Análisis Matemático para Ingenieros

Cálculo integral de funciones de una variable

©2022 Rafael Albuja Echeverría
Cristian Redroban Dillon
Gabriel Moreano Sánchez

TOMO 2

Análisis Matemático para Ingenieros.
Cálculo integral de funciones de una variable

TOMO 2

Cristian Redroban Dillon
Gabriel Moreano Sánchez

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)
Riobamba – Ecuador
Panamericana Sur Km. 1½
Teléfono: 593 (03) 2998-200
Código Postal EC0600155

2022
Publicado por acuerdo con los autores.
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego *(peer review)*

Corrección y diseño, respaldado por:
La Caracola Editores
Índice Científico, Editorial

Análisis Matemático para Ingenieros.
Riobamba, Ecuador
Dirección de Publicaciones Científicas, 2022
ISBN: 978-9942-42-401-3
Fecha de Publicación: 2022-06-14

INTRODUCCION

El libro que le presentamos constituye la segunda parte del libro "Análisis matemático para ingenieros" y está destinado a los estudiantes de los primeros semestres de las carreras de ingeniería. También puede ser utilizado por estudiantes de otras disciplinas, que estudian matemáticas superiores y análisis matemático.

El libro de texto contiene dos capítulos que abarcan temas fundamentales del análisis matemático: el capítulo uno aborda lo relacionado con las funciones de varias variables y el capítulo dos las integrales múltiples.

El material está dispuesto y distribuido de manera que el lector, ya sea profesor o estudiante, puede preparar fácilmente un esquema para su propio trabajo.
El estilo de exposición de los temas incluye una breve introducción teórica con los conceptos fundamentales con una amplia variedad de ejercicios resueltos y propuestos lo que tiene como objetivo crear una base lógica sólida y los conocimientos y habilidades necesarios en los estudiantes.

Esperamos que este libro de texto sea una ayuda en el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería, lo cual constituya una base sólida para su aplicación en las diferentes asignaturas que enfrentaran en transcurso de sus estudios.

INDICE


FreshWallpapers.Net

1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1.1. Introducción

En cierto modo ya estamos familiarizados con las definiciones, propiedades y operaciones de funciones de una sola variable, como son los límites, derivadas, anti derivadas etc. En este capítulo se verán todas estas propiedades y operaciones, pero con funciones reales de varias variables llamadas también funciones de argumento vectorial. Por ejemplo, las derivadas son aquí derivadas parciales y la integral definida simple se transforma en integrales dobles y triples.

Para comprender este capítulo es importante que el estudiante domine los conocimientos del algebra, trigonometría, calculo diferencial, calculo integral etc.

1.2. Conceptos fundamentales

Definición de función de n variables.- Una magnitud variable W se denomina función uniforme de n variables $x_1, x_2, \ldots., x_n$ si a cada conjunto de n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del campo dado, le corresponde un valor único y determinado de W.

Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan variables independientes o dominio y W variable dependiente o codominio.

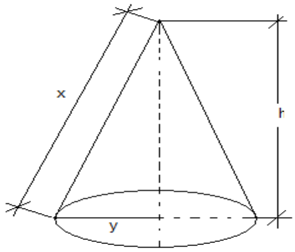
Las notaciones matemáticas más usadas para nombrar esta dependencia son:

$$W = f(x_1, x_2, \ldots, x_3); \qquad W = F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad etc.$$

De la misma manera que podemos evaluar la función $y = f(x)$ en cualquier valor que toma x en su dominio, evaluamos la función $W = f(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ en cualquier punto $P = (x_1, x_2, \ldots., x_n)$ del campo de existencia así: Si $z = f(x, y)$ y el punto es $P = (a, b)$ entonces $z(a, b) = f(a, b)$.

Ejemplos:

1. ***Encontrar la dependencia funcional del volumen del cono, en función de su generatriz x y del radio de la base y.***



$$h = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Figura 1.1

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3}\pi\, y^2\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$V = f(x, y)$$

2. ***Hallar la dependencia funcional del volumen de un paralelepípedo en función de sus lados.***

$V = x * y * z.$
$V = f(x, y, z).$

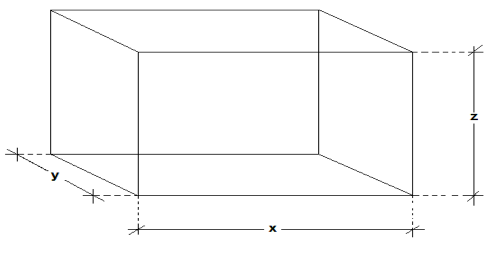


Figura 1.2

3. ***Determinar la dependencia funcional del espacio en función del tiempo y la velocidad inicial.***

$$d = v_o t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

$$d = f\big(v_{o,}, t\big).$$

4. *Como será la dependencia funcional del área de un triángulo en función de sus lados.*

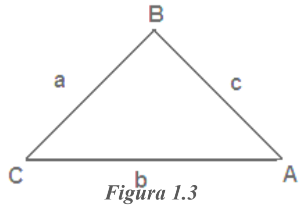


Figura 1.3

$$A = s\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$
$$A = f(a,b,c).$$

5. *Hallar* $f\left(\frac{1}{2},3\right)$ *y* $f(1,-1)$, *si* $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}.$

Solución:

$$f\left(\frac{1}{2},3\right) = \frac{1}{2} * 3 + \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{9+1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$
$$f(1,-2) = 1 * -2 + \frac{1}{-2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

6. *Determinar* $f(y,x)$, $f(-x^2,-y^2)$, $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{f(x,y)}$

si $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}.$

Solución:

$$f(y,x) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$
$$f(-x^2,-y^2) = \frac{(-x^2)^2-(-y^2)^2}{2(-x^2)(-y^2)} = \frac{x^4-y^4}{2x^2y^2}.$$
$$f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{y}\right)^2}{2\frac{1}{x}*\frac{1}{y}} = \frac{x\,y\,(y^2-x^2)}{2x^2y^2} = \frac{y^2-x^2}{2xy}.$$
$$\frac{1}{f(x,y)} = \frac{1}{\frac{x^2-y^2}{2xy}} = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

7. *Calcular los valores que toma la función* $f(x,y) = 1 + x - y$ *en los puntos de la parábola* $y = x^2$, *y graficar la función* $F(x) = f(x,x^2)$.

Solución:
Los puntos de la parábola son de la forma (x, x^2), por lo que calculamos

$$f(x, x^2) = 1 + x - x^2.$$

Gráfico:

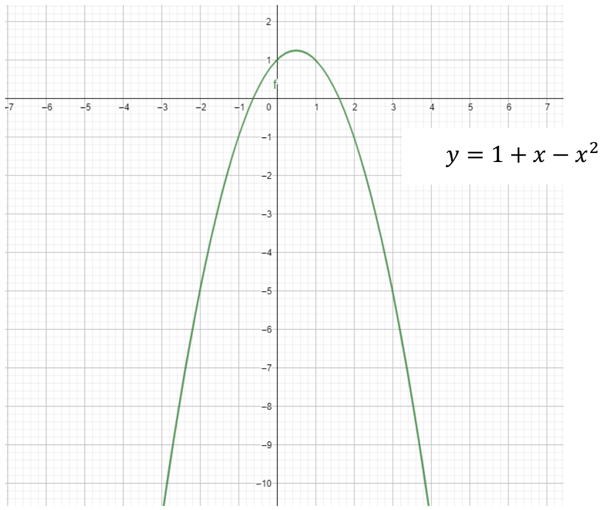


Figura 1.4

8. *Encontrar* $f(x,y)$, *si* $f(x+y, x-y) = xy + y^2$.

Solución:
Sustituimos

$x + y = u \quad y \quad x - y = v,$ resolviendo el sistema tenemos:

$x = \frac{u+v}{2} \quad \cap \quad y = \frac{u-v}{2}$ Reemplazando en la función tenemos:

$$f(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right) + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(u^2 - v^2) + \frac{1}{4}(u^2 - 2uv + v^2) \therefore$$

$f(u,v) = \frac{1}{2}(u^2) - \frac{1}{2}u\,v = \frac{u}{2}(u - v)$, volviendo a variables originales tenemos:

$$f(x,y) = \frac{(x+y)}{2}(2y) = y(x+y) \quad \therefore \quad f(x,y) = y(x+y).$$

1.2.1. Concepto de dominio o campo de existencia de la función

Es el conjunto de n-uplas ordenadas que toman como valor las variables independientes para que la función exista, de allí su nombre campo de existencia de la función, éste puede estar definido en la recta numérica R^1, en un plano R^2, en el espacio R^3 o en forma general en R^n, dependiendo del número de variables independientes.

Ejemplos:

Hallar analítica y gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Solución:
Condición: $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \therefore x^2 + y^2 \leq 1$ entonces el dominio es:
$D = \{(x, y)\epsilon R^2 / \, x^2 + \, y^2 \leq 1\}$, esto quiere decir que son todos los puntos (x, y) que están dentro de la circunferencia $x^2 + \, y^2 \leq 1$ incluida la línea de frontera (Fig. 1.5).

$x^2 + y^2 \leq 1$

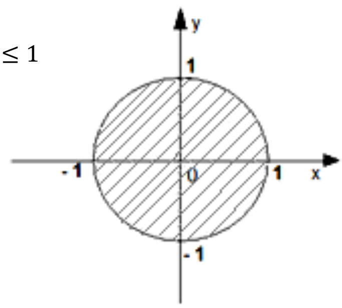


Figura 1.5

2. $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Solución:
Condición: $1 - x^2 - y^2 > 0 \therefore x^2 + y^2 < 1$ entonces el dominio es:
$D = \{(x, y)\epsilon R^2 / \, x^2 + \, y^2 < 1\}$, esto quiere decir que son todos los puntos (x, y) que están dentro de la circunferencia $x^2 + \, y^2 \leq 1$ excluyendo la línea de frontera (Fig. 1.6).

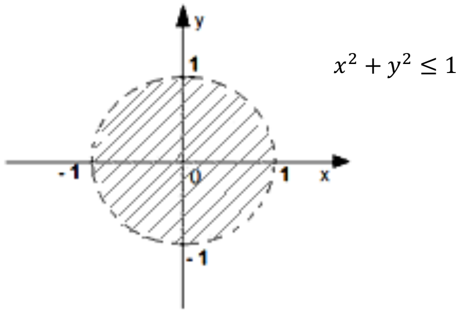


Figura 1.6

3. $z = ln(x + y)$.

Solución:
Condición: $x + y > 0 \quad \therefore \quad y > -x$ entonces el dominio es:
$D = \{(x, y)\epsilon R^2 / \ y > -x\}$, esto quiere decir que son todos los puntos (x, y) que están sobre la recta $y > -x$ excluyendo la línea de frontera (Fig. 1.7).

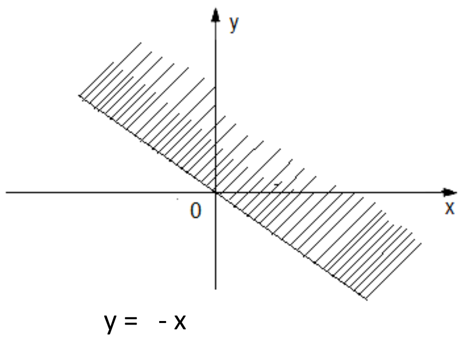


Figura 1.7

4. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Solución:
Cuando tenemos una diferencia o suma de funciones, para encontrar su campo de existencia, debemos encontrar el dominio de cada sumando y luego hallar el conjunto intersección de estos dominios.

Condiciones: para $z_1 = \sqrt{1 - x^2}$ $\; tenemos\ que \;$ $1 - x^2 \geq 0 \; \therefore$ $-1 \leq x \leq 1$ por lo que el dominio es: $D = \{x \,\epsilon\, R^1 / -1 \leq x \leq 1\}$
Para $z_2 = \sqrt{1 - y^2}$ $tenemos\ que$ $1 - y^2 \geq 0 \;\; \therefore \; -1 \leq y \leq 1$ y el dominio es:
$D = \{y \,\epsilon\, R^1 / -1 \leq y \leq 1\}$
Encontrando la intersección de los dominios tenemos:
$D_t = \{(x, y) \,\epsilon\, R^2 / -1 \leq x \leq 1 \cap -1 \leq y \leq 1\}$, lo que significa que es el cuadrado limitado por las rectas $y = \pm 1$ y $x = \pm 1$ incluida las líneas de frontera (Fig. 1.8).

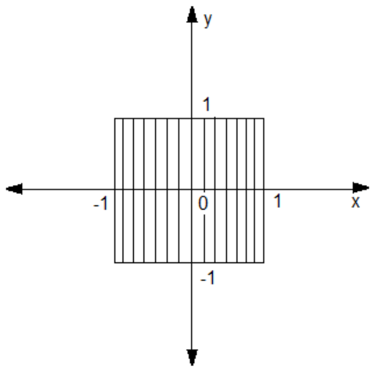


Figura 1.8

5. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}.$

Solución:
Condiciones: para $z_1 = x^2 + y^2 - a^2 \;\;\; \therefore \; x^2 + y^2 \geq a^2$ por lo que el dominio es $D = \{(x, y) \,\epsilon\, R^2 / \, x^2 + y^2 \geq a^2\}$. Lo que significa que son todos los puntos (x, y) que están fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 \geq a^2$ incluida la línea de frontera.
Para $z_2 = 2a^2 - x^2 - y^2 \;\;\; \therefore \; x^2 + y^2 \leq 2a^2$ y el dominio es:
$D = \{(x, y) \,\epsilon\, R^2 / \, x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$. Esto significa que son todos los puntos (x, y) interiores a la circunferencia $x^2 + y^2 \leq 2a^2$ incluida la línea de frontera.
Encontrando la intersección de los dominios tenemos:
$D_t = \{(x, y) \,\epsilon\, R^2 / \, x^2 + y^2 \geq a^2 \cap x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$, lo que significa que es el anillo circular limitado entre $x^2 + y^2 \geq a^2 \cap \; x^2 + y^2 \leq 2a^2$ incluidas las líneas de frontera (Fig. 1.9).

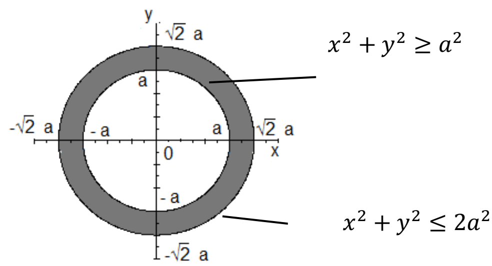


Figura 1.9

6. $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$

Solución:
Condiciones:
Para $u_1 = \sqrt{x} \quad \therefore \quad x \geq 0.$
Para $u_2 = \sqrt{y} \quad \therefore \quad y \geq 0.$
Para $u_3 = \sqrt{z} \quad \therefore \quad z \geq 0.$
Dominio: $D = \{(x, y, z) \in R^3 / x \geq 0 \cap y \geq 0 \cap z \geq 0\}$ lo que significa el primer octante de R^3 (Fig. 1.10).

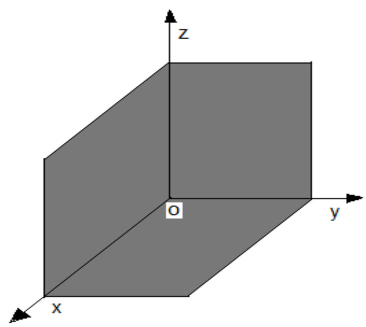


Figura 1.10

7. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$

Solución:
Condición: $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \quad \therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ entonces el dominio es $D = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
lo que significa que son todos los puntos (x, y, z) dentro de la esfera

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ incluida la línea de frontera (Fig. 1.11).

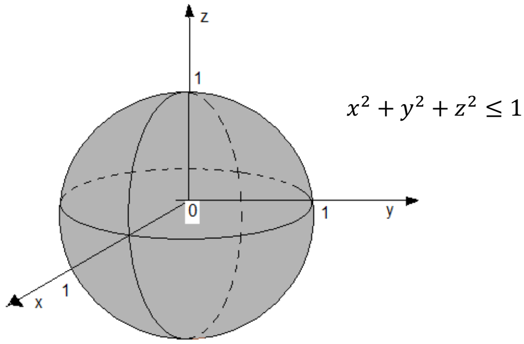


Figura 1.11

1.2.2. Definición de Codominio (Imagen)

Es el conjunto de valores que toma la variable dependiente W y se determina haciendo un análisis de la función, o también después de realizado el grafico, observando que espacio ocupa la variable independiente en los ejes coordenados. La imagen es el codominio de la función cuando la variable independiente toma todos los valores del conjunto de llegada.

Ejemplos:

Vamos a determinar los codominios de los ejemplos anteriores así:

Del ejemplo 1. $[0, 1]$.
Del ejemplo 2. $]0, 1]$.
Del ejemplo 3. $]-\infty, +\infty[$.
Del ejemplo 4. $[0, 1]$.
Del ejemplo 5. $\left[0, \sqrt{2}\, a\right]$
Del ejemplo 6. $[0, +\infty[$.
Del ejemplo 7. $[0, 1]$.

1.2.3. Gráfico de la Función

El grafico de la función es la representación en un plano de referencia del par ordenado $(Dominio, Codominio)$ así: Si la función tiene una sola variable independiente $y = f(x)$, el par ordenado es (x, y) y su gráfico se representa en el plano R^2, si son dos variables independientes $z = f(x. y)$, el par ordenado (D, Cod) se transforma en una triada ordenada (x, y, z) y su representación se hace en el espacio R^3 y así sucesivamente, en general la representación de las n-adas ordenadas se hace en el espacio R^{n+1}.

Pero es importante tomar en cuenta que la representación gráfica como máximo podemos hacerla de una Triana ordenada, que se lo dibuja en el espacio R^3 dando su figura un volumen, razón por la cual de aquí en adelante daremos mayor énfasis en su análisis a la función de dos variables independientes o sea $z = f(x, y)$, lógicamente sin olvidarse de las de mayor número de variables.

Como advertimos anteriormente vamos a realizar gráficos de superficies $z = f(x, y)$, para lo cual vamos a utilizar el procedimiento de trazas en los diferentes planos, su representación es en R^3, pero también hay la posibilidad de representar la misma superficie en R^2 por medio de curvas de nivel, cuyas ecuaciones son de la forma $k = f(x, y)$. A fin de ilustrar la aplicación de las curvas de nivel, vamos a suponer que la temperatura en cualquier punto de una placa metálica plana está dada por la función $T = f(x, y)$. Por tanto, las curvas de nivel con ecuaciones de la forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante que depende del Codominio, son curvas donde la temperatura es constante. Estas curvas de nivel se denominan **isotermas**. Otra aplicación, si V voltios proporcionan el potencial eléctrico en cualquier punto denotado por la función $V = f(x, y)$, las curvas de nivel en este caso se los llama curvas **equipotenciales,** conocidas así porque el potencial eléctrico en cada una de estas curvas es el mismo.

Ejemplos:

1. *Realizar el gráfico y las curvas de nivel de la función de dos variables* $z = x^2 + y^2$.

   Solución:
   Determinamos las trazas:
   Plano "*xy*", $z = k$, si $k = 0$ $\quad x^2 + y^2 = 0$ (un punto en el origen), y si $k \neq 0$ nos da la sección transversal paralela al plano "*xy*", que son circunferencias de la forma $x^2 + y^2 = k$, donde se incrementa el radio a medida que $|k|$ aumenta.
   Plano "*xz*", $y = 0$ $\quad z = x^2$ (son parábolas, se abren hacia arriba).
   Plano "*yz*", $x = 0$ $\quad z = y^2$ (son parábolas, se abren hacia arriba).

Los gráficos en R^3 (Paraboloide de revolución) y R^2 se muestran en las figuras 1.12 y 1.13.

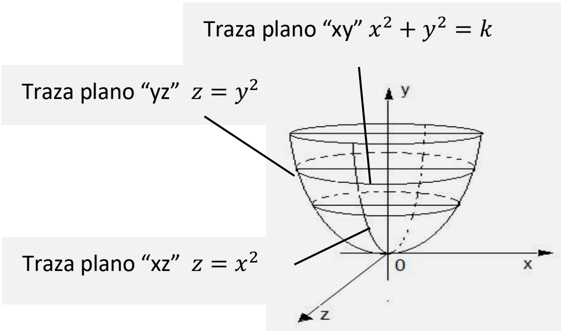


Figura 1.12

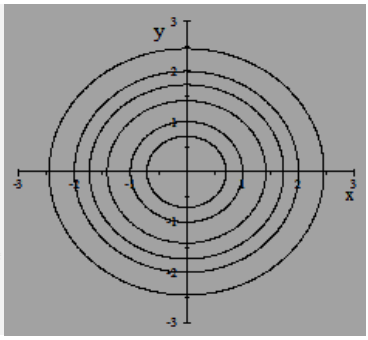


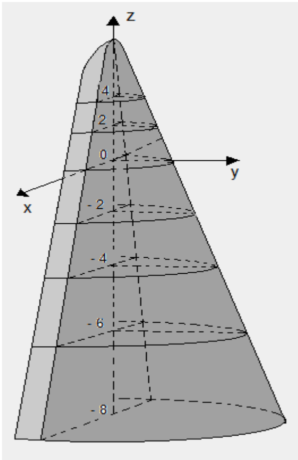
Figura 1.13

Para graficar la superficie en curvas de nivel, lo que hacemos es cambiar a la variable dependiente por una constante "K", donde "K" toma valores que deben estar dentro del conjunto del Codominio.
En nuestro ejemplo tenemos:

$z = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = K, \;\; con \;\; K = (0, 1\ 2, \dots \dots)$ obtenemos el gráfico en curvas de nivel (Fig. 1.13).

2. *Dibujar el gráfico y las curvas de nivel de la función* $z = 8 - x^2 - 2y$.

Solución:
Determinamos las trazas:
Plano "*xy*", $z = k$, si $k = 0 \;\; x^2 = -2(y - 4)$ (es una parábola), y si $k \neq 0$ nos da la sección transversal paralela al plano "*xy*", en esta caso son parábolas de la forma $k = 8 - x^2 - 2y$ y que tiene su vértice en la recta $2y + z = 8$.
Plano "xz", y = 0 $\;\; z = 8 - x^2$ (la traza es una parábola).
Plano "yz", x = 0 $\;\; z = 8 - 2y$ (el gráfico es una recta).
Los gráficos en R^3 y R^2 se muestran en las figuras 1.14 y 1.15.



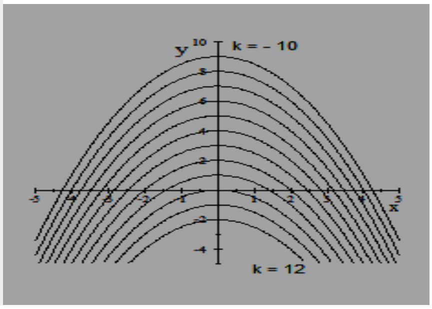


Figura 1.14 *Figura 1.15*

En este ejemplo la ecuación para graficar las curvas de nivel es:

$k = 8 - x^2 - 2y$ donde valores de
$k = \cdots, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$

3. *Dibujar la superficie y las curvas de nivel de la función:*
$z = cos\, x + cos\, y$ *(Fig. 1.16).*

Solución:

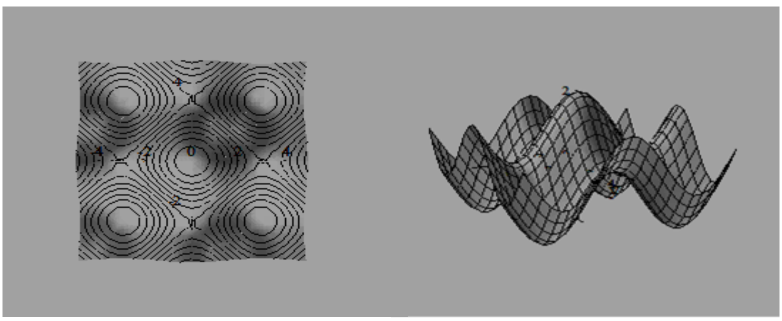


Figura 1.16

4. *Dibujar la superficie y sus curvas de nivel de la función:* $z = |xy|$ *(Fig. 1.17).*

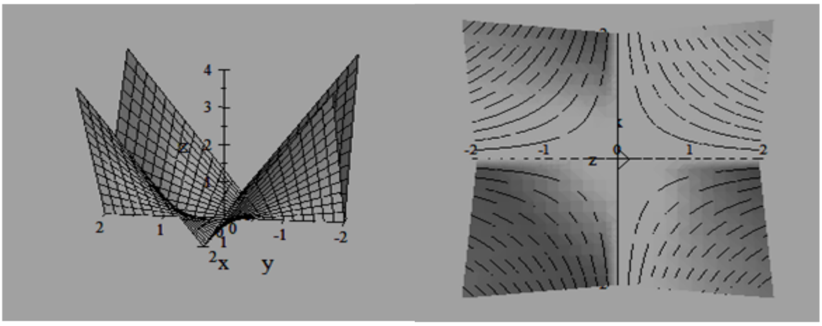


Figura 1.17

5. *Dibujar la superficie y sus curvas de nivel de la función:* $z = ln(x^2 + y^2)$ *(Fig. 1.18).*

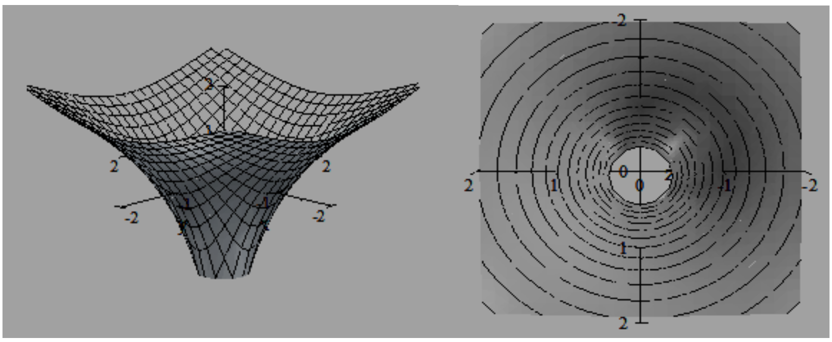


Figura 1.18

1.3. Límites y continuidad de funciones de más de una variable

Como la definición de límite implica la distancia entre dos puntos es necesario hacer un breve recuento de lo que se trata.

1.3.1. Definición de distancia entre dos puntos en Rn.

Si $P(x_1, x_2, \ldots., x_n)$ y $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son dos puntos de R^n, entonces la distancia entre P y A, denotada por $\|P - A\|$, está definida por:

$\|P-A\|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots..+(x_n-a_n)^2}$.
El símbolo $\|P-A\|$ representa un número no negativo y se lee como "la distancia entre P y A".

Los casos particulares para R, R^2 y R^3 se transforma, respectivamente en:

$\|x-a\|=|x-a|$
$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$
$\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Ejemplos:

Hallar la distancia entre los puntos que se dan a continuación.

1. $P=4,\ \ A=-6$.

Solución:

$$\|\mathrm{P}-\mathrm{A}\|=|\mathrm{x}-\mathrm{a}|=|4-(-6)|=|4+6|=10.$$

2. $P(2,-5),\quad A(-1,5)$.

Solución:

$$\|\mathrm{P}-\mathrm{A}\|=\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2+(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-5-5)^2}$$
$$=\sqrt{9+100}=\sqrt{109}.$$

3. $P\left(\sqrt{3},\ \frac{5}{2}\right),\quad A\left(-2\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$.

Solución:

$$\|\mathrm{P}-\mathrm{A}\|=\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{27+16}=\sqrt{43}\,.$$

4. $P(-1,3,-4),\ \ A(2,-5,6)$.

Solución:

$$\|P-A\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=$$
$$=\sqrt{(-1-2)^2+(3+5)^2+(-4-6)^2}=\sqrt{9+64+100}=\sqrt{173}.$$

5. $P(3,-5,7), \quad A(-4,5,3).$

Solución:

$$\|P-A\| = \sqrt{(3+4)^2+(-5-5)^2+(7-3)^2} = \sqrt{49+100+16} = \sqrt{165}.$$

6. $P(2,3,4,-5,3), \quad A(-1,3,5,-7,9).$

Solución:

$$\|P-A\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2+(x_4-a_4)^2+(x_5-a_5)^2}$$
$$= \sqrt{(2+1)^2+(3-3)^2+(4-5)^2+(-5+7)^2+(3-9)^2}$$
$$= \sqrt{9+0+1+4+36}$$
$$\|P-A\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

1.3.2. Definición de límite de una función de n variables

El número L recibe el nombre de límite de una función $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuando el punto $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiende al punto $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, exceptuando posiblemente el punto A, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que cuando $0 < \|P-A\| < \delta$, se verifica la desigualdad $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L| < \varepsilon$. Matemáticamente se denota por:

$$\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(a_1,a_2,\dots,a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{P\to A} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L.$$

1.3.3. Definición de límite de una función de dos variables

El número L recibe el nombre de límite de una función $z = f(x,y)$ cuando el punto $P(x,y)$ tiende al punto $A(x_0, y_0)$, exceptuando posiblemente el punto A, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que cuando $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$, se verifica la desigualdad $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. Matemáticamente se denota por:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{P\to A} f(x,y) = L.$$

En otras palabras, la definición quiere decir que los valores de la función $f(x,y)$ se aproximan al límite L conforme el punto (x,y) tiende al punto (x_0,y_0) si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x,y)$ y L puede hacerse arbitrariamente tan pequeña como se quiera, pero sin llegar lógicamente al punto (x_0,y_0). En la definición nada se dice acerca del valor de la función en el punto(x_0,y_0), es decir, no es necesario que la función este definida allí, para que el $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ exista.

Ejemplos:

1. Utilizando la definición de límite, demostrar que:
$\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}(2x+3y)=11$

Solución:
Debemos demostrar que para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que:

$$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta \;\rightarrow\; |(2x+3y)-11|<\varepsilon \qquad \textit{(1)}$$

De la desigualdad del triángulo tenemos:

$$|2x+3y-11|=|2x-2+3y-9|\leq 2|x-1|+3|y-3|$$

Debido a que:

$$|x-1|\leq\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}\ \text{ y}$$
$$|y-3|\leq\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}\text{ , se deduce que:}$$
$$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta$$
$$entonces\quad 2|x-1|+3|y-3|<2\delta+3\delta<5\delta$$

Esta proposición muestra que una elección adecuada para δ es $5\delta=\varepsilon$, esto es, $\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}<\delta$$
$$\rightarrow|x-1|<\delta \quad y \quad |y-3|<\delta \;\rightarrow\; 2|x-1|+3|y-3|<5\delta\rightarrow$$
$$\rightarrow|2(x-1)+3(y-3)|<5\left(\tfrac{1}{5}\varepsilon\right) \;\rightarrow\; |2x+3y-11|<\varepsilon.$$

De este modo, se ha probado que para cualquier $\varepsilon>0$ se elige $\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$ a fin de que la proposición (1) sea verdadera. Así se demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}(2x+3y)=11$.

2. Utilizando la definición de límite, demostrar que:
$\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)}(3x+4y)=17$

Solución:
Debemos demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0<\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}<\delta \;\rightarrow\; |(3x+4y)-17|<\varepsilon \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

De la desigualdad del triángulo tenemos:

$$|3x+4y-17| = |3x-9+4y-8| \leq 3|x-3|+4|y-2|$$

Debido a que:

$$|x-3| \leq \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \quad \text{y}$$
$$|y-2| \leq \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\text{ , se deduce que:}$$
$$0<\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}<\delta \quad \textit{entonces}$$
$$3|x-3|+4|y-2| < 3\delta+4\delta < 7\delta$$

Esta proposición muestra que una elección adecuada para δ es $7\delta=\varepsilon$, esto es, $\delta=\frac{1}{7}\varepsilon$. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$0<\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}<\delta$$
$$\rightarrow |x-3|<\delta \quad y \quad |y-2|<\delta \;\rightarrow\; 3|x-3|+4|y-2|<7\delta \rightarrow$$
$$\rightarrow |3(x-3)+4(y-2)| < 7\left(\frac{1}{7}\varepsilon\right) \;\rightarrow\; |3x+4y-17|<\varepsilon.$$

De este modo, se ha probado que para cualquier $\varepsilon > 0$ se elige $\delta=\frac{1}{7}\varepsilon$ a fin de que la proposición (2) sea verdadera. Así se demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)}(3x+4y)=17$.

Para poder calcular límites con dos variables, lo que hacemos es generalizar los teoremas de límites en una variable sin tener cuidado de caer en algún error, a excepción de los límites que tienen indeterminaciones que no se pueden determinar, en estos casos es necesario recurrir a otras definiciones que mencionaremos más adelante.

Ejemplos:

Aplicando los teoremas de límites, resolver los siguientes ejemplos de límites con dos variables.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (4x^3 - 3xy + 6y^2).$

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (4x^3 - 3xy + 6y^2) = 4(2)^3 - 3(2)(3) + 6(3)^2 = 32 - 18 + 54 = 68.$$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}.$

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} (x+y) = 2 + 2 = 4.$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} ln\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right).$

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} ln\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right) = ln\left[\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x-y}\right] =$$

$$= ln\left[\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y}\right]$$

$$= ln\left[\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+xy+y^2)\right] =$$

$$= ln(1+1+1) = \ln 3$$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \left(\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\right)^{\frac{1}{x\,y}}.$

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\right)^{\frac{1}{x\,y}} = 1^{\infty}\ es\ una\ indetrminación \text{ entonces:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left(\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\right)^{\frac{1}{x\,y}}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\left(\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}-1\right)*\frac{1}{xy}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\left(\frac{x^2-xy+y^2-x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)*\frac{1}{xy}}=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\left(\frac{2y^2-xy}{x^2-y^2}\right)*\frac{1}{xy}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\left(\frac{y(y-x)}{x^2-y^2}\right)*\frac{1}{xy}}==e^{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\left(\frac{y-x}{x^2-y^2}\right)*\frac{1}{x}}=e^{\left(\frac{-1}{1}\right)*\frac{1}{1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x^2-y^2}$.

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x^2-y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)}{(x-y)(x+y)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+1-y-1}{(x-y)(x+y)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{(x+y)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)}=$$

$=\frac{1}{(x+y)\left(\sqrt{0+1}+\sqrt{0+1}\right)}=\frac{1}{0(2)}=\frac{1}{0}=\infty$. (el límite no existe)

Para continuar con el estudio de límites de funciones de dos variables, es necesario presentar los siguientes conceptos.

1.3.4. Definición de punto de acumulación

Un punto P_0 es un punto de acumulación de un conjunto *S* de puntos de R^n**,** si todo intervalo abierto (P_0, r) contiene un número infinito de puntos de *S*.

1.3.5. Definición del límite de una función de dos variables a través de un conjunto especifico

Sea *f* una función definida en un conjunto de puntos *S* en R^2, y sea (x_0, y_0) un punto de acumulación de *S*. Entonces el límite de $f(x,y)$ conforme (x,y) tiende a (x_0, y_0) en *S* es *L*, denotado por:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ [(x,y) en\ S]}} f(x,y) = L$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar que tan pequeño sea, exista un $\delta > 0$ tal que $si\ \ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta\ \ entonces\ \ |f(x,y) - L| < \varepsilon$

Donde (x,y) pertenece a *S*.

En algunos casos el límite de la definición anterior se transforma en el límite de una sola variable.

1.3.6. Teorema

Supongamos que la función f está definida para todos los puntos de un intervalo abierto centrado en (x_0, y_0), exceptuando posiblemente en (x_0, y_0) y que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Entonces, si *S* es cualquier conjunto de puntos de R^2 que tiene a (x_0, y_0) como punto de acumulación,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ [(x,y) en\ S]}} f(x,y)$$

Existe y siempre tiene el valor de *L*.

Demostración Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, entonces, por la definición 1.3.3, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$si\ \ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta\ \ entonces\ \ |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

la proposición será verdadera si además se restringe (x, y) debido al requisito de que éste pertenezca a un conjunto *S*, donde *S* es cualquier conjunto de puntos que tenga a (x_0, y_0) como un punto de acumulación.
$Por\ tanto\ por\ la\ definición$ 1.3.5,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ [(x,y) en\ S]}} f(x, y) = L$$

Y *L* no depende del conjunto *S* a través del cual (x, y) se aproxima a (x_0, y_0). Esto demuestra el teorema.

También debemos tener en cuenta que si la función tiene límites diferentes conforme (x, y) se aproxima a (x_0, y_0), a través de conjuntos diferentes que tienen el mismo punto de acumulación, este límite no existe.

Ejemplos:

1. *Demostrar que el límite de* $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *cuando* $(x, y) \to (0, 0)$ *existe.*

Solución:
Para demostrar vamos a considerar dos conjuntos *S* que tengan el mismo punto de acumulación $(0, 0)$, S_1 la recta $y = x$ y S_2 la parábola $y = x^2$.

Con S_1 $y = x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} f(x, x) = \frac{x}{\sqrt{2}} = 0.$$

Con S_2 $y = x^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2(1+x^2)}} = \lim_{x\to 0} f(x, x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)}} = 0.$$

En consecuencia, como:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\ S_1]}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\ S_2]}} f(x, y) = 0, \text{ el límite existe.}$$

2. *Demostrar que el límite de* $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *cuando* $(x,y)\to(0,0)$ *existe.*

Solución:
Para demostrar vamos a considerar dos conjuntos S que contengan al mismo punto de acumulación $(0,0)$en forma más general, S_1 la recta $y=mx$ y S_2 la parábola $y=mx^2$.

Con S_1 $y=mx$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{x^3(1+m^3)}{x^2(1+m^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{x(1+m^3)}{(1+m^2)}=0.$$

Con S_2 $y=mx^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx^2)=\frac{x^3+m^3x^6}{x^2+m^2x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0} f(x,mx^2)=\frac{x^3(1+m^3x^3)}{x^2(1+m^2x^2)}=\lim_{x\to 0} f(x,mx^2)=\frac{x(1+m^3x^3)}{(1+m^2x^2)}=0$$

En consecuencia, como:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\, S_1]}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\, S_2]}} f(x,y)=0, \text{ el límite existe.}$$

3. *Demostrar que el límite de* $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ *cuando* $(x,y)\to(\infty,\infty)$ *existe.*

Solución:
Para demostrar vamos a considerar dos conjuntos S que contengan al mismo punto de acumulación (∞,∞), S_1 la recta $y=mx$ y S_2 la parábola $y=mx^2$. Como podemos observar este procedimiento también se puede aplicarle en caso de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Con S_1 $y = mx$.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{x\to\infty} f(x,mx) = \frac{x+mx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to\infty} f(x,mx) = \frac{x(1+m)}{x^2(1+m^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} f(x,mx) = \frac{(1+m)}{x(1+m^2)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Con S_2 $y = mx^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{x\to\infty} f(x,mx^2) = \frac{x+mx^2}{x^2+m^2x^4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} f(x,mx^2) = \frac{x(1+mx)}{x^2(1+m^2x^2)} = \lim_{x\to\infty} f(x,mx^2) = \frac{1+mx}{x(1+m^2x^2)} = 0$$

En consecuencia, como:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\infty,\infty)\\ [(x,y) en\ S_1]}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(\infty,\infty)\\ [(x,y) en\ S_2]}} f(x,y) = 0, \text{ el límite existe.}$$

4. *Demostrar que el límite de* $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ *cuando* $(x,y) \to (0,0)$ *no existe.*

Solución:
Para demostrar vamos a considerar dos conjuntos S que contengan al mismo punto de acumulación $(0,0)$, S_1 la recta $y = mx$ y S_2 la parábola $y = mx^2$.

Con S_1 $y = mx$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{x^2}{x^2(1+m^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{1}{(1+m^2)} = \frac{1}{(1+m^2)}.$$

Con S_2 $y = mx^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \frac{x^2}{x^2 + m^2x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \frac{x^2}{x^2(1 + m^2x^2)} = \lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \frac{1}{(1 + m^2x^2)} = 1$$

En consecuencia, como:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\ S_1]}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\ S_2]}} f(x,y)\text{, el límite no existe.}$$

5. *Demostrar que el límite de* $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^4)^2}$ *cuando* $(x,y) \to (0,0)$ *no existe.*

Solución:
Para demostrar vamos a considerar dos conjuntos S que contengan al mismo punto de acumulación $(0,0)$, S_1 la recta $y = x$ y S_2 la parábola $y = x^2$.

Con S_1 $y = x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^4 + x^4}{(x^2 + x^4)^2} = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{2x^4}{x^4(1 + x^2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} = 2.$$

Con S_2 $y = x^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{x^4 + x^8}{(x^2 + x^8)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{x^4(1 + x^4)}{x^4(1 + x^6)^2} = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1 + x^4}{(1 + x^6)^2} = 1$$

En consecuencia, como:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\ S_1]}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y) en\ S_2]}} f(x,y)\text{, el límite no existe.}$$

1.3.7. Definición de continuidad de una función de n variables

La función *f* de n variables es continua en un punto *A* de R^n, si y sólo si satisface las tres condiciones:

I. $f(A)\ existe.$
II. $\lim\limits_{P \to A} f(P)\ \ existe$.
III. $\lim\limits_{P \to A} f(P) = \ f(A)$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen para el punto *A*, entonces se dice que *f* es discontinua en *A*.

1.3.8. Definición de continuidad de una función de dos variables

La función de dos variables $z = f(x,y)$ es continua en un punto (x_0, y_0) de R^2, si y sólo si satisface las tres condiciones:

I. $f(x_0, y_0)\ \ existe.$
II. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ existe.$
III. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$

Si una función *f* de dos variables es discontinua en un punto (x_0, y_0), pero $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ existe,$ se dice que *f* tiene una discontinuidad removible o eliminable, en este caso debemos redefinir la función f de modo que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Si esta discontinuidad no es eliminable, se denomina discontinuidad esencial.

Ejemplos:

1. *Determinar si la función g es continua en* $(0,0)$ *si*

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución:
Lo que debemos hacer es verificar las condiciones.

I. $g(0,0)=0$ existe, se cumple esta condición.
II. Cuando $(x,y)\neq(0,0)$, $g(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, entonces debemos calcular el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Con S_1 $y=x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\lim_{x\to0}g(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Con S_2 $y=x^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\lim_{x\to0}g(x,x^2)=\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to0}\ \frac{x^3}{x^2(1+x^2)}=0.$$

En consecuencia, como:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y)en\ S_1]}}g(x,y)\neq\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ [(x,y)en\ S_2]}}g(x,y),$$ el límite no existe.

La condición no se cumple.

En conclusión, como no se cumple la condición dos, la función g es discontinua en el punto $(0,0)$, y la discontinuidad es esencial.

2. *Determinar si la función* $h(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *es continua en* $(0,0)$.

Solución:
Lo que debemos hacer es verificar las condiciones.

I. $h(0,0)=$ no está definida, por tanto, no cumple esta condición.

II. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$, encontrándose su valor en el ejemplo 3, por lo que cumple la condición.

En conclusión, como no se cumple la condición uno, pero si la dos, existe discontinuidad eliminable y debemos redefinir la función, de tal manera que se transforme en continua y quedaría así:

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. *Determinar los puntos de discontinuidad de la función* $z = ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución:
Los puntos de discontinuidad son aquellos puntos donde la función no existe, es decir es lo contrario del dominio.
Condición: $x^2+y^2=0 \quad \therefore \quad el\ punto\ de\ discontinuidad\ es\ (0,0)$ o el origen de coordenadas.

4. *Hallar los puntos de discontinuidad de la función* $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$.

Solución:
Condición: $1-x^2-y^2=0 \therefore x^2+y^2=1$. Entonces los puntos de discontinuidad están en la circunferencia $x^2+y^2=1$.

5. *Encontrar los puntos de discontinuidad de la función* $z = \frac{xy}{x+y}$.

Solución:
Condición: $x+y=0 \therefore y=-x$. Por lo que los puntos de discontinuidad están en la recta $y=-x$.

1.4. Derivadas parciales

Se llaman derivadas parciales, porque al aplicar el proceso de diferenciación a una función de *n* variables se lo hace por partes, es decir mientras una de ellas varía las otras permanecen constantes, transformándose así en la derivación de funciones de una sola variable, por lo que para realizar la operación podemos utilizar todas las reglas de diferenciación en una dimensión.

