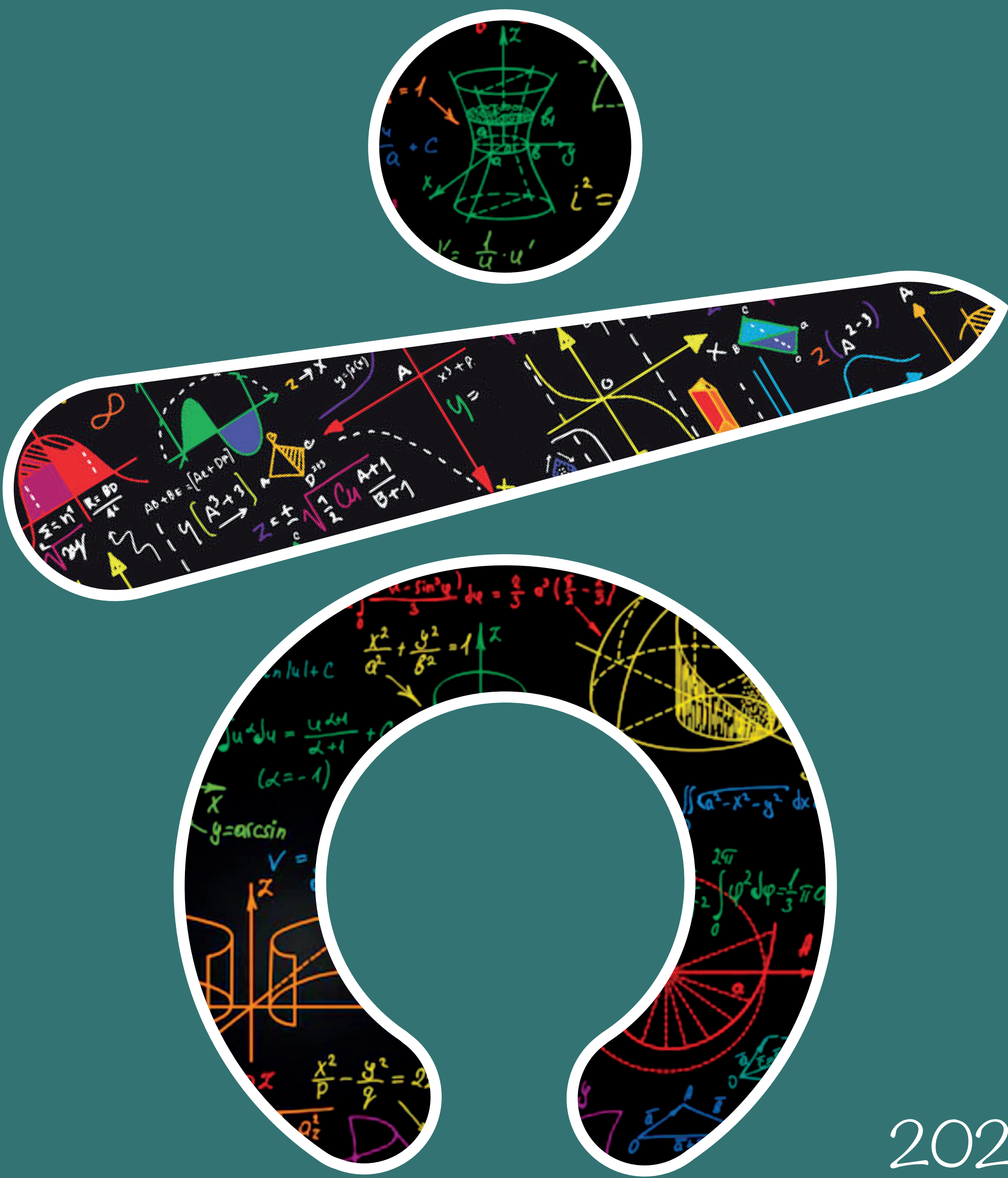
Análisis Matemático para Ingenieros

Cálculo integral de funciones de una variable

Tomo I

Rafael Santiago Albuja Echeverría
Alex Giovanny Tenicota García
Edisson Fernando Calderón Freire



2022

Análisis Matemático para Ingenieros

Cálculo integral de funciones de una variable

Alex Giovanny Tenicota García
Edisson Fernando Calderón Freire

TOMO 1

Análisis Matemático para Ingenieros.
Cálculo integral de funciones de una variable

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)
Riobamba – Ecuador
Panamericana Sur Km. 1½
Teléfono: 593 (03) 2998-200
Código Postal EC0600155

2022
Publicado por acuerdo con los autores.
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego *(peer review)*

Corrección y diseño, respaldado por:
La Caracola Editores
Índice Científico, Editorial

Análisis Matemático para Ingenieros.
Cálculo integral de funciones de una variable
Riobamba, Ecuador
Dirección de Publicaciones Científicas, 2022
ISBN: 978-9942-42-091-6
Fecha de Publicación: 2022-03-17

DEDICATORIA

La presenta obra ha sido fruto de varios años de esfuerzo y sacrificio, este es el resultado de la meta inalcanzable por buscar iluminar los pensamientos críticos de la juventud actual.

El agradecimiento principal es a Dios, por su infinita sabiduría y conceder salud para elaborar este material. Además, el apoyo incondicional de las familias Albuja Echeverria, Tenicota Garcia y Calderón Freire, han permitido presentar este documento como retribución a la paciencia y compromiso para seguir alcanzando metas.

Finalmente, se agradece a la Carrera de Mantenimiento Industrial de la Faculta de Mecánica de la ESPOCH, por ser el complemento y nicho de grandes profesionales que se están consolidando como pioneros en la planificación de actividades que permiten aumentar la vida útil de los activos.

Rafael Albuja
Alex Tenicota
Edisson Calderón

Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí.

Marcus du Sautoy

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas desde que se tiene uso de razón han sido una de las temáticas básicas más usadas para sustentar o solucionar problemas tangibles e intangibles del universo. Al empezar el estudio de las matemáticas varios autores contemporáneos y modernos prefieren iniciar con la declaración de definiciones, teoremas, proposiciones y/o postulados, lo cual no está nada mal, si se trata de formar profesionales fundamentalistas, pero, para ser prácticos, el requerimiento apunta a ser metódicos. La formalidad de los estudios hace que se pueda aplicar y/o replicar los métodos con toda facilidad en casos particulares. La mayoría de los estudiantes universitarios han notado una repetición de un patrón de aprendizaje atribuido a la memorización de términos, conceptos con poca reflexión y razonamiento esencial para entender las matemáticas. Para varios especialistas la dificultad en el entendimiento de las matemáticas se resume en una combinación de conceptos de cálculo elemental y el rigor lógico. Civilizaciones como los hindúes egipcios, y/o griegos participaron en su desarrollo, que fue continuada los árabes y lo aplicaron enormemente para el desarrollo de varias ciencias y tecnologías. En adición, el álgebra es una herramienta de gran ayuda para la solución de problemas, de modo que, al emplear letras para presentar números, junto con símbolos que han utilizado para indicar operaciones y agrupamientos de código especial y común de un lenguaje algebraico, hasta este momento ha servido para facilitar el entendimiento y el ágil proceder con las matemáticas. La traducción del lenguaje cotidiano a lenguaje algebraico sintetiza la información y hace ver que una misma técnica sirve para resolver problemas de muy directa naturaleza.

Las competencias que se deben forjar en los estudiantes reúnen características de reflexión y razonamiento, que lo motiven como futuro profesional pertinente a ser capaz de resolver los problemas de cada contexto en donde se desenvuelva. Por ejemplo, la profesión de ingeniería nace de las especialidades civiles y militares, las cuales desde la edad moderna se concentran en mecánicos y eléctricos con una competencia en común de diseño de materiales, estructuras, máquinas y sistemas, teniendo en cuenta las limitaciones de seguridad, confort, practicidad, y costo. Típicos cálculos de superficies, volúmenes, momentos de áreas, momentos de inercia, teoría de circuitos, medios de enlace, sistemas de comunicación, comportamiento energético, entre otras aplicaciones específicas de ingeniería, hará que se busquen soluciones simplificadas, rápidas, y eficientes, que muy a menudo se consiguen con representaciones algebraicas concretas o modelación matemática de sistemas.

El algebra superior desde un punto de vista crítico ha sido característico de esta obra aclarar temas que se concentran en la atención del estudiante de pregrado, con el interés de reencontrar criterios de interpretación de expresiones como raíces, funciones y fracciones matemáticas. Debido a que las expresiones matemáticas se tornan cada vez más complejas cuando aparecen nuevos sistemas de referencia, que describen la geometría de los datos de modos distintos con observaciones redireccionadas, hace necesario para los autores de la obra proponer un capítulo que solvente esos vacíos que podrían ser latentes. Por ejemplo, todos los fundamentos de la física que constituyen la descripción de la mecánica utilizan un tecnicismo algebraico muy notable, y sus fundamentos se convierten en la base de sustentación del cálculo y análisis matemático. Las expresiones algebraicas son combinaciones de variables, números constantes, y operaciones. El desarrollo del álgebra ha producido en la humanidad durante varios siglos, un desarrollo notable para que la antigüedad, sea tomada como referencia de la ciencia. Por ejemplo, los cálculos en forma algorítmica con operaciones y expresiones simbólicas con enfoque metodológico geométrico, en actuales diseños y reacondicionamientos de construcciones y bienes muebles e inmuebles, se sigue utilizando. Sin embargo, en esta unidad se presentan situaciones en las que se deberá aplicar en forma directa este tipo de expresiones. Para ello se trabajará con situaciones abstractas que ayudarán a generar una solución y cierta agilidad en el razonamiento del problema, para poder gradualmente introducir letras por números, aproximando estos conceptos con ejemplos sencillos y de la vida cotidiana hasta generalizar un procedimiento.

El análisis matemático estudia el comportamiento de los números reales y complejos en cuanto a la construcción de estos dentro de componentes tales como funciones, series, sucesiones, continuidades, sucesiones, límites y convergencias que son notadas en el cálculo diferencial e integral. Los números complejos y expresiones logarítmicas constituidas por expresiones como fueron tomadas muy en cuenta por su innegable aplicabilidad técnica de ingeniería. Son universales las bases del cálculo diferencial e integral para respaldar toda competencia de ingeniería, por ello, se comienza con las funciones definidas e indefinidas de una sola variable para saber relacionar cada tipo de función con las correspondientes aplicaciones que denotan las mencionadas competencias. Esta obra sobresale por la gran variedad de aplicaciones concentradas en funciones racionales, irracionales, trigonométricas e hiperbólicas, con una añadidura interesante de combinaciones.

La creatividad académica es fortalecida mediante el uso de metodologías adecuadas con secuencia lógica, de manera que, en el caso de las matemáticas se lo hace con regularidad para la solución de problemas que demanden contraste. Alcanzar una solución concreta demanda una práctica básica del estudiante en herramientas informáticas que puedan analizar las matemáticas mediante la programación con lenguaje universal. Matlab, Phyton, R estudio, SolidWorks entre otras herramientas de aplicación son usadas para resolver e interactuar con los ejemplos de estimación de resultados numéricos, y graficación de componentes que permiten un aprendizaje ilustrativo e ingenioso de actualidad. Por ejemplo, para las funciones trigonométricas, hiperbólicas y combinadas, Matlab fue la herramienta usada por excelencia debido a su variedad de características de diseño, visualización de comandos, e interacción de scripts amigables y conocidos por la mayor cantidad de profesionales de ingeniería.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

1 Cálculo integral de funciones de una variable

La descripción de fenómenos físicos, mecánicos, electrónicos y otros temas de especialidad mediante el uso de polinomios para el análisis de casos es tan importante, y está ligado al estudio que asegura el aprendizaje coherente de sus propiedades. En el caso de las funciones polinomiales se representan gráficamente con numerosos picos y valles, lo que las hace modelos apropiados para situaciones prácticas. Por ejemplo, el modelo de función polinomial de grado 2 y es función cuadrática, se trata de la propiedad mecánica anticorrosiva mejora en los aceros al aumentar las concentraciones de cromo y níquel, pero con demasiadas proporciones disminuyen otras propiedades como la soldabilidad. Otro ejemplo de ecuación cuadrática se menciona a la trayectoria que toma el balón de fútbol al patearlo para que primero suba y luego baje. Las gráficas de funciones polinomiales son curvas sin irregularidades que se usan para diseñar muchas cosas, y en el caso de funciones cúbicas se destaca el ejemplo de los botes de vela que unen partes de las gráficas de diferentes funciones de curvas paramétricas, para hacer las curvas del casco de un bote de velas. También se recurre a las propiedades de los polinomios de una variable para el tratamiento y control de los errores en la transmisión de datos.

1.1. Funciones de una variable

Al empezar con la práctica del álgebra se puede mencionar expresiones de uso común, el caso de la trigonometría; el cálculo del área del triángulo según la expresión $\frac{bh}{2}$ cuenta con la base del triángulo, el cual se representa con la letra b, y la altura por h, de esta manera una sola fórmula servirá. Para ello basta sustituir b por la unidad de la base y h por la longitud de la altura, y efectuar las operaciones respectivas debido a que 2 es una constante. El caso propiamente engendrado desde operaciones algebraicas, y muy importante para toda aplicación de ingeniería, es la ecuación general cuadrática también conocida como fórmula general. Esta fórmula sirve para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2+bx+c=0$ que son difíciles o imposibles de factorizar, y usarla puede ser más rápido que completar el cuadrado. Por tanto, la fórmula general $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$como una expresión algebraica combina variables, números y operaciones. El álgebra nos enseña a generalizar las expresiones que contienen variables, constantes y operaciones, y a utilizar estas expresiones para resolver problemas concretos.

Definitivamente las expresiones algebraicas sirven para la resolución de ecuaciones. Por ello las variables representan números por determinar, ya sean números naturales, enteros, racionales o reales, según sea el contexto. Por lo tanto, al hacer operaciones con variables x, y, y z, se incluyen las mismas reglas utilizadas con los números, como son:

Tabla 1.1: Expresiones algebraicas

Reglas de operación	Suma	Multiplicación
Conmutatividad	$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$	$xy = yx$
Asociatividad	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(xy)z = x(yz)$
Neutralidad	$x + 0 = x$	$x \times 1 = x$
Distributibidad	$x(y + z) = xy + xz$	
Inversos	$x + (-x) = 0$	$x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ si $x \neq 0$

En la geometría de cuerpos, el cálculo del volumen de un eje es expresada mediante el producto entre π, el radio al cuadrado y la longitud o altura del eje con forma cilíndrica.

Sea la función , donde $V = \pi r^2 h$ es el volumen, r es el radio y h es la altura lo longitud transversal del eje cilíndrico. Para la lectura de la ecuación polinómica mencionada se debe traducir al lenguaje algebraico, como se indica:

Radio al cuadrado: r^2

Altura o longitud transversal: h

De todos modos, para resolver ecuaciones mediante el uso del álgebra primero se debe traducir el problema del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico como resumidamente se ejemplifica a continuación:

Tabla 1.2: Lenguaje cotidiano a lenguaje algebraico

Lenguaje común La suma de 3 y x	Lenguaje algebraico $3 + x$
Un número x más 3	$x + 3$
La mitad de un número	$\frac{a}{2}$
5 más que la variable z,	$z + 5$
La diferencia de y menos 4, o la resta de un número y menos 4	$y - 4$
Producto de dos números	ab
El cociente de dos números	$\frac{a}{b}$
El triple de F, o tres veces F	$3F$

1.2. Fundamentación del cálculo de primitivas.

Para el estudio del cálculo de primitivas se debe tener en consideración que la integración y la diferenciación son temas que están íntegramente relacionados, esta relación es considerada como una de las ideas con mayor importancia en las matemáticas, hasta el día de hoy su descubrimiento gracias a Leibniz y Newton sigue siendo uno de los desarrollos teóricos más transcendentales de los tiempos modernos. [1]

1.2.1. Primitiva de una Función

La operación inversa de la derivación se llama integración. Mediante la integración encontraremos la función cuya derivada es dada. La función que se encuentra se llama primitiva o integral indefinida.

Definición 1.2.1 *Una función F se denomina primitiva de la función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en I*

Encuentre la función primitiva de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3 - 2\sin^2(x)}}$$

Solución:

Para la resolución de estos ejercicios procedemos a realizar la integral de la función dada

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3 - 2\sin^2(x)}}\,dx$$

Paso 1. sustitución

$$\begin{aligned}
Q &= 3 - 2\sin^2(x) \\
\frac{dQ}{dx} &= -4\sin(x)\,\cos(x) \\
\frac{dQ}{dx} &= -2 \times 2\sin(x)\,\cos(x) \\
dQ &= -2\sin(2x)\,dx \\
dx &= \frac{dQ}{-2\sin(2x)} \\
\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{Q}} &= \frac{dQ}{-2\sin(2x)}
\end{aligned}$$

Paso 2. reemplazamos Q y dx en la integral

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{Q}}dQ$$

Paso 3. reescribimos la integral aplicando algebra

$$= -\frac{1}{2}\int Q^{-\frac{1}{2}}dQ$$

Paso 4. procese a resolver la integral aplicando la siguiente regla $\int Q^n\,dQ = \frac{Q^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq 1)$

$$= -\frac{1}{2}\frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + X$$

Paso 5. cambiar la variable por la original

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3-2\sin^2(x)}}dx = -\sqrt{3-2\sin^2(x)+c}$$

$$-\sqrt{3-2\sin^2(x)+c} \qquad \blacksquare$$

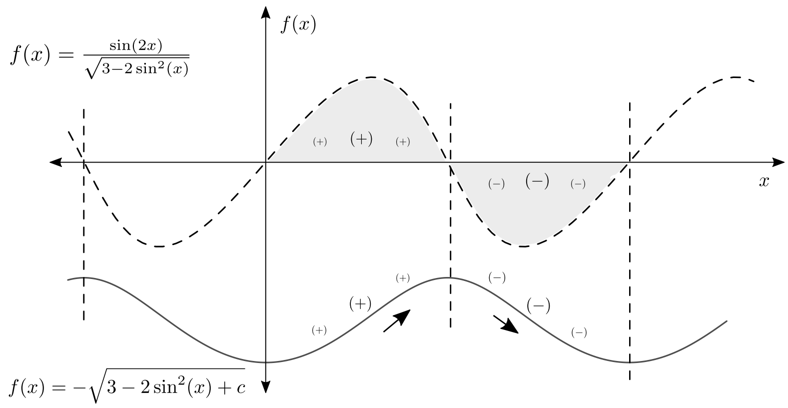


Figura 1.1: Función F y su primitiva f

Resolución utilizando software

Para realizar operaciones simbólicas, las variables independiente se las renombra así: `x=Symbol("x")`, tome en cuenta que `c^2` equivale a `c**2`.

