ha revisado en cada uno de los casos de integración de funciones, básicamente se transforman las funciones en tablas de datos, en las cuales los puntos o valores se encuentran separados de forma uniforme por el valor conocido como "paso" (h).

Pero en muchas ocasiones estas fórmulas de integración no se podrán aplicar a todo un conjunto de datos en análisis, pues estos estarán separados de forma desigual y aleatoria, entonces en estos casos habrá que tratar a cada segmento de forma individual para posteriormente sumar los resultados.

- **Ejemplo 1** Integrar el siguiente conjunto de datos.

  En la tabla 5.4, se observan datos desigualmente espaciados en donde se indica también la forma de agruparlos siguiendo el siguiente criterio: Trapecio: los dos primeros datos tienen una separación de cuatro unidades, y al ser solo dos datos se puede aplicar este método:

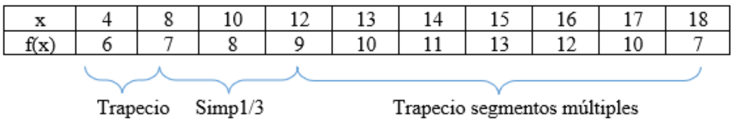
  Simpson1/3: desde segundo al cuarto dato hay una separación de dos unidades, además son tres datos que se ajustan a los requerimientos de la fórmula de Simpson 1/3.

  Trapecio de segmentos múltiples: Desde el cuarto dato al último hay una separación de 1 unidad, por lo que se aplica la regla del trapecio de segmentos múltiples, mostrados en la tabla 5.4.

x	4	8	10	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	6	7	8	9	10	11	13	12	10	7

Tabla 5.4. Ejemplo 1 con Simpson 3/8

En donde en los datos representados se puede ver en la figura 5.5.



x	4	8	10	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	6	7	8	9	10	11	13	12	10	7

Figura 5.5. Ejemplo 1 con Simpson 3/8

- **Trapecio**

$$I \approx (b-a) \quad \frac{f(b)+f(a)}{2}$$

$$I \approx (8-4) \quad \frac{6+7}{2} = 26$$

- **Simpson 1/3**

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$I \approx \frac{2}{3}\left[7+4(8)+9\right] = 32$$

- **Trapecio de segmentos múltiples**

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$I \approx \frac{1}{2}\left[9+2(10+11+13+12+10)+7\right] = 64$$

$$I\ total = 64+32+26 = 122$$

5.8. Integrales múltiples (Fórmulas de Newton Cotes)

Los métodos numéricos no se aplican únicamente a integrales simples sino también a integrales múltiples.

En el caso del método de Newton Cotes se puede decir que consisten en un conjunto de fórmulas integración numérica que aplican principios interpolatorios, con las cuales se evalúa una función en puntos equidistantes, para calcular el valor aproximado de la integral.

- **Ejemplo 1** Calcular la siguiente integral.

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{1}^{4} x^3 - 3yz \quad dx\ dy\ dz$$

Al resolver esta integral mediante el método analítico se obtiene el valor exacto de:

$$I = 513$$

Ahora se describe paso a paso la aplicación de las fórmulas de Newton Cotes.

1) Dividir el intervalo de la integral en dz de $a = -1ab = 2$en tres segmentos, con este proceso se obtiene:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$f(x,y,z) = x^3 - 3yz$$

2) Reemplazar en la función el valor de z empezando en $z = -1$ incrementando el valor del paso $h = 1$, hasta llegar a $z = 2$.

$$f\left(x,y,-1\right) = x^3 + 3y$$

$$f\left(x,y,0\right) = x^3$$

$$f\left(x,y,1\right) = x^3 - 3y$$

$$f\left(x,y,2\right) = x^3 - 6y$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f\left(x_0\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right) + f\left(x_n\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x^3 + 3y + 2\left(x^3 + x^3 - 3y\right) + x^3 - 6y\right]$$

$$I = 3x^3 - 4{,}5y$$

3) Dividir el intervalo de integración para dy de $a = 0$ hasta $b = 3$ en tres segmentos, entonces se tiene:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3+0}{3} = 1$$

$$f\left(x,y\right) = 3x^3 - 4{,}5y$$

Reemplazar en la función el valor de y empezando con $y = 0$ incrementado el valor del paso $h = 1$, hasta $y = 3$.

$$f\left(x,0\right) = 3x^3$$

$$f\left(x,1\right) = 3x^3 4{,}5$$

$$f\left(x,2\right) = 3x^3 - 9$$

$$f\left(x,3\right) = 3x^3 - 13{,}5$$

$$I = \frac{1}{2}\left[3x^3 + 2\left(3x^3 - 4{,}5 + 3x^3 - 9\right) + 3x^3 - 13{,}5\right]$$

$$I = 9x^3 - 20{,}25$$

4) Dividir el intervalo de integración para dx de $a = 1$ hasta $b = 4$ en tres segmentos, de esta forma se obtiene:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$$

$$f(x) = 9x^3 - 20{,}25$$

Reemplazar en la función el valor de x empezando con $x = 1$ incrementando el valor del paso $h = 1$, hasta $x = 4$.

$$f\left(1\right) = -11{,}25$$

$$f\left(2\right) = 51{,}75$$

$$f\left(3\right) = 222{,}75$$

$$f\left(4\right) = 555{,}75$$

El valor aproximado de la integral se obtiene aplicando la fórmula para este conjunto de valores.

$$I = \frac{1}{2}\left[-11{,}25 + 2\left(51{,}75 + 222{,}75\right) + 555{,}75\right]$$

$$Iaproximada = 546{,}75$$

5.8.1. Integración de Gauss Legendre cin Matlab

Programa 5.6. Método de Gauss Legendre

```
function s = GaussLegendre1d(funfcn,a,b,n)
%
% GaussLege Evaluacion numerica de una integral usando las formulas
% de cuadratura de Gauss-Legendre
% s = GaussLeg(funfcn,a,b,n) aproxima la integral de F(X) desde A a B
% usando la formula de cuadratura de Gauss-Legendre de N puntos
% F es un string que contienen el nombre de la funcion a integrar
% La funcion F debe devolver un vector si los datos de entrada son un vector
%
if nargin < 4, error('Faltan argumentos');
end
% En primer lugar se obteinen los pesos y loas abscisas
[z,w] =RaicesCoeficienteGaussLegen(n);
if mod(n,2)==0
z=[z ; 0];
w=[w ; 0];
end
% Paso 1
xm=0.5*(b+a);
xr=0.5*(b-a);
% Paso 2
s=zeros(size(a));
for i=1:length(w)
dx = xr*z(i);
% Paso 3
if i<length(w)
s = s+w(i)*(feval(funfcn,xm+dx)+feval(funfcn,xm-dx));
else
s= s+w(i)*feval(funfcn,xm);
end
end
% Paso 4
s=s.*xr;
% ejecucuion
 %s = GaussLegendre1d(funfcn,a,b,n)
 %s = GaussLegendre1d( @(x)x+1,-1,1,4)
% s = GaussLegendre1d( @(x)x.^4+x+1,-1,1,2)
```