1.4.1. Definición de derivada parcial de una función de n variables

Sea $P(x_1, x_2, \ldots., x_n)$ un punto en R^n, y sea *f* una función de *n* variables $x_1, x_2, \ldots., x_n$. Entonces la derivada parcial de *f* con respecto a x_k es la función, denotada por $D_k f$, tal que su valor de función en cualquier punto *P* de su dominio de f está definida por:

$$D_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_n}$$

Si el límite existe.

En caso particular, si la función *f* es de tres variables *x, y* y *z*, entonces las derivadas parciales de *f* están definidas por:

$$D_1(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, \ z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, \ z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, \ z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Si la función *f* fuera de dos variables *x*, e *y,* entonces sus derivadas parciales estarían definidas por:

$$D_1(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$D_2(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Obviamente si los límites existen.

También existen otras formas de denotar matemáticamente estas derivadas parciales así, si la función es $z = f(x, y)$ tenemos:

Para la derivada parcial respecto a *x*.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = f_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y).$$

Para la derivada parcial respecto a *y*.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = f_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

De manera análoga se denota si la función es de tres o más variables. Vale aclarar que la notación de derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ no puede considerarse como un cociente de ∂z y ∂x puesto que ninguno de estos símbolos tiene significado por separado.

Ejemplos:

1. *Utilizando la definición de derivada parcial, hallar* $f'_x(x, y)$ *y* $f'_y(x, y)$ *de la función* $z = 2x^2 - 5xy + y^2$.

   Solución:

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x)y + y^2 - 2x^2 + 5xy - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5xy - 5\Delta xy + y^2 - 2x^2 + 5xy - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta xy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + \Delta x - 5y)}{\Delta x} = 4x - 5y.$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x^2 - 5x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - 2x^2 + 5xy - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x^2 - 5xy - 5x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - 2x^2 + 5xy - y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-5x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(-5x + 2y + \Delta y)}{\Delta y} = -5x + 2y.$$

2. *Por medio de la definición de derivada parcial, determinar* $f'_x(x, y)$ *y* $f'_y(x, y)$ *de la función* $z = sen(x^2 + y)$.

Solución:

$$f'_x(x, y) \quad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen[(x + \Delta x)^2 + y] - sen(x^2 + y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\left(\frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y - x^2 - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y + x^2 + y}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\left(\frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{2}\right)\cos\left(\frac{2x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2sen\left(\frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{2}\right)}{\frac{\Delta x(2x + \Delta x)\,2}{2}} * (2x + \Delta x) * \cos\left(\frac{2x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y}{2}\right)\right]$$

$$= 1 * 2x * \cos(x^2 + y) = 2x\cos\,(x^2 + y)\,.$$

$$f'_y(x, y) \quad = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen[x^2 + (y + \Delta y)] - sen(x^2 + y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\left(\frac{x^2 + y + \Delta y - x^2 - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x^2 + y + \Delta y + x^2 + y}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\cos\left(\frac{2x^2 + \Delta y + 2y}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{2sen\left(\frac{\Delta y}{2}\right)}{\frac{\Delta y * 2}{2}} * \cos\left(\frac{2x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y}{2}\right)\right]$$

$$= 1 * \cos(x^2 + y) = \cos\ (x^2 + y)\,.$$

3. Aplicando la definición de derivada parcial, determinar $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$ de la función $z = ln(x + y^2)$.

Solución:

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln[(x + \Delta x) + y^2] - ln(x + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} ln\left[\frac{x + \Delta x + y^2}{x + y^2}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} ln\left[\frac{x + \Delta x + y^2}{x + y^2}\right]^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$= ln \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{x + \Delta x + y^2}{x + y^2}\right]^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln e^{\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x + \Delta x + y^2}{x + y^2} - 1\right) * \frac{1}{\Delta x}}$$

$$= ln\, e^{\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x + \Delta x + y^2 - x - y^2}{x + y^2}\right) * \frac{1}{\Delta x}} = \ln e^{\frac{1}{x + y^2}} = \frac{1}{x + y^2}.$$

$$f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{ln[x + (y + \Delta y)^2] - ln(x + y^2)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} ln \left[\frac{x + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{x + y^2} \right] = \lim_{\Delta y \to 0} ln \left[\frac{x + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{x + y^2} \right]^{\frac{1}{\Delta y}}$$

$$= ln \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{x + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{x + y^2} \right]^{\frac{1}{\Delta y}} = \ln e^{\lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{x+y^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2}{x+y^2} - 1 \right) * \frac{1}{\Delta y}}$$

$$= ln\, e^{\lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{x+y^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2 - x - y^2}{x+y^2} \right) * \frac{1}{\Delta y}} = \ln e^{2y/x+y^2} = \frac{2y}{x + y^2}.$$

Como las derivadas parciales son funciones, es posible determinarlas en cualquier punto (x_0, y_0) de su dominio.

4. Encontrar el valor de las derivadas parciales del ejemplo 3, si $P_1(1,2);\ P_2(3,-2)\ y\ P_3(-1,3)$.

Solución:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2}.$$
$$f'_x(1,2) = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}.$$
$$f'_x(3,-2) = \frac{1}{3+4} = \frac{1}{7}.$$
$$f'_x(-1,3) = \frac{1}{-1+9} = \frac{1}{8}.$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{x+y^2}.$$
$$f'_y(1,2) = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}.$$
$$f'_y(3,-2) = \frac{-4}{3+4} = -\frac{4}{7}.$$
$$f'_y(x,y) = \frac{6}{-1+9} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

5. Mediante las reglas de diferenciación, encontrar todas las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $z = arc\ tg\ \frac{y}{x}.$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}*\frac{-y}{x^2}=\frac{-x^2y}{x^2(x^2+y^2)}=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}*\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x(x^2+y^2)}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

b) $z = arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}*\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x*\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}*\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}}*\frac{-x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}*\frac{-x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{-x}{x^2+y^2}.$$

c) $z = ln\sqrt{x^2+y^2}.$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}*\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}*\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

d) $z = x^y.$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\,x^{\,y-1}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{\,y}*ln|x|=ln|x|*\,x^{\,y}.$$

e) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z\ \left(\boldsymbol{\frac{x}{y}}\right)^{\boldsymbol{z-1}} * \frac{1}{y} = \frac{z}{y} * \left(\boldsymbol{\frac{x}{y}}\right)^{\boldsymbol{z-1}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z\ \left(\boldsymbol{\frac{x}{y}}\right)^{\boldsymbol{z-1}} * \frac{-x}{y^2} = -\ \frac{x}{y^2\ z} * \left(\boldsymbol{\frac{x}{y}}\right)^{\boldsymbol{z-1}}\ .$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\boldsymbol{\frac{x}{y}}\right)^{\boldsymbol{z}} * ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\left(\frac{x}{y}\right) * \left(\boldsymbol{\frac{x}{y}}\right)^{\boldsymbol{z}}.$$

f) $u = x^{y^z}$.

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{\,z} * x^{\,y^{\,z}-1}\ .$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^{\,z}} * z * y^{z-1} * ln(x) = z * y^{z-1} * x^{y^{\,z}} * ln(x).$$

$$u = x^{y^{\,z}} \to ln(u) = y^z\ ln(x) \to \frac{1}{u} * \frac{\partial u}{\partial z} = y^z * \ln\ (y) * ln(x) \to$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u * y^z * \ln\ (y) * ln(x) = x^{y^{\,z}} * y^z * \ln\ (y) * ln(x).$$

g) *Demostrar, que* $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, *si* $z = ln(x^2 + xy + y^2)$.

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2+xy+y^2} * (2x + y) = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}\ .$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2+xy+y^2} * (x + 2y) = \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$. Reemplazando en la ecuación tenemos.

$$x\left(\frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}\right) + y\left(\frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}\right) = 2\ \to\ \frac{2x^2 + xy + xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2 \to$$

$$\frac{2(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = 2$$

Por lo que queda demostrado.

1.4.2. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

La interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables, es semejante a la de una función de una sola variable.

El gráfico de una función *f* de dos variables es una superficie, que tiene como ecuación $z = f(x, y)$. Si *y* se considera como constante es decir $y = y_0$, entonces $z = f(x, y)$ es una ecuación de la traza de esta superficie en el plano $y = y_0$. La curva puede representarse mediante las dos ecuaciones

$$y = y_0 \qquad\qquad y \qquad\qquad z = f(x, y)$$

Debido a que la curva es la intersección de estas dos superficies. Entonces la derivada parcial respecto a *x* es la pendiente de la recta tangente a la curva representada por las ecuaciones anteriores en el punto $P_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ del plano $y = y_0$ (Fig. 1.19).

De manera análoga, la derivada parcial respecto a *y* representa la pendiente de la recta tangente a la curva que tiene las ecuaciones

$$x = x_0 \qquad\qquad y \qquad\qquad z = f(x, y)$$

En el punto P_0 del plano $x = x_0$ (Fig. 1.20).

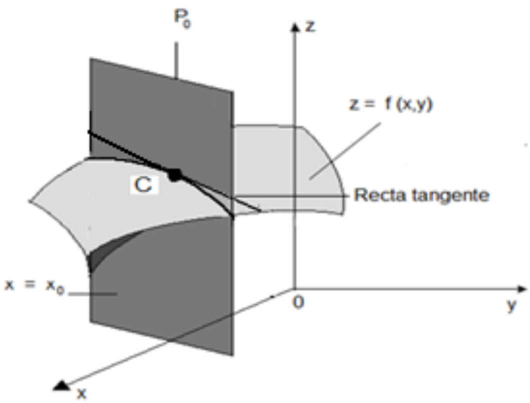


Figura 1.19

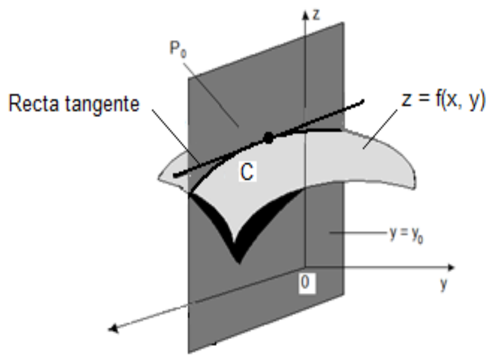


Figura 1.20

Ejemplo:

1. *Determine la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie* $z = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$, *con el plano y = 2 en el punto* $(2,2,\sqrt{3})$*(Fig. 1.21).*

Solución:
Hallamos la derivada de la función respecto a *x*.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24-x^2-2y^2}}.$$

Calculamos está derivada en el punto $(2,2,\sqrt{3})$.

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(2,2,\sqrt{3})} = \frac{-2}{2\sqrt{24-4-8}} = -\frac{1}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \textit{que es la pendiente de la recta.}$$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$$

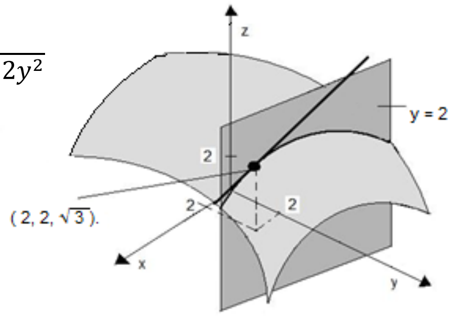


Figura 1.21

1.5. Diferenciabilidad y diferencial total

Para poder definir la diferenciabilidad de funciones de más de una variable, es necesario hacerle por medio de una ecuación que involucra el incremento de una función. Por lo que a continuación vamos primero a ver una representación del incremento de una función de una variable, que nos permitirá entender con mayor facilidad los conceptos que presentaremos más adelante.

Recordando que si *f* es una función diferenciable de *x* y *y = f(x),* entonces

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Donde Δx y Δy son los incrementos de *x* y *y*, y $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, cuando $|\Delta x|$ es pequeño y si $\Delta x \neq 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ difiere de f´(x) por un número pequeño que depende de Δx, el cual se denota por ϵ. Así.

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \quad si \quad \Delta x \neq 0$$

Donde ϵ es una función de Δx. De esta ecuación se obtiene $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x$, donde ϵ es una función de Δx y $\epsilon \to 0 \ conforme \ \Delta x \to 0$.

De lo indicado anteriormente se deduce que, si la función *f* es diferenciable en x_0, entonces el incremento de *f* en x_0, denotado por $\Delta f(x_0)$, está determinado por:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \quad donde \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0.$$

1.5.1. Definición de incremento de una función de n variables

Si *f* es una función de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, y $\bar{P}$ es el punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots., \bar{x}_3)$, entonces el incremento de *f* en $\bar{P}$ está definido por:

$$\Delta f(\bar{P}) = f(\bar{x}_1 + \Delta\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \Delta\bar{x}_2, \dots., \bar{x}_n + \Delta\bar{x}_n) - f(\bar{P} \quad)$$

1.5.2. Definición de función diferenciable de n variables

Si *f* es una función de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, y el incremento de *f* en $\bar{P}$ puede escribirse como

$$\Delta f(\bar{P}) = D_1 f(\bar{P})\Delta x_1 + D_2 f(\bar{P})\Delta x_2 + \cdots + D_n f(\bar{P})\Delta x_n + \epsilon_1 \Delta x_1 +$$

$$\epsilon_2 \Delta x_2 + \cdots + \epsilon_n \Delta x_n$$

Donde $\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0, \dots., \epsilon_n \to 0$, conforme

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_3) \to (0, 0, \dots, 0).$$

Entonces se dice que f es diferenciable en $\bar{P}$.

1.5.3. Definición de la diferencial total de una función de n variables

Si *f* es una función de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, y f es diferenciable en *P*, entonces la diferencial total de *f* es la función *df* que tiene valores de función determinados por:

$$df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = D_1 f(P)\Delta x_1 + D_2 f(P)\Delta x_2 + \cdots + D_n f(P)\Delta x_{n.}$$

Por definición, las diferenciales de las variables independientes, coinciden con sus incrementos es decir, $dx_i = \Delta x_i$ además si se considera $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y usamos la notación $\frac{\partial w}{\partial x_i}$, la diferencial total podemos expresarle como:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}dx_{n.}$$

También podemos definir ala diferencial total de una función *f*, como la parte principal del incremento total (formula (2)), lineal respecto a los incrementos de las variables $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, existiendo una diferencia entre los dos, de un infinitésimo de orden superior a $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$.

Si la función es de dos variables independientes tenemos:

1.5.4. Definición de incremento de una función de dos variables

Si *f* es una función de las variables *x* y *y*, entonces el incremento de *f* en el punto (x_0, y_0), denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, está definido por:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

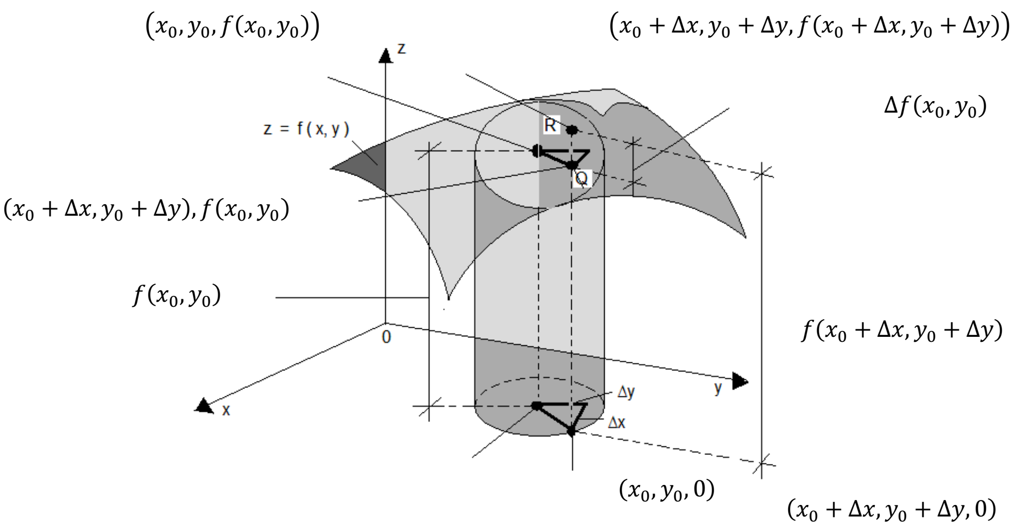


Figura 1.22

1.5.5. Definición de función diferenciable de dos variables

Si *f* es una función de las variables *x* y *y*, entonces el incremento de *f* en el punto (x_0, y_0), puede escribirse como

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1(x_0, y_0)\Delta x + D_2(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_1 \Delta y$$

Donde ϵ_1 y ϵ_2 son funciones de Δx y Δy, tales que $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Según esta definición, podemos concluir que la condición suficiente para que una función sea diferenciable en punto determinado, es que la función sea continua en el mismo, y la condición necesaria es que las derivadas parciales estén definidas en dicho punto.

1.5.6. Definición de la diferencial total de una función de dos variables

Si *f* es una función de las variables *x* y *y*, y si *f* es diferenciable en (x, y), entonces la diferencial total de *f* es la función *df* que tiene valores de función determinado por

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = D_1 f(x, y)\Delta x + D_2 f(x, y)\Delta y.$$

Si la función es $z = f(x, y)$, además hacemos $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$ según definiciones y también utilizando la notación $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para notar las derivadas parciales, la diferencial total podemos expresarle de la siguiente manera

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

De una manera análoga se puede definir todos estos conceptos para una función de 3 variables así si $u = f(x, y, z)$, la diferencial total se determina por la fórmula.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Como se puede observar en las definiciones de incremento total y diferencial total, la diferencia de los dos es muy pequeña, por lo que es suficiente en los ejemplos de aplicación encontrar la diferencial total en vez del incremento total, sin temor a encontrar valores inadecuados.

Ejemplos:

1. *Para la función* $f(x,y) = x^2y$ *, hallar el incremento total y la diferencial total en el punto* $(1,2)$*; compararlos entre sí, sí:*

a) $\Delta x = 1,\ \Delta y = 2;$ *b*) $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2.$

Solución:

a. Encontramos el incremento total.

$$\Delta f(x,y) = (x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - x^2y = (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)(y+\Delta y) - x^2y$$
$$\Delta f(x,y) = x^2y + x^2\Delta y + 2xy\Delta x + 2x\Delta x\Delta y + y(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\Delta y - x^2y$$
$$\Delta f(x,y) = (2xy)\Delta x + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + y(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\Delta y.$$

Para los valores $(1,2);\ \Delta x = 1,\ \Delta y = 2$ tenemos:

$$\Delta f(1,2) = 2*1*2*1 + 1*2 + 2*1*1*2 + 2*1 + 1*2$$
$$\Delta f(1,2) = 4 + 2 + 4 + 2 + 2 = 14.$$

Para los valores $(1,2);\ \Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2$ tenemos:

$$\Delta f(1,2) = 4*0{,}1 + 1*0{,}2 + 2*0{,}1*0{,}2 + 2(0{,}1)^2 + (0{,}1)^2*0{,}2$$
$$\Delta f(1,2) = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}04 + 0{,}02 + 0{,}002 = 0{,}662.$$

b. Hallamos la diferencial total.

$$df(x,y) = 2\,x\,y\,dx + x^2dy$$

Para los valores $(1,2);\ \Delta x = dx = 1;\ \ \Delta y = dy = 2.$

$$df(1,2) = 2*1*2*1 + 1*2 = 6.$$

$$\Delta f - df = 14 - 6 = 8.$$

Para los valores $(1,2)$; $\Delta x = dx = 0{,}1$, $\Delta y = dy = 0{,}2$ tenemos:

$$df(1,2) = 2 * 1 * 2 * 0{,}1 + 1 * 0{,}2 = 0{,}44 + 0{,}2 = 0{,}6.$$

$$\Delta f - df = 0{,}662 - 0{,}6 = 0{,}062.$$

En conclusión, podríamos decir que mientras más altos son los incrementos, mayor será la diferencia entre el incremento y la diferencial total.

2. *Hallar los diferenciales totales en los siguientes ejemplos.*

a) $z = sen^2 x + cos^2 y.$

$$dz = 2senx \cos x\, dx - 2\cos y\, sen\, y\, dy \ \therefore$$

$$dz = sen\, 2x\, dx - sen\, 2y\, dy$$

b) $z = y\, x^y.$

$$dz = y^2\, x^{y-1}\, dx + (y\, x^y\, ln|x| + x^y)dy \ \therefore$$

$$dz = x^y \left[\frac{y^2}{x}\, dx + (yln|x| + 1)dy\right].$$

c) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dz \ \therefore$$

$$du = \frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

d) $u = \left(x\, y + \frac{x}{y}\right)^z.$

$$du = z\left(x\, y + \frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(y + \frac{1}{y}\right)dx + z\left(x\, y + \frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(x + \frac{-x}{y^2}\right)dy + \left(x\, y + \frac{x}{y}\right)^z \ln\left(x\, y + \frac{x}{y}\right)dz$$

$$du = \left(x\,y + \frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[\frac{y^2+1}{y}\;zdx + \frac{x(y^2-1)}{y^2}\;zdy + \left(xy + \frac{x}{y}\right)ln\left(x\,y + \frac{x}{y}\right)dz\right].$$

Ejemplos de aplicación de la diferencial total:

1. *La altura de un cono es $H = 45\ cm$, el radio de su base $R = 15\ cm$. ¿Como variará el volumen de dicho cono si H disminuye 5 mm y R aumenta 2 mm?*

Solución:

Como sabemos la diferencial total es una razón de cambio, cualquiera sea la dependencia funcional. Por lo que en el ejemplo debemos encontrar el diferencial total y evaluarlo con los datos, ese valor es la solución.

Datos:
$H = 45\ cm.$
$R = 15\ cm.$
$dR = 2\ mm = 0{,}2\ cm.$
$dH = -5\ mm = -0{,}5\ cm.$

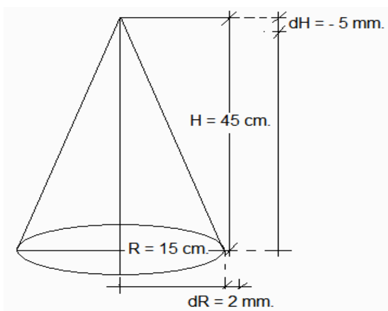


Figura 1.23

$Fórmula\ del\ volumen \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$$dV = \frac{1}{3}\pi(2RH\ dR + R^2\ dH).$$

El valor con los datos es:

$$
\begin{aligned}
dV &= \frac{1}{3}\pi\left(2 * 15 * 45 * 0{,}2 + 15^2 * (-0{,}5)\right)\\
&= \frac{\pi}{3}(270 - 112{,}5)\\
&= 52{,}5\pi \approx 164{,}93\ cm^3.
\end{aligned}
$$

2. *Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 15 cm, 10 cm, y 8 cm, está hecha de madera contrachapada de 3 mm de espesor. Determinar el área aproximada del material que se gastó.*

Solución:

Datos:
$x = 15\ cm.$ $\quad dx = 2 * 3\ mm = 6\ mm = 0{,}6\ cm.$
$y = 10\ cm.$ $\quad dy = 0{,}6\ cm.$
$z = 8\ cm.$ $\quad dz = 0{,}6\ cm.$

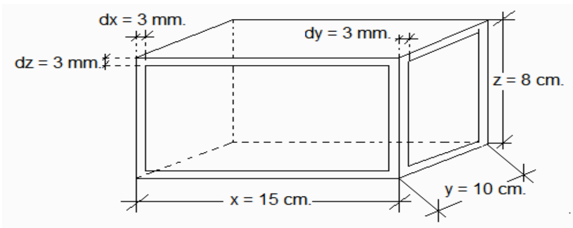


Figura 1.24

Formula de área $\qquad A = 2xy + 2xz + 2yz$

$$dA = (2y + 2z)dx + (2x + 2z)dy + (2x + 2y)dz.$$

El valor con los datos es:

$$dA = (2 * 10 + 2 * 8) * 0{,}6 + (2 * 15 + 2 * 8) * 0{,}6 + (2 * 15 + 2 * 10) * 0{,}6.$$
$$dA = 36 * 0{,}6 + 46 * 0{,}6 + 50 * 0{,}6 = 21{,}6 + 27{,}6 + 30 = 79\ cm^2.$$

3. *Calcular aproximadamente* $1{,}03^{3{,}02}$.

Solución:

Definimos la función como $z = x^y$. El número que se busca puede considerarse como el valor incrementado de esta función cuando $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}03 \;\; y \;\; \Delta y = 0{,}02$. El valor inicial de la función es $z = 1^3 = 1$.

$$\Delta z \approx dz = y\, x^{y-1}\Delta x + x^y ln(x)\Delta y$$
$$= 3 * (1)^{3-1} * 0{,}03 + (1)^3 * ln(1) * 0{,}02 = 0{,}09.$$

De donde:
$1{,}03^{3{,}02} \approx 1 + 0.09 = 1{,}09.$
$Utilizando\ la\ calculadora \quad 1{,}03^{3{,}02} \approx 1{,}09337$.

4. Calcular aproximadamente $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}12)^2}$.

Solución:

Definimos la función como $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. El número que se busca puede considerarse como el valor incrementado de esta función cuando x = 4, y = 3, $\Delta x = 0{,}05 \;\; y \;\; \Delta y = 0{,}12$. El valor inicial de la función es $z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

$\Delta z \approx dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y = \left(\frac{4+3}{5}\right) * (0{,}05 + 0{,}12) = 0{,}238.$
De donde:

$$\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}12)^2} \approx 5 + 0.238 = 5{,}238.$$

$Utilizando\ la\ calculadora \quad \sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}12)^2} \approx 5{,}11243$.

1.6. Derivación de funciones compuestas

Llamada también regla de la cadena, recordando con la notación de Leibniz la derivación de una función compuesta para una función de una variable tenemos: Si y es una función de u y $\frac{dy}{dx}$ existe, y si u es una función de x y $\frac{dy}{dx}$ existe, entonces y es una función de x y $\frac{dy}{dx}$ existe y está definida por: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$

1.6.1. Caso de una sola variable independiente

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de los argumentos *x* e *y*, que son, a su vez, funciones diferenciables de una variable *t*: $x = f(t)$, $y = g(t)$, la derivada de la función compuesta $z = f[f(t), g(t)]$ se puede calcular por la formula:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Esta fórmula podemos encontrarla utilizando el diagrama del árbol, este procedimiento es importante en caso de que no se pueda memorizar la expresión, lo que debe saber es como realizar el mismo.

Pasos a seguir:

- Para las primeras ramas, debemos tomar en cuenta el número de variables independientes que tiene la función. En este caso *z* es función de *x* e *y*, por lo que tenemos que hacer dos ramas desde *z*, una hacia *x* y otra hacia *y* en las que ubicamos las respectivas derivadas parciales.
- A su vez, para formar las segundas ramas, tenemos que tener en cuenta el número de variables de las que dependan *x* e *y*, en este caso tanto *x* como *y* dependen de una sola variable que es *t*, por lo que trazamos ramas desde estas a *t*, y colocamos las derivadas totales respectivas, por tratarse de funciones de una sola variable.

- Con el fin de obtener la ecuación para $\frac{dz}{dt}$, se consideran los caminos a lo largo de las ramas de *z* a *t*. Se tienen dos de tales caminos, cada uno con un par de ramas. Sume los productos de la derivada parcial por la total, asociadas con las ramas de cada camino.

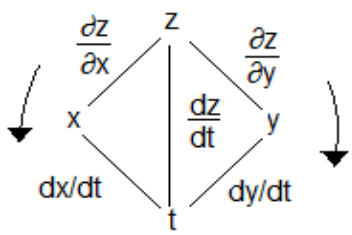


Figura 1.25

1.6.2. Caso de dos variables independientes

Si u es una función diferenciable de x e y, definida por $u = f(x,y)$, donde $x = g(t,r)$ y $y = h(t,r)$ y todas las derivadas parciales existen, entonces las derivadas de la función compuesta$u = f[g(t,r), h(t,r)]$ se pueden calcular por medio de las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r}$$

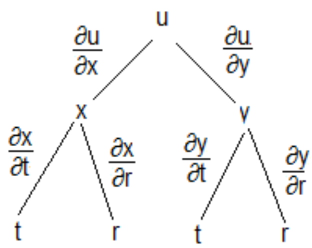


Figura 1.26

Siguiendo los pasos del párrafo anterior se hace el diagrama del árbol, y luego obtenemos las expresiones para determinar $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial r}$ (Fig. 1.26).

De manera análoga se determinan para una función de tres variables.
Caso de una variable:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

Caso de dos variables:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial t}; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial r}$$

Ejemplos:

En los siguientes ejemplos, calcule las derivadas indicadas por medio de dos métodos: a) Utilice la regla de la cadena; b) Formando primero la función compuesta.

1. *Hallar* $\frac{du}{dt}$, *si* $u = \ln sen\, \frac{x}{\sqrt{y}}$, *donde* $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.

Solución:

a) Utilizando la regla de la cadena.

Encontramos las derivadas parciales y totales, ponemos todas en función de *t* y luego reemplazamos en la expresión (1).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{sen\frac{x}{\sqrt{y}}} * \cos\frac{x}{\sqrt{y}} * \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\cot\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}\cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{sen\frac{x}{\sqrt{y}}} * \cos\frac{x}{\sqrt{y}} * \frac{-x}{2y^{3/2}} = \frac{-x}{2y^{3/2}}\cot\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{-3t^2}{2(t^2+1)^{3/4}}\cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}.$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t;\quad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

$Reemplazando$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}\cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}} * 6t + \frac{-3t^2}{2(t^2+1)^{3/4}}\cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}} * \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

$$\frac{du}{dt} = \cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}} * \left(\frac{6t}{(t^2+1)^{1/4}} - \frac{3t^3}{2\,(t^2+1)^{5/4}}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = \cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}} * \left(\frac{3t(3t^2+4)}{2\,(t^2+1)^{5/4}}\right).$$

b) Formando primero la función compuesta.

Formamos la función compuesta y luego derivamos.

$$u = \ln sen\,\frac{x}{\sqrt{y}} \rightarrow u(t) = \ln sen\,\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}} = \ln sen\,\frac{3t^2}{(t^2+1)^{1/4}}.$$

$$\frac{du}{dt}=\cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}*\frac{(t^2+1)^{1/4}*6t-3t^2*\frac{t}{2(t^2+1)^{3/4}}}{\left((t^2+1)^{1/4}\right)^2}=\cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}*\frac{12t\,(t^2+1)-3t^3}{2\,(t^2+1)^{5/4}}$$

.

$$\frac{du}{dt}=\cot\frac{3t^2}{\sqrt{\sqrt{t^2+1}}}*\frac{3t(3t^2+4)}{2\,(t^2+1)^{5/4}}.$$

2. *Hallar* $\frac{du}{dt}$, *si* $u=x\,y\,z$ *donde* $x=t^2+1,\quad y=ln\,t;\quad z=tg\,t.$

Solución:

a) Utilizando la regla de la cadena.

Encontramos las derivadas parciales y totales, ponemos todas en función de *t* y luego reemplazamos en la expresión (3).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\,z=\ln t*tg\,t.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\,z=(t^2+1)*tg\,t.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x\,y=(t^2+1)*ln\,t.$$

$$\frac{dx}{dt}=2t;\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t};\quad \frac{dz}{dt}=sec^2t\,.$$

$Reemplazando$:

$$\frac{du}{dt}=\ln t*tg\,t*2t+(t^2+1)*tg\,t*\frac{1}{t}+(t^2+1)*ln\,t*sec^2t\,.$$

$$\frac{du}{dt}=(t^2+1)\left[\frac{tg\,t}{t}+\ln t*sec^2t\right]+\ln t*tg\,t*2t.$$

b) Formando primero la función compuesta.

Formamos la función compuesta y luego derivamos.

$$u=x\,y\,z\ \rightarrow u(t)=(t^2+1)*\ln t*tg\,t.$$

$$\frac{du}{dt}=(t^2+1)\left[\frac{tg\,t}{t}+\ln t*sec^2t\right]+\ln t*tg\,t*2t.$$

3. *Hallar* $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s},$ *si* $u = x^2 - y^2$ *donde* $x = 3r - s \quad y = r + 2s.$

Solución:

a) Utilizando la regla de la cadena.
Encontramos las derivadas parciales, ponemos todas en función de *r* y *s* y luego reemplazamos en las expresiones (4).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 2(3r - s).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -2(r + 2s).$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 3; \quad \frac{\partial x}{\partial s} = -1; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1; \quad .\frac{\partial y}{\partial s} = 2.$$

$Reemplazando$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2(3r - s) * 3 - 2(r + 2s) * 1 = 16r - 8s.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2(3r - s) * (-1) - 2(r + 2s) * 2 = -10s - 6s.$$

b) Formando primero la función compuesta.
Formamos la función compuesta y luego derivamos.

$$u = x^2 - y^2 \rightarrow u(r, s) = (3r - s)^2 - (r + 2s)^2.$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2(3r - s) * 3 - 2(r + 2s) * 1 = 16r - 8s.$$
$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2(3r - s) * (-1) - 2(r + 2s) * 2 = -10s - 6s.$$

4. *Hallar* $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s},$ *si* $u = x^2 y\, z;$ *donde* $x = \frac{r}{s}; \; y = re^s; \quad z = re^{-s}.$

Solución:
a) Utilizando la regla de la cadena.
Encontramos las derivadas parciales, ponemos todas en función de t y luego reemplazamos en la expresión (2).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\, xy\, z = 2 * \frac{r}{s} * re^s * re^{-s} = 2 * \frac{r^3}{s}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\, z = \left(\frac{r}{s}\right)^2 * re^{-s} = \frac{r^3 * \ e^{-s}}{s^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 \ \ y = \left(\frac{r}{s}\right)^2 * re^{s} = \frac{r^3 * e^{s}}{s^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{s};\ \ \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{-r}{s^2};\ \ \frac{\partial y}{\partial r} = e^{s};\ \ .\frac{\partial y}{\partial s} = re^{s};\ \ \ \frac{\partial z}{\partial r} = e^{-s};\ \ \frac{\partial z}{\partial s} = -re^{-s}.$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2 * \frac{r^3}{s} * \frac{1}{s} + \frac{r^3 * e^{-s}}{s^2} * e^{s} + \frac{r^3 * e^{s}}{s^2} * e^{-s} = \frac{4r^3}{s^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2 * \frac{r^3}{s} * \frac{-r}{s^2} + \frac{r^3 * e^{-s}}{s^2} * r\, e^{s} - \frac{r^3 * e^{s}}{s^2} * r\, e^{-s} = \frac{-2r^4}{s^3}.$$

b) Formando primero la función compuesta.
Formamos la función compuesta y luego derivamos.

$$u = x^2 y\, z \ \ \rightarrow u(r,s) = \left(\frac{r}{s}\right)^2 * r\, e^{s} * r\, e^{-s} = \frac{r^4}{s^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4\, r^3}{s^2};\qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{-2\, r^4}{s^3}.$$

5. *Encontrar* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dz}{dx}$ *si* $z = x^y$, *donde* $y = g(x)$.

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\, z^{y-1}.$$

$$z = x^{g(x)} \ \rightarrow ln(z) = g(x)\ ln(x) \ \rightarrow \frac{1}{z} * \frac{dz}{dx} = g'(x)ln(x) + \frac{g(x)}{x}.$$

$$\frac{dz}{dx} = z\left(g'(x)ln(x) + \frac{g(x)}{x}\right) = x^{g(x)}\left(g'(x)ln(x) + \frac{g(x)}{x}\right).$$

6. *Determinar* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *si* $z = f(u,v)$ *donde* $u = x^2 - y^2$; $v = e^{xy}$

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(u,v) * 2x + f'_y(u,v) * ye^{xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_x(u,v) * -2\,y + f'_y(u,v) * xe^{xy}.$$

1.7. Derivadas de funciones implícitas

1.7.1. Caso de una variable independiente

Si *f* es una función diferenciable de la variable *x*, tal que y = *f (x)* y *f* está definida implícitamente por la ecuación $F(x,y) = 0$, y si F es diferenciable, y además $F'_y(x,y) \neq 0$ entonces la derivada $\frac{dy}{dx}$ se calcula por la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad (5)$$

1.7.2. Caso de dos variables independientes

Si f es una función diferenciable de las variable *x e y*, tal que z = *f (x,y)* y *f* está definida implícitamente por la ecuación $F(x,y,z) = 0$, y si F es diferenciable, y además $F'_z(x,y,z) \neq 0$ entonces las derivada parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ se calcula por las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \qquad (6)$$

Otro procedimiento para hallar las derivadas de la función z es el siguiente: diferenciando la ecuación $F(x,y,z) = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0$$

De donde podemos determinar *dz*, y por consiguiente $\frac{\partial y}{\partial x}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Ejemplos:

1. *Hallar* $\frac{dy}{dx}$ *y* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *de la función implícita* $x^3 + y^3 = 8xy$.

Solución:
Formamos la función *F* y encontramos sus derivadas parciales.

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 8xy$$
$$F'_x(x,y) = 3x^2 - 8y$$
$$F'_y(x,y) = 3y^2 - 8x.$$

Utilizando la fórmula (5).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2-8y}{3y^2-8x}.$$

Para encontrar la segunda derivada, procedemos normalmente como en el cálculo de una variable.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{(3y^2-8x)\left(6x-8\frac{dy}{dx}\right)-(3x^2-8y)\left(6y\frac{dy}{dx}-8\right)}{(3y^2-8x)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{(3y^2-8x)\left(6x-8\left(-\frac{3x^2-8y}{3y^2-8x}\right)\right)-(3x^2-8y)\left(6y\left(-\frac{3x^2-8y}{3y^2-8x}\right)-8\right)}{(3y^2-8x)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{\frac{(3y^2-8x)\left(6x(3y^2-8x)-8(3x^2-8y)\right)}{(3y^2-8x)} - \frac{(3x^2-8y)\left(6y(-3x^2+8y)-8(3y^2-8x)\right)}{(3y^2-8x)}}{(3y^2-8x)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{(3y^2-8x)\left(6x(3y^2-8x)-8(3x^2-8y)\right) - (3x^2-8y)\left(6y(-3x^2+8y)-8(3y^2-8x)\right)}{(3y^2-8x)^2(3y^2-8x)}\right).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{384(x^3+y^3)+(90x^4y+432x^2y^2-54xy^4)}{(3y^2-8x)^3}\right).$$

2. Determinar $\frac{dy}{dx}$ si *y* está determinada por la función $ln\sqrt{x^2+y^2} = a\,arctg\,\frac{y}{x}$.

Solución:

$$F(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2} - a\ arc\ tg\ \frac{y}{x}.$$

$$F'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} * \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - a * \frac{x^2}{x^2+y^2} * -\frac{y}{x^2} = \frac{x+a\ y}{x^2+y^2}.$$

$$F'_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} * \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - a * \frac{x^2}{x^2+y^2} * \frac{1}{x} = \frac{y-a\ x}{x^2+y^2}.$$

Utilizando la fórmula (5).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{x+a\ y}{x^2+y^2}}{\frac{y-a\ x}{x^2+y^2}} \ \rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{x+a\ y}{ax-y}.$$

3. *Hallar* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *si la función z de las variables x e y se da por la ecuación:*

$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1.$

Solución:

1er procedimiento, utilizando definición 1.7.2.

$$F(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1$$
$$F'_x(x,y,z) = \cos y - z\ sen\ x$$
$$F'_y(x,y,z) = -x\ sen\ y + \cos z$$
$$F'_z(x,y,z) = -y\ sen\ z + \cos x.$$

Utilizando la fórmula (6) tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y - z\ sen\ x}{-y\ sen\ z + \cos x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-x\ sen\ y + \cos z}{-y\ sen\ z + \cos x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos y - z\ sen\ x}{y\ sen\ z - \cos x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\ sen\ y - \cos z}{\cos x - y\ sen\ z}.$$

2do procedimiento. Diferenciamos ambos lados de la ecuación dada.

$$-x\ sen\ y\ dy + \cos y\ dx - y\ sen\ z\ dz + \cos z\ dy - z\ sen\ x\ dx + \cos x\ dz = 0$$

$$(\cos x - y\, sen\, z)dz + (\cos y - z\, sen\, x)dx + (\cos z - x\, sen\, y)dy = 0$$

$$dz = -\frac{(\cos y - z\, sen\, x)dx + (\cos z\, x - sen\, y)dy}{\cos x - y\, sen\, z}.$$

Comparándole con la fórmula de la diferencial total, podemos, vemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos y - z\, sen\, x}{y\, sen\, z - \cos x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\, sen\, y - \cos z}{\cos x - y\, sen\, z}.$$

4. La función z viene dado por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para el sistema de valores x = -1, y = 0 y z = 1.

Solución:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy$$
$$F'_x(x,y,z) = 2x - y$$
$$F'_y(x,y,z) = 2y - x$$
$$F'_z(x,y,z) = -2z$$

Utilizando la fórmula (6) tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - y}{-2z} = \frac{2x - y}{2z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - x}{-2z} = \frac{2y - x}{2z}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,0,1)} = \frac{-2}{2} = -1; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,0,1)} = \frac{1}{2}.$$

1.8. Derivadas direccionales y gradientes

A continuación, vamos a generalizar la definición de derivada parcial, con el fin de obtener una tasa de variación respecto a cualquier dirección, este procedimiento se conoce como la derivada direccional.

1.8.1. Definición de derivada direccional de una función de dos variables

Sea f una función de dos variables x e y. Si $\boldsymbol{U}$ es el vector unitario $cos\,\theta i+sen\,\theta j$, entonces la derivada direccional de $\boldsymbol{U}$, denotada por $D_U f$, está definida por:

$$D_U f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\,cos\,\theta,y+h\,sen\,\theta)-f(x,y)}{h}$$

Si este límite existe (Fig. 1.27).

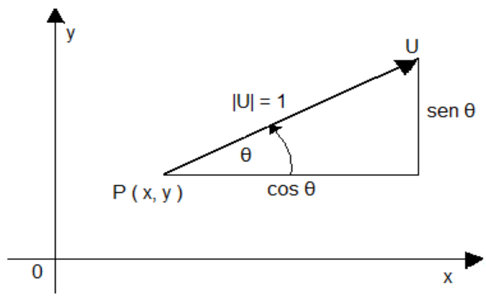


Figura 1.27

Observando la definición podemos concluir que la derivada direccional, es como un conjunto universo de las derivadas parciales. Así si $\mathbf{U}=\mathbf{i}$, el $\cos\theta=1\ y\ sen\,\theta=0$, si reemplazamos en la definición 1.7.1 tenemos:

$$D_i f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h*1,y+h*0)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}.$$

Que es la derivada parcial de f respecto a x.

$\mathbf{U}=\mathbf{j}$, el $\cos\theta=0\ y\ sen\,\theta=1$, si reemplazamos en la definición 1.7.1 tenemos:

$$D_j f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h*0,y+h*1)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Que no es que la derivada parcial de f respecto a y.

De este modo, f'_x, f'_y son casos especiales de la derivada direccional en las direcciones de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$, respectivamente.

Si la función f es una función diferenciable en x e y, y $U = cos\,\theta i + sen\,\theta j$, entonces la derivada direccional se puede calcular por medio de la fórmula:

$$D_u f(x, y) = f'_x(x, y)\cos\theta + f'_y(x, y)\,sen\,\theta \tag{7}$$

De acuerdo con la ecuación (6), podemos ver que a la derivada direccional le podemos expresar como producto punto de dos vectores, un vector que contenga las derivadas parciales y el otro el vector unitario U así:

$$f'_x(x, y)\cos\theta + f'_y(x, y)\,sen\,\theta = \langle f'_x(x, y); f'_y(x, y)\rangle . \langle \cos\theta, sen\,\theta\rangle \;\therefore$$

$$D_u f(x, y) = \langle f'_x(x, y); f'_y(x, y)\rangle . \langle \cos\theta, sen\,\theta\rangle .$$

El vector que contiene las derivadas parciales es muy importante, se denomina vector gradiente o gradiente de la función f, y no es más que el vector, cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son las correspondientes derivadas parciales de dicha función, se denota como ∇f, y se lee como “del f”, en ocasiones también se emplea la abreviación *grad f.*

1.8.2. Definición del gradiente de una función de dos variables

Si *f* es una función de dos variables *x* e *y*, y f'_x f'_y existen, entonces el gradiente de *f*, denotado por ∇f, está definido por:

$$\nabla f(x, y) = f'_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + f'_y(x, y)\,\boldsymbol{j}.$$

Como el gradiente también es una función, podemos evaluarle en cualquier punto (x_0, y_0) y luego proceder a representarle en el plano “xy”, su punto inicial será el punto (x_0, y_0).