Además, las gráficas se las realiza con la función `plot` en el intervalo $[-2, 2]$ y se calcula sus raíces con la función `solve` [2]

```
from sympy import *
x=Symbol("x")
y=Symbol("y")

F = sin(2*x)/sqrt(3-2*sin(x)**2)
f = integrate(fp,x); f
plot(F,(x, -2, 2))
plot(f, (x, -2, 2))
solve(Eq(f, 0))
```

1.3. Integrales indefinidas o antiderivadas.

Definición 1.3.1 *Una función F se denomina anti derivada de la función f en un intervalo "I" si $F(x) = f(x)$ para todo valor de x en "I"*

Si F es la función definida por:

$$F(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 10$$

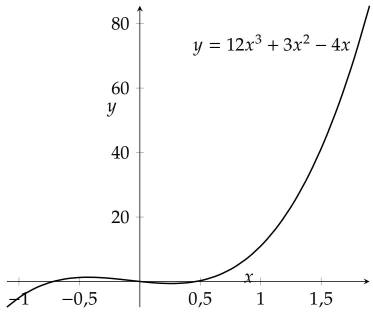


Figura 1.2: función $y = 12x^3 + 3x^2 - 4x$

Entonces: $F'(x) = 12x^3 + 3x^2 - 4x$, de modo que si f es la función definida por $f(x) = 12x^3 + 3x^2 - 4x$, entonces f es la dedicada de F, y F es la anti derivada de f.

Si $G(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 7$, entonces G también es una anti derivada f porque $G'(x) = 12x^3 + 3x^2 - 4x$

En definitiva, cualquier función determinada por $3x^4 + x^3 - 2x^2 + C$, donde C es una constante, es una anti derivada de f.

Si C es una constante arbitraria, entonces cualquier función definida por $\cos x + C$.

Tiene la función $-\sin x$ como su derivada. Por lo que cualquier función de este forma es una anti derivada de $-\sin x$.

En forma general podríamos decir que para una misma derivada, existe muchas anti derivadas, es decir su solución es una familia de curvas, dependiendo de los valores que tome la constante C en un intervalo determinado.

El proceso que se utiliza para encontrar la anti derivada, se llama anti diferenciación o integración indefinida, y es el procedimiento mediante el cual se encuentra todas las anti derivadas de una función dada, el símbolo matemático que denota la operación de anti diferenciación o integración es el símbolo $\int$ y se escribe así:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1.1}$$

donde $'F(x) = f(x)$ y $d(F(x)) = f(x)dx$

1.4. Métodos de integración.

Estos métodos se les conoce también como cambios de variables

1.4.1. Uso de reglas y fórmulas básicas de integración

Reglas principales de integración:

Si $F'(x) = f(x)$ entonces:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1.2}$$

donde C es una constante arbitraria.

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \tag{1.3}$$

donde A es una constante.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm f_2(x)\,dx \tag{1.4}$$

Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ y $u = \varphi(x)$ se tiene:

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \tag{1.5}$$

En algunos de estos ejemplos para poder llegar a una de las fórmulas básicas, debemos utilizar procedimientos algebraicos, identidades trigonométricas etc. Ejemplos:

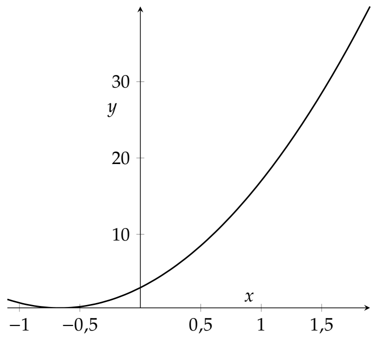


Figura 1.3: función $y = 6x^2 + 8x + 3$

Ejemplo 1.4.1

$$\begin{aligned}\int \left(6x^2 + 8x + 3\right) dx &= \int 6x^2dx + \int 8xdx + \int 3dx\\ &= 6\int x^2dx + 8\int xdx + 3\int dx\\ &= \frac{6}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 + 3x + C\end{aligned}$$

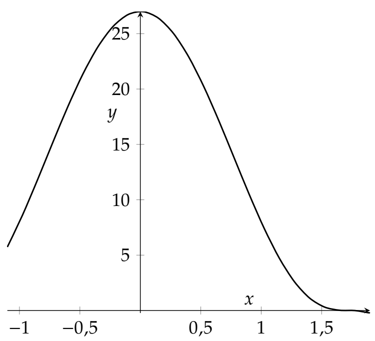


Figura 1.4: función $y = \left(3 - x^2\right)^3$

Ejemplo 1.4.2

$$\begin{aligned}\int \left(3 - x^2\right)^3 dx &= \int \left(27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6\right) dx =\\ &= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C\end{aligned}$$

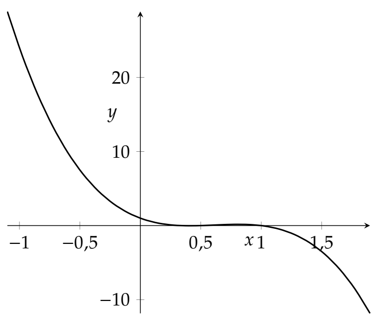


Figura 1.5: función $y = (1-x)(1-2x)(1-3x)$

Ejemplo 1.4.3

$$\begin{aligned}\int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx &= \int \left(1 - 3x - 3x + 9x^2 + 2x^2 - 6x^3\right) dx\\ &= \int \left(1 - 6x + 11x^2 - 6x^3\right) dx\\ &= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.4

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C$$

Ejemplo 1.4.5 En estos casos se aplica el teorema de las fracciones parciales simples.

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\int x^{1/4}dx - 2\int x^{5/12}dx + \int x^{-1/4}dx = \frac{4}{5}x^{5/4} - \frac{24}{17}x^{17/12} + \frac{4}{3}x^{3/4} + C$$

Ejemplo 1.4.6

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{3/4} - x^{-5/4}\right)dx$$
$$= \frac{4}{7}x^{3/4} + 4x^{-1/4} + C$$

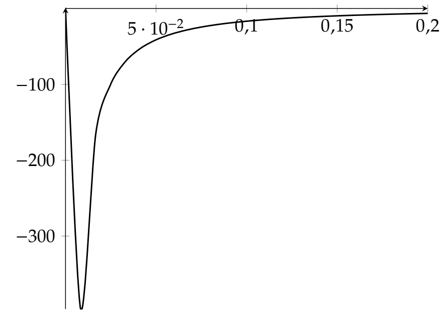


Figura 1.6: función $y = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$

Ejemplo 1.4.7

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{x^8+1+2x^4}}{x^5}dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^5}dx = \int \frac{x^4+1}{x^5}dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$$

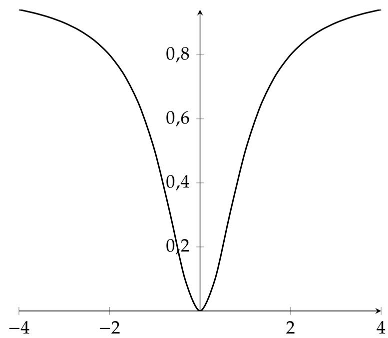


Figura 1.7: función $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

Ejemplo 1.4.8

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= x - \arctan(x) + C$$

En caso de funciones racionales impropias dividimos numerador para el denominador

Ejemplo 1.4.9

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}}dx$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \operatorname{arcsen} x + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

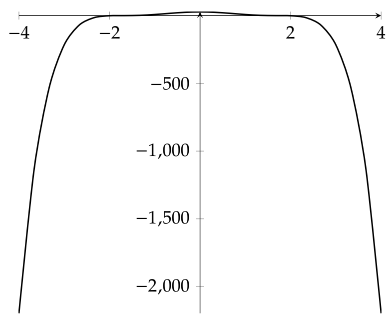


Figura 1.8: función $y = \left(3-x^2\right)^3$

Ejemplo 1.4.10

$$\int \frac{dx}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \int \csc^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = -\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + C$$

Ejemplo 1.4.11

$$\int \left(3-x^2\right)^3 dx = \int \left(27-27x^2+9x^4-x^6\right)dx$$
$$= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C$$

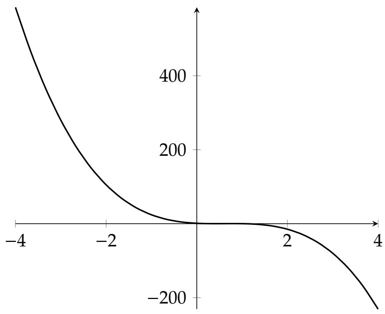


Figura 1.9: función $y = 1 - 6x + 11x^2 - 6x^3$

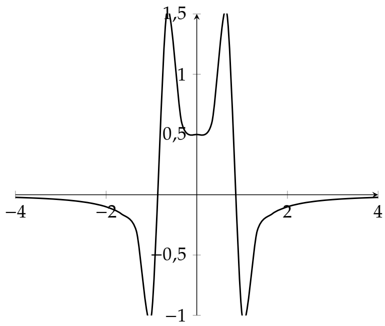


Figura 1.10: Función $y = \frac{1}{2-3x^2}$

Ejemplo 1.4.12

$$\int \left(1 - 6x + 11x^2 - 6x^3\right) dx = x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C$$

Ejemplo 1.4.13

$$\int \frac{dx}{2 - 3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{2}{3} - x^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{2}{3} - x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{\sqrt{3}x + \sqrt{2}} \right| + C$$

Ejemplo 1.4.14

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 \frac{x}{2}} = \int \mathrm{sech}^2 \frac{x}{2} dx = 2\,\mathrm{tgh} \frac{x}{2} + C$$

Ejemplo 1.4.15

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x}$$
$$= \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\mathrm{sen}^2 x} dx$$
$$= \int \csc^2 x dx - \int \frac{\cos x dx}{sen^2 x} - \mathrm{ctg} x + \frac{1}{\mathrm{sen}\, x} + C - \mathrm{ctg} x + \csc x + C$$

Resumen de las principales integrales inmediatas.

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \tag{1.6}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \tag{1.7}$$

$$\int \frac{dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C \quad (a \neq 0) \tag{1.8}$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a - u}{a + u} \right| + C \quad (a \neq 0) \tag{1.9}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \mathrm{arcsen} \left(\frac{u}{a} \right) + C = -\mathrm{arc}\cos \left(\frac{u}{a} \right) + C_1 \quad (a > 0) \tag{1.10}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a \neq 0) \tag{1.11}$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln |a|} + C \quad (a > 0); \quad \int e^u du = e^u + C \tag{1.12}$$

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C \tag{1.13}$$

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C \tag{1.14}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C \tag{1.15}$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \int \csc^2 u \, du = -\operatorname{ctg} u + C \tag{1.16}$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \int \csc u \, du = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C = \ln|\csc u - \operatorname{ctg} u| + C_1 \tag{1.17}$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \sec u \, du = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} u + \sec u| + C_1 \tag{1.18}$$

$$\int \operatorname{sh} u \, du = \operatorname{ch} u + C \tag{1.19}$$

$$\int \operatorname{ch} u \, du = \operatorname{sh} u + C \tag{1.20}$$

$$\int \frac{du}{ch^2 u} = \int \operatorname{sh}^2 u \, du = \operatorname{th} u + C \tag{1.21}$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\operatorname{cth} u + C \tag{1.22}$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C \tag{1.23}$$

$$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C \tag{1.24}$$

La mayoría de las fórmulas anteriores se pueden demostrar por medio de la derivación. Ejemplos

El procedimiento consiste en derivar los dos lados de la igualdad.

Ejemplo 1.4.16

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$d\left(\int u^n du\right) = d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right) = u^n$$

Ejemplo 1.4.17

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$d\left(\int \frac{du}{a^2+u^2}\right) = d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C\right) = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\,\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+u^2}$$

Ejemplo 1.4.18

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$d\left(\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}\right) = d\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}\,\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

Ejemplo 1.4.19

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

$$d\left(\int a^u\,du\right) = d\left(\frac{a^u}{\ln(a)} + C\right) = \frac{1}{\ln(a)}\left(a^u \cdot \ln(a)\right) = a^u$$

Ejemplo 1.4.20

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\left(\int \frac{du}{u^2-a^2}\right) = d\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\right) = \frac{1}{2a}\,\frac{u+a}{a-a}\left(\frac{u+a-u+a}{(u+a)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{u^2-a^2}$$

1.4.2. Regla de la introducción bajo el signo de la diferencial

Esta regla amplía considerablemente la tabla de las integrales inmediatas. Precisamente, gracias a esta regla, la tabla de las integrales es válida, independientemente de que la variable de integración sea una variable independiente o una función diferenciable. [3][4]

Ejemplo 1.4.21

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{1+x^4}\right| + C$$

como se observa, implicitamene se consideró $u = x^2$

Ejemplo 1.4.22

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{-1/2} d\left(x^2+1\right)\\ &= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{2}^{\frac{1}{2}} + C = u^{1/2} + C\\ &= \sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

Sustitución: $u = x^2 + 1$

Ejemplo 1.4.23

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{1+x^3}d\left(1+x^3\right) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^4} + C$$

como se observa, implicitamente se consideró $u = x^3$

Ejemplo 1.4.24

$$\int \frac{xdx}{4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{4+\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{4}\text{arctg}\frac{x^2}{2} + C$$

como se observa, implicitamente se consideró $u = x^2$

Ejemplo 1.4.25

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = 2\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\text{arcsen}\sqrt{x} + C$$

como se observa, implicitamente se consideró $u = \sqrt{x}$

1.4.3. Métodos de cambio de variable.

Son importantes porque por medio de éstos se trata de que las integrales complejas se puedan visualizar como una aplicación directa de las fórmulas básicas.

Poniendo

$$x = \omega(t) \tag{1.25}$$

donde t es una nueva variable y ω una función continua diferenciable, tenemos:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\omega(t)]\omega'(t)\,dt \tag{1.26}$$

No hay una regla clara para este procedimiento, simplemente podríamos decir que este cambio de variable se hace en las expresiones tales como: Cantidades sub radicales, exponentes, denominadores, etc. Ejemplos:

Ejemplo 1.4.26

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx &= \int \left(1-t^3\right)^2 t\left(-3t^2\right)dt = -3\int \left(1-2t^3+t^6\right)t^3dt\\ &= -\frac{3}{4}t^4+\frac{6}{7}t^7-\frac{3}{10}t^{10}+C\\ &= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}+\frac{6}{7}\sqrt[3]{(1-x)^7}-\frac{3}{10}\sqrt[3]{(1-x)^{10}}+C\end{aligned}$$

Sustitución: $1-x=t^3, \qquad x=1-t^3, \qquad dx=-3t^2\,dt$

Ejemplo 1.4.27

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} &= \int \frac{(2-t)^2}{t}dt = \int \frac{4-2t+t^2}{t}dt\\ &= 4\int \frac{dt}{t}-2\int dt+\int t\,dt\\ &= 4\ln|t|-2t+\frac{1}{2}t^2+C\\ &= 4\ln|2-x|-2(2-x)+\frac{1}{2}(2-x)^2+C\end{aligned}$$

Sustitución:

$2-x=t, \qquad x=2-t, \qquad x\,dx=-dt$

Ejemplo 1.4.28

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx &= \int \frac{\sin x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx}{2-\sin^2 x}\\ &= \int \frac{t\left(1-t^2\right)}{2-t^2}dt = \int \frac{t^2-t}{t^2-2}dt\\ &= \int \left(t+\frac{t}{t^2-2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\ln\left|t^2-2\right|+C\\ &= \frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{2}\ln\left|\sin^2 x-2\right|+C\end{aligned}$$

Sustitución:

$\sin x=t \qquad \cos x\,dx=dt$

Ejemplo 1.4.29

$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{\left(t^2-1\right) 2t dt}{t} = 2\int \left(t^2-1\right) dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+1)^3} - 2\sqrt{\ln x+1} + C$$

Sustitución:

$\ln x + 1 = t^2$ $\quad \ln x = t^2 - 1$ $\quad \frac{1}{x}dx = 2t\, dt$

Ejemplo 1.4.30

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x} = 2\int t dt = t^2 + C = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

Sustitución:

$\arctan\sqrt{x} = t,$ $\quad \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = dt,$ $\quad \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = dt$

1.4.4. Sustituciones trigonométricas e hiperbólicas.

Con estas sustituciones lo que hacemos en la mayoría de casos es racionalizar las expresiones irracionales y llegar a las formulas básicas.

Tabla 1.3: Sustituciones trigonométricas

Forma	S. Trigonométricas	S. Hiperbólicas
a^2-u^2	$u = a\sin t$	$u = \arctan t$
	$du = \arccos t\, dt$	$du = a\sec^2 t\, dt$
a^2+u^2	$u = \arctan t$	$u = a s h\, t$
	$du = a\sec^2 t$	$du = a\mathrm{ch}t\, dt$
u^2-a^2	$u = a\sec t$	$u = a\mathrm{ch}t$
	$du = a\sec t\ \tan t\, dt$	$du = a\mathrm{sh}t\, dt$

Ponemos en consideración las dos posibilidades, porque a veces las sustituciones trigonométricas no son las más adecuadas y se debe utilizar las sustituciones hiperbólicas, también es necesario tener conocimientos sobre identidades trigonométricas e hiperbólicas para poder volver a variables originales y así encontrar la solución del ejemplo.