5.9. Cuadratura de Gauss Legendre

Este método consiste en el cambio de variables de x a t, para lo cual se utilizan un conjunto de relaciónes:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)\,t}{2} \tag{5.9}$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2}dt$$

Después de realizar el cambio de variables, se requiere además cambiar el rango o límites de integración, entonces el valor aproximado de la integral se calcula con una sumatoria del producto: $c_i * f(t_i)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(t)\ dt \approx \sum_{i=1}^{n} c_i *\ f(t_i) \tag{5.10}$$

La figura 5.6, muestra el método de cuadratura de Legendre.

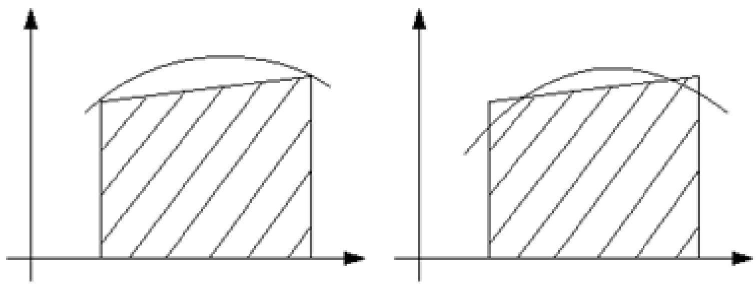


Figura 5.6. Método de cuadratura de Legendre

- **Ejemplo 1** Calcular la integral

$$\int_0^1 17^{2,5x}\ dx$$

1) Se realiza el cambio de variables:

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)\,t}{2} = \frac{(1+0)+(1-0)\,t}{2} = 0{,}5 + 0{,}5t$$

$$dx = \frac{(1-0)}{2}dt = 0{,}5\ dt$$

$$\int_0^1 17^{2,5x}\ dx = \int_{-1}^1 17^{2,5(0,5+0,5t)}\ (0{,}5\ dt) = 0{,}5\int_{-1}^1 17^{2,5(0,5+0,5t)}\ dt$$

$$I \approx c_1 * f\,(t_1) + c_2 * f\,(t_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n * f(t_n)$$

2) Se Reemplaza los argumentos en la función de integración, tomando en cuenta los factores de peso correspondiente y utilizando la fórmula de los dos puntos, se tiene:

$$I \approx c_1 * f\,(t_1) + c_2 * f\,(t_2)$$

$$I \approx 0{,}5\left\{(1)\left[17^{1,25+1,25(-0,577350269)}\right] + (1)\left[17^{1,25+1,25(0,577350269)}\right]\right\} = 135{,}595324$$

3) Se aplica la fórmula de los tres puntos

$$I \approx 0{,}5\left\{(0{,}555555)\left[17^{1,25+1,25(-0,774597)}\right] + (0{,}88888)\left[17^{1,25+1,25(0)}\right] + (0{,}555555)\left[17^{1,25+1,25(0,774597)}\right]\right\} = 164{,}94$$

5.10. Cuadratura de Gauss – Lagendre

Esta cuadratura se aplica para la aproximación de integrales de la forma:

$$\int_0^\infty e^{-x} f\,(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i *\ f\,(t_i) \tag{5.11}$$

- **Ejemplo 1** Calcular la siguiente integral.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \quad x^5 \quad dx$$

Utilizando fórmula de 4 puntos:

$$I \approx (0{,}603154)\,(0{,}322547)^5 + (0{,}357418)\,(1{,}745761)^5 + (0{,}038888)\,(4{,}536620)^5 + (0{,}0005393)\,(9{,}395071)^5$$

$$I \approx 119{,}978559$$

5.11. Cuadratura de Gauss Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f\,(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i * \ f\,(t_i) \tag{5.12}$$

De igual manera la integral se transforma en una sumatoria del producto $c_i * f(t_i)$.

- **Ejemplo 1** Calcular la siguiente integral.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ sen^2 x \quad dx$$

n =4

$$I \approx (0{,}80491409)\,(sen(0{,}52464762 * 57{,}3))^2 + (0{,}80491409)\,(sen(-0{,}52464762 * 57{,}3))^2 + (0{,}08131284)\,(sen(1{,}65068$$

$$I \approx 0{,}5655097$$

5.12. Diferenciación numérica

Los problemas de derivadas pueden ser resueltos mediante métodos numéricos, una de las alternativas más simples es mediante el uso de las fórmulas de diferencias finitas divididas.

Este método consiste en encontrar valores aproximados de la derivada de una ecuación, reemplazándola por expresiones algebraicas.En el siguiente ejemplo se indican las fórmulas necesarias para diferencias finitas (centrales, hacia adelante y hacia atrás), y el respectivo uso de las mismas.

- **Ejemplo 1** Obtener la primera y segunda derivada de la función $f(x)$en el punto 2.

$$f\,(x) = 5x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 7x + 2$$

Por el método analítico se obtiene:

$$f'\,(2) = 273$$

$$f''\,(2) = 354$$

Para la aplicación de diferencias finitas se debe construir la tabla 5.5 que contenga el valor le la función evaluada en varios puntos, mayores y menores que el punto en análisis, en este caso el número dos.

x	f(x)
-1	8
0	2
1	12
2	152
3	656
4	1878
5	4292

Tabla 5.5. Diferenciación Numérica

En esta tabla el valor de$f(x) = f(2) = 152$; representa $f(x_i)$.