De la definición 1.7.2, la ecuación (7) se puede escribir como:

$$D_u f(x, y) = \boldsymbol{U} \,.\, \boldsymbol{\nabla f(x, y)} \tag{8}$$

Esta fórmula es la más conveniente, al momento de calcular la derivada direccional.

Otros conceptos importantes podemos determinar, partiendo de la definición de ángulo entre vectores.

Si tenemos el punto (x_0, y_0), y el ángulo entre el vector unitario **U** y el vector gradiente $\boldsymbol{\nabla f}$ es α en radianes, el ángulo entre ellos se calcula por:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{U}\,.\,\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})}{\|\boldsymbol{U}\|\|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|} \rightarrow \boldsymbol{U}\,.\,\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = \|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|.\cos\,\alpha$$

Como $\boldsymbol{U}\,.\,\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = D_u f(x, y)$ *tenemos que*:

$D_u f(x, y) = \|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|.\cos\,\alpha$ *de aqui*:

Si $\alpha = 0$, el vector **U** y $\boldsymbol{\nabla f}$ tiene la misma dirección entonces:

$$D_u f(x, y) = \|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|.\cos\,0 \rightarrow D_u f(x, y) = \|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|.$$

En palabras, la derivada direccional es igual al módulo del gradiente y será el valor máximo, o la máxima tasa de variación de *f* que se obtenga en el punto (x_0, y_0).
Si $\alpha = \pi$, el vector **U** y $\boldsymbol{\nabla f}$ tiene direcciones opuestas entonces:

$$D_u f(x, y) = \|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|.\cos\,\pi \rightarrow D_u f(x, y) = -\|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|.$$

En este caso la derivada direccional es igual a menos el valor absoluto del gradiente, el valor es el mínimo o también la tasa de variación minina de f que se obtenga en el punto (x_0, y_0).

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, el vector **U** y $\boldsymbol{\nabla f}$ son perpendiculares entonces:

$$D_u f(x, y) = \|\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\|.\cos\,\frac{\pi}{2} \rightarrow D_u f(x, y) = 0.$$

En este caso la derivada direccional es igual cero.

De una manera análoga se define a la derivada direccional y gradiente de una función de tres variables.

Fórmula para encontrar la derivada direccional:

$$D_u f(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\cos\alpha + f'_y(x,y,z)\cos\beta + f'_z(x,y,z)\cos\gamma \qquad (9)$$

Donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector unitario $\boldsymbol{U}$, que está definido por:

$$U = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, k$$

Una relación importante entre los cosenos directores que debemos tener en cuenta es:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (10)$$

Expresión para determinar el gradiente:

$$\nabla f(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\, \boldsymbol{i} + f'_y(x,y,z)\, \boldsymbol{j} + f'_z(x,y,z)\, k \qquad (11)$$

Ejemplos:

1. *Utilizando la definición, encontrar la derivada direccional de la función $f(x,y) = 12 - x^2 - 4y^2$ en la dirección del vector unitario $U = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{j}$.*

Solución:

$$D_u f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h;\ y + \frac{1}{2}h\right) - f(x,y)}{h}$$

$$D_u f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{12 - \left(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,h\right)^2 - 4\left(y + \frac{1}{2}h\right)^2 - 12 + x^2 + 4y^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{12 - x^2 - \sqrt{3}\,x\,h - \frac{3}{4}h^2 - 4y^2 - 4\,y\,h - \frac{1}{4}h^2 - 12 + x^2 + 4y^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(-\sqrt{3}\,x - 4y - h\right)}{h}$$

$$= -\sqrt{3}\,x - 4y.$$

2. *Utilizando la definición, encontrar la derivada direccional de la función* $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$ *en la dirección del vector unitario* $U =$ $cos\frac{1}{3}\pi\, \boldsymbol{i} + cos\frac{1}{4}\pi\, \boldsymbol{j} + cos\frac{2}{3}\pi\, \boldsymbol{k}$.

Solución:

Como $U = \cos\frac{1}{3}\pi\, \boldsymbol{i} + \cos\frac{1}{4}\pi\, \boldsymbol{j} + \cos\frac{2}{3}\pi\, \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, \boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\, \boldsymbol{k}.$

$$D_u f(x,y\,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\alpha; y + \cos\beta; z + h\cos\gamma) - f(x,y,z)}{h}$$

$$D_u f(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{3\left(x + \frac{1}{2}h\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\,h\right)^2 - 4\left(z - \frac{1}{2}h\right)^2 - 3x^2 - y^2 + 4z^2}{h}$$

$$D_u f(x,y,z)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3\,xh + \frac{3}{4}h^2 + y^2 + \sqrt{2}\,y\,h + \frac{1}{2}h^2 - 4z^2 + 4\,zh - h^2 - 3x^2 - y^2 + 4z^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\,xh + \frac{3}{4}h^2 + \sqrt{2}\,y\,h + \frac{1}{2}h^2 + 4\,zh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(3\,x + \sqrt{2}\,y + 4z + \frac{1}{4}h\right)}{h} = 3x + \sqrt{2}y + 4z.$$

3. *Determinar la derivada de la función* $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ *en el punto* $(1,2)$*, en la dirección que va desde éste al punto* $(4,6)$.

Solución:

Encontramos el vector unitario entre los dos puntos.

$$U = \frac{\langle 4-1, 6-2\rangle}{\|\langle 5,4\rangle\|} = \frac{\langle 5,4\rangle}{\sqrt{5^2+4^2}} = \frac{\langle 5,4\rangle}{\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}\,\boldsymbol{i} + \frac{4}{\sqrt{41}}\,\boldsymbol{j}.$$

Aplicando la fórmula (A) encontramos la derivada direccional.

$$D_u f(x,y) = (3x^2 - 4xy + y^2)\frac{5}{\sqrt{41}} + (-2x^2 + 2xy)\frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$D_u f(1{,}2) = (3 - 4 * 1 * 2 + 4)\frac{5}{\sqrt{41}} + (-2 + 2 * 1 * 2)\frac{4}{\sqrt{41}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{41}}(-5 + 8) = \frac{3}{\sqrt{41}}.$$

4. *Encontrar la derivada de la función* $u = x^2 - 3yz + 5$ *en el punto* $(1, 2, -1)$ *en la dirección que forma ángulos iguales con todos los ejes de coordenadas.*

Solución:
Encontramos el vector unitario.
La condición nos dice que tienen que formar ángulos iguales con los ejes de coordenadas es decir que $\alpha = \beta = \gamma \ \therefore \ valiendonos\ (10)$. Tenemos:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \ \therefore \ 3cos^2\alpha = 1 \ \therefore \ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$U = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\ \boldsymbol{i} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\ \boldsymbol{j} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\ \boldsymbol{k}\ .$$

Aplicando la fórmula (11) encontramos la derivada direccional.

$$D_u f(x, y, z) = (2x)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-3z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-3y)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D_u f(1{,}2, -1) = 2 * \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 3 * \tfrac{1}{\sqrt{3}} - 6 * \tfrac{1}{\sqrt{3}} = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. *Hallar la derivada direccional utilizando la fórmula (8) de la función* $z = ln\sqrt{x^2 + y^2}$ *en el punto* $(1, 1)$ *en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.*

Solución:

Determinamos el vector unitario.
Por la condición del ejemplo el ángulo es $\frac{\pi}{4}$ (45°).

$$U = \cos\frac{\pi}{4}\ \boldsymbol{i} + sen\ \frac{\pi}{4}\ \boldsymbol{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \boldsymbol{j}.$$

Encontramos el gradiente en el punto $(1, 1)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\boldsymbol{j}.$$

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{1+1}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{1+1}\right)\boldsymbol{j} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{j}.$$

Calculamos le derivada direccional con la fórmula (8).

$$D_u f(1,1) = \langle\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle.\langle\frac{1}{2};\frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. *Calcule el valor de la derivada direccional en el punto* $\left(\frac{\pi}{12};0;0\right)$*, de la función* $f(x,y,z) = cos\,2x\ \ cos\,3y\ \ sh\,4z$ *en dirección de* $U = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$.

Solución:

Hallamos el gradiente en el punto $\left(\frac{\pi}{12};0;0\right)$.

$$\nabla f(x,y,z) = (-2\,sen\,2x\ \cos 3y\ \ sh\,4z)\boldsymbol{i} +$$
$$(-3\cos 2x\ \ sen\,3y\ \ sh\,4z)\,\boldsymbol{j} + (4\,cos\,2x\,cos\,3y\,ch\,4z)\boldsymbol{k}.$$

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{12};0;0\right) = \left(-2\,sen\,2\left(\frac{\pi}{12}\right)\ \cos 3\,(0)\,sh\,4(0)\right)\boldsymbol{i} +$$
$$\left(-3\cos 2\left(\frac{\pi}{12}\right)\ \ sen\,3(0)\ \ sh\,4(0)\right) +$$
$$\left(4\,cos\,2\left(\frac{\pi}{12}\right)\ cos\,3(0)\,ch\,4(0)\right).$$
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{12};0;0\right) = (-2*1*0)i + (-3*0*0)j + \left(4*\frac{1}{2}*1*1\right)k$$
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{12};0;0\right) = 2\,k.$$

Encontramos la derivada direccional con un alcance a la fórmula (8).

$$D_u f\left(\frac{\pi}{12};0;0\right) = \langle\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle.\langle 0;\ 0;2\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

7. *Determinar y construir el gradiente de la función* $z = x^2y$ *en el punto* $(2,1)$.

Solución:

Encontramos el gradiente en el punto $(2,1)$.

$$\nabla f(x,y) = (2xy)\boldsymbol{i} + (x^2)\,\boldsymbol{j}$$

$$\nabla f(2,1) = 4\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j}.$$

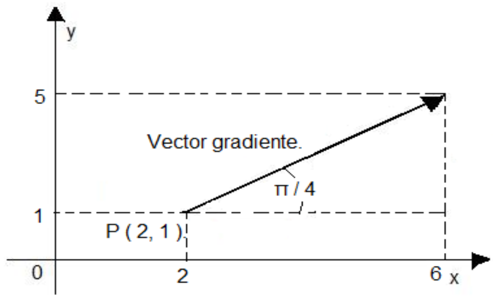


Figura 1.28

8. *Hallar la magnitud y la dirección del gradiente en el punto* $(2,-2,1)$, *si* $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución:

Encontramos el gradiente en el punto $(2,-2,1)$.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x)\boldsymbol{i} + (2y)\,\boldsymbol{j} + (2z)\boldsymbol{k}.$$

$$\nabla f(2,-2,1) = (2*2)\boldsymbol{i} + (2*-2)\,\boldsymbol{j} + (2*1)\boldsymbol{k}.$$

$$\nabla f(2,-2,1) = 4\boldsymbol{i} - 4\,\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Encontramos el módulo.

$$\|\nabla f(2,-2,1)\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+16+4}\,.$$

$$\|\nabla f(2,-2,1)\| = 6.$$

Dirección del gradiente.

$$\frac{\langle 4;\ -4; 2\rangle}{6} = \frac{2}{3}\,\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}.$$

9. *La densidad en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy es $\rho(x, y)$ kilogramos por metro cuadrado, donde $\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+3}}$. Calcular:*

a) La tasa de variación de la densidad en el punto $(3, 2)$ en la dirección del vector unitario $U = \cos\frac{2}{3}\pi\,\boldsymbol{i} + sen\,\frac{2}{3}\pi\,\boldsymbol{j}$.

b) Determine la dirección y la intensidad (módulo) de la máxima tasa de variación de ρ en $(3, 2)$.

Solución:

a) Encontramos la derivada direccional en ese punto.

$$D_\rho(x, y) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle . \langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+3}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+3}}\rangle$$

$$D_\rho(3,2) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle . \langle \frac{3}{\sqrt{9+4+3}}, \frac{2}{\sqrt{9+4+3}}\rangle = \langle -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle . \langle \frac{3}{4}, \frac{2}{4}\rangle.$$

$$D_\rho(3,2) = -\frac{3}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{2\sqrt{3}-3}{8} \text{ Kilogramo por metro.}$$

b) Hallamos el gradiente en el punto $(3,2)$.

$$\nabla_\rho(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+3}}\,\boldsymbol{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+3}}\,\boldsymbol{j}.$$

$$\nabla_\rho(3,2) = \frac{3}{4}\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{4}\,\boldsymbol{j}.$$

Encontramos el módulo que es la intensidad máxima pedida.

$$\left\|\nabla_\rho(3,2)\right\| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4} \text{ Kilogramos por metro.}$$

Determinamos la dirección, para que la intensidad sea máxima la dirección debe ser la misma que la del gradiente.

$$\theta = arc\ tg \left|\frac{3/4}{2/4}\right| = arc\ tg\ \left|\frac{3}{2}\right| = 56{,}31° = 0{,}313\pi.$$

10. *En cualquier punto del plano xy el potencial eléctrico es* $V(x,y)$ *volts, y se define por* $V(x,y) = e^{-2x}\ cos\ 2y$*. La distancia se mide en pies. a) Calcule la tasa de variación del potencial en el punto* $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ *en la dirección del vector unitario* $cos \frac{1}{6}\pi\ \boldsymbol{i} + sen\ \frac{1}{6}\pi\ \boldsymbol{j}$ *y b) La dirección y la intensidad (o módulo) de la máxima tasa de variación de V en* $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Solución:

a) Encontramos la derivada direccional en ese punto.

$$D_\rho(x,y) = \langle\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\rangle . \langle -2e^{-2x}\cos 2y\,, -2e^{-2x}\ sen\ 2y\rangle$$

$$D_\rho\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \langle\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\rangle . \langle -2\ e^{-2*0}\cos 2\frac{\pi}{4}, -2e^{-2*0}\ sen\ 2\frac{\pi}{4}\rangle$$
$$= \langle\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\rangle . \langle 0, -2\rangle.$$

$$D_\rho\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0 - 1 = -1 \text{ Volt por pie.}$$

b) Hallamos el gradiente en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\nabla_V(x,y) = -2e^{-2x}\cos 2y\ \boldsymbol{i} - 2e^{-2x}\ sen\ 2y\ \boldsymbol{j}.$$

$$\nabla_V\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0\ \boldsymbol{i} - 2\ \boldsymbol{j}.$$

Encontramos el módulo que es la intensidad máxima pedida.

$$\left\|\nabla_V\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right\| = \sqrt{0 + (-2)^2} = 2 \text{ Volts por pie.}$$

Determinamos la dirección, para que la intensidad sea máxima la dirección debe ser la misma que la del gradiente.

$$\theta = arc\ tg \left|\frac{-2}{0}\right| = arc\ tg\ |-\infty| = \frac{3\,\pi}{2}\ \text{ O } -\boldsymbol{j}.$$

1.9. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores

1.9.1. Derivadas parciales de órdenes superiores

Si *f* es una función de dos variables, por lo general las derivadas parciales de primer orden también van a ser funciones de dos variables, y si las derivadas parciales de estas funciones existen, se denominan **segundas derivadas parciales de *f***. En contraste, $D_1 f\ \ y\ \ D_2 f$ reciben el nombre de **primeras derivadas parciales de *f***. Existen cuatro segundas derivadas parciales de una función de dos variables, análogamente se determinan las derivadas parciales de orden superior al segundo. Si f es una función de dos variables *x* e *y*, las segundas derivadas parciales se denotan por:

$$D_2(D_1 f) = D_{12} f = f'_{12} = f'_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y}$$

Las cuales expresan la segunda derivada parcial de f que se obtiene al derivar parcialmente *f* con respecto a *x* y después derivar parcialmente el resultado respecto a *y*.

Las notaciones:

$$D_1(D_1 f) = D_{11} f = f'_{11} = f'_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$D_2(D_2 f) = D_{22} f = f'_{22} = f'_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Expresan la segunda derivada parcial de *f* que se obtiene al derivar parcialmente dos veces con respecto a *x* y dos veces respecto a *y* respectivamente, análogamente se designan a las derivadas de orden superior al segundo.

Si las derivadas parciales que hay que calcular son continuas, *el resultado de la derivación sucesiva no depende del orden de dicha derivación.*

Como una aplicación de las derivadas parciales de orden superior al uno, tenemos al grupo de ecuaciones de la física matemática, que ligan fenómenos físicos importantes con modelos matemáticos, dentro de estas podemos citar a las ecuaciones de Laplace en dos y tres variables, vibraciones de la cuerda, conducción calorífica, etc.

1.9.2. Diferenciales de órdenes superiores

Recibe el nombre de diferencial de segundo orden de una función *f* de dos variables x e y, la diferencial de la diferencial de primer orden de dicha función:

$$d^2 f(x,y) = d\big(df(x,y)\big).$$

Análogamente se determinan las diferenciales de la función f de orden superior al segundo, por ejemplo:

$$d^3 f(x,y) = d\big(d^2 f(x,y)\big)$$

Y en general,

$$d^n f(x,y) = d\big(d^{n-1} f(x,y)\big).$$

Si $z = f(x,y)$, donde x e y son variables independientes y la función f tiene derivadas parciales continuas de segundo grado, la diferencial de 2do orden de la función z se calcula por la fórmula

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2 \qquad (12)$$

En general, cuando existen las correspondientes derivadas se verifica la fórmula simbólica

$$d^n z = \left(dx\, \frac{\partial y}{\partial x} + dy\, \frac{\partial y}{\partial x}\right)^n z,$$

Que formalmente se desarrolla según la ley binomial.

Si $z = f(x,y)$, donde los argumentos x e y son a su vez funciones de una o varias variables independientes tendremos:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y \qquad (13)$$

Si *x* e *y* son variables independientes, $d^2x = 0,\ d^2y = 0$ y la fórmula (13) se hace equivalente a la fórmula (12).

Ejemplos:

1. *Hallar* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$ *si* $z = ln(x^2 + y)$.

Solución:
Encontramos las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y} * 2x = \frac{2x}{x^2+y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y}.$$

Determinamos las segundas derivadas parciales.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y)*2 - 2x*2x}{(x^2+y)^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}.$$

2. *Determinar todas las derivadas parciales de 2*[do] *orden de la función* $u = xy + yz + xz$.

Solución:
Hallamos las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y + x$$

Encontramos las segundas derivadas parciales.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=1;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=1;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=1;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=1;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}=1.$$

3. *Evaluar* $f''_{xx}(0,0)$; $f''_{xy}\ (0,0)$; $f''_{yy}(0,0)$ *si* $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

Solución:
Determinamos las primeras derivadas.

$$f'_x(x,y)=m(1+x)^{m-1}(1+y)^n;\qquad f'_y(x,y)=n(1+x)^m(1+y)^{n-1}$$

Hallamos las segundas derivadas y la evaluamos en el punto (0,0).

$$f''_{xx}(x,y)=m(m-1)(1+x)^{m-2}(1+y)^n \quad\rightarrow\quad f''_{xx}(0,0)=m(m-1).$$

$$f''_{xy}(x,y)=mn\,(1+x)^{m-1}(1+y)^{n-1} \quad\rightarrow\quad f''_{xy}(0,0)=mn.$$

$$f''_{yy}(x,y)=n(n-1)(1+x)^m(1+y)^{n-2} \quad\rightarrow\quad f''_{yy}(0,0)=n(n-1).$$

4. *Demostrar, que* $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}\ (x,y)$, *si* $f(x,y)=x^y$.

Solución:
Encontramos las primeras derivadas parciales.

$$f'_x(x,y)=y\,x^{y-1}.$$

$$f'_y(x,y)=x^y\ln(x).$$

Hallamos las segundas derivadas parciales.

$$f''_{xy}(x,y)=x^{y-1}+y\,x^{y-1}\ln(x)\quad\therefore\quad f''_{xy}(x,y)=x^{y-1}\big(1+y\,ln\,(x)\big).$$

$$f''_{yx}(x,y)=y\,x^{y-1}\ln(x)+x^y*\frac{1}{x}\quad\therefore\quad f''_{yx}(x,y)=x^{y-1}\big(1+y\,ln\,(x)\big).$$

Comparando:

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \ x^{y-1}\big(1 + y\ ln\ (x)\big)\ Lcqd.$$

5. *Demostrar, que la función* $u = arc\ tg\ \frac{y}{x}$, *satisface a la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Solución:
Hallamos las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} * -\frac{y}{x^2} = -\ \frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2} * \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

Encontramos las segundas derivadas parciales.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-\ 2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \therefore 0 = 0$$

Con lo que queda demostrado.

Cuando una función satisface la ecuación de Laplace, a esta ese le conoce como función armónica.

6. *Demostrar, que todas las derivadas parciales cruzadas que se manifiestan en una función de tres variables independientes, son iguales si* $u = x\ y\ z$.

Solución:

Determinamos las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\,z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\,z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x\,y\,.$$

Encontramos las segundas derivadas parciales.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = y.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = x.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} = x.$$

Realizamos las comparaciones.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} = x.$$

Con lo que queda demostrado.

7. *Hallar los diferenciales totales de 1° y 2° orden de la función:* $z = x\,cos\,y + y\,sen\,x.$

Solución:

1er procedimiento. Encontramos todas las derivadas parciales que se necesitan para rellenar las fórmulas.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y\cos x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\,sen\,y + sen\,x.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y\,sen\,x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -sen\,y + \cos x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\cos y.$$

Reemplazando en las fórmulas de dz y $d^2 z$ tenemos:

$$dz = (\cos y + y\cos x)dx + (-x\,seny + senx)dy.$$

$$d^2 z = -y\,sen\,x\,dx^2 + 2\,(\cos x - sen\,y)dx\,dy - x\cos y\,dy^2.$$

2° procedimiento. Diferenciando dos veces tenemos.

$$z = x\cos y + y\,sen\,x.$$

$$dz = \cos y\,dx - x\,sen\,y\,dy + sen\,x\,dy + y\cos x\,dx \quad \therefore$$

$$dz = (\cos y + y\cos x)dx + (sen\,x - x\,sen\,y)dy\ .$$

Volviendo a diferenciar y recordando que *dx* y *dy* no dependen de *x* e *y*.

$$d^2z = (-sen\,y\,dy + \cos x\,dy - y\,sen\,x\,dx)dx + (\cos y + y\cos x)d^2x +$$
$$+(\cos x\,dx - sen\,y\,dx - x\cos y\,dy)dy + (sen\,x - x\,sen\,y)d^2y$$

$$d^2z = -y\,senx\,dx^2 + (\cos x - sen\,y)dx\,dy -$$
$$-x\cos y\,d^2y + (\cos x - sen\,y)dx\,dy.$$

$$d^2z = -y\,senx\,dx^2 + 2(\cos x - sen\,y)dx\,dy - x\cos y\,d^2y.$$

8. *Determinar* $d^3z,$ *si* $z = e^x\,cos\,y.$

Solución:

$$dz = e^x cos\,y\,dx - e^x sen\,y\,dy \quad \therefore \quad dz = e^x(cos\,y\,dx - sen\,y\,dy).$$

$$d^2z = e^x(\cos y\,d^2x - sen\,y\,dx\,dy - sen\,y\,d^2y - \cos y\,dy^2) +$$
$$+ (cos\,y\,dx - sen\,y\,dy)e^x dx.$$

$$d^2z = e^x[\cos y\,dx^2 - 2\,sen\,y\,dx\,dy - \cos y\,dy^2].$$

$$d^3z = e^x[2\cos y\,d^2x - sen\,y\,dx^2dy - 2\,sen\,y(d^2x\,dy + dx\,d^2y) - 2\cos y\ dx\,dy^2$$
$$-2\cos y\,d^2y + sen\,y\,dy^3] + (\cos y\,dx^2 - 2\,sen\,y\,dx\,dy - \cos y\,dy^2)e^x dx.$$

$$d^3z = e^x[-sen\,y\,dx^2dy - 2\cos y\,dxdy^2 + sen\,y\,dy^3 + \cos y\,dx^3 - 2sen\,y\,dx^2dy$$
$$- cosy\,dx\,dy^2].$$

$$d^3z = e^x[\cos y\,dx^3 - 3\,sen\,y\,dx^2\,dy - 3\cos y\,dx\,dy^2 + sen\,y\,dy^3].$$

9. *Determinar la diferencial de 3*^{er} *orden, utilizando la fórmula simbólica de la siguiente función:*
$z = x\ cos\ y + y\ sen\ x.$

Solución:
Desarrollamos la fórmula para n = 3.

$$d^3z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\, dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\, dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

Encontramos todas las derivadas parciales para rellenar la fórmula.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y\cos x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y\, sen\, x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -y\cos x.$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^{\,2}\partial y} = -sen\, x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -sen\, y + \cos x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = -\cos y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x\ \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\, cos\, y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\operatorname{sen}\mathrm{y}.$$

$$d^3z = -\cos y\, dx^3 - 3\, sen\, x\, dx^2dy - 3\cos y\, dxdy^2 + x\, sen\, y\, dy^3.$$

10. *La ecuación de Laplace en R^3 es:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Pruebe que la función $u(x, y\,, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisface a la ecuación.

Solución:
Encontramos todas las derivadas parciales para sustituir en la fórmula.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\,x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} * -1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} * 3x^2}{[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(-x^2 - y^2 - z^2 + 3x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \quad \therefore$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\,y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} * -1 + (x^2+y^2+z^2)^{1/2} * 3y^2}{[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(-x^2-y^2-z^2+3y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} \quad \therefore$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} * -1 + (x^2+y^2+z^2)^{1/2} * 3z^2}{[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}(-x^2-y^2-z^2+3z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} \quad \therefore$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Reemplazamos en la ecuación dada.

$$\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

$$\frac{2x^2-y^2-z^2-x^2+2y^2-z^2-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0$$

Con lo que queda demostrado.

Como conclusión podemos decir que esta función es una función armónica.

1.10. Aplicaciones de las derivadas parciales

1.10.1. Planos tangentes y rectas normales a una superficie

Supongamos que $f(x,y,z)$ tiene derivadas parciales continuas, y que *S:* $f(x,y,z) = c$ es una de las superficies de nivel de *f*, y que *x = x(t), y = y(t), z = z(t)* es una curva diferenciable en *S* que pase por el punto P_0 en S. entonces,

$$f(x(t); y(t); z(t)) = c$$

Para cada valor de *t*. Derivando ambos lados de esta ecuación respecto a *t* y aplicando la regla de la cadena al primer miembro, resulta

$$\frac{d}{dt} f(x(t); y(t); z(t)) = \frac{d}{dt}(c) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

O sea

$$\nabla f . v = 0$$

Donde *v* es el vector velocidad de la curva. En consecuencia, el gradiente es perpendicular al vector velocidad de toda curva diferenciable en *S* que pase por P_0 (Fig. 1.29). Por tanto, ∇f es perpendicular a la recta tangente de toda curva diferenciable en *S*

Que pase por P_0. Estas rectas pertenecen, pues, a un solo plano, este plano que pasa por P_0 y es normal a ∇f es el plano tangente a *S* en P_0.

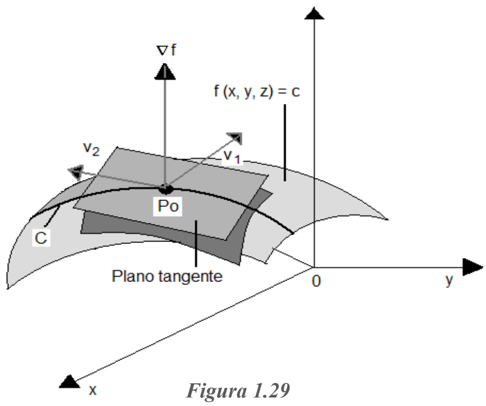


Figura 1.29

1.10.2. Definición de plano tangente

Si una ecuación de una superficie *S* es $F(x, y, z) = 0$, *F* es diferenciable y F_x, F_y, y F_z no son todas cero en el punto P_0 de *S*, entonces el plano tangente de *S* en el punto P_0, es el plano que pasa por P_0 y tiene a ∇f como un vector normal.
Una ecuación para determinar el plano tangente es:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \quad (14)$$

La ecuación vectorial del plano tangente en función del gradiente que tiene como punto inicial P_0 es:

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0).[(x-x_0)i+(y-y_0)j+(z-z_0)k=0] \quad (15)$$

1.10.3. Definición de recta normal a una superficie

La recta normal a una superficie *S* en un punto P_0 de *S* es la recta que pasa por P_0 y tiene como un conjunto de números directores a las componentes de cualquier vector normal a *S* en P_0.

De esta definición, si una ecuación de una superficie *S* es $F(x,y,z)=0$, entonces las ecuaciones simétricas de la recta normal de *S* en P_0 son:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \quad (16)$$

Debido a que los denominadores son los componentes de $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ el cual es un vector normal a S en (x_0,y_0,z_0).

O también en forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x&=x_0+F_x(x_0,y_0,z_0)t,\\ y&=y_0+F_y(x_0,y_0,z_0)t,\\ z&=z_0+F_z(x_0,y_0,z_0)t. \end{aligned} \quad (17)$$

Ejemplos:

Escríbanse las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie de nivel dada en el punto P_0 de los siguientes ejemplos:

1. $z^2-x^2-y^2=0, \quad P_0(3,4,-5).$

Solución:
Hallamos primero el vector gradiente en P_0.

$$F'_x(x,y,z)=-2x \quad \therefore \quad F'_x(3,4,-5)=-6.$$

$$F'_y(x,y,z) = -2y \quad \therefore \quad F'_y(3,4,-5) = -8.$$
$$F'_z(x,y,z) = 2z \quad \therefore \quad F'_z(3,4,-5) = -10.$$
$$\nabla F(3,4,-5) = -6\,\boldsymbol{i} - 8\,\boldsymbol{j} - 10\,\boldsymbol{k}.$$

Según ecuación (14) el plano tangente a la superficie en P_0 es

$$\langle -6,-8,-10\rangle.\langle x-3, y-4, z+5\rangle = 0$$
$$-6x + 18 - 8y + 32 - 10z - 50 = 0 \quad \therefore \quad -3x - 8y - 10z = 0$$
$$3x + 8y + 10z = 0.$$

Por (16) la normal a la superficie en P_0 es

$$x = 3 - 6t; \quad y = 4 - 8t; \quad z = -5 - 10t.$$

2. $(x+y)^2 + z^2 = 25, \quad P_0(1, 2\ 4).$

Solución:
Encontramos el vector gradiente en P_0.

$$F'_x(x,y,z) = 2(x+y) \quad \therefore \quad F'_x(1,2,4) = 6.$$
$$F'_y(x,y,z) = 2(x+y) \quad \therefore \quad F'_y(1,2,4) = 6.$$
$$F'_z(x,y,z) = 2z \quad \therefore \quad F'_z(1,2,4) = 8.$$

$$\nabla F(1,2,4) = 6\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j} + 8\,\boldsymbol{k}.$$

Según la ecuación (14) el plano tangente a la superficie en P_0 es

$$\langle 6,6,8\rangle.\langle x-1, y-2, z-4\rangle = 0$$
$$6x - 6 + 6y - 12 + 8z - 32 = 0 \quad \therefore \quad 6x + 6y + 8z = 50$$
$$3x + 3y + 4z = 25.$$

Por (16) la normal a la superficie en P_0 es
$$x = 1 + 6t; \quad y = 2 + 6t; \quad z = 4 + 8t.$$

3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0, \qquad P_0(4,3,4).$

Solución:
Encontramos las derivadas parciales en P_0.

$$F'_x(x,y,z) = \frac{1}{8}x \quad \therefore \quad F'_x(4,3,4) = \frac{1}{2}.$$
$$F'_y(x,y,z) = \frac{2}{9}y \quad \therefore \quad F'_y(4,3,4) = \frac{2}{3}.$$
$$F'_z(x,y,z) = -\frac{1}{4}z \quad \therefore \quad F'_z(4,3,4) = -1.$$

Según ecuación (13) el plano tangente a la superficie en P_0 es

$$\frac{1}{2}(x-4) + \frac{2}{3}(y-3) - (z-4) = 0$$

$$3x - 12 + 4y - 12 - 6z + 24 = 0 \;\therefore\; 3x + 4y - 6z = 0.$$

Por (15) la normal a la superficie en P_0 es

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}.$$

4. $z = x^2 + y^2, \quad P_0(1,-2,5).$

Solución:
Formamos la función $F(x,y\,,z) = 0$ y luego procedemos como los ejercicios anteriores. $z - x^2 - y^2 = 0.$
Encontramos las derivadas parciales en P_0.

$$F'_x(x,y,z) = -2x \quad \therefore \quad F'_x(1,-2,5) = -2.$$
$$F'_y(x,y,z) = -2y \quad \therefore \quad F'_y(1,-2,5) = 4.$$
$$F'_z(x,y,z) = 1 \quad \therefore \quad F'_z(1,-2,5) = 1.$$

Según ecuación (13) el plano tangente a la superficie en P_0 es

$$-2(x-1) + 4(y+2) + (z-5) = 0$$
$$-2x + 2 + 4y + 8 + z - 5 = 0 \;\therefore\; 2x - 4y - z = 5.$$

Por (15) la normal a la superficie en P_0 es

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}.$$

5. *Dada la superficie* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ *, trazar a ella planos tangentes que sean paralelos al plano* $x + 4y + 6z = 0.$

Solución:
Encontramos las derivadas parciales, y las evaluamos en $P_0(x_0, y_0, z_0\ )$.

$$F'_x(x,y,z) = 2x \quad \therefore \quad F'_x(x_0,y_0,z_0) = 2x_0.$$
$$F'_y(x,y,z) = 4y \quad \therefore \quad F'_y(x_0,y_0,z_0) = 4y_0.$$
$$F'_z(x,y,z) = 6z \quad \therefore \quad F'_z(x_0,y_0,z_0) = 6z_0.$$

Según ecuación (13) el plano tangente a la superficie en P_0 es

$$2x_0(x-x_0) + 4y_0(y-y_0) + 6z_0(z-z_0) = 0$$
$$2x_0x - 2x_0^{\ 2} + 4y_0y - 4y_0^{\ 2} + 6z_0z - 6z_0^{\ 2} = 0 \ \therefore$$
$$2x_0x + 4y_0y + 6z_0z = 2x_0^{\ 2} + 4y_0^{\ 2} + 6z_0^{\ 2} \quad /\ 2.$$
$$x_0x + 2y_0y + 3z_0z = x_0^{\ 2} + 2y_0^{\ 2} + 3z_0^{\ 2}.$$

Por ser planos paralelos:

$$x_0 = 1; \quad 2y_0 = 4 \ \rightarrow \ y_0 = 2; \quad 3z_0 = 6 \ \rightarrow \ z_0 = 2 \quad \therefore \ tenemos:$$

$$x + 4y + 6z = 1 + 8 + 12 \ \therefore \ x + 4y + 6z = 21.$$

6. *Demostrar, que la ecuación del plano tangente a la superficie central de 2° orden*
$ax^2 + by^2 + cz^2 = k$
En su punto $P_0(x_0, y_0, z_0\ )$ tiene la forma
$ax_0x + by_0y + cz_0z = K.$

Solución:
Encontramos las derivadas parciales, y las evaluamos en $P_0(x_0, y_0, z_0\ )$.

$$F'_x(x,y,z) = 2ax \quad \therefore \quad F'_x(x_0,y_0,z_0) = 2ax_0.$$
$$F'_y(x,y,z) = 2by \quad \therefore \quad F'_y(x_0,y_0,z_0) = 2by_0.$$
$$F'_z(x,y,z) = 2cz \quad \therefore \quad F'_z(x_0,y_0,z_0) = 2cz_0.$$

Según ecuación (13) el plano tangente a la superficie en P_0 es

$$2ax_0(x-x_0) + 2by_0(y-y_0) + 2cz_0(z-z_0) = 0$$
$$2ax_0x - 2ax_0^{\ 2} + 2by_0y - 2by_0^{\ 2} + 2cz_0z - 2cz_0^{\ 2} = 0 \ \therefore$$
$$2ax_0x + 2by_0y + 2cz_0z = 2ax_0^{\ 2} + 2by_0^{\ 2} + 2cz_0^{\ 2} \quad /\ 2.$$
$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^{\ 2} + by_0^{\ 2} + cz_0^{\ 2}.$$
$$si \quad ax_0^{\ 2} + by_0^{\ 2} + cz_0^{\ 2} = K,$$

Tenemos:

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = K$$

Con lo que queda demostrado.

7. *Hallar la tangente a la curva C en el punto* $(1,2,2)$*, siendo C la curva donde se cortan las superficies*
$F: x^2 + y^2 - z^2 = 1; \qquad G:\ x + y + z = 5$

Solución:
La tangente es normal tanto ∇F como a ∇G en $(1,2,2)$. Por tanto, $v = \nabla F \ \text{X}\ \nabla G$ será un vector paralelo a la recta. Para escribir las ecuaciones de la recta, utilizamos las componentes de v y las coordenadas de $(1,2,2)$. Tenemos:

$$\nabla F(x,y,z) = 2x\,i + 2y\,j - 2z\,k \quad \therefore \quad \nabla F(1,2,2) = 2\,i + 4\,j - 4\,k$$
$$\nabla G(x,y,z) = i + j + k \quad \therefore \quad \nabla G(1,2,2) = i + j + k.$$

Por tanto:

$$\mathrm{v} = \nabla \mathrm{F} \ \mathrm{x}\ \nabla G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\,i - 6\,j - 2\,k$$

Entonces la recta tangente es:

$$x = 1 + 8t; \quad y = 2 - 6t; \quad z = 2 - 2t.\ \ 0$$

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-2}{-2}\,.$$

8. *Demostrar que las esferas*
$F:\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad y \quad G:\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$
Son tangentes en el punto $(2,0,0)$.

Solución:
Para que dos superficies sean tangentes en un punto, el gradiente de una de ellas debe ser igual a la otra gradiente multiplicada por un escalar así:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = K\, \nabla G(x_0, y_0, z_0).$$

En nuestro ejemplo tenemos:

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\, i + 2y\, j + 2z\, k \qquad \therefore \qquad \nabla F(2,0,0) = 4\, i$$
$$\nabla G(x, y, z) = 2(x-1)\, i + 2y\, j + 2z\, k \qquad \therefore \qquad \nabla G(2,0,0) = 2\, i.$$

En conclusión, diríamos:
Como observamos aquí $\nabla F = 2\nabla G$ es decir $4\, i = 2(2\, i)$, por tanto, estas dos superficies si son tangentes en ese punto (Fig. 1.30).

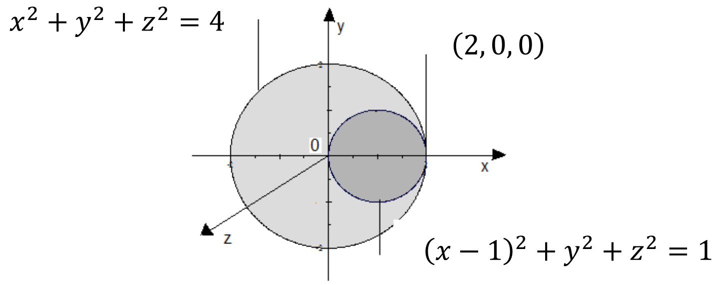


Figura 1.30

1.10.4. Extremos de funciones de dos variables

Una de las aplicaciones importantes de la derivada de una función de una sola variable estaba relacionada con los valores extremos de una función, los cuales nos llevaron a una gran variedad de aplicaciones. En este tema vamos a extender la teoría a funciones de dos variables, y se observara que el procedimiento es similar. En este procedimiento estarán involucradas las primeras y segundas derivadas parciales, a partir de las cuales se determinarán los valores máximos y mínimos relativos de una función, luego se incluirán los valores extremos relativos como posibles extremos absolutos. Para iniciar vamos a mencionar las definiciones de extremos relativos y absolutos de una función de dos variables.

1.10.5. Definición de extremos absolutos de funciones de dos variables

i. Se dice que la función *f* de dos variables tiene un **valor máximo absoluto** en su dominio *D* del plano *xy* si existe algún punto(x_0, y_0) en *D* tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de *D*.

En tal caso, $f(x_0, y_0)$ es el valor máximo absoluto de f en D.

ii. Se dice que la función *f* de dos variables tiene un **valor mínimo absoluto** en su dominio *D* del plano *xy* si existe algún punto(x_0, y_0) en *D* tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de *D*.

En tal caso, $f(x_0, y_0)$ es el valor mínimo absoluto de f en D.

1.10.6. Definición de extremos relativos de funciones de dos variables

i. Se dice que la función *f* de dos variables tiene un **valor máximo relativo** en el punto (x_0, y_0) si existe un intervalo abierto en el plano *xy* tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) en el intervalo.

ii. Se dice que la función *f* de dos variables tiene un **valor mínimo relativo** en el punto (x_0, y_0) si existe un intervalo abierto en el plano *xy* tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) en el intervalo.

La función $z = \cos x \cos y \, e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ tiene muchos máximos y mínimos relativos (Fig. 1.31).

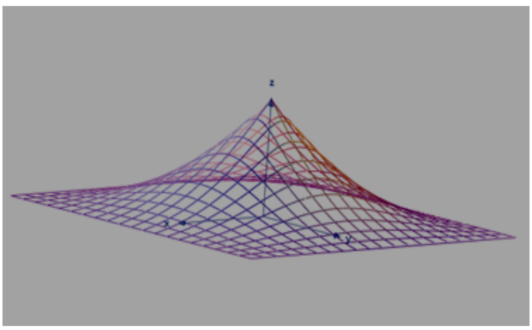


Figura 1.31

1.10.7. Análisis de los valores extremos

1. Hallar puntos críticos y puntos frontera.

Como sabemos, una función continua $z = f(x, y)$ alcanza un valor máximo y un mínimo absolutos en cualquier región *R* cerrada y acotada en que está definida.

Además, estos y cualesquiera otros máximos y mínimos relativos sólo pueden darse en

1) Puntos de frontera de *R*.

2) Puntos interiores de *R* en los que $f'_x = f'_y = 0$, o puntos donde $f'_x,\ f'_y$ no exista. A los cuales les llamamos puntos críticos o estacionarios de *f*.

Normalmente sólo hay unos cuantos puntos de este tipo, de manera que podemos calcular *f* en todos ellos y elegir los valores mayores y menores. Si lo que deseamos es hallar el máximo y el mínimo absolutos, no se requiere otro criterio.

2. Buscar puntos críticos si no hay puntos frontera.

Una función $z = f(x, y)$ definida en una región *R* sin puntos frontera (como el interior de un disco, de un triángulo o de un rectángulo, un cuadrante menos los ejes o todo el plano) puede carecer de máximos y mínimos relativos en *R*. Sin embargo, de tenerlos, deben encontrarse en puntos de *R* donde $f'_x = f'_y = 0$, o bien donde una o ambas derivadas no exista (como ocurre con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(0,0)$). Este concepto lo deducimos de la aplicación geométrica de las derivadas parciales, ya que estas son la pendiente de la recta tangente a la curva de la intersección de un plano constante con la superficie en un punto (x_0, y_0), donde éstas son rectas horizontales que tienen pendiente igual a cero (Fig. 1.32).

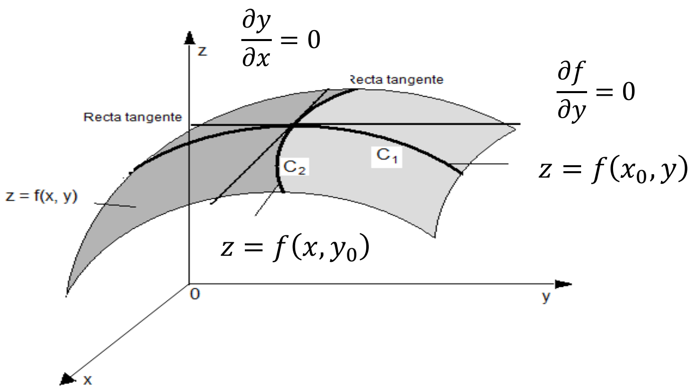


Figura 1.32

3. Criterio de la segunda derivada.

Este criterio puede aplicarse en los puntos interiores en que $f'_x = f'_y = 0$ y donde las derivadas de primer y segundo orden son continuas.