Ejemplo 1.4.31

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Sustitución:

$x = \sin t \longrightarrow dx = \cos t dt;$ $\quad \sqrt{1-x^2} = \cos t$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\sin t = x;$ $\quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2};$ $\quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ejemplo 1.4.32

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} &= \int \frac{2ch^2 t \cdot \sqrt{2}\sinh t\, dt}{\sqrt{2}\sinh t} \\ &= 2\int \cosh^2 t\, dt = \int (ch2t+1)\, dt = \frac{1}{2}\sinh 2t + t + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2} + C\end{aligned}$$

Sustitución:

$x = \sqrt{2}\cosh t \longrightarrow dx = \sqrt{2}\sinh t dt; \quad \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2}\sinh t$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\cosh t = \frac{x}{\sqrt{2}}; \quad \sinh t = \sqrt{ch^2 t - 1} = \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}; \quad \sinh 2t = 2\sinh t\ \cosh t = x\sqrt{x^2-2}$

Ejemplo 1.4.33

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \int a\cos t = a\ \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2}\int (\cos 2t + 1)\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C \\ &= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C\end{aligned}$$

Sustitución:

$x = a\sin t \longrightarrow dx = a\cos t\ dt \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\ \cos t$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\sin t = \frac{x}{a}; \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$

$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

Ejemplo 1.4.34

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} &= \int \frac{a\sec^2 t\, dt}{a^3\sec^3 t} = \frac{1}{a^2}\int \cos t\, dt \\ &\frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C\end{aligned}$$

Sustitución:

$x = a\tan t \longrightarrow dx = a\sec^2 t\ dt; \quad \sqrt{a^2+x^2} = a\sec t$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\tan t = \frac{x}{a}; \quad \sin t = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Ejemplo 1.4.35

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx =$$
$$= \int \sqrt{(b-a)\sin^2 t\,\left[b-a-(b-a)\sin^2 t\right]}2(b-a)\sin t\;\cos t\,dt$$
$$= 2(b-a)\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\;\cos^2 t}\;\sin t\;\cos t\,dt$$
$$= 2(b-a)^2\int \sin^2 t\cos^2 t dt$$
$$= 2(b-a)^2\int \frac{1}{4}\sin^2 2t$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int (1-\cos 4t)dt$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\frac{1}{4}\sin 4\;\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right)+C$$

Sustitución:

$x-a=(b-a)\sin^2 t \longrightarrow dx = 2(b-a)\sin t\cos t dt$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\sin t = \pm\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \quad\longrightarrow\quad t=\arcsin\pm\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$

Ejemplo 1.4.36

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \int \frac{2at^2}{t^2+1}\,t\,\frac{4atdt}{(t^2+1)^2} = 8a^2\int\frac{t^4dt}{(t^2+1)^3}$$
$$= 8a^2\int\frac{tg^4z\sec^2 zdz}{\sec^6 z} = 8a^2\int\frac{tg^4zdz}{\sec^4 z}$$
$$= 8a^2\int \sin^4 zdz = 2a^2\int (1-\cos 2z)^2dz$$
$$= 2a^2\int \left(1-2\cos 2z+\cos^2 2z\right)dz$$
$$= 2a^2\int\left(1-2\cos 2z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4z\right)dz$$
$$= 2a^2\left(\frac{3}{2}z-\sin 2z+\frac{1}{8}\sin 4z\right)+C$$
$$= 2a^2\left(\frac{3}{2}\arctan t-2\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\left(\frac{1-t}{1+t^2}\right)\right)+C$$
$$= 2a^2\left(\frac{3}{2}\arctan t-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{t(1-t)}{2\,(1+t^2)^3}\right)+C$$

$$= 2a^2\left(\arctan\sqrt{\frac{x}{2a-x}}-\frac{\sqrt{x(2a-x)}}{a}+\frac{(2a-x)^2(\sqrt{x(2a-x)}-x)}{16a^3}\right)+C$$

Sustitución:

a) $\frac{x}{2a-x} = t^2 \longrightarrow x = t^2(2a-x) \longrightarrow x = \frac{2at^2}{t^2+1} \longrightarrow dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}$

b) $t = \tan z \longrightarrow dt = \sec^2 z dz;\quad t^2+1 = \sec^2 z$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\tan z = t \longrightarrow z = \arctan t$

$\sin 2z = 2\sin x\,\cos z;\quad \sin 4z = 4\sin z\,\cos z\left(\cos^2 x - \sin^2 z\right)$

Ejemplo 1.4.37

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{2(b-a)\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{(b-a)\sin^2 t\left[b-a-(b-a)\sin^2 t\right]}}$$
$$= 2(b-a)\int \frac{\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{(b-a)\sin^2 t\left[(b-a)\left(1-\sin^2 t\right)\right]}}$$
$$= 2(b-a)\int \frac{\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}}$$
$$= 2\int dt = 2t + C = 2\sin\left(\pm\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right) + C$$

Sustitución:

$x-a = (b-a)\sin^2 t \longrightarrow x = a+(b-a)\sin^2 t \longrightarrow dx = 2(b-\mathrm{a})\sin \mathrm{t}\cos t\,dt$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\sin t = \pm\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \quad\longrightarrow\quad t = \arcsin \pm\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$

Ejemplo 1.4.38

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \int a\cosh t\, a\cosh t\,dt = a^2\int \cosh^2 t\,dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\int (\cosh 2t + 1)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sinh 2t\right) + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{asinh}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

Sustitución:

$x = a\sinh t \longrightarrow dx = a\cosh t\,dt;\quad \sqrt{a^2+x^2} = a\cosh t$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\sinh t = \frac{x}{a};\quad \cosh t = \sqrt{\cosh^2 t + 1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$

$\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t = x\sqrt{a^2+x^2}$

$t = \operatorname{asinh}\frac{x}{a}$

Ejemplo 1.4.39

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx &= \int \sqrt{\frac{(x-a)^2}{x^2-a^2}}dx = \int \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \\
&= \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= \int \frac{a\cosh t a \sinh t dt}{a\sinh t} - a\int \frac{a\sinh t dt}{a\sinh t} \\
&= a\sinh t - at + C \\
&= \sqrt{x^2-a^2} - a\text{acosh}\frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

Sustitución:

$x = a\cosh t \longrightarrow dx = a\sinh t dt; \quad \sqrt{x^2-a^2} = a\sinh t$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\cosh t = \frac{x}{a} \quad \longrightarrow t = \text{acosh}\frac{x}{a}$

$\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

Ejemplo 1.4.40

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} &= \int \frac{a\tan t a\sec t dt}{a\sec t} = a\int \tan^2 t dt \\
&= a\int \left(\sec^2 t - 1\right) dt = a\tan t - at + C \\
&= a\sqrt{x^2-a^2} - a\text{arcsec}\frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

Sustitución:

$x = a\sec t \longrightarrow dx = a\sec t\tan t dt; \quad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\tan t = \sqrt{\sec^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}; \quad t = \text{arcsec}\frac{x}{a}$

1.5. Método de integración por partes.

Podríamos decir que este método es comparable con la regla del producto de funciones en la derivada, y justamente partimos de allí para encontrar su regla. Este método es muy importante en el estudio, porque se aplica en temas de matemáticas más avanzados como las transformadas de Laplace, las series y transformadas de Fourier y otras.

Demostración: Sea

$$
\begin{aligned}
d(u\,v) &= u\,dv + v\,du && (1.27) \\
u\,dv &= d(u\,v) - v\,du && (1.28)
\end{aligned}
$$

integrando ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\int u\,dv = \int d(u,v) - \int v\,du \tag{1.29}$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \tag{1.30}$$

Esta es la regla de integración por partes, y se utiliza en la integración del producto de funciones, integración de funciones trascendentes, tales como logaritmos, trigonométricas inversas y otras que contengan argumentos simples o compuestos pero que no estén dentro de las fórmulas básicas. [4][5]

Este procedimiento se puede repetir las veces que sean necesarias, y además es auto corregible en caso nos equivoquemos en tomar la función "u" y el diferencial "dv" esto en productos de funciones. De pronto es útil tomar como una regla las siglas LIPET cuyo significado es el siguiente:

L = Función logarítmica.

I = Funciones inversas sean trigonométricas e hiperbólicas.

P = Funciones polinómicas.

E = Exponenciales.

T = Trigonométricas

Ejemplo de cómo funciona las siglas: Si tenemos un producto entre una función Logarítmica y una función polinomial, debemos tomar siempre como "u" a la logarítmica y como el diferencial "dv" a la polinomial, es decir que las funciones que están a la derecha de "P" siempre serán "u" y las de la izquierda deben ser siempre "dv". Ejemplos:

Ejemplo 1.5.1

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx \qquad (n \neq -1)$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

Regla:

$$u = \ln x \qquad \int dv = \int x^n dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ejemplo 1.5.2

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int \sqrt{x}\ln x\,dx \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{B}{9}\sqrt{x^3}\ln x + \frac{B}{9}\int \sqrt{x}dx \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln^2 x - \frac{B}{9}\sqrt{x^3}\ln x + \frac{16}{27}\sqrt{x^3} + C\end{aligned}$$

Regla:

$$u = \ln^2 x \qquad \int dv = \int \sqrt{x}dx \qquad u = \ln x \qquad \int dv = \int \sqrt{x}dx$$

$$du = \frac{2\ln x\,dx}{x} \qquad v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \qquad du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

Ejemplo 1.5.3

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

Regla:

$$u = \ln x \qquad \int dv = \int dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

Ejemplo 1.5.4

$$\begin{aligned}\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C\end{aligned}$$

Regla:

$$u = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \qquad \int dv = \int dx$$

$$du = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx \qquad v = x$$

$$du = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ejemplo 1.5.5

$$\begin{aligned}\int \arctan\sqrt{x}dx &= x\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}\\ &= x\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{2t^2dt}{1+t^2}\\ &= x\arctan\sqrt{x} - \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\ &= x\arctan\sqrt{x} - t + \arctan t + C\\ &= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Regla:

$$u = \arctan\sqrt{\mathrm{x}} \qquad \int dv = \int dx$$

$$du = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}dx \qquad v = x$$

Sustitución

$x = t^2 \longrightarrow \sqrt{x} = t \longrightarrow dx = 2t\,dt$

Ejemplo 1.5.6

$$\begin{aligned}\int \sin x\ \ln(\tan x)\,dx &= -\cos x\ \ln(\tan x) - \int\frac{dx}{\sin x}\\ &= -\cos x\ \ln(\tan x) + \ln(\csc x - \cot x) + C\end{aligned}$$

Regla:

$$u = \ln(\tan \mathrm{x}) \qquad \int dv = \int \sin x dx$$

$$du = \frac{\sec^2 x dx}{\tan x} \qquad v = -\cos x$$

$$du = \frac{dx}{\sin x\cos x}$$

Ejemplo 1.5.7

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\,dx &= \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\\ &= \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{ae^{ax}}{b^2}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx\end{aligned}$$

sumando a los 2 lados de la igualdad $\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$ tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx dx &= e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx - \frac{a}{b^2}\cos bx\right)\\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C\end{aligned}$$

Regla:

$$u = \mathrm{e}^{\mathrm{ax}} \qquad \int dv = \int \sin bx\, dx$$

$$du = ae^{ax}dx \qquad v = -\frac{1}{b}\cos bx$$

$$u = \mathrm{e}^{\mathrm{ax}} \qquad \int dv = \int \sin bx\, dx$$

$$du = ae^{ax}dx \qquad v = -\frac{1}{b}\cos bx$$

Ejemplo 1.5.8

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(\sin x)dx}{\sin^2 x}dx &= \int \csc^2 x \ln(\sin x)dx \\ &= -\cot x \ln(vx) + \int \cot^2 x dx \\ &= -\cot x \ln(\sin x) + \int \left(1 + \csc^2 x\right) dx \\ &= -\cot x \ln(x) + x - \cot x + C\end{aligned}$$

Regla:

$$u = \ln(\sin x) \qquad \int dv = \int \csc^2 x\, dx$$

$$du = \cot x dx \qquad v = -\cot x$$

Ejemplo 1.5.9

$$\begin{aligned}\int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C\end{aligned}$$

Regla:

$$u = \arcsin x \qquad \int dv = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = -\sqrt{1-x^2}$$

$$u = \arcsin x \qquad \int dv = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = -\sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo 1.5.10

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln(x))dx = \int e^t \sin t dt &= -e^t \cos t + \int e^t \cos t dt \\ &= -e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \sin t dt\end{aligned}$$

sumando a los dos lados de la igualdad tenemos:

$$2\int e^t \sin t\,dt = -e^t \cos t + e^t \sin t$$
$$= \int e^t \sin t\,dt = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C$$
$$= \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

Sustitución $t = \ln x \quad \longrightarrow \quad x = e^t \quad \longrightarrow dx = e^t \mathrm{dt}$

Ejemplo 1.5.11

$$\int t\arctan(t)dt = \frac{1}{2}t^2\arctan(t) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2+1}dt$$
$$= \frac{1}{2}t^2\arctan(t) - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}t^2\arctan(t) - \frac{1}{2}t + \arctan(t) + C$$

$u = \arctan(t) \qquad \int dv = \int t\,dt$

$du = \dfrac{dt}{1+t^2} \qquad v = \dfrac{1}{2}t^2$

Ejemplo 1.5.12

$$\int x^4 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}\left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{12}{9}x^2 - \frac{24}{27}x + \frac{24}{81}\right]$$

hemos utilizado la fórmula útil para estos casos:

$\int x^n e^{mx} dx$

$= \frac{e^{mx}}{m}\left[x^n - \frac{n}{m}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}x^{n-2} - \frac{n(n-1)}{m^2}x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3}x^{n-3} + \ldots\right]$

1.6. Sustitución Trigonométrica

Las indentidades Trigonométricas permiten evaluar ciertas integrales que contiene expresiones radicales, el cuadro 2.1 muestra éstas expresiones. Ejemplos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}dx \qquad \text{Donde } a > 0$$

Sustitución $x = a\sin\theta$

Entonces:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2\left(1 - \sin^2\theta\right)}$$
$$= a\sqrt{1 - \sin^2\theta} = a\cos\theta$$

Como $x = a\sin\theta\; dx = a\cos\theta\, d\theta$

Radical	Sustitución	Simplificación
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}$ $= \sqrt{a^2 \left(1 - \sin^2 t\right)}$ $= a\sqrt{\cos^2 t} = a \cos t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	$= \sqrt{a^2 + (a \tan t)^2}$ $= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t}$ $= \sqrt{a^2 \left(1 + \tan^2 t\right)}$ $= a\sqrt{\sec^2 t} = a \sec t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$= \sqrt{(a \sec t)^2 - a^2}$ $= \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}$ $= \sqrt{a^2 (\sec^2 t - 1)}$ $= a\sqrt{\tan^2 t} = a \tan t$

Tabla 1.4: Radicales utilizados en el método de la sustitución trigonométrica

Sustituyendo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\left(a^2 \sin^2 \theta\right) a \cos \theta} (a \cos \theta \, d\theta) \\
&= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\sin^2 \theta\right)} d\theta \\
&= \frac{1}{a^2} \int \csc^2 \theta d\theta \\
&= -\frac{1}{a^2} \cot \theta + C
\end{aligned}$$

Retorno a la variable de integración original, $\cot \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

1.7. Integrales que contienen un trinomio cuadrado

En general, los procedimientos para completar el cuadrado consisten en construir, mediante operaciones algebraicas, un trinomio cuadrado perfecto a partir de uno que no lo es, y luego reducir el resultado a un binomio al cuadrado más (o menos) una constante. [6][7]

Integrales del tipo: $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+x} dx$

Básicamente el procedimiento de cálculo de estos tipos de integrales consiste primero en reducir el polinomio de segundo grado a su forma canónica, utilizando el procedimiento de completación de cuadrados así:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) && (1.31)\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] && (1.32)\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\right] && (1.33)
\end{aligned}
$$

O también se puede utilizar la sustitución $2ax+b=t$ primero y luego la completación de cuadrados dependiendo del valor que tenga m.

Si $m=0$, reduciendo el polinomio a su forma canoníca obtenemos integrales inmediatas que se encuentran en la tabla primero con los números III, IV y V.

Si $m\neq 0$ del numerador se separa la derivada del polinomio de segundo grado de la siguiente manera:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{[\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{a}\right)]dx}{ax^2+bx+c} && (1.34)\\
&= \frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} && (1.35)\\
&= \frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} && (1.36)
\end{aligned}
$$

Sustitución implícita:
$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= t\\
2ax+b &= dt
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.7.1

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{3x^2-2x-1} &= \int\frac{dx}{3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)}\\
&= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}}\\
&= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}}\\
&= \frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2-\frac{4}{9}}\\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3u-2}{3u+2}\right|+C
\end{aligned}
$$

Sustitución: $x-\frac{1}{3}=u \quad dx=du$

Ejemplo 1.7.2

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1+1)\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Sustitución:

$$x^2+x+1 = t \qquad x+\frac{1}{2} = u$$

$$(2x+1)\,dx = dt \qquad dx = dx$$

Ejemplo 1.7.3

$$\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+2} = \int \frac{x^2\,x\,dx}{(x^2)^2-x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{t^2-t+2} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{t^2-t+2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{(2u+1)\,du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|t^2-t+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|x^4-x^2+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Sustitución:

$$x^2 = t \qquad t-\frac{1}{2} = u$$

$$x\,dx = \frac{1}{2}dt \qquad t = u+\frac{1}{2} \longrightarrow dt = du$$

Ejemplo 1.7.4

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{3t^2-8t+5}{1+t^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-\frac{8}{3}t+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3u-1}{3u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\left(t-\frac{4}{3}\right)-1}{3\left(t-\frac{4}{3}\right)+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3t-5}{3t-3}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\tan x-5}{3\tan x-3}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{3\sin x-3\cos x}\right| + C$$

Sustitución

$\tan x = t \longrightarrow x = \arctan t \longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

$t - \frac{4}{3} = u \quad \longrightarrow t = u + \frac{4}{3} \quad \longrightarrow \quad dt = du$

Integrales del tipo: $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

Estas integrales se resuelven de manera análoga al método analizado más arriba. Definitivamente la integral se reduce a la VI cuando $a > 0$ y VII si $a < 0$. Ejemplos:

Ejemplo 1.7.5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Sustitución

$u = x + 1 \quad \longrightarrow \quad du = dx$

Ejemplo 1.7.6

$$\begin{aligned}
\int \frac{axdx}{\sqrt{x+x^2}} &= a \int \frac{xdx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{a}{2} \int \frac{(2u-1)du}{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{a}{2} \int \frac{2udu}{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}} - \frac{a}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{u^2-\frac{1}{4}} - \frac{a}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2-\frac{1}{4}}\right| + C \\
&= \frac{a}{4}\sqrt{(2x+1)^2-1} - \frac{a}{2} \ln\left|\frac{2x+1}{2} + \frac{\sqrt{(2x+1)^2-1}}{2}\right| + C
\end{aligned}$$

Sustitución

$u = x + \frac{1}{2} \longrightarrow du = dx$

Ejemplo 1.7.7

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}} &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2\left(x^2\right)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-3t-2t^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{17}{16} - \left(t+\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{17}{16} - u^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4u}{\sqrt{17}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4t+3}{\sqrt{17}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4x^2}{\sqrt{17}}\right) + C
\end{aligned}
$$

Sustitución

$$
\begin{aligned}
&\sin x = t && \cos x dx = dt \\
&\cos x\, dx = d && t - \frac{1}{2} = u \longrightarrow dt = du
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.7.8

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x + \cos^2 x}} &= \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x + 1 - \sin^2 x}} \\
&= \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \sin x - \sin^2 x}} \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{2 + t - t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \int \frac{du}{\sqrt{\frac{9}{4} - u^2}} \\
&= \arcsin\left(\frac{2u}{3}\right) + C = \arcsin\left(\frac{2t-1}{3}\right) + C \\
&= \arcsin\left(\frac{2\sin x - 1}{3}\right) + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.7.9

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\
&= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} \\
&= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}\right| + C \\
&= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+1}{2} + \frac{\sqrt{(2x+1)^2+3}}{2}\right| + C
\end{aligned}
$$

Sustitución:

$$
\begin{aligned}
&x + \frac{1}{2} = u \\
&x = u - \frac{1}{2} \longrightarrow dx = du
\end{aligned}
$$

Integrales del tipo: $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Para resolver este tipo de ejercicios se utiliza primero la sustitución inversa: $mx + n = \frac{1}{t}$ la que nos permite reducir a una de las formas de integrales de la sección 2.1.2. Ejemplos:

Ejemplo 1.7.10

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{-t^2}\sqrt{1+t+t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} =$$
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}} - \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{4}+u^2}}$$
$$= \ln\left|u+\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right| + C$$
$$= \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{2+x}{2x}+\frac{\sqrt{(2+x)^2+3x^2}}{2x}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{2+x+\sqrt{(2+x)^2+3x^2}}{2x}\right| + C$$

Sustitución:

$x = \frac{1}{t} \longrightarrow \quad dx = -\frac{dt}{t^2}$

$t + \frac{1}{2} = u \longrightarrow t = u - \frac{1}{2} \longrightarrow dt = du$

Ejemplo 1.7.11

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-2t+2t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}\right| + C$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(\frac{2t-1}{2}\right)+\sqrt{\frac{(2t-1)^2}{4}+\frac{1}{4}}\right| + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(\frac{1-x}{2(x+1)}\right)+\sqrt{\frac{(1-x)^2}{4(x+1)^2}+\frac{1}{4}}\right| + C$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2\,(x^2+1)}}{x+1}\right| + C$$

$x+1 = \frac{1}{t} \longrightarrow x = \frac{1}{t} - 1 \longrightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$t - \frac{1}{2} = u \longrightarrow t = u + \frac{1}{2} \longrightarrow dt = du$

Ejemplo 1.7.12

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = -\int \frac{\frac{tdt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-2t-5t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{tdt}{\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}t-t^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{tdt}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{2udu}{\sqrt{\frac{6}{25}-u^2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{6}{25}u^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{25}-u^2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{5u}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{25}-\frac{(5t+1)^2}{25}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}\sqrt{6-(5t+1)^2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}\sqrt{6-\left(\frac{x+7}{x+2}\right)^2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{x+7}{(x+2)\sqrt{6}}\right)+C$$

Sustitución:

$x+2=\frac{1}{t} \longrightarrow x=\frac{1}{t}-2 \longrightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$

$t+\frac{1}{5}=u \longrightarrow t=u-\frac{1}{5} \longrightarrow dt=du$

1.7.1. Integrales del tipo: $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

Para encontrar la solución de este tipo de integrales, procedemos a completar cuadrados en el polinomio de segundo grado y luego aplicamos las fórmulas 1.23 y 1.24. Ejemplos:

Ejemplo 1.7.13

$$\int \sqrt{2+x-x^2}dx = \int \sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx = \int \sqrt{\frac{9}{4}-u^2}du$$

$$= \frac{u}{2}\sqrt{\frac{9}{2}-u^2}+\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2u}{3}\right)+C$$

$$= \frac{u}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-u^2}+\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2u}{3}\right)+C$$

$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{(2x-1)^2}{4}}+\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)+C$$

$$= \frac{2x-1}{8}\sqrt{9-(2x-1)^2}+\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)+C$$

Ejemplo 1.7.14

$$\int \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}x\,dx = \int \sqrt{(x^2)^2 + 2x^2 - 1}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2 + 2t - 1}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{(t+1)^2 - 2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{u^2 - 2}\,dt$$
$$= \frac{u}{4}\sqrt{u^2-2} - \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2-2}\right| + C$$
$$= \frac{t+1}{4}\sqrt{(t+1)^2-2} - \frac{1}{2}\ln\left|t + 1 + \sqrt{(t+1)^2-2}\right| + C$$
$$= \frac{x^2+1}{4}\sqrt{(t+1)^2-2} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 1 + \sqrt{(x^2+1)^2-2}\right| + C$$

Sustitución $\quad x^2 = t \quad x\,dx = \dfrac{dt}{2} \qquad u = t+1 \quad du = dt$

Ejemplo 1.7.15

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4}dx = \int \sqrt{u^2 + 4}dt$$
$$= \frac{u}{2}\sqrt{u^2+4} + \frac{4}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2+4}\right| + C$$
$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{u^2+4} + 2\ln\left|x + 1 + \sqrt{(x+1)^2+4}\right| + C$$

Sustitución $\quad u = x+1 \quad \rightarrow \quad du = dx$

2 Funciones racionales

2.1. Integración de funciones racionales.

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Existen dos tipos de funciones racionales, las propias en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador e impropias que es inversa, es decir, el numerador es de mayor grado que el denominador.