- **Diferecnias finitas hacia atrás**

$$f'(2) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{152 - 12}{1} = 140$$

$$f'(2) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} = \frac{3\,(152) - 4\,(12) + 2}{2(1)} = 205$$

- **Diferencias finitas hacia adelante**

$$f'(2) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{656 - 152}{1} = 504$$

$$f'(2) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} = \frac{-1878 + 4(656) - 3\,(152)}{2(1)} = 290$$

- **Diferencias finitas centrales**

$$f'(2) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = \frac{656 - 12}{2(1)} = 322$$

$$f'(2) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h} = \frac{-1878 + 8\,(656) - 8\,(12) + 2}{12(1)} = 273$$

Segunda derivada

- **Diferencias finitas hacia atrás**

$$f''(2) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} = \frac{152 - 2\,(12) + 2}{1^2} = 130$$

$$f''(2) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} = \frac{2\,(152) - 5\,(12) + 4\,(2) - 8}{1^2} = 244$$

- **Diferencias finitas hacia adelante**

$$f''(2) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} = \frac{1878 - 2\,(656) + 152}{1^2} = 712$$

$$f''(2) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} = \frac{-4292 + 4\,(1878) - 5\,(656) + 2(152)}{1^2} = 244$$

- **Diferencias finitas centrales**

$$f''(2) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} = \frac{656 - 2\,(152) + 12}{1^2} = 364$$

$$f"\ (2) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12(h)^2} = \frac{-1878 + 16\,(656) - 30\,(152) + 16\,(12) - 2}{12(1)^2} =$$

Al disminuir el paso, o la separación entre los valores de la tabla, la exactitud del cálculo de las derivadas aumenta.Las diferencias finitas centrales proporcionan resultados más exactos que las demás.

5.12.1. Diferenciación Numérica con Matlab

Programa 5.7. Diferenciación numérica

```
function [X Y] = diferenciasflineal(p,q,r,a,b,alfa,beta,N)
h=(b-a)/N;  % calculo del paso de particion
X=a:h:b;   % extraer el numero de componentes de x tiene N+1 componentes
x=X(2:N);% garantizar que el vector este en columna
px=feval(p,x);
qx=feval(q,x);
rx=feval(r,x);

dp=2+h^2*qx;
ds=-1+h/2*px(1:N-2);
di=-1-h/2*px(2:N-1);
d=-h^2*rx;
d(1)=d(1)+(1+h/2*px(1))*alfa;
d(N-1)=d(N-1)+(1-h/2*px(N-1))*beta;

Y= Crout(dp,ds,di,d);
end
% ejecucion
%[X Y] = diferenciasflineal(inline('-2./x'),inline('2./(x.^2)')
%,inline('sin(log(x))./(x.^2)'),1,2,1,2,10)
%[x] = dflineal(inline('-2./x'),inline('2./(x.^2)'),
%inline('sin(log(x))./(x.^2)'),1,2,1,2,10)
```

Capítulo 6

ECUACIONES DIFERENCIALES

6.1. Conceptos

Una ecuación diferencial es una expresión algebraica que contiene las derivadas de una o mas variables dependientes con respecto a una o mas variables independientes. El objetivo de resolver las ecuaciones diferenciales es hallar la función primitiva involucrada que depende de la variable independiete. A continuación se muestran diferentes formas de representación de las ecuaciones diferenciales.

- **Ejemplos**

$$\frac{dy}{dx} = x + 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

$$xy' - 6y = 2$$

$$\frac{dy}{dx}y''' + 4y"2 + y' = cosx$$

$$(y")^2 + 3y' + 8y = x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z + 2\frac{dz}{dy}$$

6.2. Tipos de ecuaciones diferenciales

6.2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Conocidas como EDOS, se caracterizan por tener una sola variable independiente.

- **Ejemplos**

$$\frac{dy}{dx} = x + 3$$

$$\frac{dy}{dx}y''' + 4y"2 + y' = cosx$$

6.2.2. Ecuaciones diferenciales parciales

Conocidas como EDPS, son ecuaciones diferenciales parciales, son las que tienen más de una variable independiete.

$$\frac{dz}{dx} = z + 2\frac{dz}{dy}$$

6.2.3. Características de una ecuación diferencial.

- **Orden**Es la categoría de la derivada mayor que interviene en una ecuación diferencial.

  Son de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = x + 3$$

$$xy' - 6y = 2$$

$$\frac{dz}{dx} = z + 2\frac{dz}{dy}$$

  Son de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

$$(y")^2 + y'3 + 8y = x^2$$

  Es de tercer orden:

$$\frac{dy}{dx}y''' + 4y"2 + y' = cosx$$

- **Grado**Es la potencia a la que esta elevada la derivada de mayor categoría.

  SON DE PRIMER GRADO.

$$\frac{dy}{dx} = x + 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

  SON DE SEGUNDO GRADO

$$(y")^2 + y3 + 8y = x2 \tag{6.1}$$

6.3. Solución de ecuaciones diferenciales con Métodos Numéricos

En el mejor de los escenarios mediante técnicas analíticas se puede dar solución a cualquier ecuación diferencial, sin embargo en la mayoría de problemas de Ingeniería que implica ecuaciones diferenciales por su gran dificultad se requiere la utilización de varios métodos numéricos.

La solución se clasifica en: - Solución general(familia de curvas), es la que contiene una cantidad de constantes arbitrarias independientes igual a su orden.

- Solución particular(una curva específica), es toda solución que puede ser obtenida de la solución general, para ciertas condiciones específicas.

En el campo de la ingeniería se encuentra la presencia de ecuaciones diferenciales en:

- **Diseño de circuitos eléctricos. Segunda ley de Kirchoff**

$$L\frac{dI}{dT}\frac{Q}{C}+RI=E_t$$

- **Masa en movimiento suspendida en un muelle**

$$my''+cy'+Ky=f_t$$

- **Ley de Soddy para la desintegración de un elemento radioactivo**

$$m'=-km$$

- **Oscilador de Van DE Pol con amortiguamiento**

$$\frac{d^2}{dt^2}-u(1-x^2)+\frac{dx}{dt}+x=0$$

6.3.1. Solución general de una Ecuación diferencial Ordinaria

La Solución general de una Ecuación diferencial Ordinaria es el conjunto de curvas que verifican que la ecuación $f(x,y,y',y'',....y^n)=0$.