El hecho de que $f'_x = f'_y = 0$ en un punto interior de (x_0, y_0) no garantiza que *f* tenga en él un valor extremo. Sin embargo, existe un criterio de la segunda derivada que puede ayudar a identificar el comportamiento de f en (x_0, y_0). Este criterio es el siguiente:

$Si \quad f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$ Entonces

1) Si $f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0$ en (x_0, y_0), la función *f* tiene un máximo relativo en este punto si $f''_{xx} < 0$ 0 $f''_{yy} < 0$.
2) Si $f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0$ en (x_0, y_0), la función *f* tiene un mínimo relativo en este punto si $f''_{xx} > 0$ 0 $f''_{yy} > 0$.
3) Si $f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0$ en (x_0, y_0), la función *f* tiene un punto de silla en (x_0, y_0).
4) Este criterio no es claro ni concluyente cuando $f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 0$ en (x_0, y_0), lo cual indica que debemos continuar el estudio para determinar el comportamiento de *f* en este punto.

A La expresión $f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2$ se le conoce con el nombre de discriminante de *f*, una manera de poder recordar esta expresión es poniéndole en forma de determinante:

$$f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}.$$

O poniendo en la forma $A * C - B^2$, donde:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad y \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Ejemplos:

1. *Determínese los valores extremos de la función*

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4 \text{ (Fig. 1.33)}$$

Solución:

La función está definida y es diferenciable para todo x e y, por tanto, sólo tiene valores extremos en los puntos donde se anulan las primeras derivadas parciales simultáneamente así:

$$f'_x(x,y) = y - 2x - 2 = 0 \ \ (1),$$
$$f'_y(x,y) = x - 2y - 2 = 0 \ \ \ (2)$$

Resolviendo el sistema.

$$(1) * 2 + (2) \qquad 2y - 4x - 4 + x - 2y - 2 = 0 \quad \therefore$$
$$x = -2 \quad y \quad y = -2$$

Por tanto, la función tiene sólo un punto crítico en $(-2 - 2)$ que puede tomar un valor extremo, por medio del discriminante comprobamos esto.

Encontramos las segundas derivadas parciales.

$$f''_{xx}(x,y) = -2 \quad \therefore \quad f''_{xx}(-2,-2) = -2$$
$$f''_{xy}(x,y) = 1 \quad \therefore \quad f''_{xy}(-2,-2) = 1$$
$$f''_{yy}(x,y) = -2 \quad \therefore \quad f''_{yy}(-2,-2) = -2$$

Entonces el discriminante es:

$$f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = (-2) * (-2) - 1 = 3.$$
$$\therefore \quad f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0.$$

Y con la combinación $f''_{xx} < 0$, el punto $(-2 - 2)$ es un máximo relativo. El valor máximo que toma f en el punto es:

$$f(-2,-2) = 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 = 8.$$

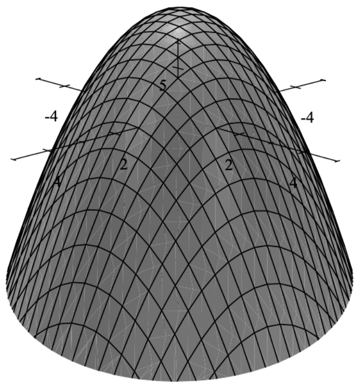


Figura 1.33

2. *Determine los valores máximos y mínimos absolutos de*

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

En la placa triangular del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$ *(Fig. 1.34).*

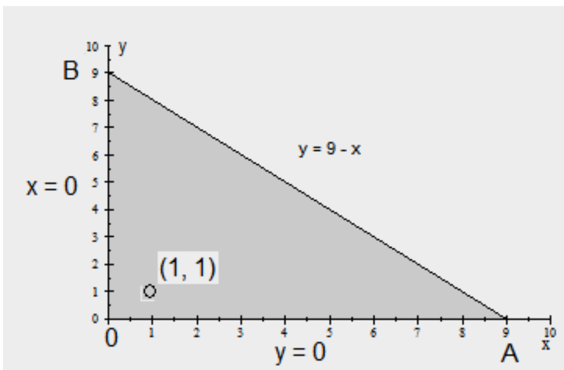


Figura 1.34

Solución:

Los únicos lugares donde *f* puede tener estos valores son los puntos en la frontera del triángulo (Fig. 1.34) y en los puntos interiores a él, donde

$$f'_x = f'_y = 0.$$

En los puntos interiores:

$$f'_x = 2 - 2x = 0\ (1);\quad f'_y = 2 - 2y = 0$$

Resolviendo el sistema.

$$x = 1 \quad y \quad y = 1,\ \ es\ decir\ el\ punto\ es\ (1,1)$$

En donde: $f(1,1) = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 = 4\,.$

1) En el segmento OA, y = 0. La función

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

Puede considerarse como una función de *x* definida en el intervalo cerrado

$$0 \leq x \leq 9.$$

Sus valores extremos pueden darse en los puntos extremos.

$$x = 0 \qquad donde\ \ f(0,0) = 2$$
$$x = 9 \qquad donde\ \ f(9,0) = 2 + 18 - 81 = -61.$$

Y en los puntos interiores donde

$$f'(x, 0) = 2 - 2x = 0.$$

El único punto interior en el que $f'(x, 0) = 0$ es $x = 1$, donde

$$f(x, 0) = f(1,0) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

2) En el segmento OB, $x = 0$ y

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2\,.$$

Por la simetría de *f* en *x* e *y*, y según el análisis que hemos hecho, podemos asegurar que en este segmento las posibilidades son

$$f(0,0) = 2, \qquad f(0,9) = -61 \qquad f(0,1) = 3.$$

3) Ya hemos indicado los valores de f en los puntos extremos de AB, así que sólo quedan por ver los puntos interiores de este segmento. Con $y = 9 - x$ $tenemos$:

$$f(x, y) = f(x, 9 - x) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 \quad \therefore$$
$$f(x, 9 - x) = -61 + 18x - 2x^2.$$

Encontrando la derivada e igualando a cero

$$f'(x, 9 - x) = 18 - 4x = 0$$

Obtenemos

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

En este valor de x, y será:

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

Y la función tomará el valor:

$$f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = 2 + 2\left(\frac{9}{2}\right) + 2\left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{41}{2}.$$

4) Realizamos el resumen de valores y sacamos las conclusiones.

$$4, \quad 2, \quad -61, \quad 3, \quad -\frac{41}{2}.$$

El valor máximo es 4, valor que toma f en $(1,1)$. El mínimo es - 61, alcanzado en $(0, 9)$ y $(9, 0)$.

3. *Encontrar los máximos, mínimos y puntos de silla de las siguientes superficies. Calcúlense los valores de la función en estos puntos.*

a) $z = x^4 + 4xy + y^4 - 2x^2 - 2y^2.$

Solución:
La función está definida y es diferenciable para todo x e y, por tanto, sólo tiene valores extremos en los puntos donde se anulan las primeras derivadas parciales simultáneamente.

$$f'_x(x,y) = 4x^3 + 4y - 4x = 0 \ \ (1), \qquad f'_y(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y = 0$$

Resolviendo el sistema.

Sumando las dos ecuaciones:

$$4x^3 + 4y^3 = 0 \ \ (i) \ \therefore \quad x = -y \ \ (ii)$$
$$(ii) \ \ en \ \ (i) \ \ 4y^3 - 8y = 0 \ \ \therefore \ \ 4y(y^2 - 2) = 0 \ \ \therefore \ \ y = 0; \ \ y = \pm\sqrt{2}.$$

De donde los puntos críticos son: (0,0), $\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Encontramos las segundas derivadas parciales, y calculamos el discriminante en cada uno de los puntos para ver su comportamiento.

$$f''_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4; \quad f''_{xx}(0,0) = 0;$$
$$f''_{xx}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 24; \quad f''_{xx}\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = 24.$$
$$f''_{xy}(x,y) = 4; \quad f''_{xy}(0,0) = 4$$
$$f''_{xy}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 4; \quad f''_{xy}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 4.$$
$$f''_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4; \quad f''_{yy}(0,0) = 0;$$
$$f''_{yy}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 24; \quad f''_{yy}\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = 24$$

Determinamos los discriminantes:
Punto (0,0).

$$f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 0 - 4 \ \ \therefore \ \ f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0$$

Conclusión, este punto es punto de silla.

Punto $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

$$f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 24 * 24 - 4 \ \ \therefore \ \ f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0$$

Conclusión, en este punto hay un extremo relativo, como $f''_{xx} > 0$ el punto es un mínimo.

Punto $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

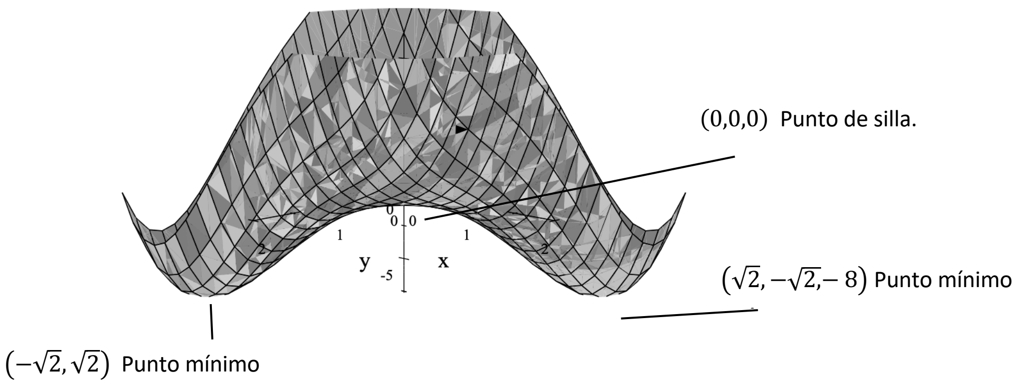
$$f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 24 * 24 - 4 \ \ \therefore \ \ f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0$$

Conclusión, en este punto hay un extremo relativo, como $f''_{xx} > 0$ el punto es un mínimo. Esta superficie tiene dos puntos mínimos y un punto de silla (Fig. 1.35).

Punto de silla. $z\Big|_{(0,0)} = 0, \quad punto \ \ (0,0,0).$

Punto mínimo. $z\Big|_{\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)} = 4 - 8 + 4 - 4 - 4 = -8,$
$punto \ \left(-\sqrt{2},\sqrt{2},-8\right).$

Punto mínimo. $z\Big|_{\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)} = 4 - 8 + 4 - 4 - 4 = -8,$
$punto \ \left(-\sqrt{2},\sqrt{2},-8\right).$



$$z = x^4 + 4xy + y^4 - 2x^2 - 2y^2$$

Figura 1.35

b) $\quad z = x^3 + y^3 - 3xy$

Solución:
La función está definida y es diferenciable para todo x e y, por tanto, sólo tiene valores extremos en los puntos donde se anulan las primeras derivadas parciales simultáneamente.

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \ \therefore \ x^2 - y = 0 \ \therefore \ y = x^2 \qquad \text{(i)}$$
$$f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \ \therefore \ y^2 - x = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Resolviendo el sistema.

$$(i)\ en\ (ii) \qquad x^4 - x = 0 \ \therefore \ x(x^3 - 1) = 0 \ \therefore \ x = 0;\ x = 1.$$

De donde los puntos críticos son: $(0,0)$, $(1,\ 1)$.

Encontramos las segundas derivadas parciales, y calculamos el discriminante en cada uno de los puntos para ver su comportamiento.

$$f''_{xx}(x,y) = 2x; \quad f''_{xx}(0,0) = 0; \quad f''_{xx}(1,1) = 2$$

$$f''_{xy}(x,y) = -1; \quad f''_{xy}(0,0) = -1; \quad f''_{xy}(1,1) = -1$$

$$f''_{yy}(x,y) = 2y; \quad f''_{yy}(0,0) = 0; \quad f''_{yy}(1,1) = 2$$

Determinamos los discriminantes:
Punto $(0,0)$.

$$f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 0 - 1 \ \therefore \ f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0$$

Conclusión, este punto es punto de silla.
Punto $(1,1)$.

$$f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 2 * 2 - 1 \ \therefore \ f''_{xx} * f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0$$

Conclusión, en este punto hay un extremo relativo, como $f''_{xx} > 0$ el punto es un mínimo.

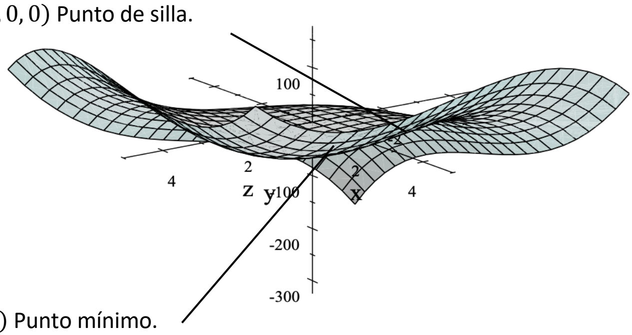
Valores de la función.

Punto de silla. $z\Big|_{(0,0)} = 0, \quad punto \ (0,0,0).$

Punto mínimo. $z\Big|_{(1,1)} = 1 - 1 - 3 = -1, \quad punto \ (1,1,-1).$

Esta superficie tiene un punto mínimo y un punto de silla (Fig. 1.36)

(0, 0, 0) Punto de silla.



(1 ,1, −1) Punto mínimo.

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

Figura 1.36

4. *Determine los valores máximos y mínimos absolutos de* $f(x, y) = 3x^2 + xy$ $(Fig. 1.37)$
En la región acotada por la parábola $y = x^2$ *y la recta* $y = 4$.

Solución:
Los únicos lugares donde *f* puede tener estos valores son los puntos en la frontera de la región (figura 134a) y en los puntos interiores a ella, donde $f'_x = f'_y = 0$.

En los puntos interiores:

$$f'_x = 6x + y = 0 \;\; (i); \quad f'_y = x = 0 \;\; (ii)$$

Resolviendo el sistema. (ii) en (i) $y = 0,$ $es\ decir\ el\ punto\ es$ $(0,0)$
En donde: $f(0,0) = 0.$

1) En la recta $y = 4$ la función
$$f(x, y) = f(x, 4) = 3x^2 + 4x$$

Puede considerarse como una función de *x* definida en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2.$

Sus valores extremos pueden darse en los puntos extremos.

$$x = -2 \qquad donde \;\; f(-2,4) = 4$$

$$x = 2 \qquad donde \quad f(2{,}4) = 12 + 8 = 20.$$

Y en los puntos interiores donde

$$f'(x,4) = 6x + 4 = 0 \quad \therefore \quad x = -\frac{2}{3}.$$

El único punto interior en el que $f'(x,4) = 0$ es $x = -\frac{2}{3}$, donde

$$f(x,4) = f\left(-\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{12}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.$$

2) En la parábola $y = x^2$. La función

$$f(x,y) = f(x,x^2) = 3x^2 + x^3$$

Puede considerarse como una función de x definida en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$.

Sus valores extremos pueden darse en los puntos extremos.

$$x = -2 \qquad donde \ f(-2{,}4) = 4$$
$$x = 2 \qquad donde \quad f(2{,}4) = 12 + 8 = 20.$$

Y en los puntos interiores donde

$$f'(x,x^2) = 6x + 3x^2 = 0 \quad \therefore \quad 3x(2 + x) = 0 \quad \therefore x = 0, \ \ x = -2$$

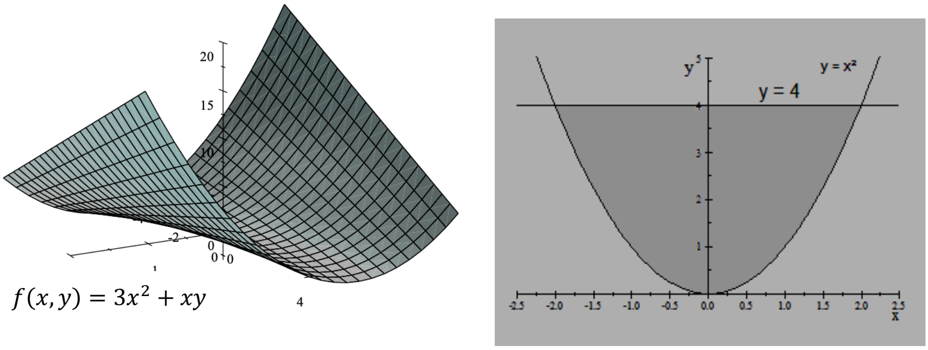
Los puntos interiores en el que $f'(x,x^2) = 0$ son $(0{,}0), (0{,}4)$.

$$f(x,x^2) = f(0{,}0) = 0.$$
$$f(x,x^2) = f(-2{,}4) = 4.$$

Realizamos el resumen de valores y sacamos las conclusiones.

$$4, \quad 20, \qquad -\frac{4}{3}, \quad 0,$$

El valor máximo es 20, valor que toma f en (2,4). El mínimo es $-\frac{4}{3}$, alcanzado en $\left(-\frac{2}{3}, 4\right)$.



a) b)

Figura 1.37

1.10.8. Extremos condicionados

Se llama extremo condicionado de una función $f(x, y)$, en el caso más simple, al máximo y mínimo de esta función, alcanzado con la condición de que estos argumentos estén ligados o condicionados por la ecuación $g(x, y) = 0$ (que se llama ecuación de enlace). Para encontrar el extremo condicionado de la función $f(x, y)$, con la ecuación de enlace $g(x, y) = 0$ utilizamos el procedimiento llamado Multiplicadores de Lagrange, procedimiento que enunciaremos a continuación.

Análogamente se hallan los extremos condicionados de las funciones de tres y más variables cuando existen una o más ecuaciones de enlace (cuyo número debe ser menor que el de las variables). En este caso, hay que incluir en la función de Lagrange tantos multiplicadores indeterminados como ecuaciones de enlace haya.

Procedimiento:

1) Definimos la función auxiliar F (función de Lagrange) de las tres variables x, y y τ. (τ es un multiplicador de Lagrange constante e indeterminado)

$$F(x, y, \tau) = f(x, y) + \tau\, g(x, y)$$

2) Consideramos el sistema de ecuaciones que se forma al igualar a cero las tres primeras derivadas parciales de *F*.

$$\begin{cases} F'_x(x, y\ \tau) = 0 \\ F'_y(x, y\ \tau) = 0 \\ F'_\tau(x, y\ \tau) = 0 \end{cases}$$

3) Resolvemos el sistema de ecuaciones del paso 2, para determinar los puntos críticos de *F*.

4) Entre las primeras dos coordenadas de los puntos críticos de *F*, obtenidos en el paso 3, se encuentran los valores de *x* e *y* que proporcionan los extremos relativos deseados.

Ejemplos:

1. Determinar los extremos condicionado de la función $z = x + 2y$, si $x^2 + y^2 = 5$.

Solución:

1) Definimos la función de Lagrange.

$$F(x, y\ \tau) = x + 2y + \tau(x^2 + y^2 - 5).$$

2) Formamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} F'_x(x, y\ \tau) = 0, \ \ 1 + 2x\tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = -\dfrac{1}{2x}\ (i) \\ F'_y(x, y\ \tau) = 0, \ \ 2 + 2y\tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = -\dfrac{1}{y}\ \ (ii) \\ F'_\tau(x, y\ \tau) = 0, \ \ x^2 + y^2 - 5 = 0 \ \ (iii). \end{cases}$$

3) Resolvemos el sistema anterior.

$$(i) = (ii)\ \ -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{y} \quad \therefore \quad x = \frac{y}{2}\ \ (iv)$$

$$(iv)\ en\ (iii)\quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 - 5 = 0 \ \therefore\ 5y^2 = 20 \ \therefore\ y = 2, (v) \quad y = -2\ (vi)$$

$$(v)\ en\ (iv)\quad x = 1, \qquad (vi)\ en\ (iv)\quad x = -1.$$

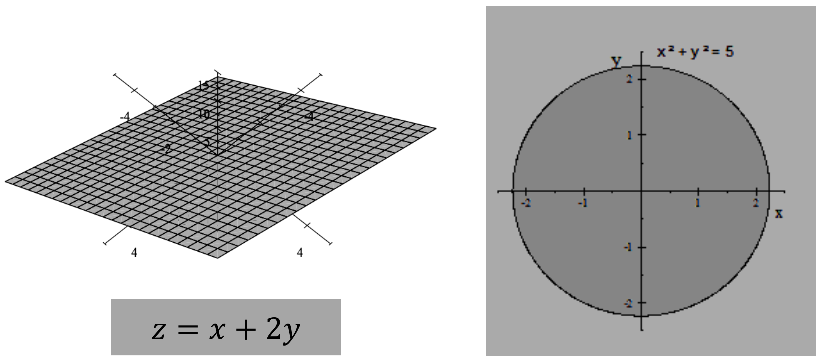
$$(v)\ en\ (ii)\quad \tau = -\frac{1}{2}, \qquad (vi)\ en\ (ii)\quad \tau = \frac{1}{2}.$$

$$Puntos\ críticos: \qquad \left(1,2,-\frac{1}{2}\right);\ \left(-1,-2,\frac{1}{2}\right).$$

4) Los puntos $(1,2)$ y $(-1,-2)$, son los únicos puntos posibles para los cuales *z* tiene un extremo relativo. Entonces

$$z\Big|_{(1,2)} = 1 + 4 = 5 \qquad y \qquad z\Big|_{(-1,-2)} = -1 - 4 = -5$$

Por lo que el mínimo relativo de *z* es – 5 y el máximo relativo 5.



a) b)

Figura 1.38

2. *Hallar los extremos condicionados de la función* $z = cos^2x + cos^2y$, *si* $y - x = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

1) Definimos la función de Lagrange.

$$F(x, y\ \tau) = cos^2x + cos^2y + \tau\left(y - x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2) Formamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} F'_x(x, y\,\tau) = 0, & -2sen\,x\cos x - \tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = -sen\,2x\ (i) \\ F'_y(x, y\,\tau) = 0, & -2seny\cos y + \tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = sen\,2y\ \ (ii) \\ F'_\tau(x, y\,\tau) = 0, & y - x - \dfrac{\pi}{4} = 0 \quad \therefore \quad y = x\ + \dfrac{\pi}{4}\ \ (iii). \end{cases}$$

3) Resolvemos el sistema anterior.

$$(i) = (ii) - sen\,2x = \ sen\,2y \quad \therefore\ sen\,2x = -sen\,2y\ (iv)$$

$$(iii)\ \ en\ (iv)\quad sen\,2x = -sen\,2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ \therefore\ \ sen\,2x = -\cos 2x \quad \div \cos 2x$$

$$tg\,2x = -1\ \ \rightarrow\ 2x = arc\ tg(-1)\ \ \rightarrow 2x = \ \frac{3\pi}{4}\quad y\quad 2x = \frac{7\pi}{4}\ \ \therefore$$

$$x = \tfrac{3\pi}{8} + k\pi\ \ (v)\quad y\quad x = \tfrac{7\pi}{8} + k\pi\ \ (vi).$$

$$(v)\ en\ (iii)\quad y = \frac{3\pi}{8} + k\pi + \frac{\pi}{4}\quad \therefore\ \ y = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

$$(vi)\ en\ (iii)\quad y = \frac{7\pi}{8} + k\pi + \frac{\pi}{4}\quad \therefore\ \ y = \frac{9\pi}{8} + k\pi$$

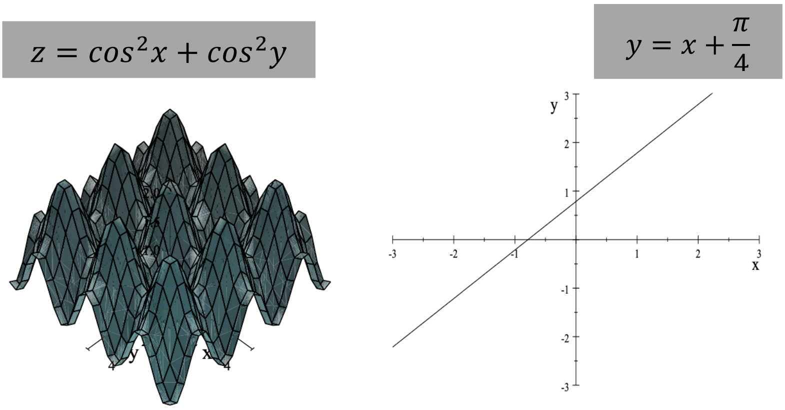
$$(v)\ en\ (i)\ \ \tau = -\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad (vi)\ en\ (i)\quad \tau = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$Puntos\ críticos:\qquad \left(\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi\,, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \ \left(\frac{7\pi}{8} + k\pi, \frac{9\pi}{8} + k\pi\,, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4) Los puntos $\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{8} + k\pi, \frac{9\pi}{8} + k\pi\right)$, son los únicos puntos posibles para los cuales *z* tiene un extremo relativo. entonces

$$z\left|_{\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right. \qquad y \qquad z\left|_{\left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right.$$

Por lo que el mínimo relativo de *z* es $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ y el máximo relativo $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.



a) b)

Figura 1.39

3. *Encontrar los extremos condicionados de la función* $u = xy + yz$, *si* $x^2 + y^2 = 2$ *y* $y + z = 2$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

1) Definimos la función de Lagrange.

$$F(x, y, \tau, \mu) = xy + yz + \tau(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2).$$

2) Formamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \tau, \mu) = 0, & y + 2x\tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = -\dfrac{y}{2x} \quad (i) \\ F'_y(x, y, \tau, \mu) = 0, & x + z + 2y\tau + \mu = 0 \quad (ii) \\ F'_z(x, y, \tau, \mu) = 0, & y + \mu = 0 \quad \therefore \quad \mu = -y \quad (iii) \\ F'_\tau(x, y, \tau, \mu) = 0, & x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \therefore \quad x = \sqrt{2 - y^2} \quad (iv) \\ F'_\mu(x, y, \tau, \mu) = 0, & y + z - 2 = 0 \quad \therefore \quad z = 2 - y \quad (v). \end{cases}$$

3) Resolviendo el sistema anterior.

$$(i), (iii), (iv)\ y\ (v)\ en\ (ii) \quad \sqrt{2 - y^2} + 2 - y + 2y\left(-\frac{y}{2\sqrt{2 - y^2}}\right) - y = 0$$

$$\therefore \quad 2 - y^2 + (2 - 2y)\sqrt{2 - y^2} - y^2 = 0 \quad \therefore \quad 2(1 - y^2) + 2(1 - y)\sqrt{2 - y^2} = 0$$

$$(1 + y)(1 - y) + (1 - y)\sqrt{2 - y^2} = 0 \quad \therefore \quad (1 - y)\left(1 + y + \sqrt{2 - y^2}\right) = 0$$

$$\therefore 1 - y = 0 \ \rightarrow \ y = 1\ (6) \quad y \quad 1 + y + \sqrt{2 - y^2} = 0\ (vii).$$

(vii) Ecuación que tendrá raíces extrañas, datos que no sirven para el análisis.

$$(vi)\ \ en\ (iv)\ \ x = 1;\ \ (vi)\ \ en\ (v)\ \ z = 1;\ \ \ (vi)\ \ en\ (i)\ \tau = -\frac{1}{2};\ \ (vi)\ \ en\ (iii)\ \mu = -1$$

$\acute{U}nico\ Punto\ cr\acute{i}tico$: $\left(1,1\,,1,-\frac{1}{2},-1\right)$.

4) El punto $(1,1\,,1)$, es el único punto posible para el cual ***u*** tiene un extremo relativo. Entonces

$$u\Big|_{(1,1\,,1)} = 1 + 1 = 2.$$

Por lo que el máximo relativo de *u* es 2.

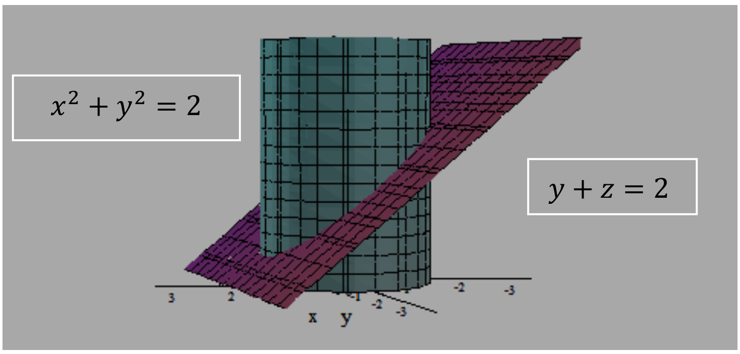


Figura 1.40

1.10.9. Problemas de aplicación sobre máximos y mínimos absolutos

Como sabemos el cálculo diferencial es una poderosa herramienta para resolver problemas que exigen maximizar o minimizar una función. A continuación, citaremos un procedimiento sencillo para poder encontrar su solución.

Procedimiento:

1) Cuando sea posible, dibújese una figura para ilustrar el problema, inclúyase las partes importantes del mismo. Téngase en cuenta que letras representan constantes y cuales representan variables.

2) Defínase la ecuación de la cantidad que va a ser maximizada o minimizada (a esta se le conoce como la función objetivo). Es importante expresarla en términos de dos variables independientes. Esto puede requerir algo de manipulación algebraica o la utilización de las condiciones del ejemplo.
3) Encuentre los puntos críticos aplicando la teoría de máximos y mínimos de funciones.
4) Por lo general en estos problemas, fácilmente podemos determinar cuál valor es máximo y cual mínimo, y cuando no es posible nos valemos del criterio de la segunda derivada.
5) Determinamos el valor máximo o mínimo pedido en el problema.

Ejemplos:

1. *Encuentre las dimensiones relativas de una caja rectangular, sin tapa que tiene un volumen **V** dado, si se desea emplear la mínima cantidad de material en su elaboración.*

Solución:

1) Realizamos la figura (Fig. 1.41).

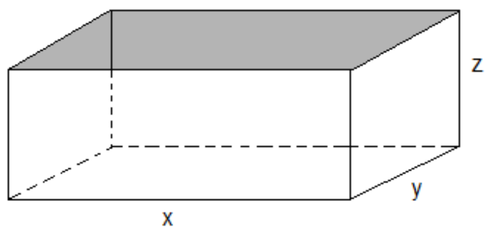


Figura 1.41

2) Definimos la función objetivo, en este caso será el área de la caja ***S*** en unidades cuadradas.

$$S = xy + 2xz + 2yz \ (i)$$

Como podemos observar, la función definida es de tres variables independientes, por lo que será necesario recurrir a la condición extra del problema para ponerlo en función de dos variables solamente, la condición en este caso nos dice que el volumen de la caya *V* es constante, por lo que luego de definirlo, despejamos z como función de *x, y* y *V*, para reemplazarlo en la función objetivo.

$$V = x\,y\,z \quad \therefore \quad z = \frac{V}{x\,y}\,(ii)$$

$$(ii) \;\; en\; (i).$$

$$S = xy + 2x\left(\frac{V}{xy}\right) + 2y\left(\frac{V}{xy}\right) \quad \therefore \quad S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}\,(función\ objetivo).$$

3) Encontramos los puntos críticos.

Hallamos las derivadas parciales y les igualamos a cero, formando el sistema.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 = y - \frac{2V}{x^2} \;\;\therefore\;\; x^2y - 2V = 0 \;\;\therefore\;\; 2V = \; x^2y \;\;(iii).$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = x - \frac{2V}{y^2} \;\;\therefore\;\; xy^2 - 2V = 0 \;\;\therefore\;\; 2V = xy^2 \;\;(iv).$$

Resolvemos el sistema formado por (*iii*) y (*iv*).

$$(iii) = (iv) \quad x^2y \;=\; xy^2 \quad \therefore \quad x = y\,(v)$$
$$(v)\;\; en\;\; (iii) \quad 2V = y^3 \quad \therefore \quad y = \sqrt[3]{2V}\,(vi).$$
$$(vi)\; en\; (v) \quad x = \sqrt[3]{2V}$$

Entonces el punto crítico es:

$$\left(\sqrt[3]{2V}\,;\sqrt[3]{2V}\;\right).$$

4) En este problema podemos fácilmente deducir que el valor encontrado es el solicitado, pues es el único. Para comprobar vamos a utilizar el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3} = \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} = 2V; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3} = \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} = 2V; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} = 1$$

Formamos el discriminante.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 2V * 2V - 1 = 4V^2 - 1 > 0$$

Como V tiene un valor positivo diferente de cero, concluimos que el discriminante es mayor a cero, condición necesaria para la existencia de extremos y como $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} > 0$, el punto crítico representa un mínimo.

Encontramos el valor de la profundidad z.

$$(v)\ y\ (vi)\ en\ \ (2)\quad z = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2} \quad \therefore \quad z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

5) En conclusión, la caja debe tener base cuadrada y una profundidad del medio de la longitud de uno de sus lados, el área mínima de material a usar en la construcción será:

$$S = \sqrt[3]{2V} * \sqrt[3]{2V} + 2\sqrt[3]{2V} * \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} + 2\sqrt[3]{2V} * \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} = 3\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2 u^2.$$

2. *Hay que dividir el número 12 en tres sumandos no negativos de manera que el producto de estos sea máximo.*

Solución:

1) Realizamos el gráfico haciendo un análisis del sentido del problema, por lo que la función $f(x, y)$ debemos examinarle dentro del triángulo cerrado $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 12$ (Fig. 1.42). Luego definimos los sumandos del número 12.

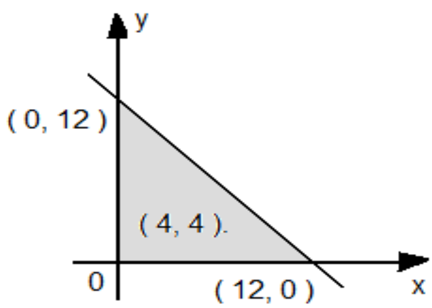


Figura 1.42

Sumandos del número 12: $x, y, 12 - x - y \quad (i)$

2) Definimos la función objetivo. Según la condición del problema tenemos:

$$f(x,y) = x * y * (12 - x - y)\ (ii)$$

3) Encontramos los puntos críticos.

Hallamos las derivadas parciales y les igualamos a cero, formando el sistema.

$$f'_x(x,y) = 0 = -xy + 12y - xy - y^2 \ \therefore\ \ y(12 - 2x - y) = 0 \quad (iii).$$

$$f'_y(x,y) = 0 = -xy + 12x - xy - x^2 \ \therefore\ \ x(12 - x - 2y) = 0 \quad (iv).$$

Resolvemos el sistema formado por *(iii)* y *(iv).*
De *(iii)* $y = 0$ *o* $12 - 2x - y = 0\ (v)$
De *(iv)* $x = 0$ *o* $12 - x - 2y = 0\ (vi)$.

$$(v) + (vi) * (-2)\ \ 12 - 2x - y - 24 + 2x + 4y = 0 \ \therefore\ \ y = 4\ (vii).$$
$$(vii)\ en\ (v)\ \ 12 - 2x - 4 = 0 \ \therefore\ \ x = 4.$$

Entonces los puntos críticos son:

$$(0,0); (4\,;4\,).$$

4) En este problema podemos fácilmente deducir que el valor que nos conviene es el punto $(4\,;4\,)$. Para comprobar vamos a utilizar el criterio de la segunda derivada.

Encontramos las segundas derivadas.

$$f''_{xx}(x,y) = -2y \ \therefore\ f''_{xx}(4,4) = -8;$$
$$f''_{xy}(x,y) = 12 - 2x - 2y \ \therefore\ f''_{xy}(4,4) = -4;$$
$$f''_{yy}(x,y) = -2x \ \therefore\ f''_{yy}(4,4) = -8;$$

Formamos el discriminante.

$$f''_{xx}(x,y) * f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = (-8) * (-8) + 4 = 68 > 0$$

Como el discriminante es mayor a cero, condición necesaria para la existencia de extremos y como $f''_{xx}(4,4) < 0$, el punto crítico representa un máximo.

5) En conclusión, los sumandos del número 12 son: 4, 4 y 4. Y como en el contorno del triángulo $f(x,y)$ =0, este máximo, será el máximo absoluto de dicha función. Por lo que el producto máximo es:

$$f máx. = 4 * 4 * 4 = 64.$$

3. *La temperatura en un punto (x,y) de una placa de metal es $T = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga camina sobre la placa alrededor del círculo de radio 5 con centro en el origen. ¿Cuáles son las temperaturas mayor y menor que encuentra la hormiga?*

Solución:
Este problema de aplicación se resuelve, aplicando la teoría de los extremos condicionados.

1) Definimos la función de Lagrange.

$$F(x, y\, \tau) = 4x^2 - 4xy + y^2 + \tau(x^2 + y^2 - 25).$$

2) Formamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} F'_x(x, y\, \tau) = 0, \quad 8x - 4y + 2x\,\tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = \dfrac{2y - 4x}{x} \quad (i) \\ F'_y(x, y\, \tau) = 0, \quad -4x + 2y + 2y\,\tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = \dfrac{2x - y}{y} \quad (ii) \\ F'_\tau(x, y\, \tau) = 0, \quad x^2 + y^2 - 25 = 0 \qquad (iii). \end{cases}$$

3) Resolvemos el sistema anterior.

$$(i) = (ii)\ \frac{2y - 4x}{x} = \frac{2x - y}{y} \ \therefore\ 2y^2 - 4xy = 2x^2 - xy \ \therefore 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$$

$$\frac{(2x + 4y)(2x - y)}{2} = 0 \ \therefore\ (x + 2y)(2x - y) = 0 \ \therefore$$

$$x = -2y \ (iv) \ o \ x = \frac{y}{2} \ (v)$$

$$(iv) \ en \ (iii) \ (-2y)^2 + y^2 = 25 \ \therefore \ 5y^2 = 25 \ \therefore$$
$$y = \pm\sqrt{5} \ (vi).$$
$$(vi) \ en \ (iv) \ x = \mp 2\sqrt{5} \ (vii).$$

$$(v) \ en \ (iii) \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 = 25 \ \therefore \ 5y^2 = 100 \ \therefore$$
$$y = \pm\, 2\sqrt{5} \ (viii).$$
$$(viii) \ en \ (v) \quad x = \pm\sqrt{5} \ (ix).$$

$$(vi) \ y \ (vii) \ en \ (i) \quad \tau = \frac{2(\pm\sqrt{5}) - 4(\mp 2\sqrt{5})}{\mp 2\sqrt{5}} \quad \therefore \ \tau = 3 \ (x).$$

$$(viii) \ y \ (ix) \ en \ (i) \quad \tau = \frac{2(\pm 2\sqrt{5}) - 4(\pm\sqrt{5})}{\pm\sqrt{5}} \quad \therefore \ \tau = 0 \ (xi).$$

$$Puntos\ críticos: \quad \left[\pm(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\,,), 3\right]; \quad \left[\pm(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\,,), 0\right].$$

4) Los puntos $\pm(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ y $\pm(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, son los únicos puntos posibles para los cuales *z* tiene un extremo relativo. entonces

$$z\Big|_{\pm(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})} = 125 \qquad y \qquad z\Big|_{\pm(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})} = 0$$

Por lo que el mínimo relativo de *z* es 0 en los puntos $\pm(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, y el máximo relativo 125 en los puntos $\pm(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

4. *Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del planeta sea más débil. El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades (Figura 1.43). La fuerza del campo magnético viene dada por* $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$ *basado en un sistema de coordenadas cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá que ubicar el radiotelescopio?*

Solución:

Este problema de aplicación se resuelve, utilizando la teoría de los extremos condicionados.

1) Definimos la función de Lagrange.

$$F(x, y, z, \tau) = 6x - y^2 + xz + 60 + \tau(x^2 + y^2 + z^2 - 36).$$

2) Formamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} F'_x(x, y\,\tau) = 0, \quad 6 + z + 2x\,\tau = 0 \quad \therefore \quad z = -6 - 2x\,\tau \quad (i) \\ F'_y(x, y\,\tau) = 0, \quad -2y + 2y\,\tau = 0 \quad \therefore \quad \tau = 1 \quad (ii) \\ F'_z(x, y\,\tau) = 0, \quad x + 2z\tau = 0 \quad \therefore \quad z = -\dfrac{x}{2\tau} \quad (iii) \\ F'_\tau(x, y\,\tau) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \quad (iv). \end{cases}$$

3) Resolvemos el sistema anterior.

$$(ii)\ en\ (i)\ z = -6 - 2x\ (v); \quad (ii)\ en\ (iii)\ \ z = -\frac{x}{2}\ (vi)$$

$$(v) = (vi) - 6 - 2x = -\frac{x}{2} \ \therefore\ 3x = -12 \ \therefore\ x = -4\ (vii)$$

$$(vii)\ en\ (vi)\ z = -\left(\frac{-4}{2}\right) \ \therefore\ z = 2\ (viii)$$

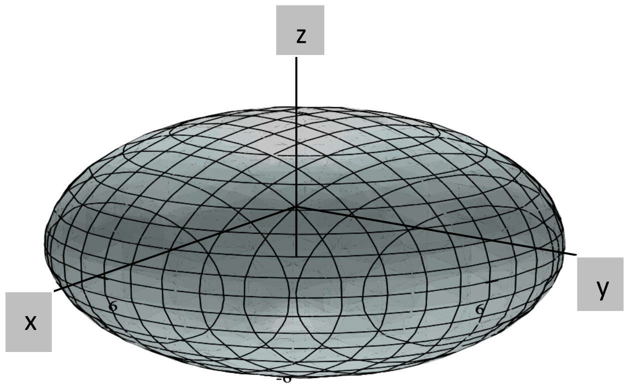
$$(vii)\ y\ (viii)\ en\ (iv)\ (-4)^2 + y^2 + (2)^2 - 36 = 0 \ \therefore\ y^2 = 16 \ \therefore y = \pm 4\ (ix).$$

$$Puntos\ críticos: \quad (-4, 4, 2, 1)\ ; \quad (-4, -4, 2, 1).$$

4) Los puntos $(-4, 4, 2)$ y $(-4, 4, 2\,)$, son los únicos puntos posibles para los cuales *M* tiene un extremo relativo. Entonces

$$M\Big|_{(-4,4,2)} = 12 \qquad y \qquad M\Big|_{(-4,-4,2)} = 12$$

Como podemos ver en el ejemplo en los dos puntos tenemos el mismo valor de *M*. Por lo que, para concluir, diríamos que cualquiera de los dos puntos es bueno para la ubicación del radiotelescopio.



$$x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$$

Figura 1.43

1.11. Problemas propuestos

1.11.1. Determinar y representar los campos de existencia de las siguientes funciones

1. $z = y + \sqrt{x}$.

2. $z = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$.

3. $z = \frac{1}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}$.

4. $z = \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{y^2 - 5}$.

5. $z = \sqrt{(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}$.

6. $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - (x^2 + y^2)}}$.

7. $z = ln\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

8. $z = \frac{1}{4x^2 + 9y^2 - 36}$.

9. $z = ln(x^2 + y^2)$.

10. $z = arc\ sen\ \frac{x}{y^2} + arc\ sen\ (1 - y)$.

11. $z = \sqrt{sen\ (x^2 + y^2)}$.

12. $u = arc\ cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

13. $u = ln(xyz)$.

14. $u = ln\sqrt{-1 - x^2 - y^2 + z^2}$.

15. *Hallar* $f(x, y), f(-x - y),\ f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),\ \frac{1}{f(x,y)}$ *si* $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - (x^2 + y^2)}}$.

16. *Encontrar el valor de la función* $z = \frac{4 - x^2 - y^2}{4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^2}$ *en los puntos de la circunferencia* $x^2 + y^2 = a^2$.

17. *Determinar* $f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ *si* $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

18. *Hallar* $f(x)$, *si* $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$.

1.11.2. Realizar las gráficas y las curvas de nivel de las siguientes funciones

1. $z=x^2-y^2$.

2. $z=x+y$.

3. $z=\sqrt{xy}$.

4. $z=(1+x+y)^2$.

5. $z=1-|x|-|y|$.

6. $z=\frac{2x}{x^2+y^2}$.

1.11.3. Evaluar los siguientes límites

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x-2y}{x^4-16y^4}$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-y}}{x^3-y^3}$.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} arc\ tg\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{x^2+y^2}{x+y+1}$.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$.

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{sen\ xy}{sen\ \pi xy}$.

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

1.11.4. Encontrar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones

1. $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$.

2. $z=\frac{xy}{x+y}$.