Funciones racionales impropias

Como se menciona anteriormente estas funciones racionales el grado del numerador es mayor al del denominar. Estas fracciones se pueden descomponer simplemente efectuando la división, de la cual obtenemos una función de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Donde $C(x)$ es el polinomio cociente resultante de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $R(x)$ es el sobrante de la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Funciones racionales propias

Las funciones racionales propias el grado de su numerador es menos a la de su denominador, pero a diferencia de las impropias no podemos efectuar la división, el proceso es diferente y consiste en factorizar el denominador. Al realizar esta factorización la fracción se descomponen en fracciones más simples.

2.1.1. Procedimiento general

El procedimiento para encontrar la solución de los integrales que contienen funciones racionales es el siguiente:

Sea la función:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{2.1}$$

1. Si la función racional es impropia (grado del polinomio del numerador $P(x)$ mayor al del denominador $Q(x)$), dividimos el numerador por el denominador, obteniendo una parte entera y una función racional propia (grado del polinomio del numerador menor al del denominador $Q(x)$).
2. Si además el denominador $Q(x)$ es factorable, sean estos factores reales o imaginarios, para integrar utilizamos el método de los coeficientes indeterminados (conocido también como el de las fracciones parciales).
3. Para poder tener claro el procedimiento dividimos en 2 grupos, el uno cuando existen factores reales, diferentes todos o cuando algunos de ellos se repiten, y el dos sobre los factores imaginarios, sin descuidar que también puede haber combinaciones.

2.1.2. Factores reales: $(ax + b)$

El caso de términos diferentes.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x+1)(x+b)(x+c)\ldots} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} + \ldots \tag{2.2}$$

Donde A, B, C,..... Son coeficientes indeterminados.

Cuando alguno de ellos se repite o tienen multiplicidad n.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x+a)(x+c)^n\ldots} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+c} + \frac{C}{(x+c)^2} + \frac{D}{(x+c)^3} + \ldots + \frac{M}{(x+c)^n} \ldots$$

Donde A, B, C, D,....., M,.... son coeficientes indeterminados

Procedimiento para determinar los coeficientes indeterminados:

1. Se reducen a la forma entera, haciendo una suma de fracciones y eliminando el denominador.
2. Se igualan los coeficientes de cada una de las potencias iguales de la variable (teorema de igualdad de polinomios).
3. Se forma un sistema de ecuaciones, que es igual en número al de los coeficientes indeterminados, es decir la solución es única, un procedimiento.
4. Un segundo procedimiento para calcular los coeficientes es igualando la x, en cada término de la expresión I, II o en su equivalente, a ciertos números debidamente elegidos.

5. Estos valores reemplazamos en la expresión I o II y procedemos a integrar, los mismos que tienen como solución en un caso logaritmos naturales, y en el otro integrales de la forma:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \int (x+a)^{-n}dx = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{1-n}} + C \tag{2.3}$$

Ejemplos:

Ejemplo 2.1.1

$$\int \frac{x^2-3x+5}{(x+1)(2x-3)(x+3)}\,dx = \int [\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}]\,dx$$

Cálculo de los coeficientes

$$\frac{x^2-3x+5}{(x+1)(2x-3)(x+3)}dx =$$

$$= \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{x+3}\right] dx$$

$$= \frac{A(2x-3)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(2x-3)}{(x+1)(2x-3)(x+3)}$$

$$x^2-3x+5 = A(2x-3)(x+3) + b(x+1)(x+3) + c(x+1)(2x-3)$$

$$x^2-3x+5 = (2A+B+2C)x^2 + (3A+4B-C)x + (-9A+3B-3C)$$

$$\begin{cases} 2A+B+2C = 1 \\ 3A+4B-C = -3 \\ -9A+3B-3C = 5 \end{cases}$$

$A = -\frac{9}{10}$, $B = \frac{1}{9}$ y $C = \frac{23}{18}$

2do procedimiento: Para hallar esos valores elegidos de x igualamos cada factor a cero. Y cada uno de estos valores reemplazamos en la expresión F1-34 así:

$$x+1 = 0$$
$$x = -1$$

$$A(-2-3)(-1+3) = (-1)^2 - 3(-1) + 5$$
$$A = -\frac{9}{10}$$

$$x+3 = 0$$
$$x = -3$$

$$C(-3+1)(-6-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 5$$
$$C = \frac{23}{18}$$

$$2x-3 = 0$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$$B\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+3\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)+5$$
$$B=\frac{1}{9}$$

Por consiguiente

$$\int\left[\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+3}\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{-9}{10(x+1)}+\frac{1}{9(2x-3)}+\frac{23}{18(x+3)}\right]dx$$
$$=-\frac{9}{10}\ln|x+1|+\frac{1}{18}\ln|2x-3|+\frac{23}{18}\ln|x+3|+C$$

Ejemplo 2.1.2

$$\int\frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=$$

primero factoramos

$$\int\left[\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}\right]=\int\left[\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}dx\right]$$

Cálculo de los coeficientes

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^3+C(x-1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

$1=A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^3+C(x-1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2(x+1)^2$ $\quad 1=A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^3+C(x-1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2(x+1)^2$

$$\begin{cases} B+E & =0\\ A+2B+D & =0\\ 3A+C-D-2E & =0\\ 3A-2B-2c-D & =0\\ A-B+C+D+E & =1\end{cases}$$

$A=\frac{1}{8}$; $B=-\frac{3}{16}$; $C=\frac{1}{4}$; $D=\frac{1}{4}$ y $E=\frac{3}{16}$

Por consiguiente:

$$=\int\left[\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)^3}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}\right]dx$$
$$=-\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)^2}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$$

Factores imaginarios: (ax^2+bx+c), cuando $b2-4ac<0$

El caso de términos diferentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)(px^2+qx+r)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{px^2+qx+r}+\dots$$

Donde A, B, C, D..... Son coeficientes indeterminados. Cuando alguno de ellos se repite o tienen multiplicidad n

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n\dots}=\frac{M_1x+N_1}{ax^2+bx+c}+\dots+\frac{M_nx+N_n}{(ax^2+bx+c)^n}\tag{2.4}$$

Donde $M_1, N_1, \ldots, M_n, N_n$ son coeficientes indeterminados que se calculan por los procedimientos antes mencionados. En estos casos también existen procedimientos alternos dependiendo los valores que tiene n, así:

1. Si $n = 1$, la expresión (II) se integra directamente

Si $n > 1$ se emplea el procedimiento de reducción, primero reducimos el polinomio de 2do grado a su forma canónica, y luego hacemos una sustitución de la siguiente manera. $ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{b^2}{4}\right)$, y su sustitución $x + \frac{b}{2} = t$, Ejemplos:

Ejemplo 2.1.3

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2 + x - x^2}dx &= \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - u^2 du} \\
&= \frac{u}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - u^2} + \frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2u}{3}\right) + C \\
&= \frac{2x-1}{4}\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{(2x-1)^2}{4}} + \frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C \\
&= \frac{2x-1}{8}\sqrt{9 - (2x-1)^2} + \frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.4

$$\int \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}x\,dx = \int \sqrt{(x^2)^2 + 2x^2 - 1}x\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2 + 2t - 1}dt \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{(t+1)^2 - 2}dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{u^2 - 2}dt \\
&= \frac{u}{4}\sqrt{u^2 - 2} - \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 2}\right| + C \\
&= \frac{t+1}{4}\sqrt{(t+1)^2 - 2} - \frac{1}{2}\ln\left|t + 1 + \sqrt{(t+1)^2 - 2}\right| + C \\
&= \frac{x^2+1}{4}\sqrt{(t+1)^2 - 2} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 1 + \sqrt{(x^2+1)^2 - 2}\right| + C
\end{aligned}$$

Sustitución:

$x^2 = t, \qquad x\,dx = \frac{dt}{2}$

$u = t + 1, \qquad du = dt$

Ejemplo 2.1.5

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x+5}dx &= \int \sqrt{(x+1)^2+4}dx\\ &= \int \sqrt{u^2+4}dt\\ &= \frac{u}{2}\sqrt{u^2+4}+\frac{4}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right|+C\\ &= \frac{x+1}{2}\sqrt{u^2+4}+2\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right|+C\end{aligned}$$

Sustitución: $\begin{cases} u &= x+1\\ du &= dx\end{cases}$

Ejemplo 2.1.6

$$\int \frac{x^2-3x+5}{(x+1)(2x-3)(x+3)}dx = \int \left[\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+3}\right]dx$$

Cálculo de coeficientes

$$x^2-3x+5 = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+3}$$

$$\frac{x^2-3x+5}{(x+1)(2x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{A(2x-3)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(2x-3)}{(x+1)(2x-3)(x+3)}$$

$$x^2-3x+5 = A(2x-3)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(2x-3)$$
$$x^2-3x+5 = (2A+B+2C)x^2+(3A+4B-C)x+(-9A+3B-3C)$$

$$\begin{cases} 2A+B+2C &= 1 & A = & -\frac{9}{10}\\ 3A+4B-C &= -3 & B = & \frac{1}{9}\\ -9A+3B-3C &= 5 & C = & \frac{23}{18}\end{cases}$$

$$x+1=0$$
$$x=-1$$

2do procedimiento: Para hallar esos valores elegidos de x igualamos cada factor a cero. Y cada uno de estos valores reemplazamos en la expresión F1-34 así:

$x+1=0$ $\qquad A(-2-3)(-1+3) = (-1)^2-3(-1)+5$

$x=-1$ $\qquad A = -\dfrac{9}{10}$

$$x + 3 = 0 \qquad C(-3+1)(-6-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 5$$

$$x = -3 \qquad C = \frac{23}{18}$$

$$2x - 3 = 0 \qquad B\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+3\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 5$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad B = \frac{1}{9}$$

Por consiguiente:

$$\int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{x+3}\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{-9}{10(x+1)} + \frac{1}{9(2x-3)} + \frac{23}{18(x+3)}\right] dx$$

$$= \frac{9}{10}\ln|x+1| + \frac{1}{18}\ln|2x-3| + \frac{23}{18}\ln|x+3| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

$$= \left(\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1}\right) dx$$

Cálculo de los coeficientes.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3} =$$

$$= \frac{A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

$$1 = A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2$$

$$\begin{cases} 3A + C - D - 2E & = 0 \\ 3A - 2B - 2C - D & = 0 \\ A - B + C + D + E & = 1 \end{cases}$$

$A = \frac{1}{8}$; $B = -\frac{3}{16}$; $C = \frac{1}{4}$; $D = \frac{1}{4}$ y $E = \frac{3}{16}$

Por consiguiente:

$$= \int \left[\frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{16(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{3}{16(x+1)}\right] dx$$

$$= -\frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

2.1.3. Factores imaginarios: $(ax^2 + bx + c)$, cuando $b^2 - 4ac < 0$

El caso de términos diferentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)(px^2 + qx + r)\ldots} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + B}{px^2 + qx + r} + \ldots \tag{2.5}$$

Donde A, B, C, D . . .Son coeficientes indeterminados.

Cuando alguno de ellos se repite o tienen multiplicidad n.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^n \ldots} = \frac{M_1 x + N_1}{ax^2 + bx + c} + \ldots + \frac{M_n x + N_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \ldots \tag{2.6}$$

Donde $M_1, N_1 \ldots, \ldots, M_n, N_n$.son coeficientes indeterminados que se calculan por los procedimiento antes mencionados.

En estos casos también existen procedimientos alternos dependiendo los valores que tiene "n" así:

Si $n = 1$, la expresión (II) se integra directamente.

SI $n > 1$, se emplea el procedimiento de reducción, primero reducimos el polinomio de 2do grado a su forma canónica y luego hacemos una sustitución de la siguiente manera $ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$, y su sustitución $x + \frac{b}{2} = t$. Ejemplos:

Ejemplo 2.1.7

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \int \frac{(x-1)dx}{[(x+1)^2 + 2]^2} = \int \frac{(t-2)dt}{[t^2 + 2]^2} = \int \frac{tdt}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= -\int \frac{(t^2 + 2) - t^2}{(t^2 + 2)^2} dt - \frac{1}{2(t^2 + 2)} - \int \frac{dt}{t^2 + 2} + \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(t^2 + 2)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{t}{2(t^2 + 2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 2}$$

$$= -\frac{t + 1}{2(t^2 + 2)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{t + 1}{2(t^2 + 2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Sustitución: $\begin{cases} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{cases}$

Regla de integración por partes

$u=t\ du=dt \quad \int dv=\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} \quad v=-\frac{1}{2(t^2+2)}$

Ejemplo 2.1.8

$$\int \frac{dx}{x^4+1}=\int\left[\frac{dx}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\right]$$
$$=\int\left[\frac{Ax+B}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\right]dx$$

Solución del ejemplo I+II

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(2x-1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(2x+1)+C$

Como encontrar los coeficientes

$\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$ $1=(Ax+B)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases}$$

$A=-\frac{1}{2\sqrt{2}};\quad C=\frac{1}{2\sqrt{2}};\quad B=\frac{1}{2}$ y $D=\frac{1}{2}$

Ejemplo 2.1.9

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}=\int\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x^2+x+1)}\right]dx$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Como encontrar los coeficiente

$$\frac{1}{(x-2)^2\,(x^2-4x+5)} =$$

$$= \frac{A\left(x^2-4x+5\right)+B(x-2)\left(x^2-4x+5\right)+(Cx+D)(x-2)^2}{(x-2)^2\,(x^2-4x+5)}$$

$$1 = A\left(x^2-4x+5\right)+B(x-2)\left(x^2-4x+5\right)+(Cx+D)(x-2)^2$$

$$\begin{cases} B+C & =0 \qquad A = & 1\\ A-6B-4C+D & =0 \qquad B = & 0\\ -4A+13B+4C-4D & =0 \qquad C = & 0\\ 5A-10B+4D & =1 \qquad D = & - \end{cases}$$

Método de Ostrogradski Este método se utiliza cuando el denominador de la función racional $Q(x)$ tiene raíces múltiples,el procedimiento es el siguiente

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{G(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{H(x)}{Q_2(x)}dx \tag{2.7}$$

Donde $Q_1(x)$ es el máximo común divisor del polinomio $Q(x)$ y de su derivada $Q'(x)$

$Q_2(x)$ Es igual al cociente de $Q(x)$ y $Q_1(x)$

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} \tag{2.8}$$

$G(x)$ y $H(x)$ son polinomios con coeficientes indeterminados, cuyos grados son menores en una unidad que los $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$, respectivamente.

Los coeficientes indeterminados de los polinomios $G(x)$ y $H(x)$, se calculan derivando la expresión (A), y luego utilizamos el procedimiento del método de los coeficientes indeterminados. Este procedimiento tiene la ventaja como se puede observar, de que el primer término ya no necesita integrarse. Ejemplos:

Ejemplo 2.1.10

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{x^3+1}dx$$

(A) $Q(x) = \left(x^3+1\right)^2; \quad Q'(x) = 6x^2\left(x^3+1\right)$

El máximo común divisor es: $Q_1(x) = x^3+1 \; y \quad Q_2(x) = x^3+1$

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{x^3+1}dx$$
$$= \frac{1}{3\,(x^2+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}$$

I

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \left[\frac{dx}{(x+1)\,(x^2-x+1)}\right]$$
$$= \int \left[\frac{M}{(x+1)} + \frac{Nx+R}{(x^2-x+1)}\right]dx$$
$$= \int \left[\frac{1}{3(x+1)} + + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{(x^2-x+1)}\right]dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Respuesta del ejemplo

$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} =$$
$$\frac{\left(x^3+1\right)(2Ax+B) - \left(Ax^2+Bx+C\right)3x^2}{(x^3+1)^2} + \frac{Cx^2+Dx+E}{x^3+1}$$

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} =$$
$$\frac{\left(x^3+1\right)(2Ax+B) - \left(Ax^2+Bx+C\right)3x^2 + \left(Cx^2+Dx+E\right)\left(x^3+1\right)}{(x^3+1)^2}$$

$$1 = \left(x^3+1\right)(2Ax+B) - \left(Ax^2+Bx+C\right)3x^2 + \left(Cx^2+Dx+E\right)\left(x^3+1\right)$$

$$\begin{cases} D = 0 \\ -A+E = 0 \\ -2B+F = 0 \\ -3C+D = 0 \\ 2A+E = 0 \\ B+F = 1 \end{cases}$$

$A = 0;\quad C = 0;\quad B = \frac{1}{3};\quad D = 0;\quad E = 0;\quad y\quad F = \frac{2}{3}$

Como encontrar los coeficientes aplicando la teoría de fracciones parciales para el 2do integral.