Sea $y(x_0=y_0$, se considera al punto x_0,y_0 como condición inicial con lo cual se empezarán a realizar la aproximación para la solución denominada particular.

- **Ejemplo 1.**

$$y'-3x=0$$

Es una ecuación diferencial lineal, la cual tiene como solución general.

$$y=\frac{3x^2}{2}+C$$

Si buscamos la solución que pasa por el intervalo [a,b], entonces $y(0)=2$,$C=2$ y la solución particular es $y=\frac{3x^2}{2}+2$

6.3.2. Resolución Análitica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En el proceso de aprendizaje de la resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias se estudiarón algunos casos entre los cuales están.

- Ecuaciones de variables separables

- Ecuaciones reducibles a separables

- Ecuaciones homogéneas y reducibles a homogéneas

- Ecuaciones exactas y reducibles a exactas

- Ecuaciones lineales

- Ecuaciones reducibles a lineales
- Ecuaciones de Bornoulli
- Ecuaciones de Ricatti
- Ecuaciones Implícitas
- Ecuación de Lagrange
- Ecuación de Clairaut
- Ecuaciones de segundo orden reducibles

A continuación, se detallan algunos métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias conocidos como métodos de solución para PVI(problemas de valor inicial).

6.3.3. Método de Euler

El método de Euler consiste en encontrar iterativamente la solución de una ecuación diferencial de primer orden, utilizando como punto de inicio, un valor inicial, un paso h y un intervalo, para lo cual se utiliza la siguiente fórmula.

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right) h \tag{6.2}$$

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad \rightarrow \qquad paso$$

- **Ejemplo 1**
  Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial con el método de Euler.

  $$y' = 2x - 3y + 1$$

  Las condiciones iniciales son:

  $$y_0 = 5$$

  $$h = 0{,}1$$

  En el intervalo de [1;1.5].

- **Primer iteración**

  $$i = 0$$

  $$y_1 = y_0 + f\left(x_0, y_0\right) h$$

  $$f\left(x_0, y_0\right) = 2\left(1\right) - 3\left(5\right) + 1 = -12$$

  $$fy_1 = 5 + \left(-12\right) 0{,}1$$

  $$y_1 = 3{,}8$$

- **Segunda iteración**

$$i = 1$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\, h$$

$$f(x_1, y_1) = 2\,(1{,}1) - 3\,(3{,}8) + 1 = -8{,}2$$

$$y_2 = 3{,}8 + (-8{,}2)\, 0{,}1$$

$$y_2 = 2{,}98$$

- **Tercera iteración**

$$i = 2$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\, h$$

$$f(x_2, y_2) = 2\,(1{,}2) - 3\,(2{,}98) + 1 = -5{,}54$$

$$y_3 = 2{,}98 + (-5{,}54)\, 0{,}1$$

$$y_3 = 2{,}426$$

- **Cuarta iteración**

$$i = 3$$

$$y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)\, h$$

$$f(x_3, y_3) = 2\,(1{,}3) - 3\,(2{,}426) + 1 = -3{,}678$$

$$y_4 = 2{,}426 + (-3{,}678)\, 0{,}1$$

$$y_4 = 2{,}0582$$

- **Quinta iteración**

$$i = 4$$

$$y_5 = y_4 + f(x_4, y_4)\, h$$

$$f(x_4, y_4) = 2\,(1{,}4) - 3\,(2{,}0582) + 1 = -2{,}3746$$

$$y_5 = 2{,}0582 + (-2{,}3746)\, 0{,}1$$

$$y_5 = 1{,}82074$$

6.3.4. Programación del método de Euler con matlab

En múltiples ocasiones la solución no converge rapidamente, y esto es por la naturaleza de la ecuación diferencial o por el valor escogido de las condiciones iniciales así como también de los pasos h, cuando esto ocurre es necesario utilizar un algoritmo que realice este trabajo en el menor tiempo. A continuación se presenta el algoritmo del método en matlab, en donde en la líneas finales esta la forma de ejecución para poder validar los resultados obtenidos, se deja al lector que pueda validar el funcionamiento y los resultados obtenidos en el ejemplo anterior.

Programa 6.1. Método de Euler

```
function [x,y,error] = euler(f,a,b,n,y0)
%a=extremo inferior,b=extremo superior, numero de subintervalos , funcion
h=(b-a)/n;% calculo del paso
x=(a:h:b);% formar un vector de a hasta b con incrementos h
x=x(:);%garantizar que sean columna
y=zeros(n+1,1);% formar vector y
y(1)=y0;% condicion inicial
for k=1:n
    y(k+1)=y(k)+h*feval(f,x(k),y(k));% metodo iterativo
end
% calculo de una edo

% en el caso de conocer la solucion exacta
y1=exp((1/4)-(0.5-x).^2);   %%Solucion exacta
plot(x,y1)
hold on
plot(x,y,'*g')
legend('Solex','Solaprox Euler')
grid on
error=max(abs(y1-y));
end
% EJEMPLOS DE EJECUCION
% [x,y,error] = euler('funcionesPVI',0,3,64,1)
```

Para evitar errores a la hora de ingresar la ecuación diferencial se propone generar otro script en donde se lo incluya y para su ejecución llamarle dentro del algoritmo de Euler.

Programa 6.2. Ecuación diferencial a resolver

```
function z=funcionesPVI(x,y)
%z=x-y;
z=(1-2*x)*y;
%z=0.75-y/200;
%z=[x^2*y(1)-2*y(2)];
end
```

Dependiento si la ecuación diferencial tiene o no solución real se puede graficarla junto con la solución aproximada tal como se muestra a continuación en la figura 6.1.