3. $z=\frac{1}{sen\ x\ \ sen\ y}$.

4. $z=ln\,(2-x^2-y^2)$.

5. $z=\frac{x+y}{x^2+y^2}$.

6. $u=\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}}$.

7. *Determinar si es continua la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & si\ \ x^2+y^2\le 1\\ \qquad 0 & ,\ si\ \ x^2+y^2<1.\end{cases}$$

8. *Determine en las funciones, si la discontinuidad es removible o esencial. Si la discontinuidad es removible, redefina la función, de forma que se transforme en continua en el punto* $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+xy+y^2}$.

b) $f(x,y) = (x+y)sen\ \frac{x}{x^2+y^2}$.

c) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

d) $f(x,y) = \frac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2}$.

1.11.5. Problemas sobre derivadas parciales

1. *Utilizando la definición, calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones.*

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 3x$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

c) $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y}$.

d) $f(x,y) = \sqrt{x+y} - 2xy$.

e) $f(x,y) = ln(x^2+y)$.

f) $f(x,y) = cos\ (3x+y^2)$.

g) $f(x,y,z) = sen\ (xy+z)$.

2. *Aplicando los teoremas de derivación común, encuentre las derivadas parciales de las funciones.*

a) $z = arc\ sen\ \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

b) $z = (x^2+y^2)\ arc\ tg\ \left(\frac{x}{y}\right)$.

c) $z = e^{-y/x} + ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

d) $z = arc\ sen\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

e) $z = x^2\ sen\ (x-y)$.

f) $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

g) $u = \frac{cos\ x^z}{y}$.

h) $u = ln(x^2+y^2+z^2)$.

i) $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$.

j) $u = z^{x^y}$

k) *Demostrar, que* $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = xy + z$, *si* $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$.

l) *El área de un trapecio de bases A, B y de altura H es igual a* $S = \frac{(A+B)}{2} * H$. *Hallar* $\frac{\partial S}{\partial A}, \frac{\partial S}{\partial B}, \frac{\partial S}{\partial H}$ *y mediante un dibujo, esclarecer su sentido geométrico.*

3. *Calcule las derivadas parciales indicadas.*

a) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$; f_{xx}; f_{xy} *y* f_{yy}.
b) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; f_{xx}; f_{xy} *y* f_{yy}.
c) $f(x, y) = arc\ tg\ \frac{2xy}{x^2-y^2}$; f_{xx}; f_{xy} *y* f_{yy}.
d) $z = arc\ tg\ \frac{y}{x} + \frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
e) $z = ln\, cos(x - y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
f) $u = x^3\ sen\ y + y^3\ sen\ x$; $\frac{d^6 u}{\partial x^3\, \partial y^3}$.
g) $u = (x - a)^m (y - b)^n$; $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m\, \partial x^n}$.
h) $u = xyz^{x+y+z}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$.

4. *Demostrar, que la función* $u = ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ *(a y b constantes) satisface a la ecuación de Laplace* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. *Comprobar, que la función* $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$ *(a y b constantes) satisface la ecuación del calor* $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

6. *Demostrar, que la función* $u(x, t) = A\ sen\ (a\, \tau\, t + \beta) sen\ \tau x$ *satisface a la ecuación de la vibración de la cuerda* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

7. *Determine la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie* $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ *con el plano x = 1 en el punto* $\left(1, \sqrt{12}, -3\right)$. *Interprete está pendiente como una derivada parcial.*

8. *Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *con el plano y = 2 en el punto* $(1, 2, 2)$. *Encuentre la ecuación de la tangente.*

1.11.6. Problemas sobre diferenciales totales

1. *Hallar las diferenciales de primero y segundo orden de las siguientes funciones.*

a) $z = x^p\, y^q$.

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) $u = ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

d) $u = \sqrt[z]{\frac{y}{x}}$.

e) $u = \frac{x}{y^2+z^2}$.

f) $z = x\, ln(y\, x)$.

2. *Encontrar las diferenciales totales del orden indicado en los siguientes ejercicios.*

a) d^3z, *si* $z = sen\,(x^3 + y^3)$.

b) d^3u, *si* $u = x^2 + y^2 - 3xy(x - y)$.

c) d^5z, *si* $z = ln(x + y)$.

d) d^4z, *si* $z = cos\, x\; ch\, y$.

e) d^3u, *si* $u = xyz$.

f) d^4u, *si* $u = ln(x^x y^y z^z)$.

3. *Sustituyendo el incremento de la función por el diferencial calcular aproximadamente.*

a) $2{,}07^{1.03}$.

b) $sen\; 21°\; tg\; 43°$.

c) $\sqrt{(1.04)^2 + (1{,}09)^2}$.

d) $\frac{(1.03)^2}{\sqrt[3]{2.07\ \sqrt[4]{1.05^3}}}$

4. *¿Cuánto variará la diagonal y el área de un rectángulo de lados a = 9 m y b = 12 m, si el primer lado se disminuye en 3 mm y el segundo aumenta 7 mm?*

5. *El ángulo central de un sector circular* $\theta = 45°$ *disminuyo 1.5°. ¿Cuánto hay que aumentar al radio del sector* $R = 15\ cm$*, para que su área permanezca constante?*

6. *Un recipiente en forma de cilindro circular recto, cuyas dimensiones exteriores son radio igual a 15 cm y altura 25 cm, está hecho de una plancha de* $\frac{1}{4}$ *de pulgada de espesor. Calcular el volumen exacto y aproximado del material que se gasto en su construcción.*

7. *La resistencia R producida por otras dos en paralelo de x e y ohms puede calcularse mediante la fórmula* $\frac{1}{R} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. *¿En qué porcentaje aproximado cambiará R si x crece de 25 a 25.2 ohms, e y decrece de 30 a 20.9 ohms?*

8. *Supongamos que* $u = xe^y + y\, sen\, z$ *y que x, y y z pueden medirse con errores máximos posibles de* ± 0.2, ± 0.6 *y* $\pm \frac{\pi}{180}$, *respectivamente. Estimase el error máximo posible cometido al calcular u a partir de los valores x = 3, y = ln 3,* $z = \frac{\pi}{2}$.

1.11.7. Problemas sobre la regla de la cadena, derivadas direccionales y gradientes

1. *Determine la derivada parcial indicada por medio de dos métodos: a) utilice la regla de la cadena; b) sustituya x e y antes de derivar.*

   a) $u = x^2 - y^2;\ x = 3t - r;\ y = t + 2r;\ \frac{\partial u}{\partial t};\ \frac{\partial u}{\partial r}$.
   b) $u = x^2 + y^2; x = ch\, r \cos t;\ \ y = sh\, r\, sen\, t; \frac{\partial u}{\partial t};\ \frac{\partial u}{\partial r}$.
   c) $V = \pi\, R^2 H;\ R = \cos z\, sen\, t; H = z^2 e^t;\ \frac{\partial V}{\partial z};\ \frac{\partial V}{\partial t}$.
   d) $u = xy + xz + yz;\ \ x = rs; y = r^2 - s^2;\ \ z = (r - s)^2;\ \frac{\partial u}{\partial r};\ \frac{\partial u}{\partial s}$.
   e) $w = x^2 + y^2 + z^2; x = rsen\varphi \cos\theta; y = rsen\varphi\, sen\,\theta; z = r\cos\varphi;\ \frac{\partial w}{\partial r};\ \frac{\partial w}{\partial \varphi};\ \frac{\partial w}{\partial \theta}$.

2. *Encuentre la derivada total* $\frac{du}{dt}$ *mediante dos métodos: a) utilice la regla de la cadena; b) realice la sustitución de x e y antes de derivar.*

a) $u = e^x y + e^y x; x = \cos t;\ \ y = sen\, t$.
b) $u = \ln yx + x^2; x = e^{-t};\ \ y = e^t$.
c) $u = \frac{e^x + t}{y - e^t}; x = 3\, sen\, t;\ \ y = \ln t$.
d) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}; x = R\cos t;\ \ y = R\, sen\, t;\ \ z = H$.

3. *Demostrar, que si* $u = G(x^2 + y^2 + z^2)$, *donde* $x = R\cos\varphi\cos\theta;\ y = R\cos\varphi\, sen\,\theta$

$$Y\ z = R\, sen\varphi, \text{ entonces, } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

4. *Hallar* $\frac{\partial y}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial y}{\partial x}$, *si* $z = arc\,tg\,\frac{y}{x}$, *donde* $x = u\cos v,\;\; y = u\,sen\,v.$

5. *Hallar* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, *si* $z = f(u,v)$, *donde* $u = x^2 + y^2;\;\; v = xy.$

6. *Se introduce agua en un tanque que tiene forma de cilindro circular recto a una tasa de* $\frac{3}{5}\pi\ {m^3}/{min}$ *El tanque se ensancha de modo que, aún cuando conserva su forma cilíndrica su radio se incrementa a una tasa de 0.18 cm / min. ¿Qué tan rápido sube la superficie del agua cuando el radio es de 1.5 m y el volumen del agua en el tanque es* $15\pi\ m^3$*?*

7. *Una cantidad de gas obedece a la ley del gas ideal con k = 1.2, y el gas está encerrado en un recipiente que se calienta a una tasa de 4 K / min. Si en el instante en que la temperatura es de 310 K, la presión es de 5 atm y decrece a la tasa de 0.1 atm / min, calcule la tasa de variación del volumen en este instante.*

8. *Una pared de retención forma un ángulo de 120° con el suelo. Una escalera de 7 m de longitud esta recargada contra la pared y su parte superior se desliza hacia abajo sobre la pared a una tasa de 75 cm /s. ¿Qué tan rápido varía el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el piso cuando la escalera forma un ángulo de 30° con el suelo?*

9. *Aplicando la definición encontrar la derivada direccional de la función f en la dirección que se indica.*

   a) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2};\;\; \theta = 45°.$
   b) $f(x,y) = 5x^3y + 3xy^2;\;\; \theta = 60°.$
   c) $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - 8z^2;\;\; \alpha = \frac{\pi}{3},\; \beta = \frac{\pi}{4}\;\; y\;\; \gamma = \frac{2\pi}{3}.$
   d) $f(x,y,z) = 4x^2 - 5xy + 3yz;\;\; \boldsymbol{U} = \frac{3}{7}\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{7}\,\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\,\boldsymbol{k}.$
   e) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2};\;\; \boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}}\,\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\,\boldsymbol{j}.$

10. *Halle el valor de la derivada direccional en el punto* P_0 *para la función en la dirección de U.*

   a) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2;\; \boldsymbol{U} = cos\,\pi\,\boldsymbol{i} + sen\,\pi\,\boldsymbol{j};\;\; \boldsymbol{P_0}(1,-2).$

b) $h(x,y) = y^2\, tg^2 x$; $\boldsymbol{U} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{P_0}\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$.
c) $g(x,y) = x^x y$; $\boldsymbol{U} = cos\frac{\pi}{3}\,\boldsymbol{i} + sen\,\frac{\pi}{3}\,\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{P_0}(2,0)$.
d) $f(x,y,z) = ln(x^2+y^2+z^2)$; $\boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{P_0}(1,3,2)$.
e) $g(x,y,z) = cos(xy) + sen\,(yz)$; $\boldsymbol{U} = -\frac{1}{3}\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\,\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\,\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{P_0}(2,0,-3)$.

11. *Encuentre el gradiente de la función.*

a) $g(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^2}$.
b) $f(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2-9}$.
c) $h(x,y) = arc\;tg\;\frac{x\,y}{x^2+y^2}$.
d) $f(x,y,z) = x\,e^{-2y}\,sec\,z$.
e) $g(x,y,z) = e^{2z}(sen\,x - cos\,y)$.

12. *Calcule la gradiente y la tasa de variación de la función, en la dirección de U en P.*

a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$; $P(-2,2)$; $\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{j}$.
b) $f(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2-9}$; $P(2,5)$; $\boldsymbol{U} = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{j}$.
c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4yz$; $P(-2,1,-3)$; $\boldsymbol{U} = \frac{2}{7}\,\boldsymbol{i} - \frac{6}{7}\,\boldsymbol{j} + \frac{3}{7}\,\boldsymbol{k}$.
d) $g(x,y,z) = cos\,3x\,cos\,5x\,sh\,6z$; $P\left(\frac{\pi}{12}, 0{,}0\right)$; $\boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$.

13. *Dibuje un mapa de contornos que muestre las curvas de nivel de la función* $g(x,y) = e^{2xy}$ *, para* $e^8, e^4, 1, e^{-4}$ *y* e^{-8} *. También muestre la representación de* $\nabla f(2,1)$ *cuyo punto inicial es* $(2,1)$.

14. *Construir un mapa de contornos que muestre las curvas de nivel de la función* $h(x,y) = x^2 - 4y$, *para 8, 4, 0, -4 y -8. También muestre la representación de* $\nabla f(-2,2)$ *cuyo punto inicial es* $(-2,2)$.

15. *Hallar la derivada de la función* $z = e^x\,cos\,y + e^y sen\,x$ *en el punto* $P(1,0)$, *en la dirección que va desde éste al punto* $M(-3,3)$.

16. *Encuentre la derivada de la función* $u = x^2 + y^2 - 4xz$ *en el punto* $Q(3,1,-2)$, *en la dirección que va desde éste al punto* $R(-6,3,4)$.

17. *Calcule la derivada direccional de la función* $u = 2x^2 - 6yz + 10$ *en el punto* $R(2,4,-2)$ *en la dirección que forma ángulos iguales con todos los ejes de coordenadas.*

18. *Determine la dirección a partir del punto* $(1,3)$ *para el cual el valor de f permanece constante si* $f(x,y) = e^{3y} arc\ tg\ \left(\frac{y}{2x}\right)$.

19. *Hallar la derivada de la función* $u = x^2 - xy + y^2$ *en el punto* $A(2,2)$ *en la dirección que forma un ángulo* θ *con la dirección positiva del eje "x". ¿En qué dirección esta derivada: a) alcanza el valor máximo; b) alcanza el valor mínimo; c) es igual a 0?*

20. *Una ecuación de la superficie de una montaña es* $u = 1200 - 3x^2 - 2y^2$ *donde la distancia se mide en metros, el eje "x" apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Una alpinista se encuentra en el punto que corresponde a* $(-10,5,850)$. *a) ¿Cuál es la dirección de máxima inclinación? b) Si la alpinista se desplaza en la dirección este, ¿ella asciende o desciende, y a que tasa? c) Si la alpinista se desplaza en la dirección suroeste, ¿ella asciende o desciende, y a que tasa? d) ¿En qué dirección recorre la alpinista una curva de nivel?*

1.11.8. Problemas sobre derivadas implícitas

1. *Determinar* $\frac{dy}{dx}$ *y* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *de las siguientes funciones dadas en forma implícita.*

a) $1 + xy = ln(e^{xy} + e^{-xy})$.
b) $x^2 + y^2 + 2axy = 0$.
c) $y = 1 + y^x$.
d) $cos(x + y) = y\ sen\ x$.

2. *Halle* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *de las siguientes funciones dadas en forma implícita.*

a) $5x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$.
b) $z = (x^3 + y^3) sen\ 2xz$.
c) $ye^{xyz} cos\ 5xz = 5$.
d) $ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$.

3. *Calcular* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$ *si* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

4. *Determinar dz y* d^2z, *para el sistema de valores x =2, y = 0 y z = 1, si z es una función de las variables x e y determinada por la ecuación*

$$2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0.$$

1.11.9. Problemas sobre aplicaciones de las derivadas parciales

1. *Escribir las ecuaciones de los planos tangentes y de las rectas normales a las siguientes superficies en los puntos que se indican.*

a) $x^2+y^2+z^2=22;\ (3,-3,2).$
b) $x^2+y^2-5z=10;\ (-4,3,\ 3).$
c) $x^2+y^2-z^2=4;\ \ (2,-3,3).$
d) $y=e^x\cos z;\ \ (1,e,0).$
e) $z=e^{3x}\mathrm{sen}\,3y;\ \left(0,\frac{\pi}{6},1\right).$
f) $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=14;\ \ \ (-8,27,1).$
g) $x^2+y^2+z^2=2Rz;\ (R\cos\alpha\,,R\ \mathrm{sen}\ \alpha,R).$
h) $z=y+\ln\frac{x}{z};\ \ \ (1,1,1).$
i) $2^{x/z}+2^{y/z}=8;\ \ \ (2,2,1).$
j) $z=\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{y}{x}\right);\ \ \left(1,1,\frac{\pi}{4}\right).$

2. *¿En qué puntos del elipsoide* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *la normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados?*

3. *Hallar en la superficie* $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8,$ *los puntos en los que los planos tangentes son paralelos a los planos coordenados.*

4. *Si las superficies* $x^2+y^2-z=8;\ x-y^2+z^2=-2,$ *se intersecan en una curva, determine las ecuaciones de la recta tangente a la curva en el punto de intersección* $(2,-2,0).$

5. *Si las superficies* $x=2+\cos\pi yz\,;\ y=1+\mathrm{sen}\,\pi xz,$ *se intersecan en una curva, determine las ecuaciones de la recta tangente a la curva en el punto de intersección* $(3,1,2).$

6. *Pruebe que las esferas* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *y* $(x-b)^2 + y^2 + z^2 = (b-a)^2$ *son tangentes en el punto* $(a, 0, 0)$.

7. *Demuestre que las superficies* $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 108$ *y* $xyz = 36$ *son tangentes en el punto* $(3, 6, 2)$.

8. *Se dice que dos superficies son* **perpendiculares** *en un punto de intersección* P_0 *si los vectores normales a las superficies en* P_0 *son ortogonales. Demuestre que en el punto* $(1, -1, 2)$ *la superficie* $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ *es perpendicular a cada miembro de la familia de superficies* $x^2 + (4c-2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$.

9. *Encuentre los extremos relativos y los puntos de silla si existen, de las siguientes funciones.*

   a) $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$.
   b) $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y), (x > 0, y > 0)$.
   c) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}}$.
   d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.
   e) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.
   f) $z = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9$.
   g) $z = 2 + 2x + 6y - x^2 - y^2$.
   h) $z = \sqrt{x^2+y^2} + 1$.
   i) $z = 4xy^2 - 2x^2y - x$.
   j) $f(x,y) = e^x\, sen\, y$.

10. *Determine los extremos condicionados de las funciones.*

   a) $z = x^2 + y^2, \quad si \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.
   b) $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 + 5, \quad si \quad x^2 + y^2 - 2y = 0$.
   c) $z = ax^2 + 2bxy + cy^2, \ si \ x^2 + y^2 = 1$.
   d) $z = cos^2 y + cos^2 x, \ si \ x - y = \frac{\pi}{4}$.
   e) $u = xyz, \ con\ las\ condiciones: \ x + y + z = 5 \ y \ xy + yz + zx = 8$.
   f) $u = x - 2y + 2z, \ si \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
   g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \ si \ 3x - 2y + z - 4 = 0$.
   h) $u = xyz, \ si \ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$.

11. *Obtenga los extremos absolutos de la función cuyo dominio es la región acotada y cerrada R del plano xy.*

a) $z = x^2 - 2xy + 2y$; *R está acotada por:* $y = 4 - x^2$ *y el eje x.*
b) $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$; *R es la región limitada por la circunferencia* $(y-1)^2 + x^2 = 1$.
c) $z = sen\, x + sen\, y$; *R es la región acotada por el cuadrado cuyos vértices son* $(0,0), (\pi, 0), (0, \pi)$ *y* (π, π).

12. *Determine los tres números positivos cuya suma sea 36 de modo que su producto sea el mayor posible.*

13. *Obtenga tres números positivos cuyo producto sea 36 de manera que su suma sea la más pequeña posible.*

14. *Encuentre los puntos de la curva de intersección del elipsoide* $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ *y el plano* $x = z + 4$ *y que estén más cerca del origen, y calcule la distancia mínima.*

15. *Suponga que t horas después de la inyección de* ***s*** *miligramos de adrenalina la respuesta es R unidades, y* $R = t\, e^{-t}(a - s)s$, *donde a es una constante positiva. ¿Qué valores de s y t producirán la respuesta máxima?*

16. *Se construye una caja rectangular cerrada con un volumen de 500 cm^3 empleando tres tipos de materiales. El costo del material para el fondo y la tapa es de \$ 0.09 por cada centímetro cuadrado, el costo del material para el frente y la parte posterior es de \$ 0.07 por centímetro cuadrado. Calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea el mínimo.*

17. *La temperatura T en grados en cualquier punto* (x, y, z) de *la esfera de radio 9, está dado por* $T = 110x\, y^2 z$. *Calcule los puntos de la esfera donde la temperatura es la máxima y también los puntos donde es mínima. Además, determine la temperatura en estos puntos.*

18. *Un trozo de alambre de L unidades de longitud se corta en tres partes, una parte se dobla en forma de circunferencia, otra se dobla en forma de cuadrado y la tercera parte en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que a) el área combinada de las tres figuras sea la mínima posible, y b) el área combinada sea máxima?*

19. *Determine la distancia mayor y menor desde el origen a la curva de intersección de las superficies* $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 30$ *y* $2z = \frac{x^2}{y}$.

20. *Los puntos M y N están situados en diferentes medios ópticos, separados el uno del otro por una línea recta (Fig. 1.44). La velocidad de propagación de la luz en el primer medio es* v_1, *en el segundo,* v_2. *Aplicando el principio de "Fermat", según el cual el rayo luminoso se propaga a lo largo de la línea MON, para cuyo recorrido necesita el mínimo de tiempo, deducir la ley de refracción del rayo de luz.*

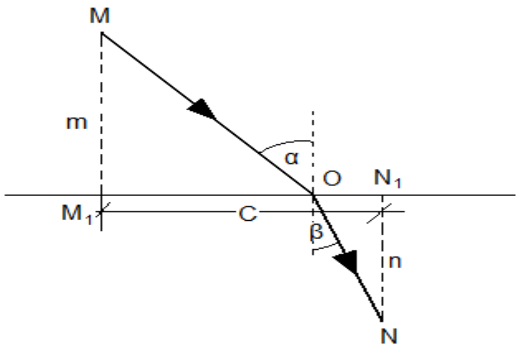


Figura 1.44

2. INTEGRALES MULTIPLES

2.1. Introducción

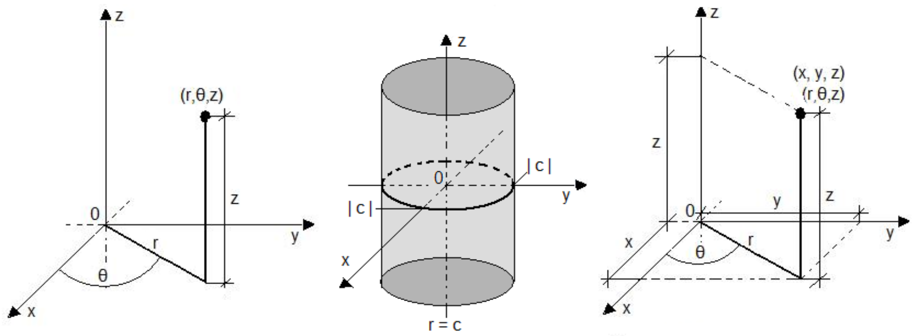
El propósito específico de este capítulo es extender el concepto de integral definida de funciones de una variable independiente, a funciones de varias variables. Se estudiarán las definiciones de integrales dobles en coordenadas rectangulares y polares, así como también sus aplicaciones geométricas y físicas. Posteriormente extenderemos estos conceptos a la integral triple y de la misma forma veremos sus aplicaciones.

Para poder simplificar algunos ejemplos de integrales triples que cumplen algunas condiciones específicas, es necesario recordar otros sistemas de coordenadas para el espacio tridimensional, tales sistemas son los de coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas, con lo cual daremos inicio a este capítulo.

2.2. Coordenadas cilíndricas y esféricas

2.2.1. Coordenadas cilíndricas

Su nombre proviene del hecho de que la gráfica de r = c es un cilindro circular recto (Fig. 2.1b). Este sistema es una extensión de las coordenadas polares a tres dimensiones. La representación de un punto en coordenadas cilíndricas es (r, θ, z), donde r y θ representan las coordenadas polares de la proyección de P en el plano polar y z es la distancia dirigida desde el plano polar hasta P (Fig. 2.1a). Se les aplica con frecuencia en problemas físicos en los que tienen un eje de simetría.



a) b) c)

Figura 2.1

Como no puede ser de otra manera existen relaciones entre coordenadas rectangulares y coordenadas cilíndricas, como observamos en la (Fig. 2.1c), estas relaciones vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$x = r\cos\theta; \qquad y = r\, sen\,\theta; \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2; \qquad tg\,\theta = \frac{y}{x} \;\; si \;\; x \neq 0; \qquad z = z$$

Ejemplos:

1. *Encuentre una ecuación en coordenadas cilíndricas para cada una de las siguientes superficies cuyas ecuaciones se dan en coordenadas cartesianas.*

a) $x^2 + y^2 + 5z^2 = 25.$

Solución:
Reemplazamos a $x^2 + y^2$ por r^2 $y\ despejamos\ r.$

$r^2 + 5z^2 = 25 \;\; \therefore \;\; z^2 = \frac{1}{5}(25 - r^2) \;\; \therefore \;\; z = \pm\sqrt{\frac{25-r^2}{5}}$ (Fig. 2.2).

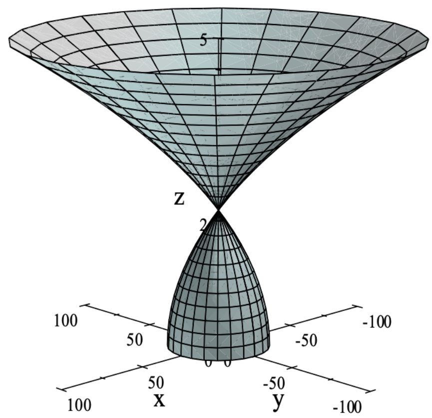


Figura 2.2

b) $x^2 - y^2 = z.$

Solución:
Reemplazamos a x por $r\,cos\ \theta$ y a y por $r\,sen\,\theta$, y luego simplificamos hasta despejar z.

$$(r\cos\theta)^2 - (r\,sen\,\theta)^2 = z \;\rightarrow\; r^2(cos^2\theta - sen^2\theta) = z \;\rightarrow\; r^2\cos 2\theta = z \;\therefore$$

$$z = r^2 \cos 2\theta \quad (Fig.\,2.3).$$

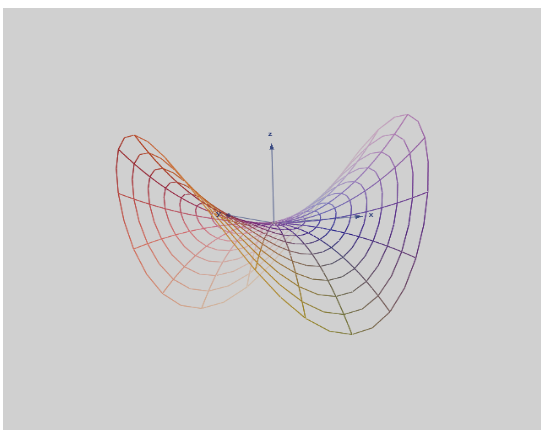


Figura 2.3

2. *Determine el conjunto principal de coordenadas cilíndricas del punto que tiene las coordenadas cartesianas indicadas.*

a) $(4, 4, -2)$.

Solución:
Encontramos el valor de *r* y θ de la siguiente manera.

$$r^2 = x^2 + y^2 \ \therefore \ r = \sqrt{x^2 + y^2} \ \therefore \ r = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}.$$

Se toma sólo el positivo ya que *r* indica distancia y esta no puede ser negativa, lo que se modifica es el ángulo.

$$\theta = arc\ tg\ \left(\frac{y}{x}\right) = arc\ tg\ \left(\frac{4}{4}\right) = arc\ tg\ (1) \ \therefore \ \theta = \frac{\pi}{4} \ \ y \ \theta = \frac{5\pi}{4}.$$

Como valores principales del ángulo, por lo que los puntos serian:

$$P_1\left(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -2\right) \quad y \quad P_2\left(4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, -2\right).$$

b) $\left(-3\sqrt{3}, 3, 6\right)$.

Solución:
Encontramos el valor de *r* y θ de la siguiente manera.

$$r^2 = x^2 + y^2 \ \therefore \ r = \sqrt{x^2 + y^2} \ \therefore \ r = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6.$$

Se toma sólo el positivo ya que ***r*** indica distancia y esta no puede ser negativa, lo que se modifica es el ángulo.

$$\theta = arc\ tg\ \left(\frac{y}{x}\right) = arc\ tg\ \left(\frac{3}{-3\sqrt{3}}\right) = arc\ tg\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \ \therefore \ \theta = \frac{11\pi}{6} \ \ y \ \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

Como valores principales del ángulo, por lo que los puntos serian:

$$P_1\left(6, \frac{5\pi}{6}, 6\right) \quad y \quad P_2\left(6, \frac{11\pi}{6}, 6\right).$$

3. *Encuentre una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas cilíndricas.*

a) $r = 3\cos\theta$.

Solución:
Multiplicando ambos lados de la ecuación dada por *r* se obtiene:

$$r^2 = 3r\cos\theta$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ y $x = r\cos\theta$, tenemos: $x^2 + y^2 = 3x$ $\therefore$

$$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + y^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}.$$

Que es la ecuación de un cilindro circular recto, cuya sección transversal está en el plano "*xy*" y es la circunferencia de centro $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y radio $= \frac{3}{2}$ (Fig. 2.4).

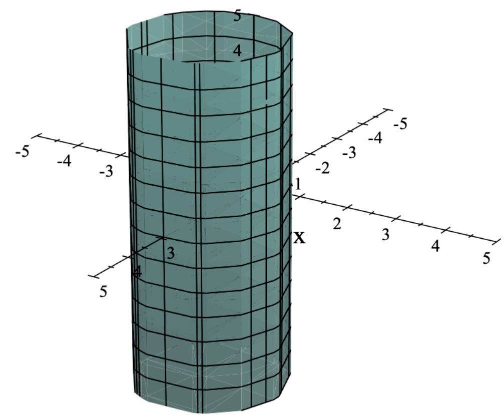


Figura 2.4

b) $r(3\cos\theta + 2\,sen\,\theta) + 6z = 0$.

Solución:
Multiplicando por ***r*** se obtiene:

$$3r\cos\theta + 2r\,sen\theta + 6z = 0$$

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\,\theta$, tenemos: $3x + 2y + 6z = 0.$

Que es la ecuación de un plano que pasa por el origen y tiene el vector $(3, 2, 6)$ como un vector normal (Fig. 2.5).

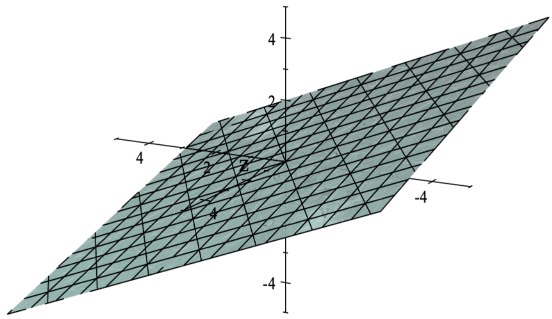


Figura 2.5

4. *Determine las coordenadas cartesianas del punto que viene dado en coordenadas cilíndricas.*

a) $\left(3, \frac{\pi}{2}, 5\right)$.

Solución:

Utilizando las ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares y cilíndricas tenemos:

$$x = r\cos\theta \quad \therefore \quad x = 3\cos\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad x = 0.$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \therefore \quad y = 3\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad y = 3.$$
$$z = z \quad \therefore \quad z = 5.$$

Por lo tanto, el punto en coordenadas cartesianas es: $(0, 3, 5)$.

b) $(1, 1, 1)$.

Solución:

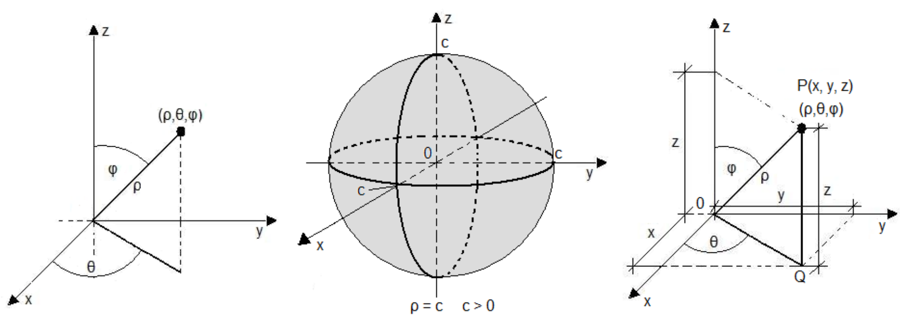
Utilizando las ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares y cilíndricas tenemos:

$$x = r\cos\theta \quad \therefore \quad x = 1\cos(1) \quad \therefore \quad x = 0.540$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta \quad \therefore \quad y = 1\operatorname{sen}(1) \quad \therefore \quad y = 0.841$$
$$z = z \quad \therefore \quad z = 1.$$

Por lo que el punto en coordenadas cartesianas es: $(0.540; 0.841;\ 1)$.

2.2.2. Coordenadas esféricas

Como su nombre indica, proviene de que la gráfica $\rho = c$ es una esfera (Fig. 2.6b). En un sistema de coordenadas esféricas se tiene un plano polar y un eje z perpendicular al plano polar, con el origen del eje como el polo del plano polar. La representación de un punto en coordenadas esféricas se representa por medio de tres números, por lo que P está representado por (ρ, θ, φ), donde $\rho = |\overline{OP}|$, θ es la medida en radianes del ángulo polar de la proyección de P en el plano polar, y φ es la medida en radianes no negativa del ángulo menor medido desde la parte positiva del eje z a la recta OP (Fig. 2.6a). El origen en coordenadas esféricas se toma como $(0, \theta, \varphi)$, donde θ y φ pueden asumir cualquier valor. Si el punto P no está en el origen, entonces $\rho > 0$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$, donde $\varphi = 0$ si P está en la parte positiva del eje z y $\varphi = \pi$ si P se encuentra en la parte negativa de z.



a) b) c)

Figura 2.6

Las coordenadas esféricas se utilizan frecuentemente cuando en un problema físico se tiene un punto como centro de simetría.

Si colocamos juntos a los dos sistemas de referencia (Fig. 2.6c), podremos deducir las relaciones entre unas y otras de un punto P de la siguiente manera:

$$x = \overline{|OQ|}\cos\theta; \qquad y = |OQ| sen\,\theta \qquad z = |\overline{QP}|$$

Como $|OQ| = \rho\, sen\,\varphi$ y $|\overline{QP}| = \rho\cos\varphi,$ las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente manera:

$$x = \rho\, sen\,\varphi\,\cos\theta; \qquad y = \rho\, sen\,\varphi\, sen\,\theta \qquad z = \rho\cos\varphi$$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores y sumando los miembros correspondientes tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\, sen^2\varphi\, cos^2\theta + \rho^2\, sen^2\varphi\, sen^2\theta + \rho^2\, cos^2\varphi$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\, sen^2\varphi\,(cos^2\theta + sen^2\theta) + \rho^2\, cos^2\varphi$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\,(sen^2\varphi + cos^2\varphi)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Ejemplos:

1. *Determine las coordenadas cartesianas del punto que viene dado en coordenadas esféricas.*

a) $\left(6, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Solución:
Utilizando las ecuaciones (2.4) tenemos:

$$x = \rho\, sen\,\varphi\cos\theta \quad \therefore \quad x = 6\, sen\,\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} \quad \therefore \quad x = 6 * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$y = \rho\, sen\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \therefore \quad y = 6\, sen\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} \quad \therefore \quad y = 6 * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2} \quad \therefore \quad y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$z = \rho\cos\varphi \quad \therefore \quad z = 6\cos\frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad z = 6 * \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad z = 3\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, el punto en coordenadas cartesianas es: $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 3\sqrt{2}\right)$.

b) $\left(8, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:
Utilizando las ecuaciones (2.4) tenemos:

$$x = \rho\, sen\, \varphi \cos\theta \quad \therefore \quad x = 8\, sen\, \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{3} \quad \therefore \quad x = 8 * 1 * \frac{1}{2} \quad \therefore \quad x = 4$$

$$y = \rho\, sen\, \varphi\, \mathrm{sen}\,\theta \quad \therefore \quad y = 8\, sen\, \frac{\pi}{2}\, \mathrm{sen}\, \frac{\pi}{3} \quad \therefore \quad y = 8 * 1 * \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad y = 4\sqrt{3}$$

$$z = \rho \cos\varphi \quad \therefore \quad z = 8 \cos\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad z = 8 * 0 \quad \therefore \quad z = 0.$$

Por lo tanto, el punto en coordenadas cartesianas es: $\left(4, 4\sqrt{3}, 0\right)$.

2. *Determine el conjunto principal de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cartesianas indicadas.*

a) $\left(1, -1, -\sqrt{2}\right)$.

Solución:
Encontramos el valor de *r* y θ de la siguiente manera.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \quad \therefore \quad \rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} \quad \therefore \quad \rho = 2.$$

Se toma sólo el positivo ya que ρ indica distancia y esta no puede ser negativa, lo que se modifica es el ángulo.

$$\varphi = arc\ cos\left(\frac{z}{\rho}\right) = arc\ cos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \quad \therefore \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\theta = arc \cos\left(\frac{x}{\rho\, sen\, \varphi}\right) = arc \cos\left(\frac{1}{2 * sen\, \frac{3\pi}{4}}\right) \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Como valores principales del ángulo, por lo que los puntos serian:

$$P_1\left(2;\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{4}\right)\ para\ k = 0, 1, 2, \dots..$$

b) $(2, 2, 2)$.

Solución:
Encontramos el valor de r y θ de la siguiente manera.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \quad \therefore \quad \rho = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} \quad \therefore \quad \rho = 2\sqrt{3}.$$

Se toma sólo el positivo ya que ρ indica distancia y esta no puede ser negativa, lo que se modifica es el ángulo.

$$\varphi = arc\ cos\left(\frac{z}{\rho}\right) = arc\ cos\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) \quad \therefore \quad \varphi = 0.3\,\pi.$$

$$\theta = arc\cos\left(\frac{x}{\rho\ sen\ \varphi}\right) = arc\cos\left(\frac{2}{2\sqrt{3} * sen\ (0.3\pi)}\right) \ \therefore \ \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Como valores principales del ángulo, por lo que los puntos serían:

$$P_k\left(2\sqrt{3};\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ 0.3\pi\right)\ para\ k = 0, 1,2, \dots..$$

3. *Encuentre una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas esféricas.*

a) $\rho = 9$.

Solución:
Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ por lo que tenemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 9 \quad \therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = 81.$$

Cuya gráfica es una esfera de centro en el origen y radio 9 (Fig. 2.7).

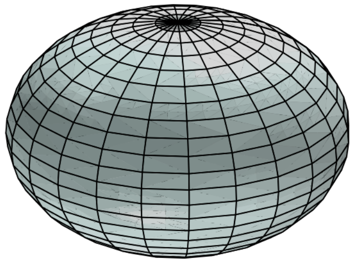


Figura 2.7

b) $\rho = 4\cos\varphi.$

Solución:

Como $z = \rho\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = \frac{z}{\rho}$ reemplazando en la ecuación dada tenemos:

$$\rho = 4 * \frac{z}{\rho} \;\therefore\; \rho^2 = 4z \quad pero \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \therefore$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \;\therefore\; x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad \therefore$$
$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4.$$

La gráfica de la ecuación es una esfera de centro en el punto $(0,0,2)$ y radio r = 2 (Fig. 2.8).

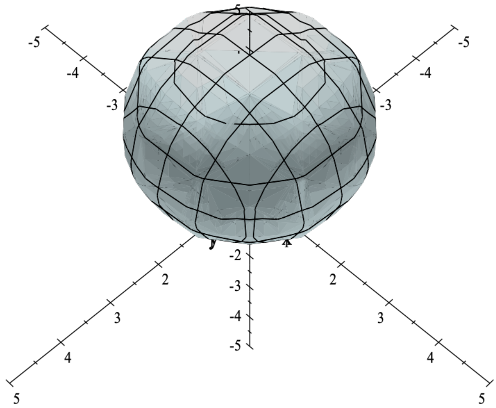


Figura 2.8

4. *Encuentre una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas cartesianas.*

a) $x^2 + y^2 = 9.$

Solución:
Reemplazando a *x* por $\rho\, sen\, \varphi \cos\theta$ y a *y* por $\rho\, sen\, \varphi\, sen\, \theta$ tenemos:

$$(\rho\, sen\, \varphi \cos\theta)^2 + (\rho\, sen\, \varphi\, \mathrm{sen}\,\theta)^2 = 9 \quad \therefore$$
$$\rho^2 sen^2\varphi(cos^2\theta + sen^2\theta) = 9 \;\; \therefore \;\; \rho^2 sen^2\varphi = 9 \quad \therefore \quad \rho = 3\csc\varphi.$$

El gráfico es un cilindro (Fig. 2.9).

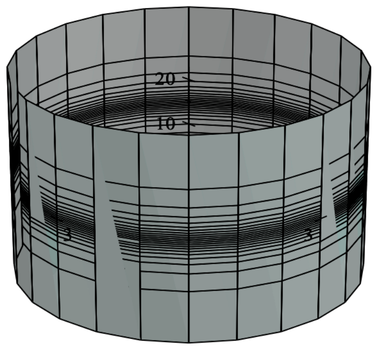


Figura 2.9

b) $x^2 + y^2 = z^2.$

Solución:
Reemplazando a *x* por $\rho\, sen\, \varphi \cos\theta$, y a *y* por $\rho\, sen\, \varphi\, sen\, \theta$, y a z por $\rho\cos\varphi$ tenemos:

$$(\rho\, sen\, \varphi \cos\theta)^2 + (\rho\, sen\, \varphi\, \mathrm{sen}\,\theta)^2 = (\rho\cos\varphi)^2 \quad \therefore$$
$$\rho^2 sen^2\varphi(cos^2\theta + sen^2\theta) = \rho^2 cos^2\varphi \;\; \therefore \;\; \rho^2 sen^2\varphi = \rho^2 cos^2\varphi \quad \therefore$$
$$tg^2\varphi = 1.$$

El gráfico es un cono elíptico (Fig. 2.10).

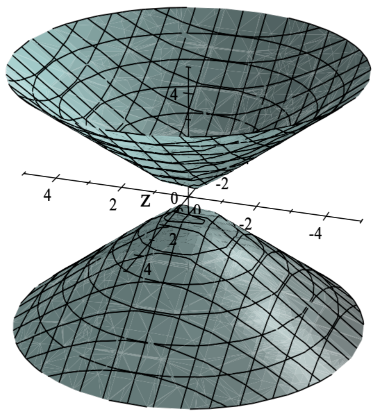


Figura 2.10

2.3. Integrales dobles

2.3.1. Definición de integral doble

Sea f una función de dos variables x e y, definida en una región rectangular cerrada R. La **integral doble** de f en R, denotada por $\iint_R f(x,y)dA$, está definida por:

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta_i A$$

Demostración:

Considere la región rectangular cerrada de la figura 2.11a, la cual se denotará por R, y sea f una función definida sobre R. La región R se considerará como una región de integración. Lo primero que debemos hacer para el estudio de la integral doble es definir una partición Δ en R. Esto lo conseguimos trazando rectas paralelas a los ejes "x" e "y" con lo que se obtiene una red de subregiones rectangulares, la norma de esta partición denotada como $\|\Delta\|$, está definida por la diagonal más grande de las subregiones rectangulares de la partición. Elegimos la longitud de la diagonal por que representa la distancia más grande entre dos puntos cualesquiera de una subregión rectangular. Numeramos las subregiones de manera arbitraria y consideramos que en total es n. Denotamos el ancho de la i-ésima subregión por $\Delta_i x$ y su longitud por $\Delta_i y$. Ahora bien, si $\Delta_i A$ unidades cuadradas es el área de la i-ésima subregión rectangular tenemos:

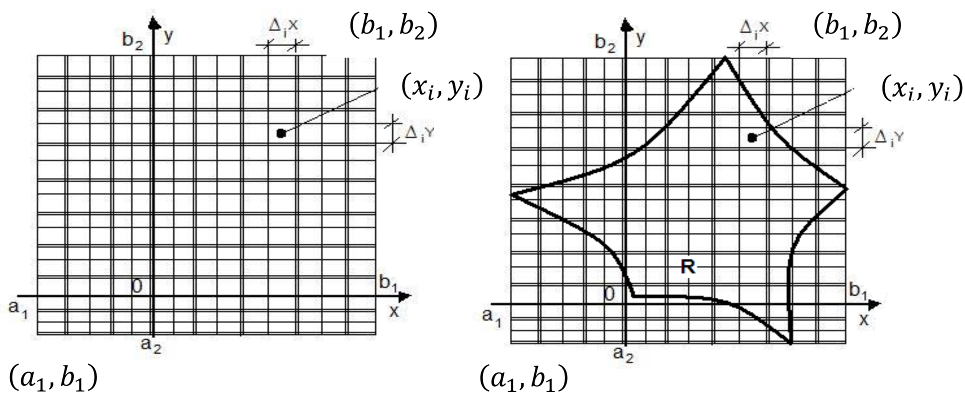
$$\Delta_i A = \Delta_i x * \Delta_i y.$$

Sea (x_i, y_i) un punto arbitrario de la i-ésima subregión, y sea $f(x_i, y_i)$ el valor de la función en este punto. Consideremos el producto $f(x_i, y_i)\Delta_i A$. Asociado con cada uno de las n subregiones se tiene uno de estos productos, y su suma es:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta_i A$$

Llamada sumatoria de Riemann de una función de dos variables. Si obtenemos el límite de esta sumatoria conforme la norma de la partición de *R* se aproxima a cero, nos conduce a la definición de integral doble así tenemos que:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta_i A = \iint_R f(x, y)dA. \;\; Lcqd.$$



a) b)

Figura 2.11

Si una función de dos variables es continua en una región rectangular cerrada *R*, es condición suficiente para que la integral doble exista, entonces se dice que *f* es integrable en *R*.