$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{M(x^2-x+1)(Nx+R)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$1 = M(x^2-x+1) + (Nx+R)(x+1)$

$$\begin{cases} M+N=0 \\ -M+N+R=0 \\ M+R=1 \end{cases} \quad M=\tfrac{1}{3}; \quad R=\tfrac{2}{3}; \quad y \quad N=-\tfrac{1}{3}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}dx$$

$Q(x) = \left(x^2+2x+2\right)^2$

$Q'(x) = 2(2x+2)\left(x^2+2x+2\right)$

$Q_1(x) = x^2+2x+2 \quad y \quad Q_2(x) = x^2+2x+2$

$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

Respuesta del ejemplo:

$\frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + C$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{\left(x^2+2x+2\right)(A)-(Ax+B)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{\left(x^2+2x+2\right)(A)-(Ax+B)(2x+2)+(Cx+D)\left(x^2+2x+2\right)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$x^2 = \left(x^2+2x+2\right)(A)-(Ax+B)(2x+2)+(Cx+D)\left(x^2+2x+2\right)$

$$\begin{cases} C &= 0 & A &= 0 \\ -A+2C+D &= 1 & C &= 0 \\ -2B+2C+2D &= 0 & B &= 1 \\ A-B+D &= 0 & D &= 1 \end{cases}$$

2.2. Integración de funciones irracionales.

2.2.1. Integrales de la forma: $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots\right]dx$

Donde $\mathbb{R}$ es un función racional y $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ son números enteros, para poder racionalizar esa expresión se utiliza la sustitución:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s \tag{2.9}$$

donde s es el mínimo común múltiplo de los números $q_1,q_2,\ldots$

Ejemplos:

Ejemplo 2.2.1

$$\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5 dt}{t^6\,(1+t^2+2t^3)} = 6\int \frac{dt}{t(t+1)\,(2t^2-t+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= 6\left[\int \left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{2t^2-t+1}\right)dt\right]\\
&= 6\left[\int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4(t+1)}+\frac{-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}}{2t^2-t+1}\right)\right]dt\\
&= 6\left[\ln|t|-\frac{1}{4}\ln(t+1)-\frac{3}{8}\ln\left|2t^2-t+1\right|+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}\right]\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^{12}}{(t+1)^3}\right|-\frac{9}{4}\ln\left|2t^2-t+1\right|+\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{4t-1}{\sqrt{15}}\right)+C\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{(\sqrt[6]{x}+1)^3}\right|-\frac{9}{4}\ln|2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1|+\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{15}}\right)+C
\end{aligned}$$

Sustitución

$\mathrm{x}=t^6 \quad \longrightarrow \quad t=\sqrt[6]{x} \quad y \quad dx=6t^5dt$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)}=\frac{A(t+1)\left(2t^2-t+1\right)+Bt\left(2t^2-t+1\right)+(Ct+D)t(t+1)}{t(t+1)(2t^2-t+1)}$$

$$1=A(t+1)\left(2t^2-t+1\right)+Bt\left(2t^2-t+1\right)+(Ct+D)t(t+1)$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2A+2B+C=0\\ A-B+C+D=0\\ B+D=0\\ A=1\end{array}\right. \qquad A=1;\quad C=-\frac{3}{2};\quad B=-\frac{1}{4}\quad y\quad D=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2.2.2

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}dx}{x+\sqrt[3]{2+x}} &= \int \frac{\left(t^3-2\right)\,t\,3t^2dt}{t^3-2+t}\\
&= 3\int \frac{\left(t^6-2t^3\right)dt}{t^3+t-2}\\
&= 3\left[\int \left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}\right)dt\right]\\
&= 3\left[\int \left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{(t-1)\,(t^2+t+2)}\right)dt\right]
\end{aligned}$$

$$= 3\left[\int \left(t^3 - t + \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2}\right) dt\right]$$

$$= 3\left[\int \left(t^3 - t - \frac{1}{3(t-1)} + \frac{\frac{4}{3}t - \frac{2}{3}}{t^2+t+2}\right) dt\right]$$

$$= 3\left[\int \left(t^3 - t - \frac{1}{3(t-1)} + \frac{\frac{4}{3}t - \frac{2}{3}}{t^2+t+2}\right) dt\right]$$

$$= 3\left[\int \left(t^3 - t - \frac{1}{3(t-1)} + \frac{2}{3}\frac{2t+1}{t^2+t+2} - \frac{4}{3\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}\right) dt\right]$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 2\ln\left|t^2+t+2\right| - \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2+x)^4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2+x)^2} + 2\ln\left|\sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{2+x} + 2\right| -$$

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{2+x}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$2 + x = t^3 \quad \longrightarrow \quad t = \sqrt[3]{2+x} \quad$ y $\quad dx = 3t^2 dt$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2}$

$\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A\left(t^2+t+2\right)+(Bt+C)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+2)}$

$t^2 - 2t = A\left(t^2+t+2\right) + (Bt+C)(t-1)$

$$\begin{cases} A + B & = 1 \\ A - B + C & = -2 \\ 2A - C & = 0 \end{cases} \qquad A = 1;\ C = -\tfrac{2}{3};\ B = \tfrac{4}{3}$$

$\int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

Ejemplo 2.2.3

$$\int \frac{x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1}dx = 2\int \frac{\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)dx}{2}$$

$$= \int \left(1-\sqrt{x^2-1}\right)dx$$

$$= x - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arcsin(x) + C$$

2.2.2. Integrales de la forma $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. Para resolver este tipo de ejemplos utilizamos un procedimiento parecido al de Ostrogradski de funciones racionales, el mismo que citamos a continuación:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \mu \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{2.10}$$

Donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$ con coeficientes indeterminados y μ es un número cualquiera.

Para encontrar los valores de los coeficientes indeterminados del polinomio $Q_{n-1}(x)$ Y del número μ se halla derivando la expresión (B), y luego se procede como el método de los coeficientes indeterminados. Ejemplos

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

Ejemplo 2.2.4

$$\int \frac{\left(x^3-6x^2+11x-6\right)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+4x+3} + \mu \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} \\
&= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} \\
&= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}} \\
&= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right| + C
\end{aligned}$$

$$x^3-6x^2+11x-6 = \left(Ax^2+Bx+C\right)(x+2) + \left(x^2+4x+3\right)(2Ax+B) + \mu$$

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 10A+2B = -6 \\ 6A+6B+C = 11 \\ 3B+2C+\mu = -6 \end{cases} \quad A = \tfrac{1}{3}; \quad C = 37; \quad B = -\tfrac{14}{3} \quad y \quad \mu = -66$$

Ejemplo 2.2.5

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^4}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int \frac{-t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)\sqrt{1-t^2} + \mu \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\arcsin(t) + C \\
&= \left(\frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x}\right)\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{3}{8}\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + C
\end{aligned}$$

Sustitución: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{dt}{t^2} \end{cases}$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$-t^4 = \frac{\left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)(-t)}{\sqrt{1-t^2}} + \left(3At^2 + 2Bt + C\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{\mu}{\sqrt{1-t^2}}$

$\frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)(-t)+\left(3At^2+2Bt+C\right)\left(1-t^2\right)+\mu}{\sqrt{1-t^2}}$

$-t^4 = \left(At^3 + Bt^2 + Ct + D\right)(-t) + \left(3At^2 + 2Bt + C\right)\left(1-t^2\right) + \mu$

$\begin{cases} -4A = -1 \\ -3B = 0 \\ 3A - 2C = 0 \quad A = \frac{1}{4}; \quad C = \frac{3}{8}; B = 0; \quad D = 0; \quad y = -\frac{3}{8} \\ 2B - D = 0 \\ C + \mu = 0 \end{cases}$

2.2.3. Integrales de la forma $\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$

Estos integrales son una ampliación de la sustitución inversa $x - \alpha = \frac{1}{t}$, pero en estos casos, ésta sustitución nos lleva a los integrales de la forma 2.3.2

Ejemplo 2.2.6

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}} =$$

$$= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^5}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t}-1\right)}}$$

$$= \int \frac{-t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left(At^3 + Bt^2 + Ct + D\right)\sqrt{1-t^2} + \mu \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\arcsin(t) + C$$

$$= \left(\frac{1}{4(x+1)^3} + \frac{3}{8(x+1)}\right)\frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{x+1} - \frac{3}{8}\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right) + C$$

Sustitución:

$x + 1 = \frac{1}{t} \qquad dx = -\frac{dt}{t^2}$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$$\frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{\left(At^3 + Bt^2 + Ct + D\right)(-t)}{\sqrt{1-t^2}} + \left(3At^2 + 2Bt + C\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{\mu}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)(-t)+\left(3At^2+2Bt+C\right)\left(1-t^2\right)+\mu}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$-t^4 = \left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)(-t)+\left(3At^2+2Bt+C\right)\left(1-t^2\right)+\mu$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} -4A & = -1 & A & = \frac{1}{4} \\ -3B & = 0 & C & = \frac{3}{8} \\ 3A-2C & = 0 & B & = 0 \\ 2B-D & = 0 & D & = 0 \\ C+\mu & = 0 & \mu & = -\frac{3}{8} \end{array}\right.$$

Ejemplo 2.2.7

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}} = -\int \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+2\left(\frac{1}{t}+1\right)-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{(t+1)dt}{\sqrt{2t^2-1}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}t\,dt}{\sqrt{2t^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}} \\
&= -\sqrt{2}\sqrt{2t^2-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}\right| + C \\
&= -\sqrt{2}\frac{\sqrt{2-(x-1)^2}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-(x-1)^2}}{x-1}\right| + C
\end{aligned}$$

Sustitución: $\left\{\begin{aligned} x-1 &= \frac{1}{t} \\ x &= \frac{1}{t}+1 \\ dx &= -\frac{dt}{t^2} \end{aligned}\right.$

2.2.4. Integrales que se resuelven con las sustituciones de Euler.

Las sustituciones de Euler son tres y nos permite racionalizar integrales de la forma:

$$\int \left(x, \sqrt{ax^2+bx+x}\right)dx \tag{2.11}$$

Estas sustituciones son las siguientes:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \qquad \text{si } a > 0 \tag{2.12}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, \qquad \text{si } c > 0 \tag{2.13}$$

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = xt \pm \sqrt{c} \tag{2.14}$$

el trinomio de 2do grado o tiene que ser factorables. Ejemplos:

Ejemplo 2.2.8

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{-2\left(t^2-t+1\right)dt}{(1-2t)^2}}{\frac{t^2-1}{1-2t}-\frac{t^2-t+1}{1-2t}} = -2\int \frac{\frac{\left(t^2-t+1\right)dt}{(1-2t)^2}}{\frac{t^2-1-t^2+t-1}{1-2t}}$$

$$= 2\int \frac{\left(t^2-t+1\right)dt}{(t-2)(2t-1)}$$
$$= 2\int \frac{\left(t^2-t+1\right)dt}{(2t^2-5t+2)} = 2\int \left[\frac{1}{2}+\frac{3t}{2\left(2t^2-5t+2\right)}\right]dt$$
$$= 2\int \left[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t-2}\right)\right]dt$$
$$= 2\int \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2t-1)}+\frac{1}{t-2}\right]dt$$
$$= t-\frac{1}{2}\ln|2t-1|+\ln|t-2|+C = t+\ln\left|\frac{(t-2)^2}{2t-1}\right|+C$$
$$= \sqrt{x^2+x+1}-x+\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x-2\right)^2}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)-1}\right|+C$$

Primera sustitución de Euler:

$\sqrt{x^2+x+1} = x+t$

$\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 = (x+t)^2 \longrightarrow x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2 \longrightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t}$

$y dx = -\frac{2\left(t^2-t+1\right)dt}{(1-2t)^2}$

$\sqrt{x^2+x+1} = x+t \longrightarrow \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-1}{1-2t}+t = \frac{t^2-1+t-2t^2}{1-2t} = -\frac{t^2-t+1}{1-2t}$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$\frac{t}{(2t-1)(t-2)} = \frac{(A)(t-2)+B(2t-1)}{(2t-1)(t-2)}$

$t = (A)(t-2)+B(2t-1)$

si $t = 2 \longrightarrow 3B = 2 \longrightarrow B = \frac{2}{3}$

si $t = \frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{3}{2}A = \frac{1}{2} \longrightarrow A = -\frac{1}{3}$

Ejemplo 2.2.9

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int \frac{x-\sqrt{(x+1)(x+2)}}{x+\sqrt{(x+1)(x+2)}}dx$$

$$= -2\int \frac{\frac{t^2-2}{1-t^2}+\frac{t}{1-t^2}}{\frac{t^2-2}{1-t^2}-\frac{t}{1-t^2}}\cdot\frac{t\,dt}{(1-t^2)^2}$$
$$= -2\int \frac{t\left(t^2+t-2\right)dt}{(t+1)^3(t-1)^2(t-2)}$$
$$= \int \frac{-2t^3-2t^2+4t}{(t+1)^3(t-1)^2(t-2)}dt$$
$$= \int \left[\frac{A}{(t+1)^3}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t-1)^2}+\frac{E}{t-1}+\frac{F}{t-2}\right]dt$$
$$= \int \left[\frac{1}{5(t+1)^3}+\frac{9}{25(t+1)^2}-\frac{1}{5(t-1)^2}+\frac{9}{20(t-1)}-\frac{9}{20(t-2)}\right]dt$$
$$= -\frac{1}{10(t+1)^3}-\frac{9}{25(t+1)}+\frac{1}{5(t-1)}+\frac{9}{20}\ln\left|\frac{t-1}{t-2}\right|+C$$

con $t=\frac{\sqrt{(x+2)(x+1)}}{x+1}=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$.

Tercera sustitución de Euler:

.

$\sqrt{(x+2)(x+1)}=(x+1)t$

$(\sqrt{(x+2)(x+1)})^2=[(x+1)t]^2\longrightarrow(x+2)(x+1)=t^2(x+1)^2\longrightarrow x+2=t^2(x+1)\longrightarrow\longrightarrow\quad x=\frac{t^2-2}{1-t^2}\quad y\quad dx=\frac{-2t\,dt}{(1-t^2)^2}$

$\sqrt{(x+2)(x+1)}=(x+1)t\longrightarrow\sqrt{(x+2)(x+1)}=t\left(\frac{t^2-2}{1-t^2}+1\right)=\frac{-t}{1-t^2}=$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$\frac{-2t^3-2t^2+4t}{(t+1)^3(t-1)^2(t-2)}=\frac{A}{(t+1)^3}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t-1)^2}+\frac{E}{t-1}+\frac{F}{t-2}$

$\frac{-2t^3-2t^2+4t}{(t+1)^3(t-1)^2(t-2)}=\frac{A(t-1)^2(t-2)+B(t+1)(t-1)^2(t-2)+C(t+1)^2(t-1)^2(t-2)+D(t+1)^3(t-2)}{(t+1)^3(t-1)^2(t-2)}+$
$+\frac{E(t+1)^3(t-1)(t-2)+F(t+1)^3(t-1)^2}{(t+1)^3(t-1)^2(t-2)}$

$-2t^3-2t^2+4t==A(t-1)^2(t-2)+B(t+1)(t-1)^2(t-2)+C(t+1)^2(t-1)^2(t-2)+D(t+1)^3(t-2)++E(t+1)^3(t-1)(t-2)+\quad F(t+1)^3(t-1)^2$

$$\begin{cases} B-2C+D+F=0\\ A-3B-2C+D-4E-2F=-2\\ -4A+B+4C-3D+4E+10F=-2\\ 5A+3B+C-5D+3E+F=4\\ -2A-2B-2C-2D+2E+F=4\end{cases}\quad A=\frac{1}{5};B=\frac{9}{25};C=0;\quad D=$$
$-\frac{1}{5};E=\frac{9}{20}\quad y\quad F=-\frac{9}{20}$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$$
$$= \int \frac{\frac{2\left(t^2+2t-1\right)dt}{\left(t^2+1\right)^2}}{1-\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}}$$
$$= 2\int \frac{\frac{\left(t^2+2t-1\right)dt}{\left(t^2+1\right)^2}}{\frac{t^2+1-t^2-2t+1}{t^2+1}}$$
$$= -\int \frac{\left(t^2+2t-1\right)dt}{\left(t^2+1\right)(t-1)}$$
$$= \int \left[\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{C}{t-1}\right]dt$$
$$= \int \left[\frac{2}{t^2+1}+\frac{1}{t-1}\right]dt$$
$$= 2\arctan(t)+\ln|t-1|+C$$
$$= 2\arctan\left(\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}\right)+\ln\left|\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1-x}{x}\right|+C$$

Segunda sustitución de Euler

$\sqrt{1-2x-x^2}=xt+1$

$\left(\sqrt{1-2x-x^2}\right)^2=(xt+1)^2 \longrightarrow 1-2x-x^2=x^2t^2+2xt+1 \longrightarrow x = -\frac{2t+2}{t^2+1}$ y $dx=-\frac{2\left(t^2+2t-1\right)dt}{\left(t^2+1\right)^2}$. $\sqrt{1-2x-x^2}=xt+1 \longrightarrow \sqrt{1-2x-x^2} = -\frac{2t+2}{t^2+1}t+1=-\frac{2t^2+2t-t^2-1}{t^2+1}=-\frac{t^2+2t-1}{1-2t}$

Como encontrar los coeficientes

$$\frac{t^2+2t-1}{\left(t^2+1\right)(t-1)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{C}{t-1}$$
$$\frac{t^2+2t-1}{\left(t^2+1\right)(t-1)}=\frac{(At+B)(t-1)+C\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)(t-1)}$$
$$t^2+2t-1=(At+B)(t-1)+C\left(t^2+1\right)$$
$$\begin{cases} A+C=1 \\ -A+B=2 \\ -B+C=-1 \end{cases} \qquad A=0; B=2 \text{ y } C=1$$

Integrales de las diferenciables binomias.

$\int x^m(a+bx^b)^p\,dx$

donde m, n y p so números racionales

Estas integrales pueden racionalizarse, o pueden expresarse por medio de una combinación finita de funciones elementales únicamente en los siguientes casos o condiciones: Condiciones de Chébichev.

Cuando p es un entero.