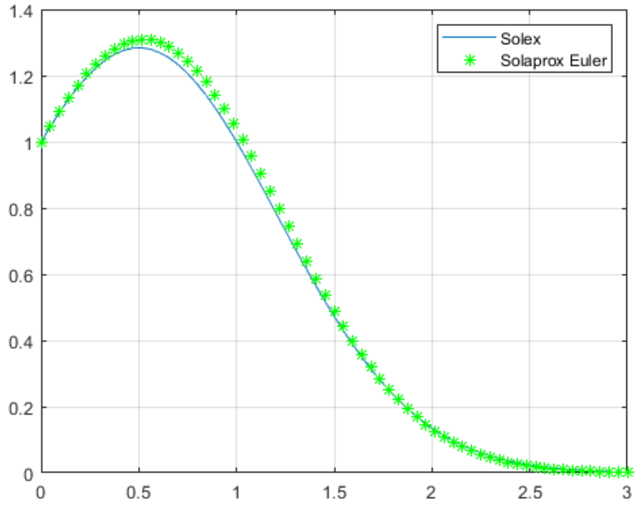


Figura 6.1. Solución aproximada y real con euler

6.4. Método de Euler modificado o Heun

Consiste en mejorar la aproximación a la pendiente, aplicando el cálculo de dos derivadas dentro del intervalo, una en el punto inicial y la otra en el punto final mismas que se promedian y de esta forma se consigue una aproximación mejorada de la pendiente.
Entonces el valor que se encuentra con Euler no representa la respuesta final, sino una predicción intermedia. Las ecuaciones para este método son:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{6.3}$$

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}\right] h \tag{6.4}$$

- **Ejemplo 1**

Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial.

$$y' = 2x - 3y + 1$$

$$y_0 = 5$$

$$1 \leq x \leq 1{,}5$$

$$h = 0{,}1$$

Iteración 1:

$$i = 0$$

$$y_1 = y_0 + \left[\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}\right] h$$

$$f(x_0, y_0) = 2(1) - 3(5) + 1 = -12$$

$$y_1 = 5 + (-12)(0{,}1) = 3{,}8$$

$$f\left(x_1, y_1\right) = 2\left(1{,}1\right) - 3\left(3{,}8\right) + 1 = -8{,}2$$

$$y_1 = 5 + \left[\frac{-12 - 8{,}2}{2}\right] 0{,}1 = 3{,}99$$

Iteración 2:

$$i = 1$$

$$y_2 = y_1 + \left[\frac{f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_2, y_2\right)}{2}\right] h$$

$$f\left(x_1, y_1\right) = 2\left(1{,}1\right) - 3\left(3{,}99\right) + 1 = -8{,}77$$

$$y_2 = 3{,}99 + \left(-8{,}77\right)\left(0{,}1\right) = 3{,}113$$

$$f\left(x_2, y_2\right) = 2\left(1{,}2\right) - 3\left(3{,}113\right) + 1 = -5{,}939$$

$$y_2 = 3{,}99 + \left[\frac{-8{,}77 - 5{,}939}{2}\right] 0{,}1 = 3{,}25455$$

Iteración 3:

$$i = 2$$

$$y_3 = y_2 + \left[\frac{f\left(x_2, y_2\right) + f\left(x_3, y_3\right)}{2}\right] h$$

$$f\left(x_2, y_2\right) = 2\left(1{,}2\right) - 3\left(3{,}25455\right) + 1 = -6{,}36365$$

$$y_3 = 3{,}325455 + \left(-6{,}36365\right)\left(0{,}1\right) = 2{,}618185$$

$$f\left(x_3, y_3\right) = 2\left(1{,}3\right) - 3\left(2{,}618185\right) + 1 = -4{,}254555$$

$$y_3 = 3{,}25455 + \left[\frac{-6{,}36365 - 4{,}254555}{2}\right] 0{,}1 = 2{,}723639$$

Iteración 4:

$$i = 3$$

$$y_4 = y_3 + \left[\frac{f\left(x_3, y_3\right) + f\left(x_4, y_4\right)}{2}\right] h$$

$$f\left(x_3, y_3\right) = 2\left(1{,}3\right) - 3\left(2{,}723639\right) + 1 = -4{,}570919$$

$$y_4 = 2{,}723639 + \left(-4{,}570919\right)\left(0{,}1\right) = 2{,}266547$$

$$f\left(x_4, y_4\right) = 2\left(1{,}4\right) - 3\left(2{,}266547\right) + 1 = -2{,}9999643$$

$$y_4 = 2{,}723639 + \left[\frac{-4{,}570919 - 2{,}999643}{2}\right] 0{,}1 = 2{,}345111$$

Iteración 5:

$$i = 0$$

$$y_5 = y_4 + \left[\frac{f\left(x_4, y_4\right) + f\left(x_5, y_5\right)}{2}\right] h$$

$$f\left(x_4, y_4\right) = 2\left(1{,}4\right) - 3\left(2{,}345111\right) + 1 = -3{,}235335$$

$$y_5 = 2{,}345111 + \left(-3{,}235335\right)\left(0{,}1\right) = 2{,}021575$$

$$f\left(x_5, y_5\right) = 2\left(1{,}5\right) - 3\left(2{,}021578\right) + 1 = -2{,}064734$$

$$y_5 = 2{,}345111 + \left[\frac{-3{,}235335 - 2{,}064734}{2}\right] 0{,}1 = 2{,}080108$$

6.4.1. Método de Heun con Matlab

A continuación se presenta el algoritmo de Heun o Euler modificado con el objetivo de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de una manera efectiva y rápida versus la solucipon manual.

Programa 6.3. Algoritmo de Heun con Matlab

```
function [x,y] = Heun_Per4(funcion,a,b,N,y0)
h=(b-a)/N;
x=a:h:b; % componentes de x tiene N+1 componentes
x=x(:); %garantizar que el vector este en columna

y=zeros(N+1,1);
y(1)=(y0);
for k=1:N
    k1=h*feval(funcion,x(k),y(k));
    k2=h*feval(funcion,x(k+1),y(k)+k1);
    y(k+1)=y(k)+(k1+k2)/2;%feval evaluar la funcion

end
end
function fun=ejemplo1(x,y)                          %funcion a resolver
fun=(1-2*x)*y;                                      % para cualquier otro ejercicio ...
    solo modificar la funcion
end

%{ hacer esto en la linea de ejecucion
%forma de ejecucion

%plot (x,y);% dibujar los dos vectores
%hold on % para gvraficar las otrad graficas encima
%exacta =exp(0.25-(0.5-x).^2)//solucion exacta
%plot(x,exacta,'green')
%error= abs(y-exacta)para dsacar el error
% max(error)// error maximo// es el mas importante el que me interesa
```

6.5. Método de Runge-Kuta

Los métodos de Runge Kuta, tienen la exactitud de un esquema de una serie de Taylor, sin necesidad del cálculo de derivas superiores. Se ajusta a la siguiente forma general de ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) h \tag{6.5}$$

En donde es necesario calcular cada valor de k.