Generalizando la definición de integral doble a una región más general, como la que se muestra en la figura 2.11b y siguiendo el mismo procedimiento de demostración del caso de una región rectangular, podemos concluir que la definición no tendrá ninguna modificación ya que el límite de la sumatoria de Riemann es el mismo sin importar como se subdivida *R*.

Así como la interpretación geométrica de la integral de una función de una sola variable, está en términos del área de una región plana, la integral doble puede interpretarse geométricamente en términos del volumen de un sólido tridimensional, limitado en la parte superior por la gráfica de *f* y en la parte inferior por la región *R* del plano "*xy*".

2.3.2. Definición del volumen de un sólido

Sea *f* una función de dos variables y continua en una región cerrada *R* del plano *xy*, tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) de *R*. Si *V* unidades cúbicas es el volumen del sólido *s* que tiene la región *R* como su base y cuya altura es $f(x, y)$ unidades en el punto (x, y) de *R*, entonces:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta_i A = \iint_R f(x.y)dA.\ Lcqd.$$

Demostración:

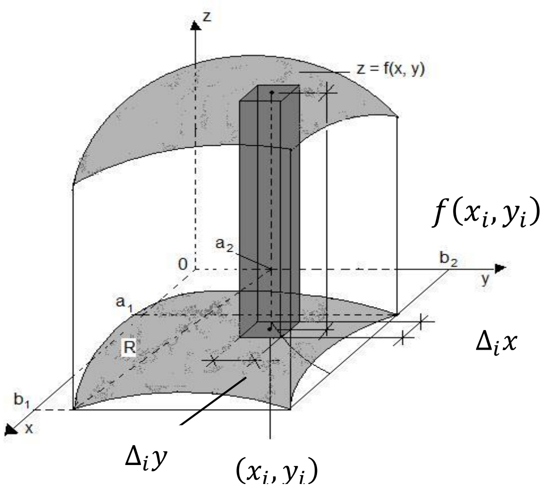


Figura 2.12

Supongamos que la función *f* es continua en una región cerrada *R* de R^2, y que $f(x,y)$ es no negativa en R. La gráfica de la ecuación $z = f(x,y)$ es una superficie que se encuentra por arriba del plano *xy*, como se muestra en la figura 2.12. Esta figura presenta una subregión particular de *R*, cuyas dimensiones son $\Delta_i x$ y $\Delta_i y$. La figura 2.12 muestra también un sólido rectangular que tiene esta subregión como base, y $f(x_i, y_i)$ como medida de su altura. Entonces el volumen del sólido rectangular está determinado por:

$$\Delta_i V = f(x_i, y_i)\Delta_i A$$

El número $\Delta_i V$ es la medida del sólido referencial, de modo que la suma de las medidas de los volúmenes de los n sólidos como este es:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta_i A$$

Por lo que llevando al límite esta suma, nos da el volumen del solido limitado por la parte superior por la gráfica de f y en la parte inferior por la región *R* en el plano "*xy*".

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta_i A = \iint_R \; f(x.y)dA.\ Lcqd.$$

2.3.3. Propiedades de la integral doble.

1. Si *c* es una constante y la función *f* es integrable en una región cerrada *R*, entonces *c*f* es integrable en *R* y

$$\iint_R \; c\,f(x,y)dA = c\iint_R \; f(x,y)dA$$

2. Si las funciones *f* y *g* son integrables en una región cerrada R, entonces la función *f* + *g* es integrable en *R* y

$$\iint_R \; [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R \; f(x,y)dA + \iint_R \; g(x,y)dA$$

3. Si las funciones f y g son integrables en una región cerrada R y además $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo (x,y) de R, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

4. Sea f una función integrable en una región cerrada R, y suponga que m y M son dos números tales que $m \leq f(x.y) \leq M$ para todo $(x.y)$ de R. Si A es la medida del área de la región R, entonces

$$mA \leq \iint_R f(x,y)dA \leq MA.$$

5. Suponga que la función f es continua en la región cerrada R y que la región R se compone de dos subregiones R_1 y R_2 que no tienen puntos en común excepto algunos puntos en parte de sus fronteras. Entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA\,.$$

2.3.4. Integral Iterada

Así como para encontrar el valor de la integral de una función de una sola variable, existe el segundo teorema fundamental del cálculo, para calcular el valor de la integral doble tenemos el teorema de **Fubini**, que establece que las integrales dobles sobre regiones cerradas rectangulares o de otras formas con valores positivos o negativos en el caso de una función f pueden ser calculadas como integrales iteradas. Esto quiere decir que podemos calcular una integral doble integrando una sola variable cada vez, utilizando para eso las técnicas de integración ya conocidas. Además, dice también que la integral doble puede calcularse integrándose en cualquier orden.

2.3.4.1 Teorema de Fubini

1. Si $f(x,y)$ es continua en la región rectangular R (Fig. 2.13a): $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$$

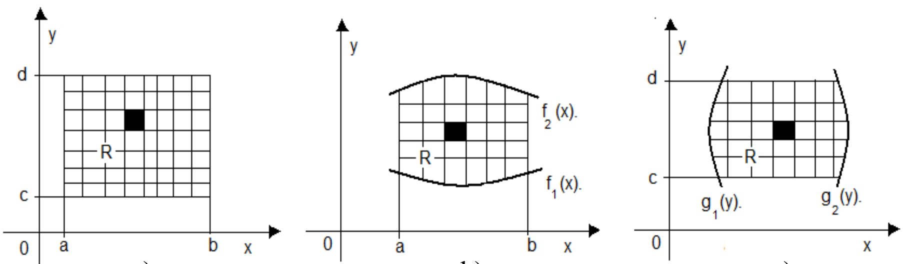
2. Sea $f(x,y)$ continua en una región R.

a) Si R está definida por $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$, con f_1 y f_2 continuas en $[a,b]$ (Fig. 2.13b), entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

b) Si R está definida por $c \leq y \leq d$, $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$, con g_1 y g_2 continuas en $[c,d]$(Fig. 2.13c), entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy.$$



a) b) c)

Figura 2.13

2.3.5. Determinación de los límites de integración

A veces en el cálculo de una integral doble, lo que más difícil se hace es determinar los límites de integración, por lo que a continuación les ilustramos un buen procedimiento.

a) *Si la región nos permite integrar primero respecto a y y después respecto a x, procedemos como sigue:*

i. Imaginemos una recta vertical L que corta a R según la dirección creciente de y (Fig. 2.14a).
ii. Integramos desde el valor de y del punto donde L entra en R (límite inferior de la integral) hasta el valor de y del punto de salida (límite superior).

iii. Elegimos los límites en *x* donde se incluya a todas las rectas verticales que pasan por *R*.

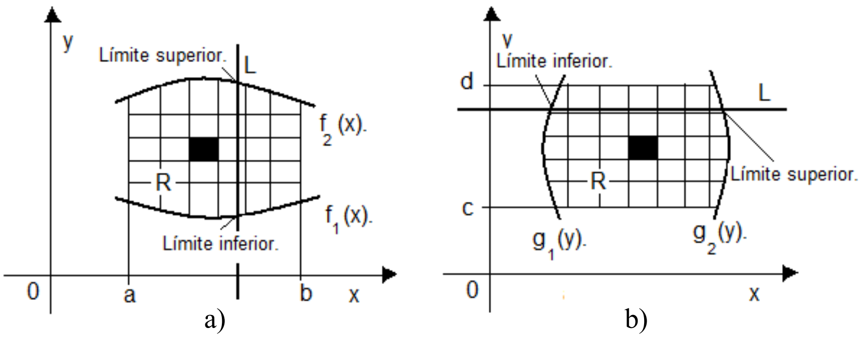


Figura 2.14

b) *Si la región nos permite integrar primero respecto a x y después respecto a y, procedemos como sigue:*

i. Imaginemos una recta horizontal *L* que corta a *R* según la dirección creciente de *x* (Fig. 2.14b).
ii. Integramos desde el valor de *x* del punto donde *L* entra en *R* (límite inferior del 1 integral) hasta el valor de *x* del punto de salida (límite superior).
iii. Elegimos los límites en *y* donde se incluya a todas las rectas horizontales que pasan por *R*.

Ejemplos:

1. *Obtenga un valor aproximado de la integral doble*

$$\iint_R (3y - 2x^2)dA$$

Donde R es la región rectangular que tiene vértices en $(-1,1)$ y $(2,3)$. *Considere una partición de R generada por las rectas x = 0, x = 1 y x = 2, y tome el centro de la i-ésima subregión como* (x_i, y_i).

Solución:
En la figura 2.15 se muestra la región *R* dividida en seis sub regiones que son cuadrados cuyos lados miden *i* unidad. Así, para cada *i*, $\Delta_i A = 1$. En cada subregión el punto (x_i, y_i) es el centro del cuadrado.

Una aproximación de la integral seria:

$$\iint_R (3y - 2x^2)dA = f(-0.5, 1.5) * 1 + f(0.5, 1.5) * 1 + f(1.5, 1.5) * 1 +$$

$$f(1.5, 2.5) * 1 + f(0.5, 2.5) * 1 + f(-o.5, 2.5) * 1$$

$$= 4 * 1 + 4 * 1 + 0 * 1 + 3 * 1 + 7 * 1 + 7 * 1$$

$$= 25.$$

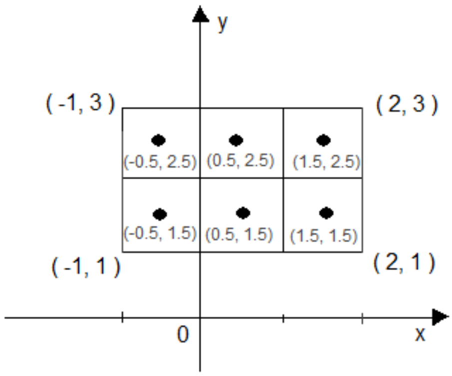


Figura 2.15

2. *Obtenga un valor aproximado de la integral doble*

$$\iint_R (y^2 - 4x)dA$$

Donde R es la región rectangular que tiene vértices en $(-1,0)$ y $(1,3)$. *Considere una partición de R generada por las rectas x = 0, y = 1 e y = 2, y tome el centro de la i-ésima subregión como* (x_i, y_i).

Solución:

En la figura 2.16 se muestra la región R dividida en seis sub regiones que son cuadrados cuyos lados miden *i* unidad. Así, para cada i, $\Delta_i A = 1$. En cada subregión el punto (x_i, y_i) es el centro del cuadrado.

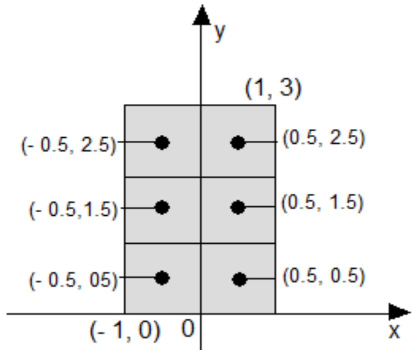


Figura 2.16

Una aproximación de la integral seria:

$$\iint_R (y^2 - 4x)dA = f(-0.5, 2.5) * 1 + f(0.5, 2.5) * 1 + f(-0.5, 1.5) * 1 +$$
$$f(0.5, 1.5) * 1 + f(-0.5, 0.5) * 1 + f(0.5, 0.5) * 1$$

$$= 8.25 * 1 + 4.25 * 1 + 4.25 * 1 + 0.25 * 1 + 2.25 * 1 - 1..75 * 1$$

$$= 17.5.$$

3. *Aplicando el teorema de Fubini calcular las siguientes integrales dobles.*

a) $\int_0^1 \int_0^1 (x + y)dy\, dx = \int_0^1 dx\, \int_0^1 (x + y)dy.$

Solución:
Aplicando el teorema, en el ejemplo primero integramos respecto a *y*, donde *x* permanece constante, luego integramos respecto a *x* y encontramos la respuesta.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x + y)dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]\Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx.$$

$$\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

b) $\int_0^1 \int_{x^2}^x x\,y^2 dy\,dx = \int_0^1 dx\ \int_{x^2}^x x\,y^2 dy\,.$

Solución:
Aplicando el teorema, en este ejemplo primero integramos respecto a *y*, donde *x* permanece constante, luego integramos respecto a *x* y encontramos la solución.

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x x\,y^2 dy\,dx = \int_0^1 \left[x * \frac{1}{3}y^3\right]\Big|_{x^2}^x dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^4-x^7)dx\,.$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 (x^4-x^7)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{8}x^8\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{40}.$$

c) $\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx\,dy = \int_{-3}^3 dy\ \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx.$

Solución:
Aplicando el teorema, en este ejemplo primero integramos respecto a *x*, donde *y* permanece constante, luego integramos respecto a *y* y encontramos la solución.

$$\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx = \int_{-3}^3 \left[\frac{1}{2}x^2+2xy\right]\Big|_{y^2-4}^5 dy =$$

$$= \int_{-3}^3 \left[\frac{25}{2}+10y-\frac{1}{2}(y^2-4)^2-2y(y^2-4)\right]dy =$$

$$= \int_{-3}^3 \left(\frac{9}{2}+18y+4y^2-2y^3-\frac{1}{2}y^4\right)dy$$

$$= \left[\frac{9}{2}y+9y^2+\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4-\frac{1}{10}y^5\right]\Big|_{-3}^3$$

$$= \left(\frac{27}{2}+81+36-\frac{81}{2}-\frac{243}{10}\right)-\left(-\frac{27}{2}+81-36-\frac{81}{2}+\frac{243}{10}\right) = 50.4$$

d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{3\cos\theta} r^2 sen^2\theta \, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{3\cos\theta} r^2 sen^2\theta \, dr$.

Solución:
Aplicando el teorema, en este ejemplo primero integramos respecto a *r*, donde θ permanece constante, luego integramos respecto a θ y hallamos la solución.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{3\cos\theta} r^2 sen^2\theta\, dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{1}{3}\, r^3\, sen^2\theta\right]\Big|_{0}^{3\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\,27\, cos^3\theta \;\; sen^2\theta]d\theta = 9\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\,(1 - sen^2\theta)\; sen^2\theta]\cos\theta\, d\theta =$$

$$= 9\left[\frac{1}{3}sen^3\theta - \frac{1}{5}sen^5\theta\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 9\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = 9\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{12}{5}.$$

4. *Colocar los límites de integración, en uno y otro orden, en la integral doble*

$$\iint_R f(x,y)dA.$$

Para las regiones R que se dan a continuación.

a) *R* es un rectángulo cuyos vértices son:
$(0,0), (2,0), (2,1)\;\; y\; (0,1)$.

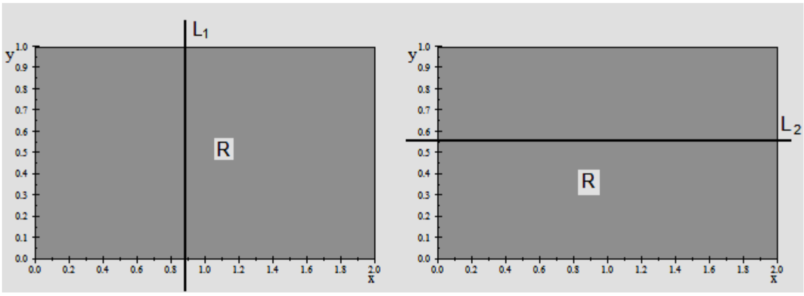
Solución:
En todos los ejercicios es importante primero hacer la gráfica para poder colocar los límites de integración de forma correcta, sino no se grafica no se puede prever la secuencia de estos.

i. La primera integral a calcular respecto a "*y*" (Fig. 2.17a).

$$\int_0^2 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx.$$

ii. La primera integral a determinar será respecto a “*x*” (Fig. 2.17b)

$$\int_0^1 dy \int_0^2 f(x,y)dx = \int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\, dx\, dy.$$

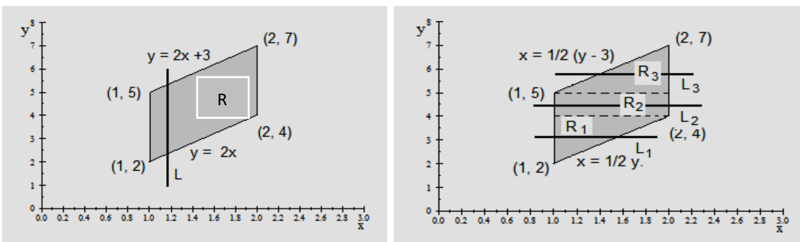


a) b)

Figura 2.17

b) *R* es un paralelogramo cuyos vértices son:
$(1,2),(2,4),(2,7)\ \ y\ (1,5).$

Solución:



a) b)

Figura 2.18

i. La primera integral a calcular es respecto a “*y*” (Fig. 2.18a).

$$\int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy = \int_1^2 \int_{2x}^{2x+3} f(x,y)\, dy\, dx.$$

ii. La primera integral a determinar será respecto a “x” (Fig. 2.18b).

$$\int_2^4 dy \int_1^{\frac{1}{2}y} f(x,y)dx + \int_4^5 dy \int_1^2 f(x,y)\, dx + \int_5^7 dy \int_{\frac{1}{2}(y-3)}^{2} f(x,y)dx.$$

c) R es la circunferencia $x^2 + y^2 \leq a^2$.

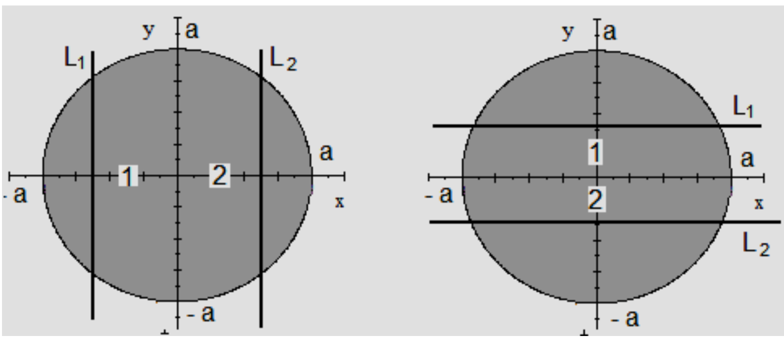
Solución:

i. La primera integral a calcular es respecto a "*y*" (Fig. 2.19a).

$$\int_{-a}^{0} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\, dy\,.$$

ii. La primera integral a determinar será respecto a "*x*" (Fig. 2.19b)
iii.

$$\int_{-a}^{0} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\, dy\,.$$



a) b)

Figura 2.19

En este ejemplo usando la simetría de la región con los ejes x e y**,** los integrales quedarían.

$$primera\ integral\ respecto\ al\ eje\ \text{"y"} \qquad 4\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\, dy\,.$$

$$primera\ integral\ respecto\ al\ eje\ \text{"x"} \qquad 4\int_{0}^{a} dy \int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\, dx\,.$$

d) R está limitada por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se considera la región de la figura 2.20).

Solución:

i. La primera integral a calcular es respecto a "*y*" (Fig. 2.20a).

$$\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\, dy +$$

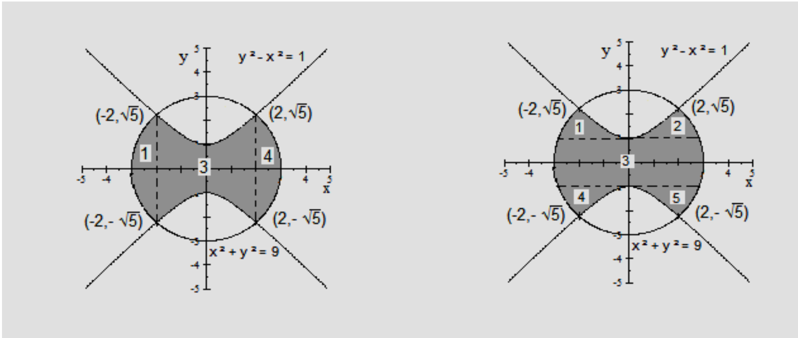
$$+ \int_{2}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\, dy.$$

ii. La primera integral a calcular respecto a "*x*" (Fig. 2.20b).

$$\int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\, dx + \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\, dx +$$

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\, dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\, dx +$$

$$+ \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\, dx.$$



a) b)

Figura 2.20

Utilizando la simetría tendríamos:

Primera integral respecto a "*y*".

$$4\int_{0}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy \;+4\int_{2}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy\,.$$

Primera integral respecto a "*x*".

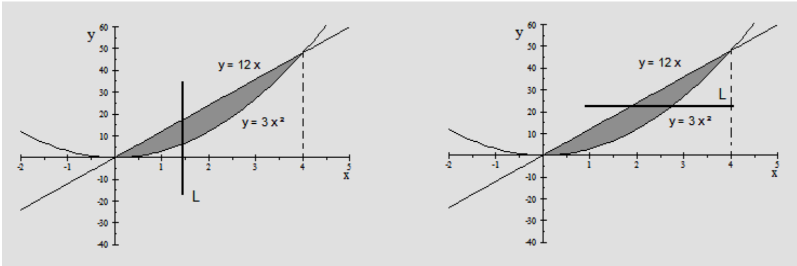
$$4\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx \;+4\int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,.$$

5. *Invertir el orden de integración en las siguientes integrales dobles.*

a) $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy\,dx = \int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy.$

Solución:
Primero hacemos el gráfico. (Fig. 2.21a)

Para "*x*" $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ Para "*y*". $\begin{cases} y_1 = 3x^2 \\ y_2 = 12x \end{cases}$



a) b)

Figura 2.21

La integral con el orden de integración invertido es (Fig. 2.21b)

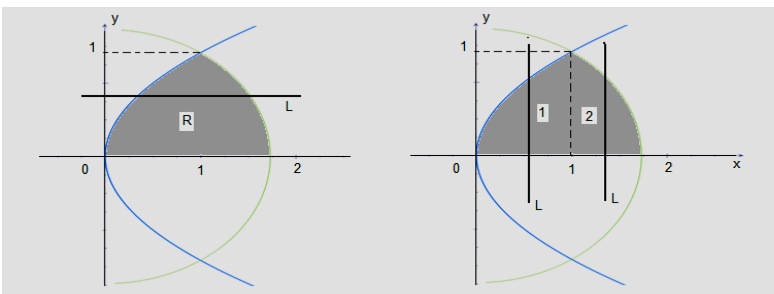
$$\int_{0}^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\, dx.$$

b) $\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\, dx.$

Solución:

Hacemos el gráfico (Fig. 2.22a).

Para "y". $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1. \end{cases}$ Para "x". $\begin{cases} x_1 = \dfrac{y^2}{2} \\ x_2 = \sqrt{3-y^2}. \end{cases}$



a) b)

Figura 2.22

La integral con el orden de integración invertido es (Fig. 2.22b):

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

6. *Calcular la integral doble*

$$\iint_R \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$$

Donde R es un segmento parabólico, limitado por la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ *y por la recta* $y = x$.

Solución:

Hacemos el gráfico (Fig. 2.23) para poner los límites de integración y calcular.

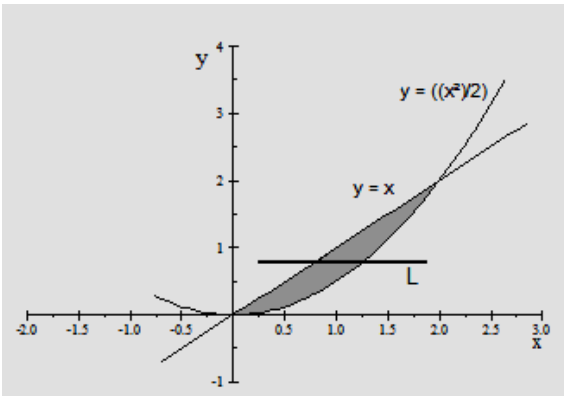


Figura 2.23

$$\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{2y}} \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]\Bigg|_y^{\sqrt{2y}} = \int_0^2 \frac{1}{2}[\ln(2y+y^2) - \ln(2y^2)]dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(2y+y^2)dy - \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(2y^2)dy \text{ Integrando por partes tenemos:}$$

$$\frac{1}{2}\left[y\,ln(2y+y^2) - 2\big(y - \,ln(y+2)\big)\right]\Big|_0^2 - \frac{1}{2}[y\,ln(2y^2) - 2y]\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}[2ln(8) - 4 + 2ln(4) - 2ln(2) - 2ln(8) + 4] = \ln 2.$$

2.4. Integrales dobles en coordenadas polares

Al definir la integral de una función *f (x, y)* sobre una región *R*, dividíamos esta región con rectángulos. Los rectángulos son fáciles de describir en coordenadas rectangulares, y sus áreas fáciles de calcular. Sin embargo, cuando se trabaja en coordenadas polares es más fácil subdividir *R* en "rectangulares polares", de la manera que describimos ahora.

Supongamos una región R acotada por los rayos $\theta = \alpha \; y \; \theta = \beta$, y las circunferencias $r = a \;\; y \;\; r = b$, como muestra la figura 2.24. Sea Δ la partición que se obtiene al dibujar rayos que pasen por el polo y circunferencias con centro en el mismo. La cual muestra una red de subregiones denominadas "rectángulos polares". La norma $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la mayor diagonal de los rectángulos. Sea *n* el número de subregiones y $\Delta_i A$ unidades cuadradas el área del i-ésimo rectángulo. Como el área de la subregión es la diferencia de las áreas de dos sectores circulares, entonces

$$\Delta_i A = \frac{1}{2} {r_{i+1}}^2 (\theta_{i+1} - \theta_i) - \frac{1}{2} {r_i}^2 (\theta_{i+1} - \theta_i) = \frac{1}{2} (r_{i+1} + r_i)(r_{i+1} - r_i)(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

Sea $\bar{r_\iota} = \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i); \;\; \Delta_i r = r_{i+1} - r_i; \quad y \quad \Delta_i \theta = \theta_{i+1} - \theta_{i.}$ Entonces

$$\Delta_i A = \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta.$$

Sea $(\bar{r}_i, \; \bar{\theta}_i)$ un punto arbitrario de la i-ésima subregión, donde $\theta_i \le \bar{\theta}_i \le \theta_{i+1}$ y sea $f(\bar{r}_i, \; \bar{\theta}_i)$ el valor de la función en ese punto. Considerando la suma del producto $f(\bar{r}_i, \; \bar{\theta}_i) \, \Delta_i A$ tenemos:

$$\sum_{1=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \, \Delta_i A = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \, \bar{r}_i \, \Delta_i r \, \Delta_i \theta$$

Se puede demostrar que, si *f* es continua en la región *R*, el límite de esta suma, conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero, existe y se considerará como la integral doble de *f* en *R*. De modo que se puede escribir

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{1=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \, \Delta_i A = \iint_R f(r, \theta) dA \;\; \leftrightarrow$$

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{1=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)\, \bar{r}_i\, \Delta_i r\, \Delta_i \theta = \iint_R f(r,\theta) r\, dr\, d\theta.$$

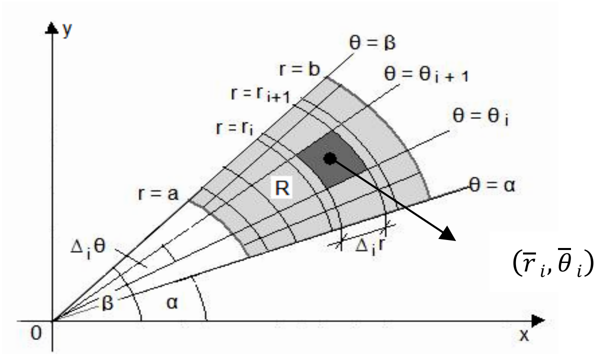


Figura 2.24

Observando la definición en coordenadas polares, nos damos cuenta que el diferencial del área es $dA = r\; drd\theta$, lo que en determinados momentos nos va a permitir resolver ejercicios que en coordenadas rectangulares es imposible calcularles, realizando un cambio de variable.

De la misma manera que en coordenadas rectangulares, la integral doble es igual a una integral iterada que tiene una de las dos formas posibles:

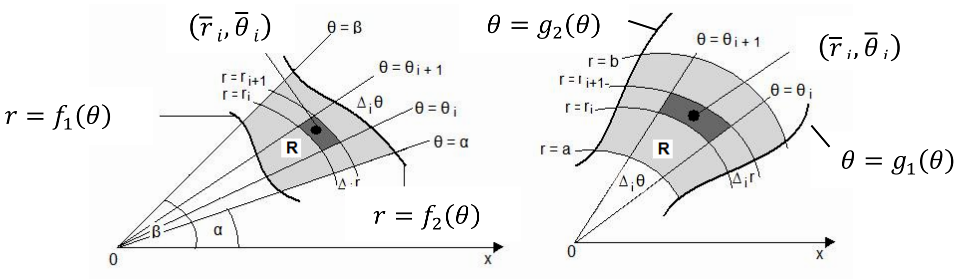
$$\iint_R f(r,\theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{a}^{b} f(r,\theta) r\, dr \; = \int_{a}^{b} dr \int_{\alpha}^{\beta} r\, d\theta$$

Generalizando el concepto la integral doble iterada en coordenadas polares, a una región R limitada por las curvas $r = f_1(\theta)\; y\; r = f_2(\theta)$, donde f_1 y f_2 son funciones continuas y por las rectas $\theta = \alpha\; y\; \theta = \beta$, donde $f_1(\theta) \; \le f_2(\theta)$, para todo θ del intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ (Fig. 2.25a) tenemos:

$$\iint_R f(r,\theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r\, dr$$

Si la región está limitada por las curvas $\theta = g_1(r)\; y\; \theta = g_2(r)$, donde g_1 y g_2 son funciones continuas y por las circunferencias $r = a\; y\; r = b$, donde $g_1(r) \; \le g_2(r)$, para todo ***r*** del intervalo cerrado $[a, b]$ (Fig. 2.25b) tenemos:

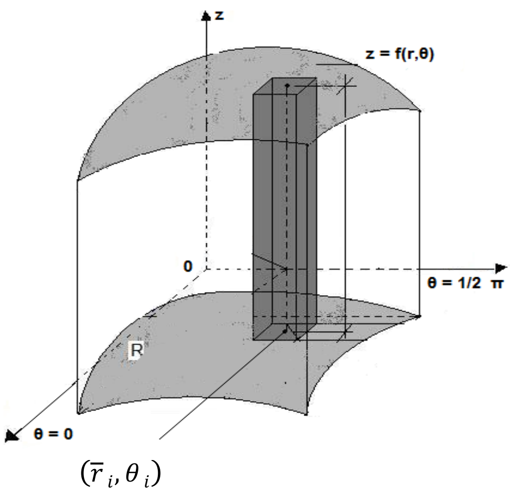
$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_a^b dr \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} r\, d\theta$$



a) b)

Figura 2.25

Haciendo un análisis similar a la interpretación geométrica de la integral doble en coordenadas rectangulares, podríamos definir a esta integral doble como la medida del volumen de un sólido empleando coordenadas cilíndricas, limitado superiormente por la superficie $z = f(r.\theta)$, y como base la región del plano coordenado polar, para $f(r.\theta) \geq 0$ (Fig. 2.26) tenemos:



$$V = \iint_R f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$$

Figura 2.26

Ejemplos:

1. *Pasando a coordenadas polares calcular las siguientes integrales dobles.*

a) $\iint_R \sqrt{x^2+y^2+1}$; si R está limitada por la circunferencia $x^2+y^2=9$.

Solución:
Hacemos el gráfico (Fig. 2.27).

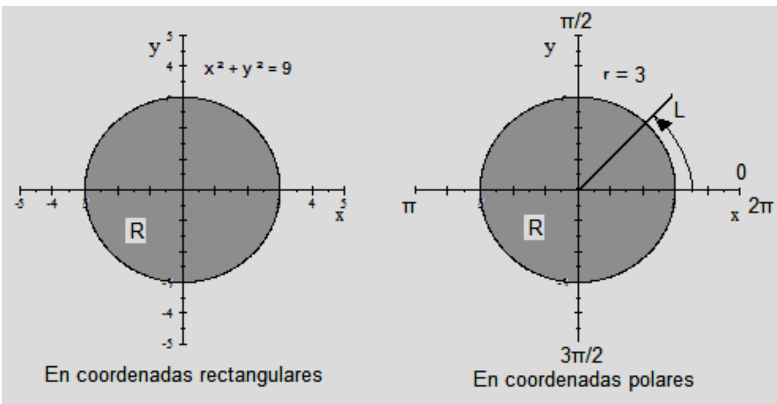


Figura 2.27

Pasando a coordenadas polares la función integrable y la región:

$\sqrt{x^2+y^2+1} = \sqrt{r^2+1}$; $x^2+y^2=9 \;\therefore\; r^2=9 \;\therefore\; r=3 \;\; y \;\; 0 \le \theta \le 2\pi$,

tomamos positivo en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \sqrt{r^2+1}\, r\, dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 \sqrt{r^2+1}\, r\, dr = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2+1)^{3/2}\Big|_0^3 d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (10^{3/2}-1)d\theta = [10\sqrt{10}-1]\theta\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}(10\sqrt{10}-1).$$

b) $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA,$ donde R está en el primer cuadrante y está limitada por la circunferencia $x^2+y^2=25$ y los ejes coordenados.

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.28).

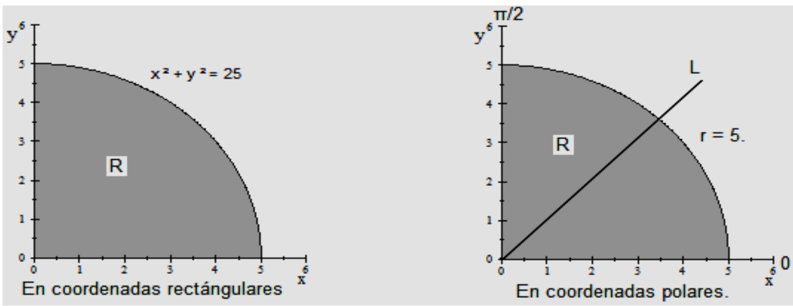


Figura 2.28

Pasando a coordenadas polares la función integrable y la región:

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}; \quad x^2+y^2=25 \;\therefore\; r^2=25 \;\therefore\; r=5 \;\; y \;\; 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^5 e^{-r^2}\, r\, dr = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\Bigg|_0^5 d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-25}-e^0)d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-25}-1)d\theta = -\frac{1}{2}[e^{-25}-1]\theta\,\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}(e^{-25}-1).$$

2. *Evaluar la integral doble de la función $f(r, \theta) = 1$ sobre la región limitada por el cardiode $r = 2(1 + \cos\theta)$ y la circunferencia $r = 2$. (se considera el recinto que no contiene el polo).*

Solución:
Hacemos el gráfico (Fig. 2.29).

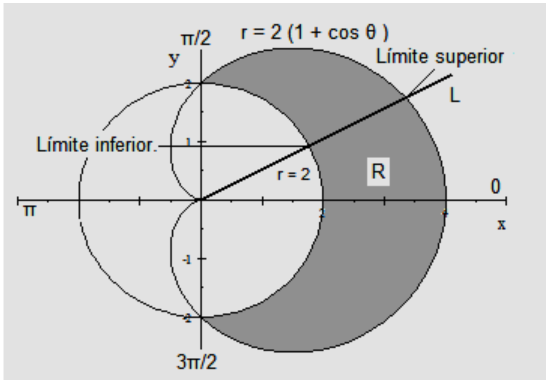


Figura 2.29

Encontramos los límites de integración para θ, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} r = 2(1 + \cos\theta) & (1) \\ r = 2 & (2) \end{cases}$$

(2) en (1) $2(1 + \cos\theta) = 2 \;\therefore\; \cos\theta = 0 \;\therefore\; \theta = arc\cos 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2}^{2(1+\cos\theta)} 1 * rdr = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2}^{2(1+\cos\theta)} rdr = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [4(1+\cos\theta)^2 - 4]d\theta = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta + cos^2\theta)d\theta =$$

$$= 4\left[2\, sen\, \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} sen\, 2\theta\right]\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(2 + \frac{\pi}{4}\right) = 8 + \pi.$$

2.5. Aplicaciones geométricas de las integrales dobles

2.5.1. Cálculo de volúmenes

Es la aplicación directa de la interpretación geométrica de la integral doble, por lo que las expresiones para calcular el volumen en coordenadas rectangulares y polares serian:

i. En coordenadas rectangulares.

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

ii. En coordenadas polares.

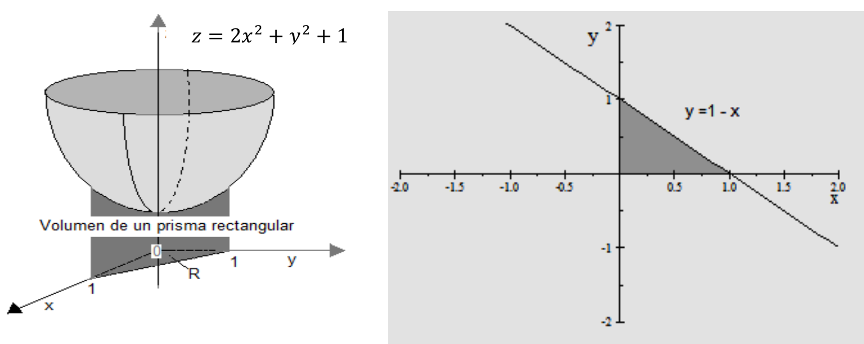
$$V = \iint_R f(r, \theta) dA.$$

Ejemplos:

1. ***Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico** $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.*

Solución:

Realizamos el gráfico en R^2 (Fig. 2.30b), para colocar los límites de la región y en R^3 (Fig. 2.30a) para poder observar el volumen en su totalidad.



a) b)

Figura 2.30

Calculamos el volumen.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1)dy = \int_0^1 \left(2x^2y + \frac{1}{3}y^3 + y\right)\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 + 1 - x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4 + x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}u^3.$$

2. *Determinar el volumen de un cuerpo limitado por el cilindro* $x^2 + z^2 = a^2$ *y los planos* $y = 0,\ z = 0,\ y = x.$

Solución:
El gráfico en R^3 se muestra en la Figura 2.31.

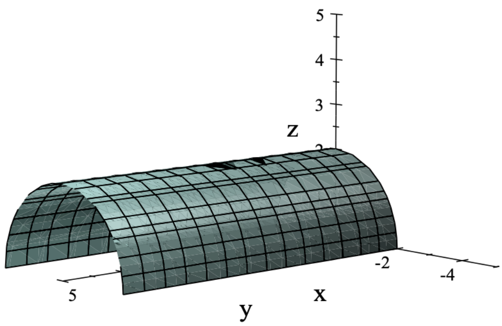


Figura 2.31

Calculamos el volumen.

$$\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}dy = \int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Big|_0^x dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}u^3.$$

3. *Calcular el volumen limitado por las superficies* $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

Solución:
Primero encontramos la sección transversal en el plano "*xy*".

$$\begin{cases} 2az = x^2 + y^2 & (1) \\ x^2 + y^2 - z^2 = a^2 & (2). \end{cases}$$

En (2) $z = 0 \;\therefore\; x^2 + y^2 = a^2$. La sección transversal es una circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio igual a. Hacemos los gráficos (Fig. 2.32).

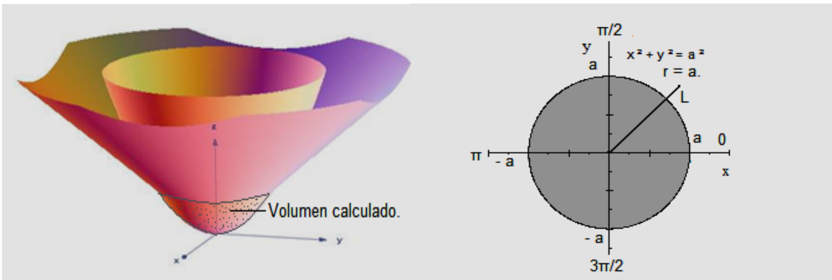


Figura 2.32

Calculamos el volumen, pasando a coordenadas polares porque resulta más fácil calcular.

Sección transversal: $x^2 + y^2 = a^2 \;\therefore\; r^2 = a^2 \;\therefore\; r = \pm a \;\therefore\; r = a,$ Tomamos sólo el valor positivo.

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \;\therefore\; r^2 - z^2 = a^2 \;\therefore\; z = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$x^2 + y^2 = 2az \;\therefore\; r^2 = 2az \;\therefore\; z = \frac{r^2}{2a}$. El ángulo θ varía entre 0 y 2π.

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left[\frac{r^2}{2a} - \sqrt{r^2 - a^2}\right] r dr = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{8a} - \frac{1}{3}(r^2 - a^2)^{3/2}\right]\Bigg|_0^a d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^4}{8a} + \frac{a^3}{3}\right) d\theta = \frac{a^3}{6}(\theta)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^3}{6} * 2\pi = \frac{\pi\, a^3}{3}\; u^3.$$

4. *Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies* $z = r$, *el cardiode* $r = 2(1 + cos\,\theta)$ *y la circunferencia* $r = 2$. *(se considera la región que no contiene el polo).*

Solución:
Hacemos el gráfico (Fig. 2.33).

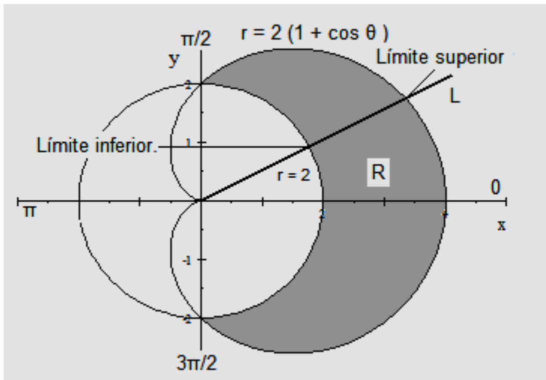


Figura 2.33

Encontramos los límites de integración para θ, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} r = 2(1 + \cos\theta) & (1) \\ r = 2 & (2). \end{cases}$$

(2) en (1) $2(1 + \cos\theta) = 2 \therefore \cos\theta = 0 \therefore \theta = arc\cos 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2}^{2(1+\cos\theta)} r * r dr = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2}^{2(1+\cos\theta)} r^2 dr = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big|_{2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [8(1 + \cos\theta)^3 - 8] d\theta = \frac{16}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + 3cos^2\theta + cos^3\theta) d\theta =$$

$$= \frac{16}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[3\cos\theta + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) + (1 - sen^2\theta)\cos\theta\right] d\theta =$$

$$= \frac{16}{3}\left[3\,sen\,\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\,sen\,2\theta + sen\,\theta - \frac{1}{3}\,sen^3\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{16}{3}\left(3 + \frac{3}{4}\pi + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}\left(\frac{3\,\pi}{4} + \frac{11}{3}\right)u^3.$$

2.5.2. Cálculo de áreas

Si en la definición de la integral doble sobre una región *R*, si ésta viene dada en coordenadas rectangulares hacemos que $f(x, y) = 1$, y si R está dada en coordenadas polares hacemos $f(r, \theta) = 1$, la definición nos permite calcular el área de la región *R* y se define como:

$$A = \iint_R dA.$$

Ejemplos:

1. *Hallar el área de la figura limitada por las curvas* $y = sen\,x$ *e* $y = cos\,x$*, en el intervalo* $0 \leq x \leq \pi$.