Cuando $\frac{m+1}{n}$ es un entero. EN este caso se racionaliza con la sustitucón $a+bx^n=t^s$, donde s es el denominador de la fracción p

Cuando $\frac{m+1}{n}+p$ es un entero. Aquí se racionaliza con la sustitución $ax^{-n}+b=t^{s}$ conde s es el denominador de la fracción p. Ejemplos

Ejemplo 2.2.10

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx$$

Aquí $m=-\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{4}$; $p=\frac{1}{3}$

p entero no es

$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in$ de los enteros, si es este caso por lo que la sustitución es:

$$1+x^{1/4}=t^{3}\longrightarrow x^{1/4}=t^{3}-1\longrightarrow x=\left(t^{3}-1\right)^{4} y dx=12t^{2}\left(t^{3}-1\right)^{3}dt$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\int x^{1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}dx &= 12\int \frac{t\cdot t^{2}\left(t^{3}-1\right)^{3}}{\left(t^{3}-1\right)^{2}}dt = 12\int\left(t^{6}-t^{3}\right)dt\\ &= \frac{12}{7}t^{7}-3t^{4}+C\end{aligned}$$

Para volver a variables originales reemplazamos a

$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$

Ejemplo 2.2.11

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^{2}} = \int \frac{\sqrt{t^{6}}6t^{5}dt}{\left(1+\sqrt[3]{t^{6}}\right)^{2}} = 6\int \frac{12}{7}t^{7}-3t^{4}+C$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6}{5}t^{5}+4t^{3}+6t-24\int\frac{t^{2}+1-1}{(t^{2}+1)^{2}}dt+18\int\frac{dt}{(t^{2}+1)^{2}}\\
&= \frac{6}{5}t^{5}+4t^{3}+6t-24\int\frac{t^{2}+1}{(t^{2}+1)^{2}}dt+17\int\frac{dt}{(t^{2}+1)^{2}}\\
&= \frac{6}{5}t^{5}+4t^{3}+6t-24\arctan(t)+17\int\frac{\sec^{2}z dz}{(\sec^{2}z)^{2}}\\
&= \frac{6}{5}t^{5}+4t^{3}+6t-24\arctan(t)+17\int\cos^{2}z dz\\
&= \frac{6}{5}t^{5}+4t^{3}+6t-24\arctan(t)+\frac{17}{2}z+\frac{17}{4}\sin 2z+C\\
&= \frac{6}{5}t^{5}+4t^{3}+6t-24\arctan(t)+\frac{17}{2}\arctan(t)+\frac{17t}{4\left(t^{2}+1\right)}+C\\
&= \frac{6}{5}t^{5}+4t^{3}+6t-\frac{31}{2}\arctan(t)+\frac{17t}{4\left(t^{2}+1\right)}+C\\
&= \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^{5}}+4\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-\frac{31}{2}\arctan(\sqrt[6]{x})+\frac{17\sqrt[6]{x}}{4(\sqrt[3]{t}+1)}+C
\end{aligned}$$

Aqui $m = \frac{1}{2}; n = \frac{1}{3}; p = 2$

1. p entero

Sustitución

a) $t^6 = x \longrightarrow 6t^5 dt = dx$

b) $t = \tan z \longrightarrow dt = \sec^2 z dz. \quad \sin 2z = \frac{2t}{t^2+1}$

Ejemplo 2.2.12

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}} &= \int x^{-3/2}\left(1+x^{3/4}\right)^{-1/3} dx \\ &= \int x^{-3/2}\left(x^{3/4}\left(x^{-3/4}+1\right)\right)^{-1/3} dx\end{aligned}$$

Aquí $m = -\frac{3}{2}; n = \frac{3}{4}; p = -\frac{1}{3}$

1. p entero no es

2. $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{4}} = -\frac{p}{3} \in$ de los enteros.

1. $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1 \in$ de los enteros, por lo que la sustitución es: $x^{-3/4} + 1 = t^3 \longrightarrow x^{-3/4} = t^3 - 1 \longrightarrow x^{-7/4} dx = -4t^2 dt$

Por lo que

$$\begin{aligned}\int x^{-3/2}\left(1+x^{3/4}\right)^{-1/3} dx &= \int x^{-3/2}\left(x^{3/4}\left(x^{-3/4}+1\right)\right)^{-1/3} dx \\ &= \int x^{-3/2} x^{-1/4}\left(x^{-3/4}+1\right)^{-1/3} dx \\ &= \int x^{-7/4}\left(x^{-3/4}+1\right)^{-1/3} dx \\ &= \int \left(t^3\right)^{-1/3}\left(-4t^2\right) dt \\ &= -4\int t\,dt = -2t^2 + C \\ &= -2\sqrt[3]{\left(x^{3/4}+1\right)^2} + C\end{aligned}$$

2.3. Integración de funciones trigonométricas.

A principio del siglo XVII, el matemático John Napier especificó los logaritmos, por lo tanto, los cálculos trigonométricos obtuvieron un gran empuje. Luego, en el siglo XVIII, el matemático Leonhardo Euler demostró que las propiedades trigonométricas eran producto de la aritmética de números complejos, también, estableció las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Posteriormente, Sheila Scott Macintyre publicó su primer trabajo sobre periodos asintóticos de funciones integrales en 1935.

Las integrales de funciones trigonométricas se definen como integrales que contienen potencias de seno y del coseno, donde, su aplicación es muy grande en la parte de la ingeniería, principalmente en ingeniería electrónica porque las funciones trigonométricas se utilizan para conocer el comportamiento de series y señales, como prioridad en el estudio de fenómenos periódicos: el flujo de corriente alterna. Otras aplicaciones se realizan en ingeniería mecánica, química, civil, geológica, espacial, aeronáutica, entre otras.

Una integral se denomina trigonométrica cuando el integrando de la misma está en su composición las funciones trigonométricas y constantes, por lo tanto, para su resolución se sugiere aplicar los siguientes aspectos:

1. Usar identidades trigonométricas y simplificar.
2. Reducir una fracción impropia.
3. Separar los elementos del numerador de una fracción entre el denominador de la fracción.

Tener en cuenta que por lo general las identidades trigonométricas ayudan a llegar a ecuaciones básicas.

2.3.1. Potencias que involucran seno, coseno, tangente o funciones inversas

$\sin^m x\,dx$; $\int \cos^n x\,dx$; $\int \tan^m x\,dx$; $\int \cot^n x\,dx$; $\int \sec^m x\,dx$ y $\int \csc^n x\,dx$

Cuando m es par es decir $m = 2k$

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x\,dx &= \int \sin^{2k} x\,dx \\
&= \int \left(\sin^2 x\right)^k k dx \\
&= \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^k dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan^m x\,dx &= \int \tan^{2k} x\,dx \\
&= \int \left(\tan^2 x\right)^2 dx \\
&= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^k dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sec^m x\,dx &= \int \sec^{2k} x\ \sec^2 x\,dx \\
&= \int \left(\sec^2 x\right)^{m-1} \sec^2 x\,dx \\
&= \int \left(\tan^2 x + 1\right)^{m-1} \sec^2 x\,dx
\end{aligned}$$

Cuando m es impar es decir $m = 2k + 1$

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x\,dx &= \int \sin^{2k+1} x\,dx\\
&= \int \sin^{2k} x\ \sin x\,dx\\
&= \int \left(\sin^2 x\right)^k \sin x\,dx\\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan^m x\,dx &= \int \tan^{2k+1} x\,dx\\
&= \int \tan^{2k} x\ \tan x\,dx\\
&= \int \left(\tan^2 x\right)^k \tan x\,dx\\
&= \int \left(\sec^2 - 1\right)^k \tan x\,dx
\end{aligned}$$

$$\int \sec^m x\,dx = \int \sec^{2k+1} x\ \sec^2 x\,dx$$

En la última ecuación se utiliza la integración por partes

Si n es par es decir $n = 2k$

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x dx &= \int \cos^{2k} x dx\\
&= \int \left(\cos^2 x\right)^k dx\\
&= \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^k dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cot^n x dx &= \int \cot^{2k} x dx\\
&= \int \left(\cot^2 x\right)^k dx\\
&= \int \left(\csc^2 x - 1\right)^k dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \csc^n x dx &= \int \csc^{2k-2} x \csc^2 x dx\\
&= \int \left(\csc^2 x\right)^{k-1} \csc^2 x dx\\
&= \int \left(\cot^2 x + 1\right)^{k-1} \csc^2 x dx
\end{aligned}$$

Si n es impar es decir $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x dx &= \int \cos^{2k+1} x\, dx \\
&= \int \cos^{2k} x \cos x\, dx \\
&= \int \left[\cos^2 x\right]^k \cos x\, dx \\
&= \int \left(1 - \sin^2 x\right)^k \cos x\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cot^m x dx &= \int \cot^{2k+1} x\, dx \\
&= \int \cot^{2k} x \cot x\, dx \\
&= \int \left[\cot^2 x\right]^k \cot x\, dx \\
&= \int \left[\csc^2 x - 1\right]^k \tan x\, dx
\end{aligned}$$

$$\int \sec^m x dx = \int \sec^{2k+1} x dx;$$

En la última ecuación se utiliza la integración por partes. Ejemplos:

Ejemplo 2.3.1

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\, dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx \\
&= \int \left[\frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4x\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin\ 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin\ 4x + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin\ 2x + \frac{1}{32}\sin\ 4x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.2

$$\begin{aligned}\int \sin^5 ax\ dx &= \int \sin^4 ax\ \sin\ ax\ dx\\ &= \int \left(1-\cos^2 ax\right)^2\ \sin\ ax\ dx\\ &= \int \left(1-2\cos^2 ax+\cos^4 ax\right)\sin\ ax\ dx\\ &= -\frac{1}{a}\cos ax+\frac{2}{3a}\cos^3 ax-\frac{1}{5a}\cos^5 ax+C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.3

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\ dx &= \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx\\ &= \int \left[\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right]^2\ dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left[1+2\cos 2x+\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\right]dx\\ &= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin\ 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin\ 4x+C\\ &= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin\ 2x+\frac{1}{32}\sin\ 4x+C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.4

$$\begin{aligned}\int \cos^5 bx\ dx &= \int \cos^4 bx\cos bx\ dx\\ &= \int \left(1-\sin^2 bx\right)\ \cos\ bx\ dx\\ &= \int \left(1-2\sin^2 bx+\sin^4 bx\right)\cos\ bx\ dx\\ &= \frac{1}{b}\sin bx-\frac{2}{3b}\sin^3 bx+\frac{1}{5b}\sin^5 bx+C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.5

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x\ dx &= \int \left(\tan^2 x\right)^2 dx \\
&= \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\
&= \int \left(\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1\right) dx \\
&= \int \sec^2 x\ \sec^2 x\ dx - 2\int \sec^2 x\ dx + \int dx \\
&= \int \left(1 + \tan^2 x\right)\sec^2 x\ dx - 2\int \sec^2 x\ dx + \int dx \\
&= \tan\ x + \frac{1}{3}\tan^3 x - 2\tan\ x + x + C \\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan\ x + x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.6

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\ dx &= \int \tan^2 x\ \tan\ x\ dx \\
&= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\tan\ x\ dx \\
&= \int \sec^2 x\ \tan\ x\ dx - \int \tan\ x\ dx \\
&= \int \sec\ x\ \sec x\ \tan\ x\ dx - \int \tan\ x\ dx \\
&= \frac{1}{2}\sec^2 x + \ln|\cos x| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.7

$$\begin{aligned}
\int \cot^4 x\ dx &= \int \left(\cot^2 x\right)^2 dx \\
&= \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 dx \\
&= \int \left(\csc^4 x - 2\csc^2 x + 1\right) dx \\
&= \int \csc^2 x\ \csc^2 x\ dx - 2\int \csc^2 x\ dx + \int dx \\
&= \int \left(1 + \cot^2 x\right)\csc^2 x\ dx - 2\int \csc^2 x\ dx + \int dx \\
&= -\cot\ x - \frac{1}{3}\cot^3 x + 2\cot\ x + x + C \\
&= \cot\ x - \frac{1}{3}\cot^3 x + x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.8

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x\ dx &= \int \cot^2 x\ \cot\ x\ dx \\
&= \int \left(\csc^2 x - 1\right)\ \cot\ x\ dx \\
&= \int \csc^2 x\ \cot\ x\ dx - \int \cot\ x\ dx \\
&= \int \csc\ x\ \csc x\ \cot\ x\ dx - \int \cot\ x\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\csc^2 x - \ln|\sin\ x| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.9

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 x\ dx &= \int \sec^2 x\ \sec^2 x\ dx \\
&= \int \left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x\ dx \\
&= \int \tan^2 x\ \sec^2 x\ dx + \int \sec^2 x\ dx \\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan\ x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.10

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\ dx &= \int \sec x\ \sec^2 x \\
&= \tan\ x \sec x - \int \tan^2 x \sec x\ dx \\
&= \tan\ x \sec x - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec x\ dx \\
&= \tan\ x \sec x - \int \sec^3 x dx - \int \sec x\ dx
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.11

$$\begin{aligned}
2\int \sec^3 x\ dx &= \tan\ x \sec x - \int \sec x\ dx \\
&= \frac{1}{2}\tan\ x \sec x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan\ x| + C
\end{aligned}$$

Regla de la integración por partes:

$u = \sec x\ \int dv = \int \sec^2 x\ dx$

$du = \sec x\ \tan x\ dx\ v = \tan\ x$

2.3.2. Potencias que involucran seno y coseno

$$\int \sin^m x\ \cos^n x\ dx \tag{2.15}$$

Cuando $m = 2k+1$ (impar):

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx && (2.16)\\
&= \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx && (2.17)\\
&= \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^m x \sin x\, dx && (2.18)
\end{aligned}$$

Si $n = 2k+1$ (impar):

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx && (2.19)\\
&= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx && (2.20)\\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right)^k \sin^m x \cos x dx && (2.21)
\end{aligned}$$

Cuando $m = n = 2k+1$ (impar)

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2k} x \frac{\sin 2x}{2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sin^{2k} x \cos^{2k} x \sin x \cos x dx && (2.22)\\
&= \int \sin^{2k} x \cos^{2k} x \frac{\sin 2x}{2} dx && (2.23)\\
&= -\frac{1}{4} \int \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^k \left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]^k (-2\sin 2x) dx && (2.24)\\
&= -\frac{1}{2^{2k+2}} \int \left[1-\cos^2 2x\right]^k d(\cos 2x) && (2.25)
\end{aligned}$$

Si $m = n = 2k+1$(par)

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^{2k} x \cos^{2k} x dx && (2.26)\\
&= \int \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^k \left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]^k dx && (2.27)\\
&= \frac{1}{2^{2k}} \int \left[1-\cos^2 2x\right]^k dx && (2.28)
\end{aligned}$$

Ejemplos:

Ejemplo 2.3.12

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \sqrt[3]{\cos x}\,dx &= \int \sin^2 x(\cos x)^{1/3} \sin x\,dx \\ &= -\int \left(1-\cos^2 x\right)(\cos x)^{1/3} d(\cos x) \\ &= -\int (\cos x)^{1/3} d(\cos x) + \int (\cos x)^{7/3} d(\cos x) \\ &= -\frac{3}{4}(\cos x)^{4/3} + \frac{3}{10}(\cos x)^{10/3} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.13

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\,dx \\ &= \int \left(1-\sin^2\right) x \sin^4 x\,d(\sin x) \\ &= \int \sin^4 x\,d(\cos x) - \int \sin^6 x\,d(\cos x) \\ &\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.14

$$\begin{aligned}\int \sin^3 2x\ \cos^3 2x\,dx &= \int \sin^2 2x \cos^2 2x \sin 2x \cos 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{96}\cos^3 4x + C \\ &= -\frac{1}{32}\int \left(1-\cos^2 4x\right)(-4\sin 4x)dx \\ &= -\frac{1}{32}\int \left(1-\cos^2 4x\right) d(\cos 4x) \\ &= -\frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{96}\cos^3 4x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.15

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^3 x\,dx &= \int \sin^5 x \cos^2 x \cos x\,dx \\ &= \int \sin^5 x\left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x) \\ &= \int \sin^5 x\,d(\sin x) - \int \sin^7 x\,d(\sin x) \\ &= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.16

$$\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx = \int \left[\sin^2 \frac{x}{2}\right]^2 \left[\cos^2 \frac{x}{2}\right]^2 dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left[\frac{1-\cos x}{2}\right]^2 \left[\frac{1+\cos x}{2}\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \left(\sin^2 x\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{64}\int \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{64}\int \left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx \\
&= \frac{1}{64}\left(x-\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C \\
&= \frac{3}{128}x-\frac{1}{64}\sin 2x+\frac{1}{512}\sin 4x+C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.3.17

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx &= \int \left[\sin^2 x\right]^2 \cos^2 x dx \\
&= \int \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^2 \left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right] dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2 2x\right)(1-\cos 2x)dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\sin^2 2x dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right] dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx \\
&= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin^3 2x+C
\end{aligned}
$$

2.3.3. Potencias que involucran tangente y secante o cotangente y cosecante

$\int \tan^m x\ \sec^n x\,dx$ y $\int \cot^m x\ \csc^n x\,dx$

Cuando n : entero positivo y par: $2k$

$$
\begin{aligned}
\int \tan^m x\sec^n x dx &= \int \tan^m x\sec^{2k} x dx && (2.29)\\
&= \int \tan^m x\sec^{2k-2} x\sec^2 x dx && (2.30)\\
&= \int \tan^m x\left(\sec^2 x\right)^{k-1} d(\tan x) && (2.31)\\
&= \int \tan^m x\left(\tan^2 x+1\right)^{k-1} d(\tan x) && (2.32)
\end{aligned}
$$

Si $n = m$: entero positivo, impar: $2k + 1$

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^n x\,dx &= \int \tan^{2k+1} x \sec^{2k+1} x dx && (2.33)\\
&= \int \tan^{2k} x \sec^{2k} x \tan x \sec x dx && (2.34)\\
&= \int \left(\tan^2 x\right)^k \sec^{2k} x d(\sec x) && (2.35)\\
&= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^k \sec^2 x d(\sec x) && (2.36)
\end{aligned}$$

Ejemplos:

Ejemplo 2.3.18

$$\begin{aligned}
\int \tan^7 x \sec^4 x dx &= \int \tan^7 x \sec^2 x \sec^2 x dx\\
&= \int \tan^7 x \sec^2 x d(\tan x)\\
&= \int \tan^7 x \left(\tan^2 x + 1\right) d(\tan x)\\
&= \frac{1}{10}\tan^{10} x + \frac{1}{8}\tan^8 x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.19

$$\begin{aligned}
\int tg^3 x \sec^5 x dx &= \int tg^2 x \sec^4 x(\sec x \tan x dx)\\
&= \int \sec^4 x \left(\sec^2 x - 1\right) d(\sec x)\\
&= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.20

$$\begin{aligned}
\int \cot^7 x \csc^4 x dx &= -\int \cot^7 x \csc^2 x \left(\csc^2 x dx\right)\\
&= -\int \cot^7 x \csc^2 x d(\cot x)\\
&= -\int \cot^7 x \left(\cot^2 x + 1\right) d(\cot x)\\
&= -\frac{1}{10}\cot^{10} x - \frac{1}{8}\cot^8 x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.21

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x \csc^7 x dx &= \int \cot^2 x \sec^6 x(\csc x \cot x dx)\\
&= -\int \csc^6 x \left(\csc^2 x - 1\right) d(\csc x)\\
&= -\frac{1}{9}\csc^9 x + \frac{1}{7}\csc^7 x + C
\end{aligned}$$

2.3.4. Integrales que involucran productos seno y coseno

$$\int \sin(Ax)\cos(Bx)\,dx \tag{2.37}$$

$$\int \cos(Ax)\cos(Bx)\,dx \tag{2.38}$$

$$\int \sin(Ax)\sin(Bx)\,dx \tag{2.39}$$

En estos casos, las siguientes identidades son necesarias:

$$\sin(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B)x - \cos(A+B)x\right) \tag{2.40}$$

$$\cos(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B)x - \sin(A-B)x\right) \tag{2.41}$$

$$\sin(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B)x + \cos(A-B)x\right) \tag{2.42}$$