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right)$$

- **Ejemplo 1**
  Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial.

$$y' = 2x - 3y + 1$$

Las condiciones iniciales son:

$$y_0 = 5$$
$$1 \leq x \leq 1{,}5$$
$$h = 0{,}1$$

Se inicia con el cálculo de loa valores de k:

$$k_1 = 2\,(1) - 3\,(5) + 1 = -12$$
$$k_2 = 2\left(1 + \frac{1}{2} * (0{,}1)\right) - 3\left(5 + \frac{1}{2}\,(0{,}1)\,(-12)\right) + 1 = -10{,}1$$
$$k_3 = 2\left(1 + \frac{1}{2} * (0{,}1)\right) - 3\left(5 + \frac{1}{2}\,(0{,}1)\,(-10{,}1)\right) + 1 = -10{,}385$$
$$k_4 = 2\,(1 + (0{,}1)) - 3\,(5 + (0{,}1)\,(-10{,}385)) + 1 = -8{,}6845$$

Primera iteración:

$$i = 0$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,h$$
$$y_1 = 5 + \frac{1}{6}\,(-12 + 2\,(-10{,}1) + 2\,(-10{,}385) - 8{,}6845)\,(0{,}1) = 3{,}972425$$

Con este nuevo valor de y se vuelve a repetir el proceso.

$$k_1 = 2\,(1{,}1) - 3\,(3{,}972425) + 1 = -8{,}717275$$
$$k_2 = 2\left(1{,}1 + \frac{1}{2} * (0{,}1)\right) - 3\left(3{,}972425 + \frac{1}{2}\,(0{,}1)\,(-8{,}717275)\right) + 1 = -7{,}309383$$
$$k_3 = 2\left(1{,}1 + \frac{1}{2} * (0{,}1)\right) - 3\left(3{,}972425 + \frac{1}{2}\,(0{,}1)\,(-7{,}309383)\right) + 1 = -7{,}520822$$
$$k_4 = 2\,(1{,}1 + (0{,}1)) - 3\,(3{,}972425 + (0{,}1)\,(-7{,}520822)) + 1 = -6{,}261028$$

Segunda teración:

$$i = 0$$
$$y_2 = 3{,}972425 + \frac{1}{6}\,(-8{,}717275 + 2\,(-7{,}309383) + 2\,(-7{,}520822) - 6{,}261028)\,(0{,}1) = 3{,}228436$$
$$k_1 = 2\,(1{,}2) - 3\,(3{,}228436) + 1 = -6{,}285309$$
$$k_2 = 2\left(1{,}2 + \frac{1}{2} * (0{,}1)\right) - 3\left(3{,}228436 + \frac{1}{2}\,(0{,}1)\,(-6{,}285309)\right) + 1 = -5{,}242513$$
$$k_3 = 2\left(1{,}2 + \frac{1}{2} * (0{,}1)\right) - 3\left(3{,}228436 + \frac{1}{2}\,(0{,}1)\,(-5{,}242513)\right) + 1 = -5{,}398932$$
$$k_4 = 2\,(1{,}2 + (0{,}1)) - 3\,(3{,}228436 + (0{,}1)\,(-5{,}398932)) + 1 = -4{,}465629$$
$$y_3 = 3{,}228436 + \frac{1}{6}\,(-6{,}285309 + 2\,(-5{,}242513) + 2\,(-5{,}398932) - 4{,}465629)\,(0{,}1) = 2{,}694539$$

6.5.1. Runge-Kutta con matlab

Al igual que con el método de Euler el método de Runge-Kutta también se puede programar en matlab con el objetivo de encontrar la solución de una manera mas rápida. La ventaja que tiene este método vs Euler es que su velocidad de convergencia es menor pero el costo computacional es mayor. A continuación se muestra el algoritmo del método programado con matlab

Programa 6.4. Método de Runge -Kutta

```
function [x,y,error] = RK4PVI(f,a,b,n,y0)
%a=extremo inferior,b=extremo superior, numero de subintervalos , funcion
h=(b-a)/n;% calculo del paso
x=(a:h:b);% formar un vector de a hasta b con incrementos h
x=x(:);%garantizar que sean columna
y=zeros(n+1,length(y0));% formar vector y
y(1,:)=y0;% condicion inicial
for k=1:n
    k1=feval(f,x(k),y(k,:));
    k2=feval(f,x(k)+h/2,y(k,:)+h/2*k1);
    k3=feval(f,x(k)+h/2,y(k,:)+h/2*k2);
    k4=feval(f,x(k+1),y(k,:)+h*k3);
    y(k+1,:)=y(k,:)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);% metodo iterativo
end
% calculo de una edo

% en el caso de conocer la solucion exacta
y1=exp((1/4)-(0.5-x).^2);    %%Solucion exacta
plot(x,y1)
hold on
plot(x,y,'*g')
legend('Solex','Solaprox Euler')
grid on
error=max(abs(y1-y));
end
```

El script de la ecuación diferencial resuelta se presenta a continuación.

Programa 6.5. Resolución de sistemas de ecuaciones con matlab 2

```
function z=funcionesPVI(x,y)
%z=x-y;
z=(1-2*x)*y;
%z=0.75-y/200;
%z=[x^2*y(1)-2*y(2)];
end
```

De igual manera en el caso de conocer la solución exacta se puede estimar el error cometido y realizar la gráfica de la solución exacta y aproximada.