Solución:
Encontramos la intersección de las curvas, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} y = sen\,x & (1) \\ y = \cos x & (2). \end{cases}$$

$$(1) = (2) \quad sen\,x = \cos x \quad \therefore \quad dividiendo\ todo\ para \cos x\ tenemos:$$

$$\frac{sen\,x}{cox\,x} = \frac{\cos x}{\cos x} \quad \therefore tg\,x = 1 \ \therefore x = arc\,tg(1) \quad \therefore \ x = \frac{\pi}{4}(3).$$

$$(3) \quad en \ (2) \quad y = \cos\frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Realizamos el gráfico (Fig. 2.34).

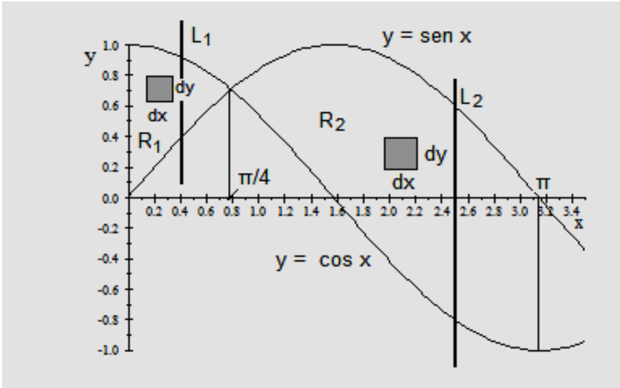


Figura 2.34

Calculamos el área:

Según la figura tenemos que hallar el área total como una suma de las áreas de la $R_1 + R_2$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{sen\,x}^{\cos x} dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{sen\,x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [y]\Big|_{sen\,x}^{\cos x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} [y]\Big|_{\cos x}^{sen\,x} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - sen\,x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (sen\,x - \cos x)dx =$$

$$= [sen\,x + \cos x]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - sen\,x]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}u^2.$$

2. *Calcular el área de la figura limitada por las curvas* $x = y^2, \; x = 2y - y^2$.

Solución:

Hallamos la intersección de las curvas, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} x = y^2 & (1) \\ x = 2y - y^2 & (2). \end{cases}$$

$$(1) = (2) \;\; y^2 = 2y - y^2 \;\therefore\; 2y^2 - 2y = 0 \;\therefore 2y(y-1) = 0 \;\therefore\; y = 0 \;\; e \;\; y = 1.$$

$$si \;\; y = 0 \;\; en \;\; (1) \;\; x = 0 \quad y \quad si \quad y = 1, \qquad x = 1.$$

Hacemos el gráfico (Fig. 2.35).

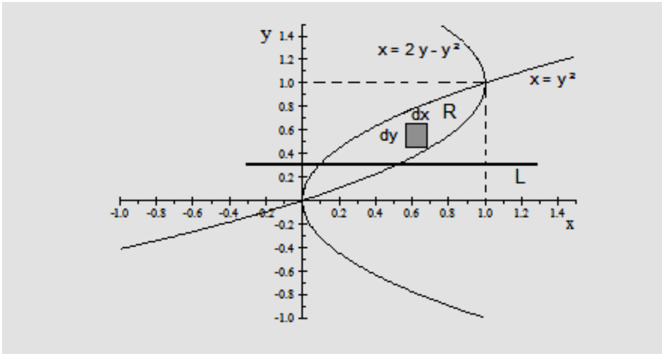


Figura 2.35

Encontramos el área:

$$A = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2y-y^2} dx = \int_0^1 x \Big|_{y^2}^{2y-y^2} dy = \int_0^1 (2y - y^2 - y^2)dy = 2\int_0^1 (y - y^2)dy =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2 * \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\ u^2.$$

Determinar el área limitada por las parábolas

$$y^2 = 10x + 25 \quad e \quad y^2 = -6x + 9.$$

Solución:
Hallamos la intersección de las curvas, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} y^2 = 10x + 25 & (1) \\ y^2 = -6x + 9 & (2). \end{cases}$$

$$(1) = (2) \quad 10x + 25 = -6x + 9 \ \therefore \ 16x = -16 \ \therefore x = -1 \ (3).$$

$$(3)\ en\ (2) \quad y^2 = 6 + 9 \ \therefore \ y^2 = 15 \ \therefore \quad y = \pm\sqrt{15}.$$

Realizamos el gráfico (Fig. 2.36).

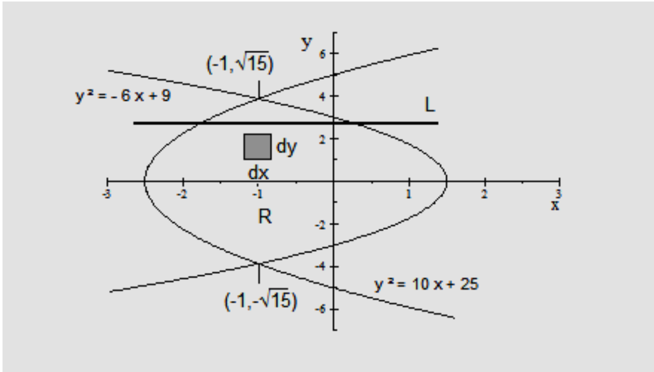


Figura 2.36

Calculamos el área.

Utilizando la simetría tenemos:

$$A = 2\int_{0}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{1}{10}(y^2-25)}^{\frac{1}{6}(9-y^2)} dx = 2\int_{0}^{\sqrt{15}} \left[\frac{1}{6}(9-y^2) - \frac{1}{10}(y^2-25)\right] dy =$$

$$= 2\int_{0}^{\sqrt{15}} \left(4 - \frac{8}{30}y^2\right) dy = 2\left[4y - \frac{8}{90}y^3\right]\Bigg|_{0}^{\sqrt{15}} = 2\left(4\sqrt{15} - \frac{8*15\sqrt{15}}{90}\right) \therefore$$

$$A = \frac{16}{3}\sqrt{15}\,u^2.$$

3. *Encuentre el área encerrada por la lemniscata* $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.37).

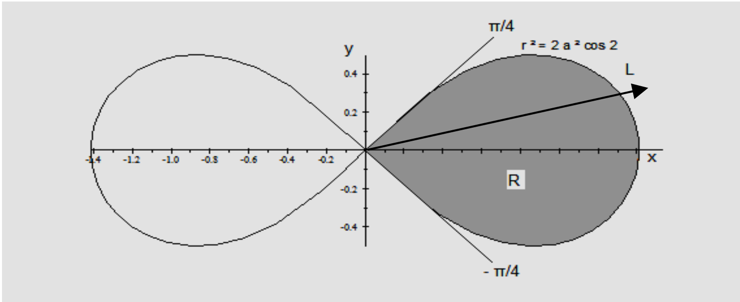


Figura 2.37

Hallamos el área.

Utilizando la simetría tenemos:

$$A = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{0}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Bigg|_{0}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta\, d\theta \ \therefore$$

$$A = a^2\, sen\, 2\theta \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2[1-(-1)] = 2a^2\, u^2.$$

4. Hállese el área de la región común a los cardiodes $r = 1 + \cos\theta \ y \ r = 1 - \cos\theta$.

Solución:
Hallamos la intersección de las curvas, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} r = 1 + \cos\theta & (1) \\ r = 1 - \cos\theta & (2). \end{cases}$$

$$(1) = (2) \quad 1 + \cos\theta = 1 - \cos\theta \ \therefore \ 2\cos\theta = 0 \ \therefore \ \theta = arc\cos(0) \ \therefore$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad o \quad \theta = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Realizamos el gráfico (Fig. 2.38).

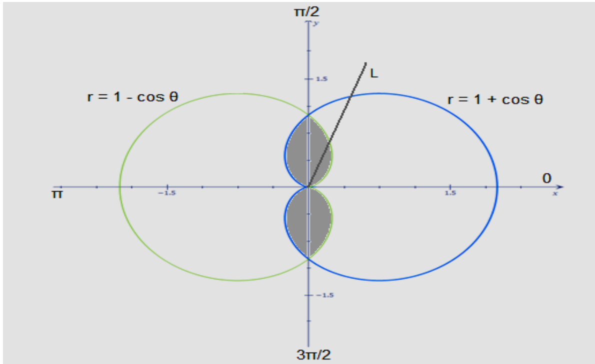


Figura 2.38

Encontramos el área.

Utilizando la simetría tenemos:

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1-\cos\theta} r\,dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \Big|_0^{1-cos\theta} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)^2\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - 2\cos\theta + cos^2\theta]d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right] d\theta \quad \therefore$$

$$A = 2\left[\theta - 2\,sen\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}sen\,2\theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\pi}{2} - 4\right)u^2.$$

2.6. Aplicaciones físicas de las integrales dobles

2.6.1. Masa

Físicamente se define como el producto del área multiplicado por la densidad, que puede ser constante o variable.

Si el elemento representativo de masa *dm* de una masa distribuida continuamente sobre alguna región *R* del plano "*xy*", y valiéndonos de la definición física se toma como:

$$dm = \partial(x.y)dx\,dy \quad o \quad dm = \partial(x.y)dA.$$

Donde $\partial(x.y)$ es la densidad variable en el punto$(x.y)$ de la región *R* (Fig. 2.39), entonces podemos utilizar una integral doble para calcular, dicha expresión está definida como:

$$m = \iint_R \partial(x.y)dA.$$

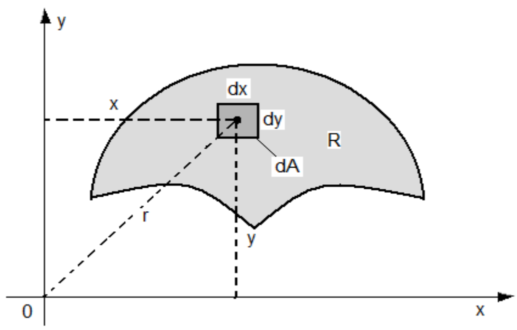


Figura 2.39

2.6.2. Primeros momentos o momentos estáticos de la masa

Estos momentos se obtienen, multiplicando la masa por la distancia *x* e *y* "brazo de palanca" al respectivo eje así:

a) Respecto a "*x*".

$$M_x = \iint_R y * \partial(x.y)dA.$$

b) Respecto a "*y*".

$$M_y = \iint_R x * \partial(x.y)dA.$$

c) Coordenadas del centro de masas.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad y \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

2.6.3. Segundos momentos o momentos de inercia de la masa

Estos momentos se definen, multiplicando la masa por el cuadrado de las distancias x e y "brazo de palanca". Así, los momentos de inercia denotados por I_i, donde i es el subíndice del eje con respecto al cual se va a tomar el momento, así tenemos:

a) Momento de inercia respecto al eje "x", denotado como I_x y definido por:

$$I_x = \iint_R y^2 * \partial(x, y)dA.$$

b) Momento de inercia respecto al eje "y" denotado por I_y y definido así:

$$I_y = \iint_R x^2 * \partial(x, y)dA.$$

c) También es importante el momento de inercia polar, que es el momento de inercia respecto al origen, viene denotado como I_0 y definido por:

$$I_0 = \iint_R r^2 * \partial(x, y)dA = \iint_R (x^2 + y^2) * \partial(x, y)dA = I_x + I_y.$$

En estas integrales, los límites de integración se ponen como si se tratare de calcular únicamente el área de R.

También vale aclarar, que las figuras geométricas en el plano se consideran como objetos de densidad constante $\delta = 1$. Los momentos de dichas figuras se llaman momentos de área, y el centro de masas se llama centroide de la figura. Los cuerpos físicos en cambio tienen momentos de masa, y su centro de masas se llama centro de gravedad.

2.6.4. Radio de giro de la masa m

Es la distancia del eje donde podría concentrarse la masa para dar el mismo momento de inercia. En nuestro caso tendremos radios de giro respecto a "*x*", a "*y*" y al origen y vienen definidos de la siguiente manera:

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}; \quad R_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}; \quad y \quad R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{m}}.$$

Estas expresiones son muy útiles, ya que el momento de inercia de una masa, está en función de la masa y una longitud.

Ejemplos:

1. *Encuentre los primeros momentos de una placa delgada de densidad uniforme* ∂ *limitada por* $x = 0,\ y = 0,\ e\ \ y = 4 - x^2$.

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.40).

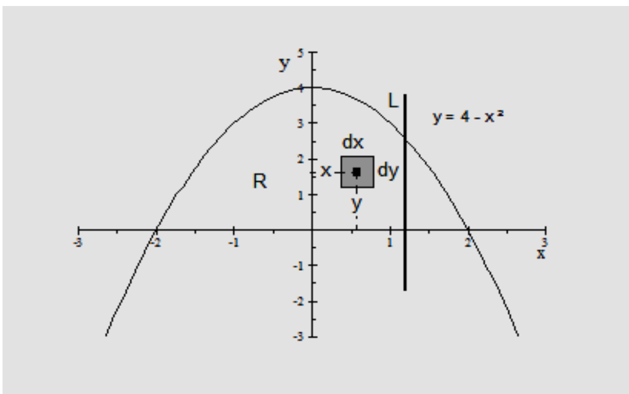


Figura 2.40

Calculamos los momentos:

$$M_x = \int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{4-x^2} \partial * y * dy = \frac{\partial}{2} \int_{-2}^{2} (y^2) \Big|_{0}^{4-x^2} dx = \frac{\partial}{2} \int_{-2}^{2} (4-x^2)^2 dx \ \therefore$$

$$M_x = \partial\left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]\Big|_{-2}^{2} = \partial\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{5} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{5}\right) = 140.8\,\partial.$$

$$M_y = \int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{4-x^2} \partial * x * dy = \partial \int_{-2}^{2} x\,(y)\Big|_{0}^{4-x^2} dx = \partial \int_{-2}^{2} x(4-x^2)dx \;\therefore$$

$$M_y = \partial\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]\Big|_{-2}^{2} = \partial(8-4-8+4) = 0.$$

El valor del momento es cero, cuando la región es simétrica respecto al eje que se está determinando el momento, en el ejemplo es el momento respecto a "*y*", por la simetría de la región *R* con este eje.

2. *Calcúlese el centroide de la región limitada por la curva* $y^2 + x = 0$ *y la recta* $y = x + 2$.

Solución:
Determinamos la intersección de las curvas, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} y^2 + x = 0 \quad \therefore \quad x = -y^2 & (1) \\ y = x+2 \quad \therefore \quad x = y - 2 & (2). \end{cases}$$

$$(1) = (2) \;\; -y^2 = y - 2 \;\therefore\; y^2 + y - 2 = 0 \;\therefore\; (y+2)(y-1) = 0 \;\therefore$$
$$y = -2\;(3) \;\; e \;\; y = 1(4). \quad (3)\; en\; (2) \;\; x = -4 \;\; y \;\; (4)\; en\; (2) \;\; x = -1.$$

Hacemos el gráfico (Fig. 2.41).

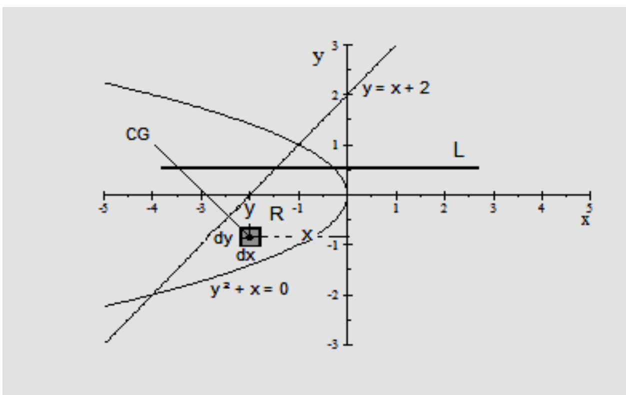


Figura 2.41

Cuando se trata de una figura geométrica se toma $\partial(x,y)=1$.
Hallamos la masa.

$$m=\int_{-2}^{1}dy\int_{y-2}^{-y^2}dx=k\int_{-2}^{1}[x]_{y-2}^{-y^2}dy=\int_{-2}^{1}(-y^2-y+2)dy\ \therefore$$

$$m=\left[-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-2}^{1}=k\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4\right)=\frac{9}{2}.$$

Encontramos los momentos.

$$M_x=\int_{-2}^{1}dy\int_{y-2}^{-y^2}y\,dx=\int_{-2}^{1}y[x]_{y-2}^{-y^2}dy=k\int_{-2}^{1}(-y^3-y^2+2y)dy\ \therefore$$

$$M_x=\left[-\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_{-2}^{1}=k\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1+4-\frac{8}{3}-4\right)=-\frac{9}{4}.$$

$$M_y=\int_{-2}^{1}dy\int_{y-2}^{-y^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}[x^2]_{y-2}^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}[y^4-(y-2)^2]dy\ \therefore$$

$$M_y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{3}(y-2)^3\right]_{-2}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{32}{5}-\frac{64}{3}\right)=-\frac{72}{10}.$$

Calculamos el centroide.

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{-{}^{72}/_{10}}{{}^{9}/_{2}}=-\frac{16}{5}=-1.6;\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{-{}^{9}/_{4}}{{}^{9}/_{2}}=-\frac{1}{2}=-0.5$$

$$c=(-1.6;\ -0.5).$$

3. *Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia $x^2+y^2=4$ y la recta $x+y=2$. La densidad superficial en cualquier punto es xy kilogramos por metro cuadrado. Encontrar el centro de masas.*

Solución:
Determinamos la intersección de las curvas, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases}x^2+y^2=4 & (1)\\ x+y=2\ \therefore\ x=2-y & (2).\end{cases}$$

$$(2)\ en\ (1)\ \ (2-y)^2-y^2=4\ \therefore\ 2y^2-4y=0\ \therefore\ 2y(y-2)=0\ \therefore$$
$$y=0\ (3)\ \ e\ \ y=2\ (4).\quad (3)\ en\ (2)\ \ x=2\ \ y\ \ (4)\ en\ (2)\ \ x=0.$$

Hacemos el gráfico (Fig. 2.42).

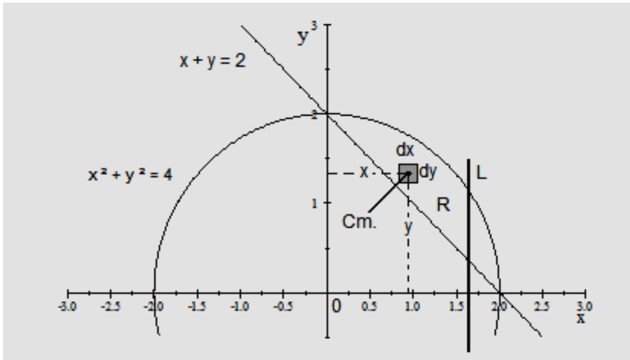


Figura 2.42

Hallamos la masa.

$$m=\int_0^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy=\frac{1}{2}\int_0^2 x[y^2]_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2[4x-x^3-x(2-x)^2]dx$$

$$m=\frac{1}{2}\int_0^2(4x^2-2x^3)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}-8\right)=\frac{4}{3}.$$

Encontramos los momentos.

$$M_x=\int_0^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x\,y^2\,dy=\frac{1}{3}\int_0^2 x[y^3]_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2 x\left[(4-x^2)^{\frac{3}{2}}-(2-x)^3\right]dx=\frac{1}{3}\int_0^2\left[(4-x^2)^{\frac{3}{2}}*x-8x+12x^2-6x^3+x^4\right]dx$$

$$M_x=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-4x^2+4x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_0^2\quad\therefore$$

$$M_x=\frac{1}{3}\left(-16+32-24+\frac{32}{5}+\frac{32}{5}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{24}{5}\right)=\frac{8}{5}.$$

$$M_y=\int_0^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2[y^2]_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2[4x^2-x^4-x^2(2-x)^2]dx$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^3 - 2x^4)dx = \frac{1}{2}\left[x^4 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{64}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{8}{5}.$$

Calculamos el centroide.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{5} = 1.2; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{3}} = 1.2$$

$$Cm = (1.2;\ 1.2).$$

4. *Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = 1$ y el eje "y". La densidad superficial en cualquier punto es $(x + y)$ kilogramos por metro cuadrado. Hallar: a) El momento de inercia con respecto al eje "x", b) El momento de inercia respecto al eje "y", c) Los radios de giro con respecto a "x" e "y", d) El momento polar de inercia.*

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.43).

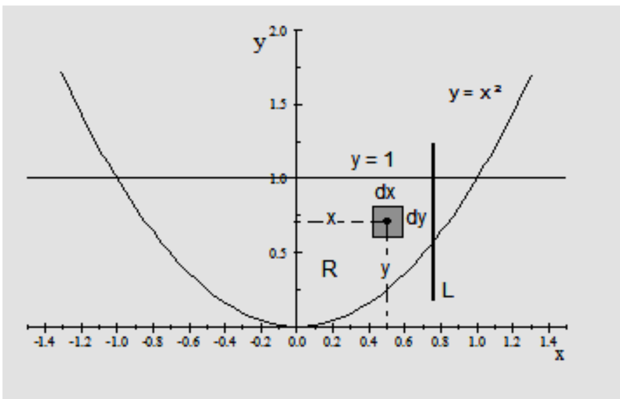


Figura 2.43

Calculamos los momentos de inercia.

Momento de inercia respecto a "x".

$$I_x = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 y^2\,(x+y)\,dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x^7 - \frac{1}{4}x^8\right) dx \therefore$$

$$I_x = \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{36}x^9\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{36} = \frac{12+18-3-2}{72} = \frac{25}{72}.$$

Momento de inercia respecto a "y".

$$I_y = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^2\,(x+y)\,dy = \int_0^1 x^2\left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x^5 - \frac{1}{2}x^6\right) dx \therefore$$

$$I_y = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{14}x^7\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{14} = \frac{7-2}{28} = \frac{5}{28}.$$

Hallamos la masa.

$$m = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y)\,dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) dx \therefore$$

$$m = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{20-5-2}{20} = \frac{13}{20}.$$

Encontramos los radios de giro.

Radio de giro respecto a "*x*"

$$R_x = \sqrt{\frac{25/72}{13/20}} = \sqrt{\frac{25*20}{72*13}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{26}}.$$

Radio de giro respecto a "*y*".

$$R_y = \sqrt{\frac{5/28}{13/20}} = \sqrt{\frac{5*20}{28*13}} = \frac{5}{\sqrt{91}}.$$

Momento de inercia polar.

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{25}{72} + \frac{5}{28} = \frac{175+90}{504} = \frac{265}{504}.$$

5. *Calcular el momento de inercia respecto a la recta* $y = 4$, *de una lámina que tiene la forma de la región acotada por la parábola* $y = 2x - x^2$ *y el eje* "x", *si la densidad superficial varía con la distancia desde la recta* $x = 1$. *La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.*

Solución:

Hacemos el gráfico (Fig. 2.44).

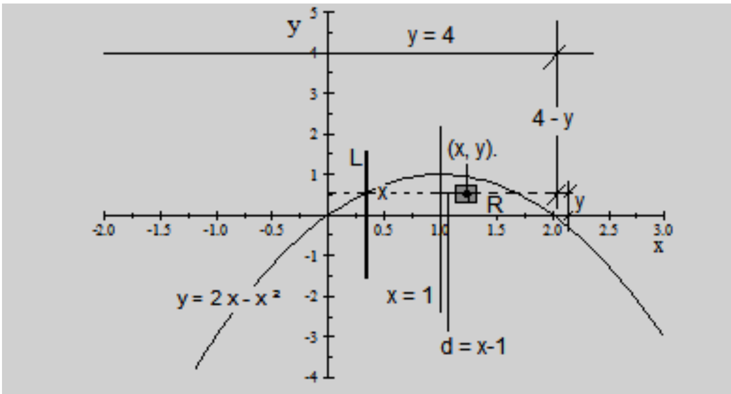


Figura 2.44

Hallamos el Momento de inercia respecto a la recta *y = 4*.

La densidad superficial es: $\partial(x, y) = x - 1$

$$I_{y=4} = \int_0^2 dx \int_0^{2x-x^2} (4-y)^2\,(x-1)dy = -\frac{1}{3}\int_0^2 (x-1)[(4-y)^3]\,\Big|_0^{2x-x^2} dx =$$

$$I_{y=4} = -\frac{1}{3}\int_0^2 (x-1)[(4-2x+x^2)^3 - 64]dx \quad \therefore$$

$$I_{y=4} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}(4-2x+x^2)^4 - 64\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\right]_0^2 = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}(4-4+4)^4 - 256\right] \therefore$$

$$I_{y=4} = -\frac{1}{3}(32-256) = \frac{224}{3}.$$

6. *Encontrar el momento de inercia respecto al eje "x", de la placa delgada acotada en el primer cuadrante por los ejes coordenados y el círculo* $x^2 + y^2 = 1$, *si la densidad superficial varía con el cuadrado de la distancia al origen.*

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.45).

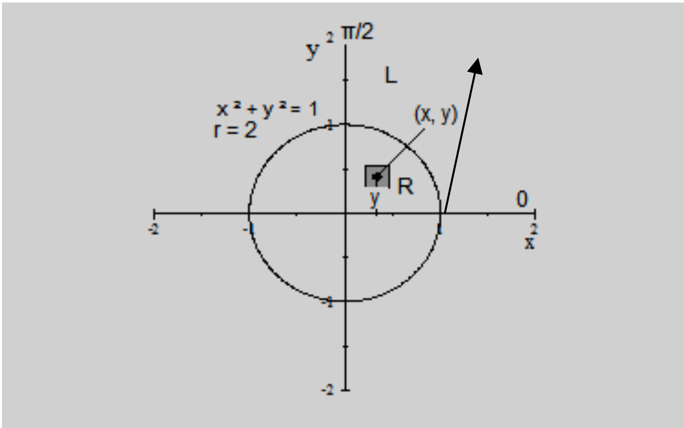


Figura 2.45

Determinamos el momento de inercia.
La densidad es $\partial(x,y) = x^2 + y^2$.
Cambiamos todo a coordenadas polares.
La región: $x^2 + y^2 = 4 \quad \therefore \quad r^2 = 4 \quad \therefore \quad r = 2.$
La densidad: $\partial(x,y) = x^2 + y^2 \;\therefore\; \partial(r,\theta) = r^2.$
El ángulo: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$
La distancia: $y = r\, sen\, \theta.$

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 sen^2\theta * r^2 * r\, dr = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\theta [r^5]_0^2\, d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\theta\, d\theta \;\therefore$$

$$I_x = \frac{32}{5}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} sen\, 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{5}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8\pi}{5}.$$

7. *Encontrar el centroide de la región interior al cardiode* $r = 2(1 + cos\,\theta)$ *y exterior al circulo* $r = a$.

Solución:
Encontramos los límites de integración para θ, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} r = 2(1+\cos\theta) & (1) \\ r = 2 & (2). \end{cases}$$

(2) en (1) $2(1+\cos\theta) = 2 \ \therefore \cos\theta = 0 \therefore \ \theta = arc\cos 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \ \ y \ \ \theta = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

Realizamos el gráfico (Fig. 2.46).

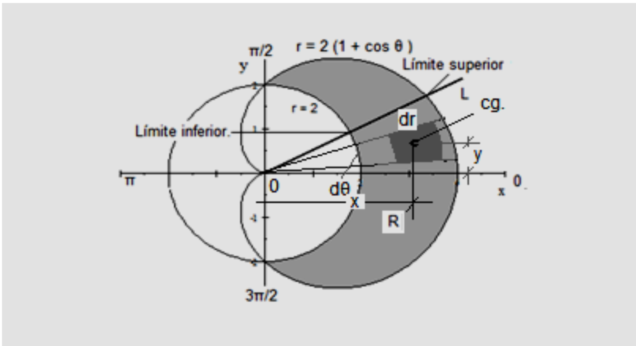


Figura 2.46

Calculamos la masa.

$$m = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r^2]_{2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1+\cos\theta)^2 - 1]d\theta \ \therefore$$

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta + cos^2\theta)do = 4\left[2\ sen\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\ sen\ 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(2+\frac{\pi}{4}\right) = 8+\pi.$$

Determinamos los momentos estáticos.

$M_x = 0$, Porqué la región es simétrica respecto al eje “x”, por lo tanto $\bar{y} = 0$.

$$M_y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} x * r\,dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\cos\theta * r\,dr =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} \cos\theta * r^2\,dr = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta [r^3]_{2}^{2(1+\cos\theta)} d\,\theta \ \therefore$$

$$M_y = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta[(1+\cos\theta)^3 - 1]d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta[1 + 3\cos\theta + 3cos^2\theta + cos^3\theta - 1]d\theta \;\therefore$$

$$M_y = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2}(1+\cos\ 2\theta) + 3(1 - sen^2\theta)\cos\theta + \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\right] d\theta \;\therefore$$

$$M_y = \frac{16}{3}\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}sen\ 2\theta + 3\ sen\ \theta - sen^3\theta + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}sen\ 2\theta + \frac{1}{8}\theta + \frac{1}{32}\ sen\ 4\theta\right]_0^{\pi/2} \;\therefore$$

$$M_y = \frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{4} + 3 - 1 + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16}\right) = \frac{16}{3}\left(\frac{15\pi}{16} + 2\right) = \frac{15\pi + 32}{3}.$$

Coordenadas del centroide.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{15\pi + 32}{3}}{8 + \pi} \approx 2.4, \quad \bar{y} = 0.$$

8. *Hallar el momento de inercia y el radio de giro del cardiode* $r = a(1 + cos\ \theta)$ *con respecto al eje "y".*

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.47).

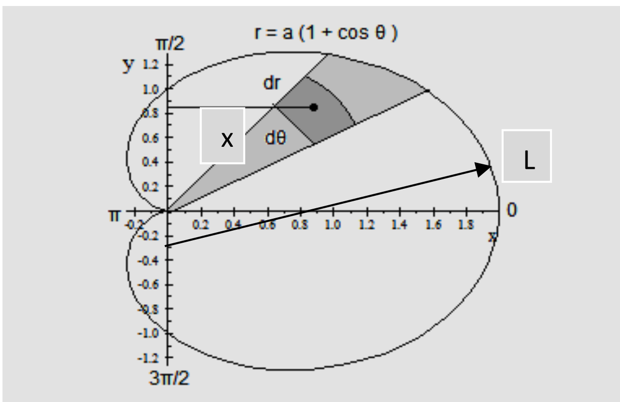


Figura 2.47

Cuando se trata de una figura geométrica se toma $\partial(x,y)=1$.

$$I_y=\iint_R x^2\partial(x,y)dA$$

Con $x=r\cos\theta$ y $dA=r\,dr\,d\theta$.

$$I_y=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}(r\cos\theta)^2\,r\,dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}(\cos\theta)^2\,r^3\,dr=$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}cos^2\theta[a^4(1+\cos\theta)^4]d\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}cos^2\theta\,(1+\cos\theta)^4d\theta\quad\therefore$$
$$I_y=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}(cos^2\theta+4cos^3\theta+6cos^4\theta+4cos^5\theta+cos^6\theta)\,d\theta\ \therefore (I).$$

Para resolver los integrales utilizamos la fórmula de reducción

$$\int_0^{2\pi}cos^n\theta\,d\theta=\frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi}cos^{n-2}\theta\,d\theta.$$

Así tenemos:

$$\int_0^{2\pi}cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}[\theta]\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix}=\frac{1}{2}(2\pi)=\pi.$$
$$\int_0^{2\pi}cos^3\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\frac{2}{3}[sen\,\theta]\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix}=\frac{2}{3}(0)=0.$$
$$\int_0^{2\pi}cos^4\theta\,d\theta=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}cos^2\,\theta\,d\theta=\frac{3\,\pi}{4}.$$
$$\int_0^{2\pi}cos^5\theta\,d\theta=\frac{4}{5}\int_0^{2\pi}cos^3\,\theta\,d\theta=0.$$
$$\int_0^{2\pi}cos^6\theta\,d\theta=\frac{5}{6}\int_0^{2\pi}cos^4\,\theta\,d\theta=\frac{15\pi}{24}=\frac{5\pi}{8}.$$

Esto reemplazando en (I), encontramos la respuesta.

$$I_y = \frac{a^4}{4}\left[\pi + \frac{18\,\pi}{4} + \frac{5\pi}{8}\right] = \frac{49\pi a^4}{32}.$$

Calculamos la masa.

$$m = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [r^2]\begin{matrix} a(1+\cos\theta) \\ 0 \end{matrix}\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta \;\therefore$$

$$m = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2cos\theta + cos^2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + 2sen\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sen\,2\theta\right]\begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} \;\therefore$$

$$m = \frac{a^2}{2}(2\pi + \pi) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Determinamos el radio de giro.

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{49\pi a^3}{32}}{\frac{3\pi a^2}{2}}} = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

2.7. Cálculo de áreas de superficies

Supongamos que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R del plano "xy". Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie $z = f(x,y)$ que se encuentra sobre R, entonces

$$\sigma = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dA.$$

Ejemplos:

1. *Encuentre el área de la superficie en el primer octante cortada en el cilindro* $x^2 + z^2 = 16$ *por los planos* $x = 0, x = 2, y = 0$ *e* $y = 3$.

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.48).

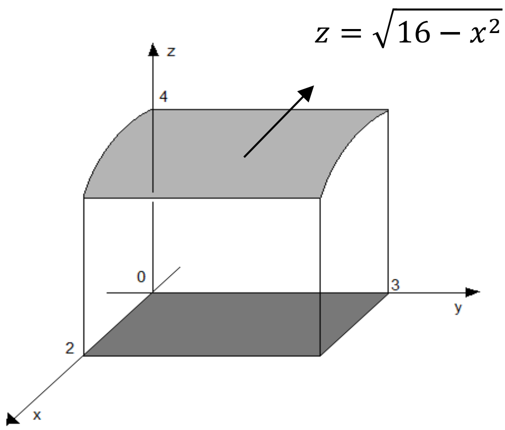


Figura 2.48

Hallamos el área, la región es un rectángulo en el primer cuadrante del plano "*xy*", limitado por las rectas $x = 2$ e $y = 3$.

Despejando z de la superficie tenemos: $z = \sqrt{16 - x^2}$. De aquí encontramos las derivadas parciales.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Reemplazando en la fórmula de área tenemos:

$$\sigma = \int_0^3 dy \int_0^2 \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\ dx = \int_0^3 dy \int_0^2 \sqrt{\frac{x^2 + 16 - x^2}{16 - x^2}}\ dx \ \therefore$$

$$\sigma = \int_0^3 dy \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\ dx = 4\int_0^3 \left[arc\ sen\ \left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^2 dy = 4\int_0^3 \frac{\pi}{6}\ dy \ \therefore$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{3}[y]_0^3 = \frac{2\pi}{3} * 3 = 2\pi\ u^2.$$

2. *Determinar el área de la superficie cortada en el plano* $2x + y + z = 4$ *por los planos* $x = 0, x = 1, y = 0$ *e* $y = 1$.

Solución:

Hacemos el gráfico (Fig. 2.49).

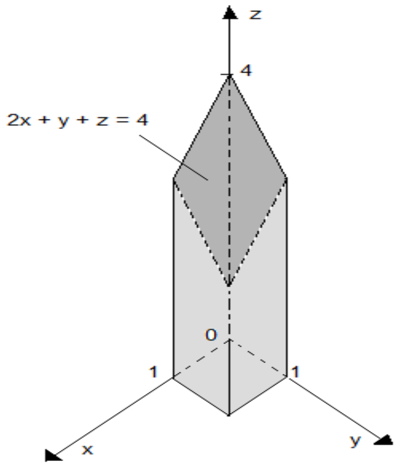


Figura 2.49

Hallamos el área, la región es un rectángulo en el primer cuadrante del plano "xy", limitado por las rectas $x = 1$ e $y = 1$.

Despejando z de la superficie tenemos: $z = 4 - 2x - y$. De aquí encontramos las derivadas parciales.

$$\frac{\partial z}{\partial x} == -2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$

Reemplazando en la fórmula de área tenemos:

$$\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 \sqrt{4+1+1}\ dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \sqrt{6}\, dx \ \therefore$$

$$\sigma = \sqrt{6} \int_0^1 [x]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} dy = \sqrt{6} \int_0^1 dy = \sqrt{6}[y]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \sqrt{6}\, u^2.$$

2.8. Integrales triples

La extensión del concepto de integral doble a la integral triple es análoga a la extensión de la integral simple a la integral doble.

2.8.1. Definición de integral triple en coordenadas rectangulares

Sea f una función de tres variables x, y y z, definida sobre el recinto S más simple en R^3 (un paralelepípedo rectangular). La **integral triple** de f en S, denotada como $\iiint_V f(x,y,z)dV$, está definida por:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta_i V.$$

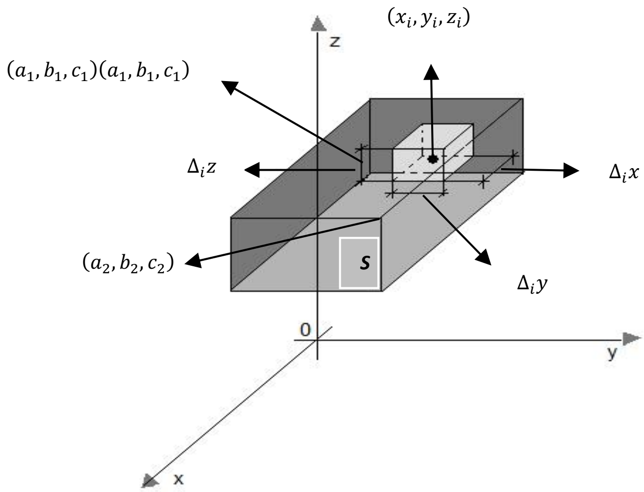


Figura 2.50

Demostración:

Tomamos la región más simple en R^3 (Fig. 2.50) que es un paralelepípedo rectangular limitado por seis planos $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$ y $z = c_2$, con $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Sea f una función de tres variables y supongamos que f es continua en una región S de este tipo. Una partición de esta región se forma al dividir S en cajas rectangulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Denotamos a la partición por Δ y supongamos que se tiene n cajas. Sean $\Delta_i V$ unidades cúbicas el volumen de la i-ésima caja. Se elige un punto arbitrario (x_i, y_i, z_i) en la i-ésima caja, y formamos el producto $f(x_i, y_i, z_i)\Delta_i V$ en cada una de ellas, como son n cajas se forma la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta_i V$$

Que no es más que una suma de Riemann, si a ésta suma se le aproxima a un límite conforme $\|\Delta\|$ (norma de la partición, representa la longitud de la diagonal más grande de las cajas) tiende a cero para cualesquiera elecciones de los puntos $f(x_i, y_i, z_i)$, entonces a este límite le llamamos integral triple de f en S si existe y se denota como:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z)dV\,.Lcqd.$$

Una condición suficiente para que exista la integral triple de f en S es que f sea continua en S.

Rara vez se calcula la integral triple a partir de su definición como límite. En lugar de eso, se aplica la versión tridimensional del teorema de Fubini, que nos permite calcularlas mediante repetidas integraciones simples. Cuando S es el paralelepípedo rectangular, y f es continua en S, se tiene entonces

$$\iiint_S f(x, y, z)dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Este es uno de los seis órdenes posibles de integración de la integral triple que en estos casos existen sin reparo.

Está misma definición podemos extenderle a una función continua de tres variables en una región S cerrada de R^3 diferente al de un paralelepípedo rectangular (Fig. 2.51). Sea la región S cerrada y limitada por los planos $x = a,\ x = b,\ los\ cilindros\ \ y = f_1(x, y)\ \ e\ \ y = f_2(x, y),$ y las superficies $z = F_1(x, y),$

$y\ \ z = F_2(x, y)$ donde las funciones $f_1,\ f_2,\ F_1\ \ y\ \ F_2$ son continuas en la región. Este concepto podemos definirlo con una de las siguientes integrales iteradas.

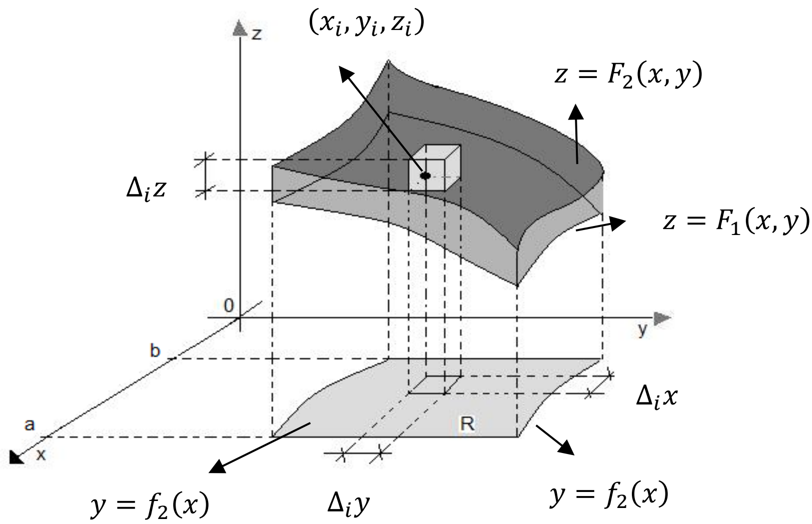


Figura 2.51

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x.y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Ejemplos:

Evaluar las siguientes integrales triples.

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x\, dz\, dy\, dx$.

Solución:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x[z]\begin{matrix} 1+y^2 \\ 2y \end{matrix}\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1 + y^2 - 2y)dy =$$

$$= \int_0^1 x\left(y + \frac{1}{3}y^3 - y^2\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\left[(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 - (1-x)^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{10}\right) = \frac{1}{10}u^2.$$

2. $\int_{-1}^{0}\int_{e}^{2e}\int_{0}^{\pi/3} y\ln z\; tg\, x\; dx\, dz\, dy.$

Solución:

$$\int_{-1}^{0}\int_{e}^{2e}\int_{0}^{\pi/3} y\ln z\; tg\, x\;\; dx\, dz\, dy = \int_{-1}^{0} dy\int_{e}^{2e} y\ln z\;\left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/3} dz =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy\int_{e}^{2e} y\ln z\;\left[-\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 1\right]dz = \ln 2\int_{-1}^{0} y[z(\ln z - 1)]_e^{2e}\, dy =$$

$$= \ln 2\int_{-1}^{0} y[2e(\ln 2e - 1) - e(\ln e - 1)]dy = \ln 2\int_{-1}^{0} y[2e(ln2)]dy =$$

$$= \ln 2 * 2e(ln2)\int_{-1}^{0} ydy = 2e\,(\ln 2)^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-1}^{0} = 2e\,(\ln 2)^2\left(-\frac{1}{2}\right) = -e\,(\ln 2)^2.$$

3. *Calcular la integral triple* $\iiint_S xdV$*, si la región S es un cilindro limitado por las superficies* $x^2 + y^2 = 16,\;\; z = 0\;\; y\;\; z = 4.$

Solución:

El procedimiento para calcular los límites de integración, es análogo a la integral doble, vale recordar la importancia de realizar el gráfico en R^3 y en R^2, para de esa manera tener claro la colocación y cálculo de los límites de las respectivas integrales definidas.

Realizamos el gráfico (Fig. 2.52).