Ejemplo 2.3.22

$$\begin{aligned}\int \sin 8x \sin\frac{x}{2}dx &= \int \frac{1}{2}\left[\cos\left(8+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(8-\frac{1}{2}\right)x\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{11}{2}x - \cos\frac{9}{2}x\right)dx\\ &= \frac{1}{11}\sin\frac{11}{2}x - \frac{1}{9}\sin\frac{9}{2}x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.23

$$\begin{aligned}\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}dx &= \int \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\sin\frac{5}{6}x - \sin\frac{1}{6}x\right)dx\\ &= -\frac{3}{5}\cos\frac{5}{6}x + 3\cos\frac{1}{6}x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.24

$$\begin{aligned}\int \cos 3x\cos 5x dx &= \int \frac{1}{2}[\cos(3+5)x + \cos(3-5)x]dx\\ &= \frac{1}{2}\int(\cos 8x + \cos 2x)dx\\ &= \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.25

$$\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$$
$$= \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\cos \left(1 - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(1 + \frac{1}{2} \right) x \right] \right\} \sin \frac{x}{3} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int \left(\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{3} \cos \frac{3x}{2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) x \right] dx -$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) x + \sin \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) x \right] dx$$
$$= \frac{1}{4} \int \left(- \sin \frac{x}{6} + \sin \frac{5x}{6} \right) dx - \frac{1}{4} \int \left(- \sin \frac{7x}{6} + \sin \frac{11x}{6} \right) dx$$
$$= \frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C$$

2.3.5. Integrales de funciones trigonométricas que se resuelven por otros procedimientos.

Ejemplo 2.3.26

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\left(1 - \cos^2 x\right) \sin x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} - \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$
$$= - \sec^3 x + \sec x + C$$

Ejemplo 2.3.27

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right)^2 dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\left(1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x\right) dx}{\sin^3 x}$$

$$= \int \csc^3 x dx - 2 \int \csc x dx + \int \sin x dx$$
$$= -\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \int \csc x dx - 2 \int \csc x dx + \int \sin x dx$$
$$= -\frac{1}{2} \csc x \cot x - \frac{3}{2} \int \csc x dx + \int \sin x dx$$
$$= -\frac{1}{2} \csc x \cot x - \frac{3}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \cos x + C$$

Ejemplo 2.3.28

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^3 dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^3 dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$$

$$= \int \frac{\left(\cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + \sin^6 x\right) dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$$

$$= \int [\frac{\cos^6 x}{\sin^3 x \cos^5 x} + \frac{3\sin^2 x \cos^4 x}{\sin^3 x \cos^5 x} + \frac{3\sin^4 x \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^5 x}$$

$$+ \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x \cos^5 x}] \, dx$$

$$= \int \left[\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x \cos x} + \frac{3\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin x \cos x} + \frac{3\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\left(1 - \cos^2 x\right)\sin x}{\cos^5 x}\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3\sin x}{\cos x} + \frac{3\cos x}{\sin x} + \frac{3\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^5 x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x}\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3\sin x}{\cos x} + \frac{3\cos x}{\sin x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^5 x}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\csc^2 x - 3\ln|\cos x| + 3\ln|\sin x| - \sec^2 x - \frac{1}{4}\sec^4 x + C$$

$$= \frac{1}{2}\csc^2 x + 3\ln|\tan x| - \sec^2 x - \frac{1}{4}\sec^4 x + C$$

Ejemplo 2.3.29

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{\frac{3t^{1/2}dt}{2\sqrt{1-t^3}}}{\sqrt{1-t^3}\,t} = \frac{3}{2}\int \frac{t^{1/2}dt}{\left(1-t^3\right)t} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^{1/2}\left(1-t^3\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}\int \frac{2zdz}{z\left(1-z^6\right)} = 3\int \frac{dz}{1-z^6} = 3\int \frac{dz}{\left(1-z^3\right)\left(1+z^3\right)} \\
&= 3\int \frac{dz}{(1-z)(1+z)\left(1+z+z^2\right)\left(1-z+z^2\right)} \\
&= 3\int \left[\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} + \frac{Cz+D}{z^2+z+1} + \frac{Ez+F}{z^2-z+1}\right] dz \\
&= 3\int \left[\frac{1}{2(1-z)} + \frac{1}{2(1+z)} - \frac{z}{2\left(z^2+z+1\right)} + \frac{z}{2\left(z^2-z+1\right)}\right] dz \\
&= \frac{3}{2}\ln|1-z| + \frac{3}{2}\ln|1+z| - \frac{3}{2}\int \frac{zdz}{z^2+z+1} + \frac{3}{2}\int \frac{zdz}{z^2-z+1} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|1-z^2\right| + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-z+z^2}{1+z+z^2}\right| + \frac{3}{4}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&\quad + \frac{3}{4}\int \frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|1-z^2\right| + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-z+z^2}{1+z+z^2}\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{2}}\right) + \\
&\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

$\frac{1}{1-z^6} =$

$$= \frac{A(1+z)\left(z^4-z^2+1\right)+B(1-z)\left(z^4-z^2+1\right)+\cot D\left(1-z^2\right)\left(1-z+z^2\right)+(Ez+F)\left(1-z^2\right)\left(1+z+z^2\right)}{1-z^6}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}\ln|1-t| + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{t}+t}{1+\sqrt{t}+t}\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2\sqrt{t}+1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2\sqrt{t}-1}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= A(1+z)\left(z^4-z^2+1\right) + B(1-z)\left(z^4-z^2+1\right) + \\
&\quad + (Cz+D)\left(1-z^2\right)\left(1-z+z^2\right) + (Ez+F)\left(1-z^2\right)\left(1+z+z^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
A-B-C-E=0 \\
A+B+C-D-E-F=0 \\
-A+B+D-F=0 \\
-A-B-C+E=0 \\
A-B+C-D+E+F=0 \\
A+B+D+F=1
\end{cases}$$

$A=\frac{1}{2}; B=\frac{1}{2}; C=-\frac{1}{2}; \quad D=0; E=\frac{1}{2} \quad y \quad F=0$

2.3.6. Integrales racionales de funciones trigonométricas

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx \tag{2.43}$$

Estos integrales se transforman en funciones racionales, con la sustitución:

$\tan\frac{x}{2} = z \therefore \sin x = \frac{2x}{1+z^2}$; $\cos = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ y $dx = \frac{2dx}{1+z^2}$

Estos valores se determinan utilizando identidades trigonométricas.

En muchas ocasiones esta sustitución con lleva a cálculos muy complicados, por lo que se hace necesario tomar en cuenta las siguientes sugerencias sobre estos integrales.

Si $R(\sin x, \cos x)$ es una función impar respecto ésta se a racionaliza sen x, o sea; $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,ésta se racionaliza por medio de la sustitución $\cos x = z$

Si $R(\sin x, \cos x)$ es una función impar respecto a $\cos x$, o sea;

$R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, ésta se racionaliza por medio de la sustitución $\sin x = z$

Si $R(\sin x, \cos x)$ es una función par respecto a $\sin x$ y $\cos x$, o sea; $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, ésta se raciona por medio de la sustitución $\tan x = z \therefore \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ y $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

A continuación se muestran uno ejemplos:

Ejemplo 2.3.30

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{t}{1+t^2}\right)} \\
&= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{(2+2t^2+1+t^2)t}{(1+t^2)^2}} \\
&= \int \frac{2t^2+2}{t\left(t^2+3\right)}dt \\
&= \int \left[\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+3}\right] dt \\
&= \int \left[\frac{2}{3t} + \frac{4t}{t^2+3}\right] dt \\
&= \frac{2}{3}\ln|t| + \frac{2}{3}\ln\left|t^2+3\right| + C \\
&= \frac{2}{3}\ln\left|t\left(t^2+3\right)\right| + C \\
&= \frac{2}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\cdot\left(\tan^2\frac{x}{2}+3\right)\right| + C
\end{aligned}$$

Sustitución ángulo medio:

$\tan\frac{x}{2} = t \longrightarrow \frac{x}{2} = \arctan t \longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. $\sin x = \frac{t}{1+t^2}$ y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$\frac{2t^2+2}{t(t^2+3)} = \frac{A\left(t^2+3\right)+(Bt+C)t}{t(t^2+3)}$

$2t^2+2 = A\left(t^2+3\right) + (Bt+C)t$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ C=0 \\ 3A=2 \end{cases} \quad A=\tfrac{2}{3}; B=\tfrac{4}{3} \quad y \quad C=0$$

Ejemplo 2.3.31

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\sin^2 x} &= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}\frac{dt}{1+t^2}}{\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} \\
&= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1+t^2+t^2}\frac{dt}{1+t^2}}{1+t^2} \\
&= \int \frac{t^2dt}{(t^2+1)\,(2t^2+1)}dt \\
&= \int \left[\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{2t^2+1}\right]dt \\
&= \int \left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2t^2+1}\right]dt \\
&= \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+C \\
&= \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C \\
&= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C
\end{aligned}$$

Sustitución utilizada:

$\tan x = t \longrightarrow x = \arctan t \longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad y \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

Como encontrar los coeficientes indeterminados de los polinomios:

$\frac{t^2}{(t^2+1)(2t^2+1)} = \frac{(At+B)\left(2t^2+1\right)+(Ct+D)\left(t^2+1\right)}{(t^2+1)(2t^2+1)}$

$t^2 = (At+B)\left(2t^2+1\right)+(Ct+D)\left(t^2+1\right)$

$$\begin{cases} 2A+C=0 \\ 2B+D=1 \\ A+C=0 \\ B+D=0 \end{cases} \quad A=0; B=1; \quad C=0 \quad y \quad D=-1$$

Ejemplo 2.3.32

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx &= \int \frac{\left(1+\sin^2 x\right)(\sin x dx)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \\
&= -\int \frac{\left(1+1-t^2\right) dt}{1-t^2-t^2} \\
&= -\int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt \\
&= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2\left(2t^2-1\right)}\right] dt \\
&= \frac{1}{2}t - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C \\
&= \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.3.33

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} &= \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} \\
&= \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 9 - 4} \\
&= \int \frac{dt}{(t-3)^2 - 4} \\
&= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t-3-2}{t-3+2}\right| + C \\
&= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t-5}{t-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{4} \ln\left|\frac{\sin x - 5}{\sin x - 1}\right| + C
\end{aligned}
$$

Sustitución:

$t = \sin x \longrightarrow dt = \cos x dx$

Ejemplo 2.3.34

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$$
$$= \int \frac{\frac{dt}{3t^2-8t+5}}{\frac{1+t^2}{12}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{5}{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{3}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 - \frac{1}{9}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3u-1}{3u+1}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\left(t-\frac{4}{3}\right)-1}{3\left(t-\frac{3}{3}\right)+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3t-5}{3t-3}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\tan x - 5}{3\tan x - 3}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x - 5\cos x}{3\sin x - 3\cos x}\right| + C$$

Sustitución:

a) $\tan x = t \longrightarrow x = \arctan t \longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}; \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

b) $t - \frac{4}{3} = u \quad \longrightarrow t = u + \frac{4}{3} \quad \longrightarrow \quad dt = du$

Ejemplo 2.3.35

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = \int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}\sqrt{\frac{1+t^2+1-t^2}{t^2+1}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\left(\sqrt{t^2+1}\right)dt}{t}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sec z \cdot \sec^2 z dz}{\tan z}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\cos^2 z \cdot \sin z}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z \cdot \sin z}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin z dz}{\cos^2 z} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc z dz$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sec z + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\csc z - \cot z| + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t}\right| + C$$

con $t = \tan \frac{x}{2}$

Sustitución

$\tan \frac{x}{2} = t \quad \longrightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}; \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}; \quad y \quad dx = \frac{2dt}{t^2+1}$

$t = \tan z \longrightarrow dt = \sec^2 z dz; \quad \sqrt{t^2+1} = \sec z$

Identidades para volver a variables originales:

$t = \arctan x; \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{t} : \quad \csc z = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$

Las integrales que contienen funciones hiperbólicas se resuelven con todas las reglas que se vio en la integración de las funciones trigonométricas. Pero si necesitamos tener en cuenta las siguientes identidades hiperbólicas:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{2.44}$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \tag{2.45}$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{2.46}$$

$$\sinh x \cosh x = = \frac{1}{2}\sinh 2x \tag{2.47}$$

Ejemplos:

Ejemplo 2.3.36

$$\begin{aligned}
\int \sinh^3 x\, dx &= \int \sinh^2 x\, (sh\ x\, dx) \\
&= \int \left(1 + ch^2 x\right) d\,(ch\ x) \\
&= ch\ x + \frac{1}{3} ch^3 x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.37

$$\begin{aligned}
\int ch^4 x\, dx &= \int \left[\frac{1}{2}(ch\ 2x + 1)\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(ch^2 2x + 2\ ch\ 2x + 1\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{2}(ch\ 4x + 1) + 2ch\ 2x + 1\right] dx \\
&= \frac{1}{32} sh\ 4x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} sh\ 2x + \frac{1}{4}x + C \\
&= \frac{1}{32} sh\ 4x + \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} sh\ 2x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.38

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} &= \int \frac{\cosh^2 - \sinh^2 x}{\sinh^2 \cosh^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cosh^2 x \, dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} - \int \frac{\sinh^2 x \, dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} \\ &= \int \frac{dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\cosh^2 x} \\ &= -\coth x - \tanh x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.39

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{th\ x - 1} &= \int \frac{dx}{\frac{sh\ x}{ch\ x} - 1} \\ &= \int \frac{ch\ x\ dx}{sh\ x - ch\ x} \\ &= \int \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{2}} dx \\ &= \int \frac{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}{\frac{-2}{e^x}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(e^{2x} + 1\right) dx \\ &= -\frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.40

$$\begin{aligned}\int \frac{sh\ x\ dx}{\sqrt{ch\ 2x}} &= \int \frac{sh\ x\ dx}{\sqrt{2ch^2 x - 1}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ln \left| \sqrt{2} t + \sqrt{2t^2 - 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ln \left| \sqrt{2}\ ch\ x + \sqrt{2ch^2 x - 1} \right| + C\end{aligned}$$

Sustitución:

$\cos hx = t \longrightarrow \sinh x\ dx = dt$

2.4. Integrales donde se emplea sustituciones trigonométricas e hiperbólicas en su cálculo.

Su forma es:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, x \tag{2.48}$$

Lo primero que hacemos antes de usar estas sustituciones es reducir el polinomio de 2do grado a su forma canónica, reduciéndose las integrales a una de las siguientes formas:

$$\int R(t, \sqrt{b^2 - t^2})dt \tag{2.49}$$

$$\int R(t, \sqrt{b^2 + t^2})dt \tag{2.50}$$

$$\int R(t, \sqrt{t^2 - b^2})dt \tag{2.51}$$

La mismas se resuelven valiéndose, respectivamente de las siguientes sustituciones:

$$t = b \sin z \text{ ó } t = b \tanh z \tag{2.52}$$

$$t = b \tanh z \text{ ó } t = b \sinh z \tag{2.53}$$

$$t = b \sec z \text{ ó } t = b \cosh z \tag{2.54}$$

Ejemplos

Ejemplo 2.4.1

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{x^2+4x+5}} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{(x+2)^2+1}} \\
&= \int \frac{sec^2 z \;\; dz}{tg^2 z \; sec \; z} \\
&= \int \frac{\frac{dz}{cos\; z}}{\frac{sen^2 z}{cos^2 z}} \\
&= \int \frac{cos\; z\; dz}{sen^2 z} \\
&= -\frac{1}{sen\; z} + C \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+4x+\;5}}{x+2} + C
\end{aligned}$$

Sustitución:

$x + 2 = \tan z \text{->} dx = \sec^2 z\; dz$

Identidades que se usan para volver a variables originales:

$\csc z = \frac{1}{sen\; z} = \frac{\sqrt{tg^2 z+1}}{tg\; z} = \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x+2}$

Ejemplo 2.4.2

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx &= \int x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}sh\,z-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}ch\,z.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,ch\,z\,dz \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\int ch^2z\,\left(sh\,z\,dz\right)-\frac{3}{8}\int ch^2z\,dz \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\int ch^2z\,d\left(ch\,z\right)-\frac{3}{8}\int\frac{1}{2}\left(ch\,2z+1\right)dz \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}ch^3z-\frac{3}{64}sh\,2z-\frac{3}{16}z+C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}ch^3z-\frac{3}{64}sh\,2z-\frac{3}{16}z+C \\
&= \frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{3/2}32-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}- \\
&\quad \frac{3}{16}ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C
\end{aligned}$$

Sustitución:

$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,sh\,z\ \longrightarrow\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}\,sh\,z-\frac{1}{2}$

$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\,ch\,z\,dz;\ \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,ch\,z$

Identidades utilizadas para volver a variables originales

$sh\,z=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right);\ \ ch\,z=\sqrt{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$

$z=arc\,sh\,\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right|$

Ejemplo 2.4.3

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\left(x^2-2x+5\right)^{3/2}} &= \int\frac{dx}{\left[(x-1)^2+4\right]^{3/2}} \\
&= \int\frac{2\,ch\,z\,dz}{\left(4ch^2z\right)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{4}\int\frac{dz}{ch^2z} \\
&= \frac{1}{4}\int sec^2z\,dz \\
&= \frac{1}{4}\tanh z+C \\
&= \frac{(x-1)}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+C
\end{aligned}$$

Sustitución:

$x-1=2\,sh\,z\ \longrightarrow\ dx=2ch\,z\,dz;\ (x-1)^2+4=4ch^2z$

Identidades utilizadas para volver a variables originales:

$sh\ z = \frac{x-1}{2};\ \ ch\ z = \sqrt{\left[\frac{x-1}{2}\right]^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x + 5}.$

$th\ z = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}.}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} &= \int \frac{\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2 - 3\left(\frac{1}{t}+1\right) + 2}} \\
&= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+2t+t^2-3t^2-3t+2t^2}} \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \\
&= 2\sqrt{1-t} + C \\
&= 2\sqrt{1 - \frac{1}{x-1}} + C \\
&= 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C
\end{aligned}$$

Sustitución inversa:

$x - 1 = \frac{1}{t}\ \ \longrightarrow\ x = \frac{1}{t} + 1\ \longrightarrow\ dx = \frac{-dt}{t^2}$

Ejemplo 2.4.4

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos z\ dz}{(1+sen^2 z)\cos z} \\
&= \int \frac{dz}{1+sen^2 z} \\
&= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{dt}{1+2t^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} arc\ tg\left(\sqrt{2}t\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} arc\ tg\left(\sqrt{2}\ tg\ z\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} arc\ tg\left(\frac{\sqrt{2}\ x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C
\end{aligned}$$

Sustitución:

$x = sen\ z\ \longrightarrow\ dx = \cos z\ dz;\ \sqrt{1-x^2} = \cos z$

$x = sen\ z\ \longrightarrow\ dx = \cos z\ dz;\ \sqrt{1-x^2} = \cos z$

$tg\ z = t;\ sen\ z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Identidades utilizadas para volver a variables originales

$t = tg\ z;\ tg\ z = \frac{sen\ z}{\cos z} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3 Cálculo integral definida

El detalle de la sección comienza con los conceptos de la integral definida, haciendo énfasis en su importancia con aplicaciones notables de ingeniería que se concentran en interpretar información acumulada. Para sustentar la idea básica que conceptualice a la integral definida se consideró un proceso de acumulación de información con la interpretación de tendencias o comportamientos cambiantes en fenómenos no discretos de forma intuitiva. Por ejemplo, el caso de la definición usual del promedio de una cantidad finita de números con la definición de promedio de una cantidad infinita de números que varía continuamente. Además, se pretende explicar los casos prácticos del área bajo la curva y la relación que existe con el promedio de una función. Así mismo, y con el afán de conocer los fundamentos teóricos y metodológicos de la integración, se aplicarán propiedades del cálculo y algebra superior en varias integrales definidas.