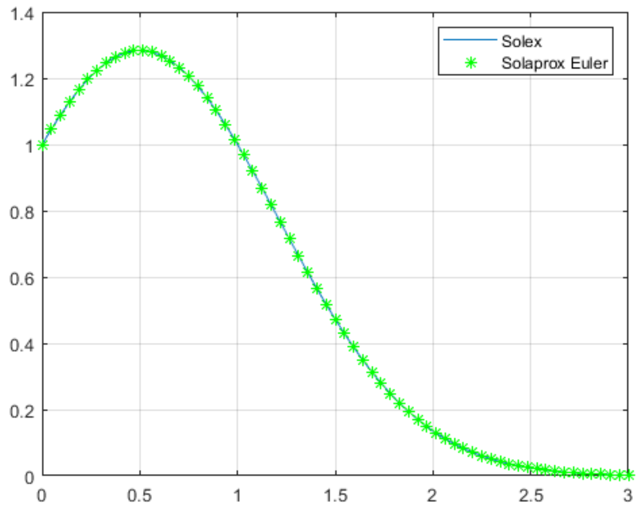


Figura 6.2. Ejemplo resuelto con el método de Runge Kutta

Apéndice A

Tabla de fórmulas a utilizar

A.1. FÓRMULAS A UTILIZAR

FÓRMULA	DETALLE
$Valor\ verdadero = Valor\ aproximado + error$	Valor verdadero
$\Delta a = \lvert A - a \rvert$	Error cualitativo
$A = a \pm \Delta a$	Valor verdadero
$E_t = valor\ \ verdadero -\ \ valor\ \ aproximado$	Error Cualitativo
$\delta a = \frac{\Delta a}{A}$	Error Cuantitativo
$\delta a = \frac{\Delta a}{A} * 100\,\%$	Error porcentual
$\Delta \leq 0{,}5 * 10^{m-n+1}$	CS del error
$E_t = \frac{error\ \ verdadero}{valor\ \ verdadero}$	Error relativo
$E_t = \frac{error\ \ verdadero}{valor\ \ verdadero} * 100$	Error verdadero
$E_t = \frac{error\ \ verdadero}{valor\ \ verdadero} * 100$	Error verdadero porcentual
$\varepsilon_a = \frac{aproximacion\ \ actual - anterior}{aproximacion\ \ actual} * 100$	Error aproximado
$\lvert \varepsilon_a \rvert < \varepsilon_s$	Criterio de parada(CP)
$\varepsilon_s = (0{,}5 * 10^{2-n})$	CP Scarborough
$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 + ...\Delta a_n$	Errores de suma
$\delta a = \delta a_1 + \delta a_2$	Errores del producto
$\delta a = n * \delta a_1$	Errores de potencias
$\delta a = \frac{1}{n}\delta a_1$	Errores de raíces
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ...a_{n-1}x + a_n = 0$	Representación de una ecuación
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Fórmula general
$a)\ \ \lvert X_n - X_{n-1} \rvert < \varepsilon$	CP Bisección
$b)\ \ \lvert \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n} \rvert < \varepsilon$	CP Bisección
$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$	Método de bisección
$f(x_a) * f(x_c) < 0$	Raíz en el primer intervalo:
$f(x_a) * f(x_c) > 0$	Raíz en el segundo intervalo
$f(x_a) * f(x_c) = 0$	Raíz encontrada
$x_c = x_b - \frac{f(x_b)*(x_a - x_b)}{f(x_a) - f(x_b)}$	E. Falsa Posición
$f'(Xi) = \frac{f(Xi)}{Xi - X_{i+1}}$	E. de Newton
$X_{i+1} = Xi - \frac{f(Xi)}{f'(Xi)}$	Método de Newton
$X_{i+1} = Xi - \frac{f(Xi)(X_{i-1} - Xi)}{f(X_{i-1}) - f(Xi)}$	Ecuación de la Secante
$X_{i+1} = Xi - \frac{f(Xi)(X_{i-1} - Xi)}{f(X_{i-1}) - f(Xi)}$	Método de la Secante
$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	Raíces múltiples
$f\left[X_{i-2}, X_{i-1}\right] = \frac{f(X_{i-1}) - f(X_{i-2})}{X_{i-1} - X_{i-2}}$	Diferencias finitas
$X_{i+1} = \frac{2a_0}{-a\pm(a_1^2 - 4a_0.a - a_2)^{\frac{1}{2}}}$	Método de Muller
$\lvert \varepsilon r \rvert = \frac{\Delta r}{r}$	Error relativo BAIRTHROW
$\lvert \varepsilon r \rvert = \frac{\Delta r}{r}$	Rendimiento del motor
$x\,(t) = e^{-nt}\left(x_0\cos(pt) +\ x_0\frac{n}{p}\ sen\ (pt)\right) Ejm$	Sistema de amortiguación
$a_0x + a_1 = 0$	Ecuación lineal
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = C_1$	Sistema ecuaciones lineales
$\varepsilon_{a,i} = \lvert \frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j} \rvert * 100\,\% < \varepsilon_s$	Gauss Seidel
$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}s$	Factorización de matrices
$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	La media
$S_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}}$	Desviación Estandar
$S_t = \sum (x_i - \bar{x})^2$	Cálculo de ST
$y = a_0 + a_1x + \varepsilon$	Recta por mínimos cuadrados
$\varepsilon = y - a_0 - a_1x$	Cálculo del error
$S_r = \sum \varepsilon^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1x_i)^2$	Suma de los cuadrados de los residuos
$s_{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{s_r}{n-2}}$	Error Estándar
$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$	Coeficiente de correlación

Bibliografía

[moo,] *Matlab para ingenieros.* Educación Pearsonón.

[Agud Albesa, 2020] Agud Albesa, L. (2020). Método de bisección para la resolución de ecuaciones.

[Alfaro, 2004] Alfaro, V. (2004). Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (edo). *Departamento de Automática, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica.*

[Aranda, 2003] Aranda, D. F. C. (2003). *Introducción a los Métodos Numéricos: Software en Basic y aplicaciones en hidrología superficial.* UASLP.

[Burden et al., 1996] Burden, R. L., Faires, J. D., Iriarte Balderrama, R., et al. (1996). *Análisis numérico.*

[Camarasa Buades, 2020] Camarasa Buades, M. (2020). Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones difusas.

[Conde and Schiavi, 2010] Conde, C. and Schiavi, E. (2010). Métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales. *Recuperado el*, 18.

[CORDERO BARBERO et al., 2006] CORDERO BARBERO, A., HUESO PAGOAGA, J. L., MARTINEZ MOLADA, E., and TORREGROSA SÁNCHEZ, J. R. (2006). *Problemas resueltos de métodos numéricos.* Editorial Paraninfo.

[Edwards and Penney, 2009] Edwards, C. H. and Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera.* Pearson Educación.

[Federico and Antonio, 2014] Federico, D. S. C. and Antonio, N. H. (2014). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería.* Grupo Editorial Patria.