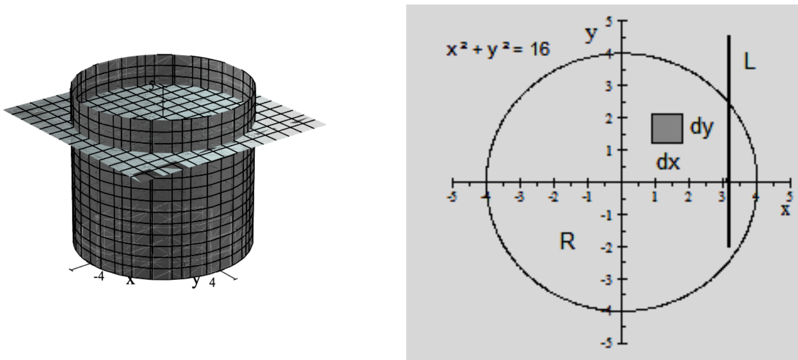


Figura 2.52

Primero calculamos los límites de la región en el plano “xy”, y luego observando la figura en R^3 ponemos los límites para “z”. Por simetría:

$$4\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_0^4 x\,dz = 4\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} x[z]_0^4 dy = 16\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xdy \;\therefore$$

$$16\int_0^4 x[y]_0^{\sqrt{16-x^2}} dx = 16\int_0^4 \left[\sqrt{16-x^2}\right] xdx = -8 * \frac{2}{3}\left[(16-x^2)^{3/2}\right]_0^4 \;\therefore$$

$$= \frac{1024}{3}.$$

4. *Evaluar la integral triple* $\iiint_S xdV$, *si la región S está limitado por las superficies* $z^2 - 4x + y^2 = 0,\;\; x = 2,\;\; x = 0,\;\; y = 0,\;\; y = 2\sqrt{x},\;\; y\;\; z = 0.$

Solución:
Hacemos el gráfico (Fig. 2.53).

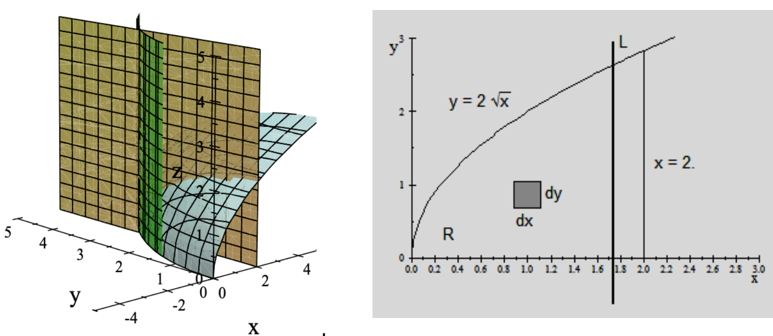


Figura 2.53

Calculamos la integral:

$$\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\,dz = \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} x[z]_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} dy = \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} x\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 x\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x-y^2} + \frac{4x}{2} arc\ sen\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)\right]_0^{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 x\left(2x * \frac{\pi}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 x^2 dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}\,\pi}{3}.$$

2.8.2. Integral triple en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se utilizan con mayor frecuencia en aquellas aplicaciones que incluyen cilindros referidos al eje “z” y planos que contienen o son perpendiculares a dicho eje, estas superficies tienen ecuaciones sencillas de valores coordenados constantes como

$$r = 5, \qquad \theta = \frac{\pi}{6}, \qquad z = 3.$$

Si se trata de un sólido que tiene eje de simetría, a menudo es posible simplificar los cálculos tomando el eje de simetría al eje “z”.

El elemento de volumen para subdividir una región en el espacio con coordenadas cilíndricas es

$$dV = dz\,r\,dr\,d\theta.$$

Por lo que la integral triple en coordenadas cilíndricas está definida por (Fig. 2.54):

$$\iiint\limits_S f(r,\theta,z)r\,dr\,d\theta\,dz.$$

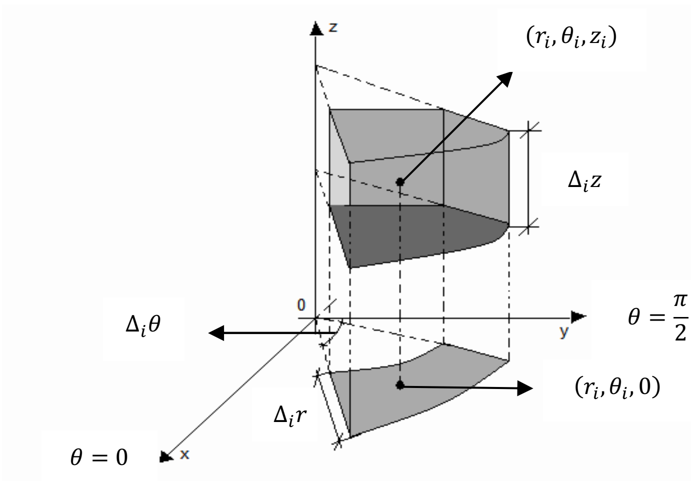


Figura 2.54

En coordenadas cilíndricas, también se calcula las integrales triples como integrales iteradas, una de las seis formas de estas ponemos a continuación.

$$\iiint\limits_S f(r,\theta,z)r\,dr\,d\theta\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r\,dr \int\limits_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} dz.$$

Ejemplos:

1. *Calcular la siguiente integral, pasando a coordenadas cilíndricas,*

$$\iiint\limits_S dx\,dy\,dz,$$

Donde S es el recinto limitado por las superficies $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ *y que contiene el punto* $(0,0,R)$.

Solución:

Hacemos el gráfico (Fig. 2.55). Sólo para el gráfico R = 2.

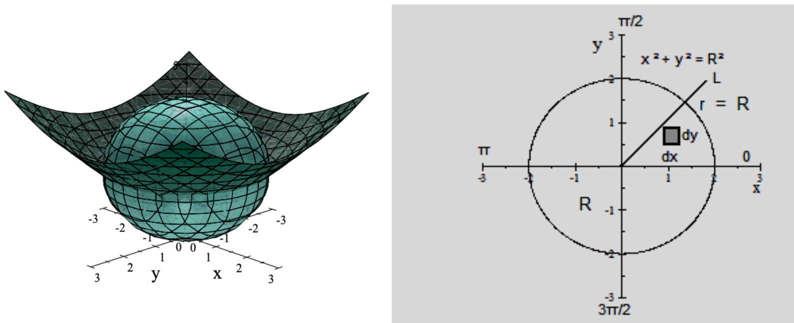


Figura 2.55

Cambiamos todo a coordenadas cilíndricas.

$$x^2+y^2+z^2=2Rz \;\therefore\; x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \;\therefore\; r^2+(z-R)^2=R^2 \;\therefore$$

$$z=R\pm\sqrt{R^2-r^2}.$$

$$x^2+y^2=z^2 \therefore\; r^2=z^2 \;\;\therefore\;\; z=r.$$

Sección transversal en “xy”: $x^2+y^2=R^2 \;\therefore\; r^2=R^2 \;\therefore\; r=R,$ $y \;\; 2\pi\leq\theta\leq 0.$

$$\iiint_S dx\,dy\,dz=4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz, en\ coordenadas\ cartesianas.$$

En coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_S dV = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r\,dr \int_r^{R+\sqrt{R^2-r^2}} dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R [z]\,\begin{matrix} R+\sqrt{R^2-r^2} \\ r \end{matrix}\; r\,dr =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \left[R+\sqrt{R^2-r^2}-r\right] r\,dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}R\,r^2 - \frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3}r^3\right]_0^R d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}R^3 - \frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{3}R^3\right] d\theta = 2R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2R^3[\theta]\begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{matrix} = 2R^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi R^3.$$

2. *Calcular*

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\,\sqrt{x^2+y^2}\,dz,$$

Transformándole previamente a coordenadas cilíndricas.

Solución:
Realizamos el gráfico de la sección transversal en el plano "*xy*" (Fig. 2.56).

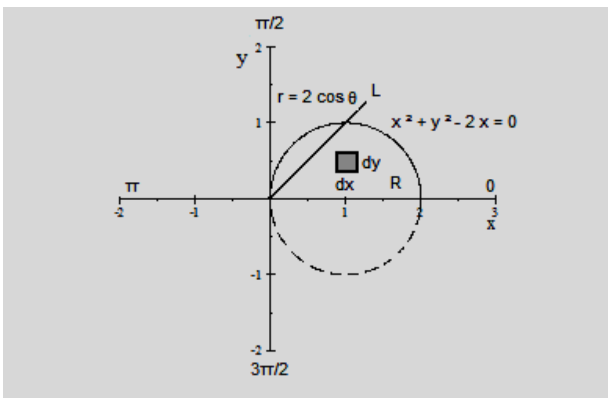


Figura 2.56

Cambiamos todo a coordenadas cilíndricas.

$$f(x.y) = \sqrt{x^2+y^2} \;\therefore\; f(r,\theta) = \sqrt{r^2} \;\therefore\; f(r,\theta) = r.$$

$$z = z$$

Sección transversal en "*xy*":

$$x^2 + y^2 = 2x \;\therefore\; r^2 = 2\,rcos\,\theta \;\therefore\; r = 2\cos\theta \;\; y \;\; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0.$$

En coordenadas cilíndricas.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\,dr \int_0^{a} z\,r\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^a dr = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\,dr =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8a^2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3\theta\,d\theta = \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - sen^2\theta]\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\left[sen\,\theta - \frac{1}{3}sen^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a^2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}a^2.$$

2.8.3. Integral triple en coordenadas esféricas

Como las coordenadas cilíndricas son útiles en aquellas aplicaciones que incluyen cilindros, las coordenadas esféricas son útiles en aplicaciones que incluyen formas acotadas por esferas con centro en el origen, planos que pasan por el eje "*z*" y conos con vértices en el origen cuyos ejes coincidan con el eje "*z*". estas superficies están determinadas por ecuaciones simples de valores constantes como

$$\rho = r, \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Si se trata de una forma simétrica respecto a un punto, a menudo es posible facilitar el trabajo eligiendo ese punto como origen del sistema de coordenadas esféricas.

El elemento de volumen en coordenadas esféricas es

$$dV = \rho^2 sen\, \varphi\; d\rho\; d\varphi\; d\theta$$

Por lo que las integrales triples en coordenadas esféricas toman la forma:

$$\iiint_S f(\rho,\varphi,\theta)dV = \iiint_S f(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta}),\varphi,\theta)\; \rho^2 sen\, \varphi\; d\rho\; d\varphi\; d\theta.$$

Una manera práctica de calcular estas integrales lo mencionamos a continuación:

1. La primera integral que calculamos es respecto a ρ, esto da un rayo que parte del origen, φ y θ permanecen fijos.
2. Integramos entre el valor ρ donde el rayo entra en *S* y el valor de ρ donde sale.
3. Mantener θ fija e incrementar $\boldsymbol{\varphi}$**.** (Esto origina una familia de rayos en forma de "abanico".) Integrar sobre los valores de φ para los cuales los rayos pasan por *S*.
4. Elegir los límites de θ que incluyan todos los abanicos que intersecan a *S*.

Ejemplos:

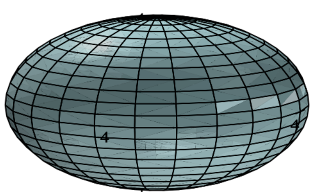
1. *Calcular*

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz,$$

Pasando previamente a coordenadas esféricas.

Solución:

Hacemos el gráfico de la sección transversal (Fig. 2.57)



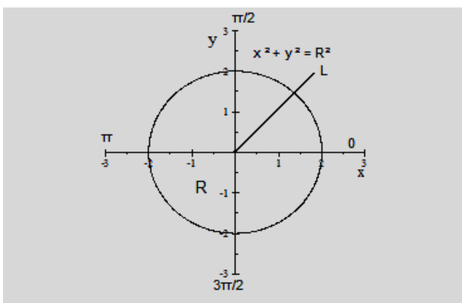


Figura 2.57

Pasando a coordenadas esféricas.

Según la figura 2.57:

$$2\pi \leq \theta \leq 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$$

Superficies:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \ \therefore \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ \therefore \ \rho^2 = R^2 \ \therefore \ \rho = R.$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 \ \therefore \ f(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 sen^2\varphi(cos^2\theta + sen^2\theta) = \rho^2 sen^2\varphi.$$

La integral triple en coordenadas esféricas será:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^2 sen^2\varphi * \rho^2 sen\,\varphi\ d\rho = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3\varphi[\rho^5]\begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix} d\varphi =$$

$$\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3\varphi[R^5]d\varphi = \frac{4}{5}R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - cos^2\varphi] sen\,\varphi\ d\varphi =$$

$$= \frac{4}{5}R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\varphi + \frac{1}{3}cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{4}{5}R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{8R^5}{15}[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{15}R^5.$$

2. *Calcular*

$$\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV,$$

Donde S es la parte interna de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$.

Solución:
Sección transversal en el plano "*xy*".

En la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$ hacemos $z = 0$, por lo que la sección transversal sería $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

Hacemos el gráfico de la sección transversal (Fig. 2.58).

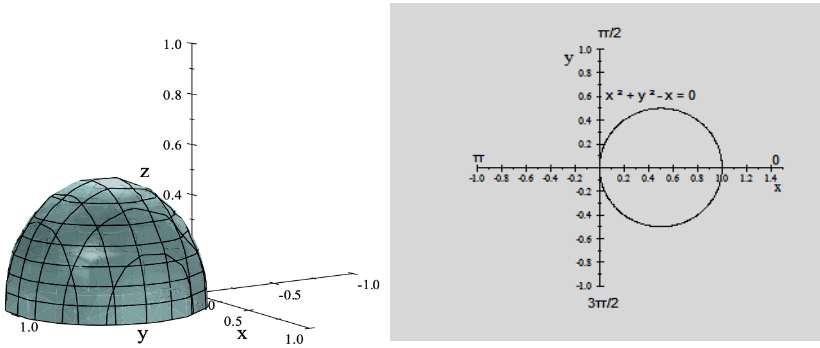


Figura 2.58

Pasando a coordenadas esféricas.

Según la figura 2.58:

$$\pi \leq \theta \leq 0, \quad \pi \leq \varphi \leq 0.$$

Superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq x \ \therefore \ \rho^2 \leq \rho \, sen\, \varphi \cos\theta \ \therefore \ \rho \leq sen\, \varphi \cos\theta.$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \therefore \ f(\rho,\theta,\varphi) = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

La integral triple en coordenadas esféricas será:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{sen\,\varphi\cos\theta} \rho * \rho^2 sen\,\varphi \; d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,\varphi \, [\rho^4]_0^{sen\,\varphi\cos\theta} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,\varphi \; sen^4\,\varphi \cos^4\theta \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta[1 - 2cos^2\varphi + cos^4\varphi]sen\,\varphi \, d\varphi$$

$$=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\varphi + \frac{2}{3}cos^3\varphi - \frac{1}{5}cos^5\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) cos^4\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta\, d\theta = \frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]^2 d\theta$$

$$= \frac{2}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right] d\theta =$$

$$= \frac{2}{15}\left[\theta + sen\, 2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}sen\, 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{15}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{10}.$$

2.9. Aplicaciones de las integrales triples

2.9.1. Aplicaciones geométricas. (Cálculo de Volúmenes)

De la misma forma que la integral doble puede interpretarse como la medida del área de una región plana cuando $f(x, y) = 1$ en R, la integral triple puede definirse como la medida de volumen de una región tridimensional si $f(x, y, z) = 1$ en S, por lo que la definición de integral triple se transforma en:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \Delta_i V = \iiint_S dV.$$

Expresión que nos permite calcular el volumen de la región S.

Ejemplos:

1. *Determinar el volumen del sólido que se encuentra sobre el plano "xy" y está limitado por el paraboloide elíptico* $z = x^2 + 4y^2$ *y el cilindro* $x^2 + 4y^2 = 4$.

   Solución:
   Realizamos el gráfico (Fig. 2.59).

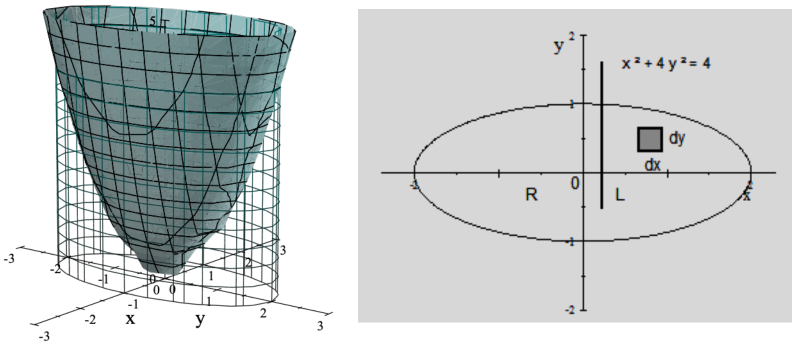


Figura 2.59

Encontramos el volumen.

$$V = 4\int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x^2+4y^2} dz = 4\int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} [z]_0^{x^2+4y^2} dy =$$

$$= 4\int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} [x^2+4y^2]dy = 4\int_0^2 \left[x^2y+\frac{4}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= 4\int_0^2 \left[x^2 * \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{6}(4-x^2)^{3/2}\right]dx$$

$$= 4\int_0^2 \left[\frac{1}{6}\sqrt{4-x^2}(3x^2+4-x^2)\right]dx \ \therefore$$

$$V = \frac{4}{6}\int_0^2 2(x^2+2)\sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{4}{3}\int_0^2 (x^2+2)\sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\left[\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx + 2\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{x}{8}(2x^2-4)\sqrt{4-x^2}+\frac{16}{8}arc\ sen\ \left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 + \frac{8}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}arc\ sen\ \left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 \ \therefore$$

$$V = \frac{4}{3}[\pi] + \frac{8}{3}[\pi] = 4\pi\ u^3.$$

2. *Determine el volumen del sólido limitado por el cilindro* $x^2 + y^2 = 25$, *el plano* $x + y + z = 8$ *y el plano "xy".*

Solución:
Hacemos el gráfico (Fig. 2.60).

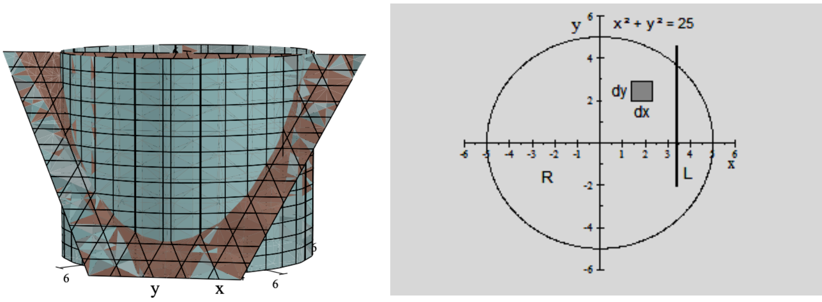


Figura 2.60

Hallamos el volumen.

$$V = 2\int_{-5}^{5} dx \int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} dy \int_{0}^{8-x-y} dz = 2\int_{-5}^{5} dx \int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} [z]_{0}^{8-x-y} dy =$$

$$= 2\int_{-5}^{5} dx \int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} (8-x-y)dy = 2\int_{-5}^{5} \left[(8-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_{0}^{\sqrt{25-x^2}} dx =$$

$$= 2\int_{-5}^{5} \left[(8-x)\sqrt{25-x^2} - \frac{1}{2}(25-x^2)\right] dx \ \therefore$$

$$V = 2\left[8\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\, dx - \int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\ x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-5}^{5} (25-x^2)dx\right] \therefore$$

$$V = 2\left[8\left(\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right)\right) + \frac{1}{3}(25-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(25x - x^3)\right]_{-5}^{5} \therefore$$

$$V = 2 * 8\left[\frac{25}{4}\pi + \frac{25}{4}\pi\right] = 200\pi\ u^3.$$

3. *Determinar el volumen del sólido ubicado sobre el paraboloide elíptico* $3x^2 + y^2 = z$ *y debajo del cilindro* $x^2 + z = 4$.

Solución:

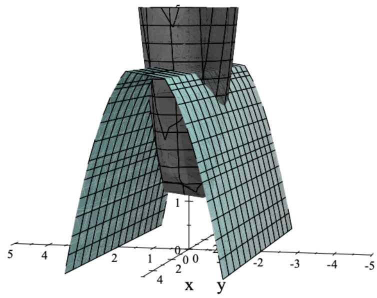
Encontramos la sección transversal (región R), resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = z & (1) \\ x^2 + z = 4 \therefore\ z = 4 - x^2 & (2). \end{cases}$$

$$(1)\ \ en\ \ (2)\ \ 3x^2 + y^2 = 4 - x^2 \quad \therefore\ \ 4x^2 + y^2 = 4.$$

Que es la región en el plano "*xy*".

Realizamos el gráfico (Fig. 2.61).



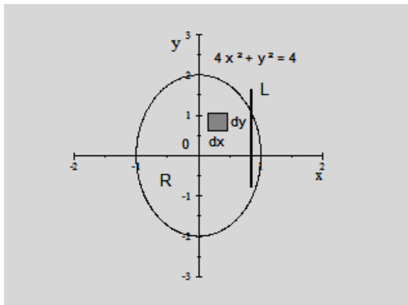


Figura 2.61

Encontramos el volumen.

$$V = 4\int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} dy \int_{3x^2+y^2}^{4-x^2} dz = 4\int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} [z]_{3x^2+y^2}^{4-x^2} dy =$$

$$= 4\int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} (4 - x^2 - 3x^2 - y^2)dy = 4\int_0^1 \left[4y(1-x^2) - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{2\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= 4\int_0^1 \left[8(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{8}{3}(1-x^2)^{3/2}\right] dx = \frac{64}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\, dx \ \ \therefore$$

$$V = \frac{64}{3}\left[\frac{x}{8}(2x^2 - 5)\sqrt{1 - x^2} + \frac{3}{8}\, arc\ sen\ (x)\right]_{0}^{1} \;\therefore$$

$$V = \frac{64}{3}\left[\frac{3}{16}\pi\right] = 4\pi\ u^3.$$

4. *Encuentre el volumen seccionado en la esfera* $\rho = 4$ *por el cono* $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.62).

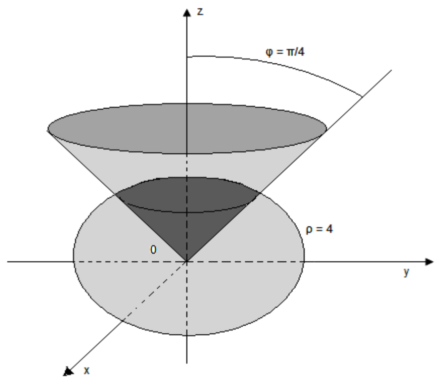


Figura 2.62

El volumen en coordenadas cilindricas se calcula como:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4} \rho^2 sen\,\varphi\, d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\,\varphi [\rho^3]_0^4\, d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\,\varphi\, d\varphi$$

$$V = \frac{64}{3}\int_0^{2\pi} [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}}\, d\theta = \frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) d\theta = \frac{32}{3}(2 - \sqrt{2})\int_0^{2\pi} d\theta \;\therefore$$

$$V = \frac{32}{3}(2 - \sqrt{2})[\theta]_0^{2\pi} = \frac{32}{3}(2 - \sqrt{2})(2\pi) = \frac{64\pi}{3}(2 - \sqrt{2})\, u^3.$$

5. *Determinar el volumen del sólido ubicado dentro de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ *y que se encuentra arriba del cono* $x^2 + y^2 = z^2$.

Solución:

Buscamos la sección transversal, del sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4z & (1) \\ x^2+y^2=z^2 & (2) \end{cases}$$

$(2)\ en\ (1)\quad z^2+z^2=4z\quad \therefore\quad 2z^2-4z=0\ \therefore\ (2z)(z-2)=0\ \therefore z=0\ \ y\ \ z=2.$

El valor que tomamos de los dos obtenidos es z = 2, por lo que la sección transversal en el plano “xy” es la circunferencia: $x^2+y^2=4.$

Realizamos el gráfico (Fig. 2.63).

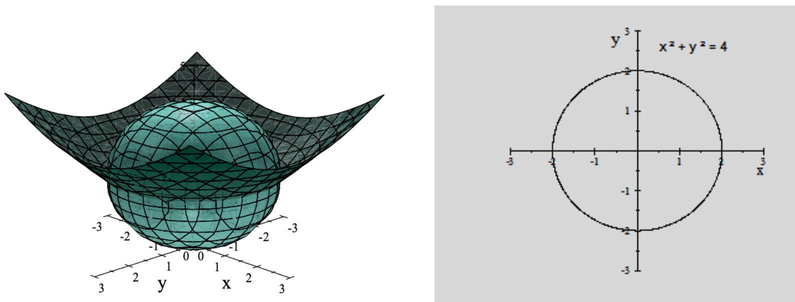


Figura 2.63

Este ejemplo resulta más fácil resolverlo con coordenadas esféricas.

Pasando a coordenadas esféricas.

Las superficies:

$$x^2+y^2+z^2=4z\ \therefore\ \rho^2=4\rho\cos\varphi\ \therefore\ \rho=4\cos\varphi.$$

$$x^2+y^2=z^2\ \therefore\ \rho^2 sen^2\varphi\, cos^2\theta+\rho^2 sen^2\varphi\, sen^2\theta=\rho^2\, cos^2\varphi\ \therefore$$

$$\rho^2 sen^2\varphi(cos^2\theta+sen^2\theta)=\rho^2\, cos^2\varphi\ \therefore\ sen^2\varphi=cos^2\varphi\ \therefore\ tg^2\varphi=1\ \therefore$$

$$tg\ \varphi=\pm 1\ \therefore\ \ \varphi=arc\ tg(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{4}, aqui\ tomamos\ el\ valor\ positivo.$$

El valor de θ según el gráfico de la sección transversal será: $2\pi\le\theta\le 0$

Por lo que el volumen en coordenadas cilindricas es:

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} \rho^2 sen\,\varphi\, d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\rho^3)\begin{matrix} 4\cos\varphi \\ 0 \end{matrix} sen\,\varphi\, d\varphi =$$

$$=\frac{64}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos^3\varphi) sen\,\varphi\, d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4}cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \therefore$$

$$V=\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{64}{3} * \left(\frac{3}{16}\right)[\theta]_0^{2\pi} = \frac{64}{3} * \left(\frac{3}{16}\right) * 2\pi = 8\pi\, u^3.$$

6. *Hállese el volumen acotado por abajo poe rl plano* $z=0$*, lateralmente por el cilindro* $x^2+y^2=1$ *y por arriba por el paraboloide* $z=x^2+y^2$.

Solución:
Hacemos el gráfico (Fig. 2.64).

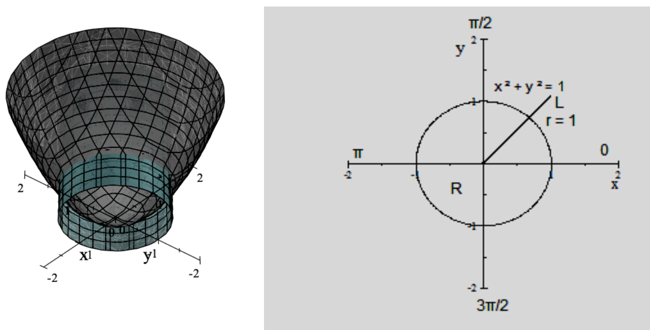


Figura 2.64

Pasando a coordenadas cilíndricas todo.

Superficies.

$$z=x^2+y^2 \quad \therefore \quad z=r^2.$$

$$x^2+y^2=1 \quad \therefore \quad r^2=1 \quad \therefore \quad r=1.$$

El ángulo θ varia de 0 a 2π.

Calculamos el volumen.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{r^2} r\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [z]_0^{r^2} r\, dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} [r^4]_0^1 d\theta \;\therefore$$

$$V = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{4}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} * 2\pi = \frac{\pi}{2}\, u^3.$$

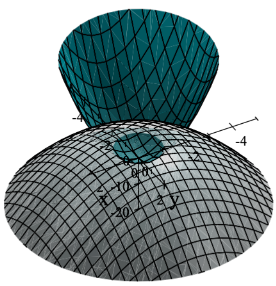
7. *Calcúlese el volumen acotado por arriba por el paraboloide* $z = 5 - x^2 - y^2$ *y por abajo por el paraboloide* $z = 4x^2 + 4y^2$.

Solución:
Encontramos la sección transversal resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} z = 5 - x^2 - y^2 & (1) \\ z = 4x^2 + 4y^2 & (2). \end{cases}$$

$$(1) = (2)\;\; 5 - x^2 - y^2 = 4x^2 + 4y^2 \;\;\therefore\;\; 5x^2 + 5y^2 = 5 \;\;\therefore\;\; x^2 + y^2 = 1.$$

Realizamos el gráfico (Fig. 2.65).



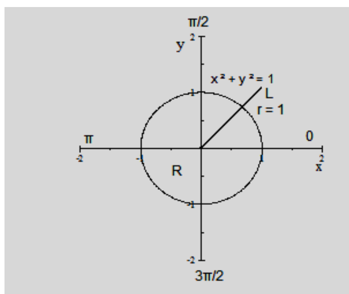


Figura 2.65

Pasando a coordenadas cilíndricas todo.

Superficies.

$$z = 5 - x^2 - y^2 \;\;\therefore\;\; z = 5 - r^2.$$

$$z = 4x^2 + 4y^2 \quad \therefore \quad z = 4r^2.$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \therefore \quad r^2 = 1 \quad \therefore \quad r = 1$$

El ángulo θ varia de 0 a 2π.

Calculamos el volumen.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{4r^2}^{5-r^2} r\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [z]\begin{matrix} 5-r^2 \\ 4r^2 \end{matrix}\, r\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (5 - r^2 - 4r^2)\, r\,dr \;\therefore$$

$$V = 5\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r\,dr = 5\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 d\theta = 5\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d\theta \;\therefore$$

$$V = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{5}{2}[\theta]\begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} = \frac{5}{2} * 2\pi = 5\pi\, u^3.$$

2.9.2. Aplicaciones físicas

Son las mismas aplicaciones de la integral doble extendida a una superficie, así tenemos las siguientes definiciones.

1. Masa: $m = \iiint_S \partial(x, y, z) dV \qquad \partial = densidad.$

2. Primeros momentos respecto a los planos coordenados:

$$M_{xy} = \iiint_S z\,\partial\,dV, \qquad M_{xz} = \iiint_S y\,\partial\,dV, \qquad M_{yz} = \iiint_S x\,\partial\,dV.$$

3. Centro de masas:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

4. Segundos momentos (momentos de inercia):

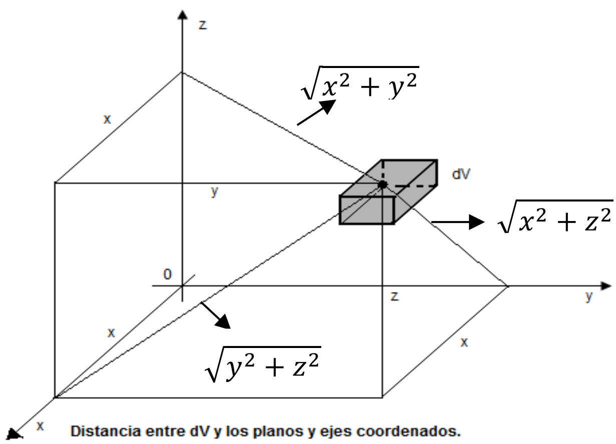
$$I_x = \iiint\limits_S (y^2 + z^2)\partial \, dV, \qquad I_y = \iiint\limits_S (x^2 + z^2)\partial \, dV.$$

$$I_z = \iiint\limits_S (x^2 + y^2)\partial \, dV, \qquad I_L = \iiint\limits_S r^2 \partial \, dV.$$

$$r(x, y, z) = distancia\ desde\ el\ punto(x, y, z)\ a\ la\ recta\ L.$$

5. Radio de giro respecto a una recta L:

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{m}}.$$



Distancia entre dV y los planos y ejes coordenados.

Figura 2.66

Ejemplos:

1. *Determine el centro de gravedad de un sólido acotado inferiormente por el disco $x^2 + y^2 \leq 9$, del plano z = 0, y superiormente por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, de densidad volumínica uniforme ∂ en cualquier punto del sólido.*

Solución:
Realizamos el gráfico (Fig. 2.67).

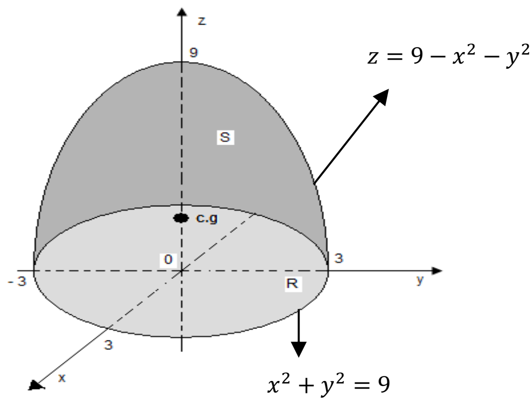


Figura 2.67

Por simetría, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Por lo que nos queda encontrar únicamente $\bar{z}$, para lo cual encontramos la masa y el momento respecto al plano "*xy*".

Calculo de la masa.

Pasamos todo a coordenadas cilíndricas.

$$z = 9 - x^2 - y^2 \quad \therefore \quad z = 9 - r^2.$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \therefore \quad r^2 = 9 \quad \therefore \quad r = 3.$$

Según la figura 2.67 $\quad 2\pi \leq \theta \leq 0.$

$$m = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3} r\,dr \int_0^{9-r^2} \delta\,dz = \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3} [z]\begin{matrix} 9 - r^2 \\ 0 \end{matrix}\, r\,dr = \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3} [9 - r^2]\, r\,dr \;\therefore$$

$$m = \delta\int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^3 d\theta = \delta\int_0^{2\pi}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right)d\theta = \frac{81\delta}{4}[\theta]\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix} = \frac{81}{4}(2\pi)$$
$$= \frac{81}{2}\pi\delta.$$

Calculo del momento.

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^3 r\,dr\int_0^{9-r^2}\delta\, z\, dz = \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^3 [z^2]\begin{matrix}9-r^2\\0\end{matrix}\, r\,dr = \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^3 (9-r^2)^2 r\,dr \;\therefore$$

$$M_{xy} = -\frac{\delta}{12}\int_0^{2\pi}\left[(9-r^2)^3\right]_0^3 d\theta = -\frac{\delta}{12}\int_0^{2\pi}(-729)d\theta = \frac{729\,\delta}{12}[\theta]\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix} \quad\therefore$$

$$M_{xy} = \frac{729\,\delta}{12}(2\pi) = \frac{243\,\delta}{2}$$

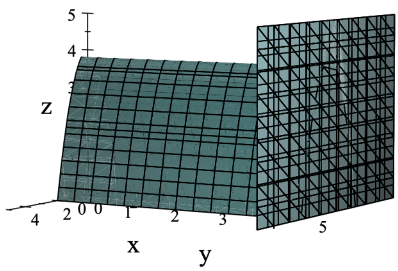
Por lo tanto,

$$\bar{z} = \frac{243\,\delta\,\pi/2}{81\delta\,\pi/2} = 3.$$

Y el centro de gravedad es: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 3)$.

2. *Determine la masa del sólido homogéneo acotado por el cilindro* $z = 4 - x^2$, *el plano* $z = 0$, $x = \pm 2$ *e* $y = 5$, *si la densidad volumínica en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cubico.*

Solución:



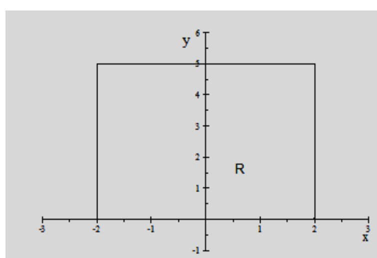


Figura 2.68

Hallamos la masa.

$$m = \int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{5} dy \int_{0}^{4-x^2} k\, dz = k \int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{5} [z]_{0}^{4-x^2} dy = k \int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{5} (4-x^2) dy$$

$$m = k \int_{-2}^{2} (4-x^2)[y]_{0}^{5} dx = 5k \int_{-2}^{2} (4-x^2) dx = 5k \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = 5k\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{160}{3} k\, kg.$$

3. *Calcule el momento de inercia respecto al eje "z" del sólido homogéneo limitado por el cilindro r = 5, el cono z = r y el plano "xy". La densidad volumétrica en cualquier punto es k slugs por pie cúbico.*

Solución:

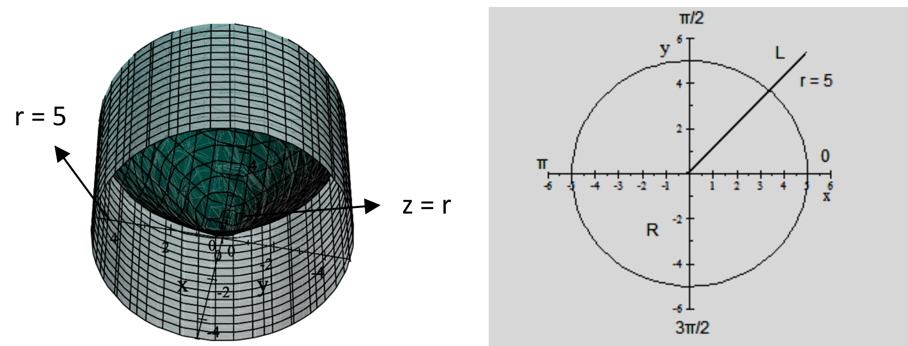


Figura 2.69

Determinamos el momento de inercia.

$$I_z = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{5} r\, dr \int_{0}^{r} k\, r^2 dz = k \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{5} [z]_{0}^{r} r^3 dr = k \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{5} r^4 dr = \frac{k}{5} \int_{0}^{2\pi} [r^5]_{0}^{5} d\theta$$

$$I_z = 625k \int_{0}^{2\pi} d\theta = 625\, k[\theta]_{0}^{2\pi} = 625\, k(2\pi) = 1250\, \pi\, k\, slug - pie^2\, .$$

4. *Determine el centro de masas del sólido ubicado dentro del paraboloide* $x^2 + y^2 = z$ *y fuera del cono* $x^2 + y^2 = z^2$. *La densidad volumínica constante es k kilogramos por metro cúbico.*

Solución:
Determinamos la sección transversal, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z & (1) \\ x^2 + y^2 = z^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\ en\ (2)\ \ z = z^2 \ \therefore\ z^2 - z = 0 \ \therefore z(z-1) = 0 \quad \therefore \quad z = 0 \ \ y \ \ z = 1.$$

Entonces la sección transversal es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Hacemos el gráfico (Fig. 2.70).

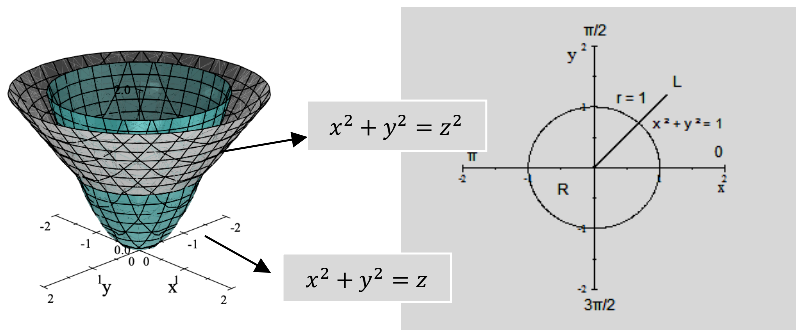


Figura 2.70

Pasando todo a coordenadas cilíndricas.

Superficies:

Paraboloide: $x^2 + y^2 = z \quad \therefore \quad \mathrm{z} = \mathrm{r}^2$.

Cono: $x^2 + y^2 = z^2 \quad \therefore \quad \mathrm{z}^2 = \mathrm{r}^2 \quad \therefore \quad z = r$.

Sección Transversal. $\quad x^2 + y^2 = 1 \ \therefore \ r^2 = 1 \ \therefore \ r = 1$.

Ángulo teta varía de 0 a 2π.

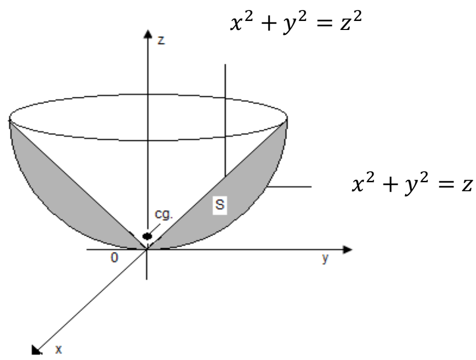


Figura 2.71

Por simetría, $\bar{x}=\bar{y}=0$. Por lo que nos queda encontrar únicamente $\bar{z}$, para lo cual encontramos la masa y el momento respecto al plano "xy".

Calculamos la masa:

$$m=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^{r}dz=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[z]_{r^2}^{r}\,r\,dr=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[r-r^2]r\,dr$$

$$m=k\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 d\theta=k\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)d\theta=\frac{k}{12}[\theta]_0^{2\pi}=\frac{k}{12}(2\pi)=\frac{\pi}{6}k\ kg.$$

Hallamos el momento:

$$M_{xy}=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{r^2}^{r}z\,dz=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[z^2]_{r^2}^{r}\,r\,dr=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[r^2-r^4]r\,dr$$

$$M_{xy}=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right]_0^1 d\theta=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)d\theta=\frac{k}{24}[\theta]_0^{2\pi}=\frac{k}{24}(2\pi)=\frac{\pi}{12}k\ kg.m$$

Por lo tanto,

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{{}^{\pi}/_{12}\ \ k}{{}^{\pi}/_{6}\ \ k}=\frac{1}{2}.$$

El centro de gravedad es: $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.

BIBLIOGRAFÍA

1) Ortiz Campos, F. J., Ortiz Cerecedo, F. J., & Ortiz Cerecedo, F. J. (2014). *Cálculo integral*.

2) Oteyza de Oteyza, E. de., Lam Osnaya, E., & Hernández Garciadiego, C. (2018). *Álgebra superior aplicada*. Pearson Educación.

3) Riquenes Rodríguez, M., Celorio Sánchez, A., & Acosta Velázquez, J. (2020). *Integral definida*. Editorial Universitaria.

4) Salazar Guerrero, L. J., & Bahena Román, H. (2018). *Álgebra.* Grupo Editorial Patria.

5) Suarez Vargas, F. C. (2020). *Análisis matemático de señales y sistemas*. Jorge Sarmiento Editor - Universitas.

AUTORES

Rafael Santiago Albuja Echeverría

Profesional especialista en la computación aplicada a la docencia en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Graduado de Ingeniero Civil en la Universidad de Guayaquil, Magister en Docencia Universitaria e Investigación Educativa, Universidad Nacional de Loja, y Magister en Matemática Básica ESPOCH. Gratamente docente de la Politécnica de Chimborazo del Departamento de Física y Matemáticas. Facultad de Mecánica desde 1991 hasta la presente. Impartiendo cátedras de Análisis Matemático, Algebra Lineal, Métodos numéricos, Geometría Plana y Analítica, Trigonometría, y Resistencia de Materiales. Coordinador del campo de Ciencias básicas, en la carrera de Ingeniería de Mantenimiento Industrial.

Cristian David Redroban Dillon

Graduado de Ingeniero Automotriz en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Magister en Seguridad Industrial Mención Prevención de Riesgos, en la Universidad Nacional de Chimborazo. Gratamente docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Carrera de Ingeniera Automotriz, impartiendo cátedras de Cálculo diferencial e integral, física, Estática, Seguridad Industrial, hoy en día forma parte del Grupo de Investigación de Mantenimiento (GIMAN) de la ESPOCH.

Gabriel Vinicio Moreano Sánchez

Ingeniero Cum Laude en Electrónica y Control por parte de la Escuela Politécnica Nacional (EPN), obtuvo el grado de Máster Universitario en Automática y Robótica de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) y del Máster Universitario en Diseño y Gestión de proyectos Tecnológicos en la Universidad Internacional de la Rioja (UNIR), actualmente es candidato al Doctorado en Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Es docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) en las áreas de sistemas de control, modelado matemático e instrumentación industrial, hoy en día forma parte el Grupo de Investigación y Mantenimiento (GIMAN) de la ESPOCH y al Grupo

Análisis Matemático para Ingenieros

Cálculo integral de funciones de una variable

TOMO 2

Cristian Redroban Dillon
Gabriel Moreano Sánchez

ISBN: 978-9942-42-401-3