[Franqués García, 2015] Franqués García, A. M. (2015). *Métodos numéricos para la resolución de modelos no lineales.* PhD thesis, Universitat Politècnica de València.

[González, 2014] González, H. J. (2014). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería: Casos de estudio usando Matlab.* Ediciones UC.

[Hall,] Hall, M. P., editor. *Métodos Numéricos.*

[McGraw-Hill,] McGraw-Hill, editor. *Métodos numéricos para ingenieros.*

[Ordoñez, 2010] Ordoñez, G. R. R. (2010). Uso de matlab para la enseñanza y aprendizaje de la solución de las ecuaciones lineales con enfoque geométrico para ingeniería. *Ingeniería solidaria*, 6(10-11):59–68.

[Pérez Fernández et al., 1998] Pérez Fernández, F. J. et al. (1998). Métodos numéricos básicos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

[Rodríguez López et al., 2017] Rodríguez López, J. M. et al. (2017). Métodos numéricos para la aproximación de raíces múltiples de ecuaciones no lineales.

[Ross, 2021] Ross, S. L. (2021). *Ecuaciones diferenciales.* Reverté.

[Zill and Cullen, 2013] Zill, D. G. and Cullen, M. R. (2013). *Ecuaciones diferenciales.* McGraw-Hill Interamericana.

LOS AUTORES

A.2. JOSÉ LUIS PÉREZ ROJAS

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones (UNACH, 2015), Máster Universitario en Ingeniería en Matemática y Computación (Universidad Internacional de la Rioja 2019). Miembro del Grupo de Investigación en Diseño y Producción(GDP-ESPOCH). Desde el 2016 ha sido de ponente en varios congresos Nacionales e Internacionales para la presentación de varias investigaciones, las cuales han sido publicadas en revista indexadas. Docente Universitario de la (UNACH 2016), Docente Universitario (ESPOCH), desde 2017 hasta la actualidad, colaborando en la carrera de Ingeniería Mecánica.Miembro activo de la comisión de Carrera de Ingeniería Mecánica desde el 2020. Interés de investigación en estudios de sistemas automáticos, métodos numéricos, elementos finitos, transportes y sistemas inteligentes, sistemas alternativos de propulsión, procesos de manufactura.

A.3. ANDRES JOAO NOGUERA CUNDAR

Ingeniero Automotriz (ESPOCH, 2012), Máster en Ingeniería Mecánica (Universidad Politécnica de Madrid 2017). Colaborador de investigación en Seguridad en transporte colectivo de personas, vehículos, sistemas de protección y movilidad con la aportación de un estudio de patrones de comportamiento de las mujeres en los accidentes de tráfico, en relación con los varones en España. Becario Senescyt convocatoria abierta 2015. Experiencia profesional en el área de servicio y taller Automotriz en Hyundai Motor Company (2012-2015). Docente Universitario de la ESPOCH, desde 2017 hasta el presente, colaborando en las escuelas de Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica. Miembro del Grupo de Investigación de Desarrollo de Nanotecnología, Materiales y Manufactura (GIDENM-ESPOCH), autor y coautor de varios artículos indexados regionales. Colaborador activo de la comisión de Evaluación y Aseguramiento de la Calidad de la carrera de Ingeniería Mecánica. Interés de investigación en estudios de transportes, sistemas inteligentes de conducción autónoma, sistemas alternativos de propulsión, procesos de manufactura y vibraciones.

A.4. FABIAN EDUARDO BASTIDAS ALARCON

Ingeniero Mecánico (ESPOCH, 2007), Magister en Seguridad Industrial, mención Prevención de Riesgos y Salud Ocupacional (UNACH, 2016), Magister en Física Aplicada, mención Física Computacional (UTA, 2022). Docente universitario en la ESPOCH desde el año 2010 hasta el presente, experiencia en Facultades como Informática y Electrónica, Programas Carrera, Administración de Empresas, Extensión Morona Santiago y Facultad de Mecánica. Miembro de proyectos emblemáticos del SENESCYT, CEACES y SNNA. Experiencia profesional como Supervisor de Mantenimiento en la Empresa ECUACERAMICA C.A., y en constructoras de la cuidad de Riobamba y el Puyo, manejo de recursos, proyectos civiles y mecánicos, aplicación de sistemas de seguridad industrial, gestión de calidad y productividad; diseño, construcción y mantenimiento de estructuras metálicas; asesoría en todas las ramas de la Ingeniería mecánica y Seguridad Industrial. Capacitador en cursos de Seguridad Industrial, Prevención de riesgos, Ergonomía en el GAD Pastaza. Docente investigador y subcoordinador de proyectos de investigación en el Grupo de investigación en seguridad, ambiente e ingeniería (GISAI- ESPOCH), autor y coautor de varios artículos indexados regionales, alto impacto y ponencias internacionales. Actualmente se encuentra colaborando como miembro de la CEAC de la Carrera de Mantenimiento Industrial y como investigador dentro del Proyecto de vinculación entre el Grupo de Investigación de GISAI y GAD Morona. Ha sido asesor en tesis de maestría en la ESPOCH. Intereses de investigación en áreas de la Física Computacional, principalmente la acústica y materiales de construcción, así también en temas relacionados a Seguridad Industrial y Salud Ocupacional.

PUERTO MADERO
EDITORIAL

MÉTODOS NUMÉRICOS

Aplicaciones en Ingeniería y Ciencias Básicas

El propósito de este texto es brindar una herramienta básica de los métodos numéricos, proporcionando una fundamentación básica de los diferentes métodos y su utilidad en la solución de problemas. El objetivo de esta obra dirigida a estudiantes universitarios y poner a su disposición elementos de fácil comprensión y lectura que los lleve a un primer encuentro con esta ´área de las matemáticas; con la ayuda de ejercicios resueltos y propuestos que les permita un mejor entendimiento de las clases desarrolladas, además del uso de software en la solución de aplicaciones que ayude en la comprensión de estas utilizando para ello la programación. El desarrollo de cada uno de los temas constituye el material suficiente para un curso introductorio sobre métodos numéricos, y está organizado en 6 capítulos los cuales se van desarrollando según la complejidad del caso.

ISBN 978-987-88-4941-6

9 789878 849416

puertomaderoeditorial.com.ar La Plata - Argentina