3.1. Introducción a las integrales definidas.

La integral definida y sus aplicaciones elementales en geometría son atribuidos a varios estudios de Isaac Barrow (1630-1677) de procedencia Londinense Inglaterra en la edad del renacimiento. Como profesor matemático de Cambridge en varios años de enseñanza bajo fundamentación griega y árabe de geometría, publicó dos trabajos matemáticos, el primero en geometría y el segundo en óptica, y fue finalmente nombrado el primer profesor Lucasiano en Cambridge que a su vez funge como profesor del mismísimo Isaac Newton. Barrow en su primera publicación contribuyó con aplicaciones de cálculo diferencial en geometría, fundamentalmente para el estudio del análisis matemático, y que convergió al cálculo aproximado de áreas integrales con el cálculo diferencial íntimamente relacionados. Lo mencionado se resume en el siguiente teorema fundamental del cálculo; “La derivación e integración de una función son operaciones inversas y que toda función continua integrable verifica que la derivada de su integral es igual a ella misma”. Entonces este teorema hace posible el trabajo y desarrollo de Barrow y su aprendiz Newton, en el contexto de la demostración del cálculo del área bajo una función íntimamente ligado al cálculo diferencial, lo que dio como resultado la operación inversa a la derivación. Así nace la conocida regla de Barrow o también llamada Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, que adapta funciones continuas y permite el cálculo integral de una función basada en el uso de una integral definida de la propia función al ser integrada.

La integral definida se convierte en un medio de investigación utilizado en varias ciencias que han forjado a la ingeniería como tal, el caso de la física, matemáticas y mecánica, entre otras. Los ejemplos más comunes de ingeniería especifican casos de cálculo de áreas y volúmenes limitados por curvas y/o longitudes de arco, así también, el cálculo de la velocidad, aceleración, trabajo, momentos de inercia, entre otras aplicaciones que pueden ser llevadas a cabo mediante el cálculo integral definido. Se puede decir que la integral definida se generaliza para el proceso efectuado en el cálculo de áreas, sin embargo, el área de un recinto es siempre positivo, pero la integral puede ser positiva, negativa, o nula. Eso implica que las aplicaciones de integrales definidas para cubrir el cálculo de áreas, pero debe considerar el signo de los recintos limitados del eje de referencias, y tomar el valor absoluto de los mismos ya que la suma es el área. Se puede extender la aplicación de la integral definida para cubrir el cálculo de áreas en regiones bajo una curva y comprendida entre dos curvas.

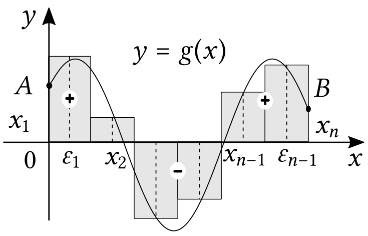


Figura 3.1: Integral definidad de una función $y = g(x)$ desde el punto A hasta el punto B

Para estudiar la integral definida y los procedimientos en la resolución de los problemas y su aplicación en las diferentes disciplinas, se debe recordar ciertas propiedades del álgebra para tratar las funciones continuas. Este capítulo es muy importante dentro del análisis matemático, ya que aprendemos de donde nace una integral definida y su aplicación en encontrar la respuesta a muchos problemas geométricos y físicos, tales como el cálculo de áreas donde no podemos aplicar fórmulas básicas, longitudes de curva, volúmenes de revolución, áreas de revolución, centros de masas, momentos de inercia, trabajo, fuerza hidrostática etc.

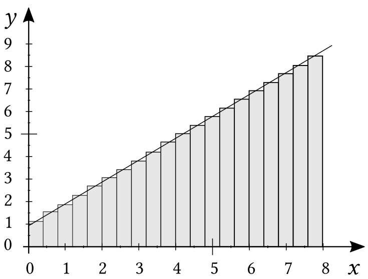


Figura 3.2: Integral definida de una recta desde $x = 0$ hasta $x = 8$

Para tomar este capítulo es importante que el estudiante domine los conocimientos de derivadas, antiderivadas, graficación de funciones en coordenadas cartesianas, polares, funciones dadas en forma paramétrica y otros procedimientos algebraicos básicos.

3.2. La integral definida como límite de una suma

3.2.1. Suma integral o sumatoria de Riemann

Sea $f(x)$ una función definida en el segmento $a \leq x \leq b$ y $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ a división arbitraria de este segmento en n partes. Formando la suma algebraica de las áreas de los correspondientes rectángulos de la figura 3.1 . tenemos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta x_i \tag{3.1}$$

Que recibe el nombre de suma integral o sumatoria de Riemann, donde

$x_i \leq \varepsilon_i \leq x_{i+1}, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad i = 1, 2 \ldots n$

3.2.2. Integral definida o integral de Riemann

Al obtener el límite a la Sn (Sumatoria de Riemann), cuando el número de divisiones n tiende al infinito y la mayor de las diferencias Δ_{xi} tiende a cero, esta sumatoria pasa a ser la integral definida de la función $f(x)$ entre los límites $x = a$ y $x = b$, es decir

$$\lim_{ma^{x} x\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta_{xi} = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3.2)$$

Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ también será integrable en $[a, b]$, es decir, el límite (2) existe, independientemente del método que se emplee para dividir el segmento de integración $[a, b]$ en segmentos parciales y de la elección de los puntos $\varepsilon_i$dentro de dichos segmentos.

Como podemos observar en la figura 1. la integral definida representa geométricamente el área limitada por la curva $f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, s decir el área del trapecio mixtilíneo aABb, siendo ésta la interpretación geométrica, vale recalcar también que las áreas que están sobre el eje x se toma positivas y las que están bajo se toma con signo negativo.

A estas integrales se lo llama también integrales de Riemann observando su definición, podemos evaluar mediante esta algunas de ellas que no sean muy complejas, ya que sus cálculos resultarían muy complicados.

Utilizando la definición, hallar los valores de las siguientes integrales definidas:

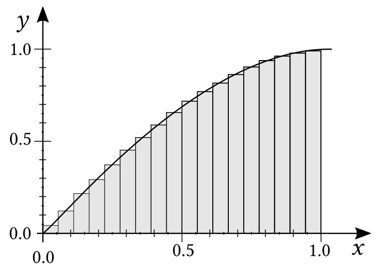


Figura 3.3: Integral definida de una función $y = a\sqrt{x}$

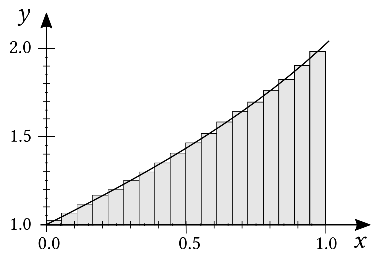


Figura 3.4: Integral definida de una función $y = a\,x^2$

Ejemplo 3.2.1 $\int_0^8 (x+1)dx$

Primero formamos las sumas de Riemann (suma integral) para la función $f(x) = x + 1$ en el segmento de $[0, 8]$ (figura 3.2), dividiendo este intervalo en n partes iguales y eligiendo los puntos de forma que coincidan con los extremos izquierdos de los segmentos parciales $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos:

$$\Delta_{xi} = \frac{b-a}{n} = \frac{8-0}{n} = \frac{8}{n}$$

$$\varepsilon_i = x_i = x_0 + i\Delta_{xi} = 0 + \frac{8i}{n} = \frac{8i}{n}$$

$$f(\varepsilon_i) = \frac{8i}{n} + 1 = \frac{8i+n}{n}$$

Formamos la sumatoria de Riemann (S_{n})

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i+n}{n}\right)\frac{8}{n} = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}[8i+n] = \frac{8}{n^2}\left(8\sum_{i=1}^{n} i + n\sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{8}{n^2}\left[8(1+2+\ldots+n) + n\sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{8}{n^2}\left(\frac{8n(n+1)}{2} + n^2\right) = \frac{40n^2+4n}{n^2}$$

Calculamos el límite de esta suma cuando $n \longrightarrow \infty$

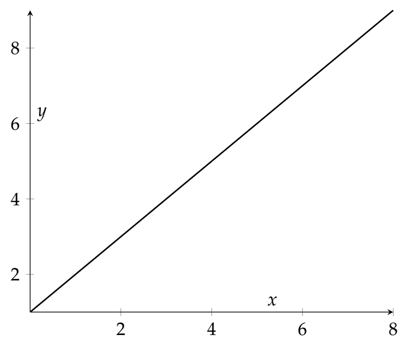


Figura 3.5: función $y = x + 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{40n^2+4n}{n^2} = 40$ solución de la integral

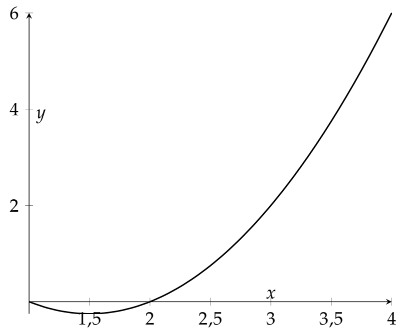


Figura 3.6: función $y = x^2 - 3x + 2$

Ejemplo 3.2.2 $\int_1^4 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx$

Figura **??** y 3.4. Primero formamos las sumas de Riemann (suma integral) para la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el segmento de [1, 4], dividiendo este intervalo en n partes iguales y eligiendo los puntos ε_i e forma que coincidan con los extremos izquierdos de los segmentos parciales $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos:

$$\Delta_{xi} = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$\varepsilon_i = x_i = x_0 + i\Delta_{xi} = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_i) &= \left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2 - 3\left(1 + \frac{3i}{n}\right) + 2 \\ &= \frac{n^2 + 6in + 9i^2}{n^2} - \frac{3n + 9i}{n} + 2 \\ &= \frac{n^2 + 6in + 9i^2 - 3n^2 - 9in + 2n^2}{n^2} \\ &= \frac{9i^2 - 3in}{n^2} = \frac{3\left(3i^2 - in\right)}{n^2} \end{aligned}$$

Formamos la sumatoria de Riemann (S_n)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3\left(3i^2 - in\right)}{n^2}\right) \frac{3}{n} \\ &= \frac{9}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left[3i^2 - in\right] = \frac{9}{n^3}\left(3\sum_{i=1}^{n} i^2 - n\sum_{i=1}^{n} i\right) \\ &= \frac{27}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)\right] - \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{27}{n^3}\left[\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right] - \frac{9}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\ &= \frac{27}{n^3}\left(\frac{n\left(2n^2 + 3n + 1\right)}{6}\right) - \frac{9}{n^2}\left(\frac{n^2 + n}{2}\right) \\ &= \frac{54n^2 + 71n + 27 - 27n^2 - 27n}{6n^2} = \frac{27n^2 + 44n + 27}{6n^2} \end{aligned}$$

solución de la integral

Calculamos el límite de esta suma cuando $n \longrightarrow \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{27n^2+44n+27}{6n^2} = \frac{27}{6}$,

Ejemplo 3.2.3 $\int_0^1 a^x dx$

Primero formamos la suma integral para la función $f(x) = a^x$, n el segmento de (figura 3.3), dividiendo este intervalo en n partes iguales y eligiendo los puntos de forma que coincidan con los extremos izquierdos de los segmentos parciales $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos:

Solución:

Determinamos los siguientes elementos.

$$\Delta_{xi} = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\varepsilon_i = x_i = x_0 + i\Delta_{xi} = 0 + \frac{i}{n} = \frac{i}{n}$$

$$f(\varepsilon_i) = a^{i/n}$$

Formamos la sumatoria de Riemann (S_n)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} a^{i/n}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^{i/n} \\ &= \frac{1}{n}\left(a^{1/n} + a^{2/n} + a^{3/n} + \ldots + a^{1}\right) \\ &= \frac{1}{n}(\text{ progresión geométrica }), \text{con } r = a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,\frac{a^{\frac{1}{n}}\left[\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} - 1\right]}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \\ &= \frac{1}{n}\,\frac{(a-1)}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \\ &= (a-1)\frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \end{aligned}$$

Calculamos el límite de esta suma cuando $n \longrightarrow \infty$

$\lim_{n\to\infty}(a-1)\frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}}-1} = (a-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}}-1} = \frac{a-1}{\ln|a|}$

Por lo que la respuesta del ejemplo es:

$\int_0^1 a^x dx = \frac{a-1}{\ln|a|}$

Ejemplo 3.2.4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$

Primero formamos la suma integral para la función $f(x) = \sin x$ en el segmento de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (figura **??**), dividiendo este intervalo en n partes iguales y eligiendo los puntos ε_i de forma que coincidan con los extremos izquierdos de los segmentos parciales x_i, x_{i+1}

Solución:

Determinamos los siguientes elementos.

$$\Delta_{xi} = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

$$\varepsilon_i = x_i = x_0 + i\Delta_{xi} = 0 + \frac{i\pi}{2n} = \frac{\pi i}{2n}$$

$$f(\varepsilon_i) = \sin\left(\tfrac{\pi i}{2n}\right)$$

Formamos la sumatoria de Riemann (S_n)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right) \\ &= \frac{\pi}{2n}\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{n}{2}\frac{\pi}{2n}\cdot\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}\right)} = \frac{\pi}{2n}\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{4}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \\ &= \frac{\pi}{2n}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4n}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \end{aligned}$$

Calculamos el límite de esta suma cuando $n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} = 1$

Por lo que la respuesta del ejemplo es:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$

Como hemos observado la finalidad en este tema, es encontrar el valor de la integral definida, pero vemos que la utilización de la definición resulta a veces en cálculos muy complicados, por lo que es necesario tomar otros métodos para su evaluación, uno de ellos es el que se utiliza las integrales indefinidas para su cálculo, procedimiento conocido como el primer teorema fundamental del cálculo o fórmula de Newton Leibniz, donde es imprescindible que la función integrable tenga una antiderivada o que se pueda encontrar el conjunto de funciones elementales, pero no toda las veces es posible, por lo que se hace necesario utilizar métodos aproximados o numéricos tales como la fórmula de los trapecios y la de Simpson como las más conocidas, las mismas que serán citadas más adelante.

3.2.3. Integrales definidas por medio de las indefinidas.

Los casos más relevantes de esta integral son definidas con el límite superior variable, en donde manifiesta que si la función $f(x)$ es continua en el intervalo$[a,\ b]$ la función $F(x) = \int_a^x f(x)\,dt$ es una función primitiva de $f(x)$ es decir: $F'(x) = f(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Fórmula de Newton – Leibniz

Si $F'(x) = f(x)$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(x) \tag{3.3}$$

Donde la función primitiva $F(x)$ se calcula hallando la integral indefinida.

3.2.4. Propiedades fundamentales de la integral definida.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \tag{3.4}$$

La integral de la suma algebraica de funciones es igual al integral de cada sumando

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x) \pm \ldots)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \pm \ldots \tag{3.5}$$

Si en el intervalo $[a, b]$, donde $a < b$, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen la condición $f(x) \leq g(x)$ entonces (figura 3.7):

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x) \tag{3.6}$$

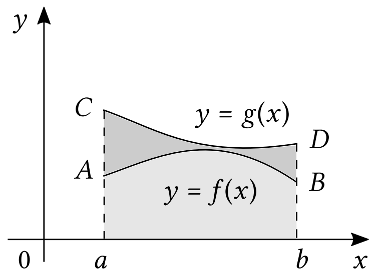


Figura 3.7: Condición $f(x) \leq g(x)$

Como podemos observar en la gráfica se ilustra esta propiedad, ya que el área del trapecio curvilíneo aCDb, es mayor que el área del trapecio curvilíneo aABb.

Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y $a \leq b$, tenemos (figura 3.8):

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a) \tag{3.7}$$

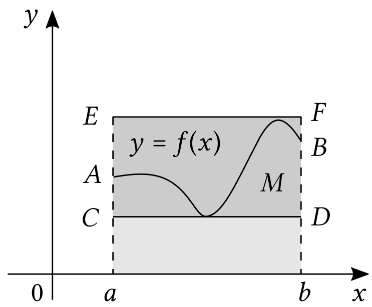


Figura 3.8: Área del trapecio curvilíneo aCDb, es mayor que el área del trapecio curvilíneo aABb

Esta propiedad tiene su explicación de la siguiente manera: El área del trapecio curvilíneo aABb, está comprendido entre las áreas de los rectángulos aCDb y aEFb.

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, existe en este intervalo un punto ε, tal que se verifique la igualdad

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon) \tag{3.8}$$

Si c se encuentra dentro del intervalo $[a, b]$ se verifica la siguiente identidad (figura **??**)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x) \tag{3.9}$$

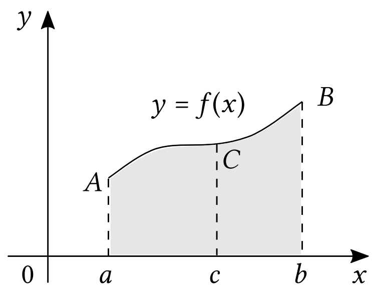


Figura 3.9: Punto C dentro del intervalo a, b

Sea una función integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces la función $|f|$ también es integrable en el mismo y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{3.10}$$

En los ejemplos del 1 al 4, hacemos la comprobación de los valores que obtuvimos aplicando la definición.

Ejemplo 3.2.5

$$\begin{aligned}\int_0^8 (x+1)dx &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^8 \\ &= \left(\frac{8^2}{2}+8\right)-0 \\ &= 40\end{aligned}$$

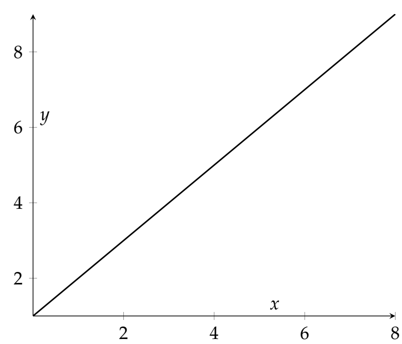


Figura 3.10: función $y = x + 1$

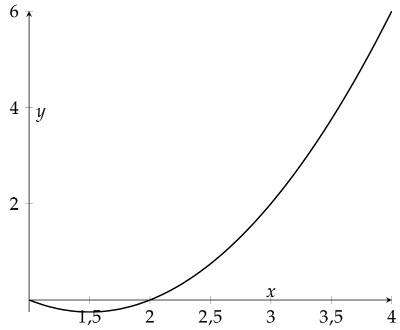


Figura 3.11: función $y = x^2 - 3x + 2$

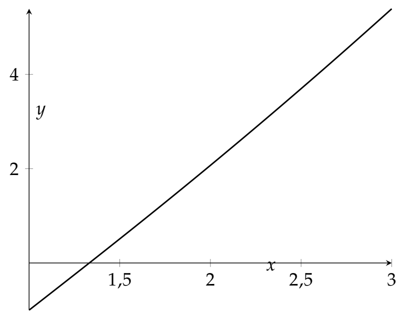


Figura 3.12: función $y = \sqrt{x^3} + 3\sqrt{x} - 5$

Ejemplo 3.2.6

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx &= \int_1^4 x^2 dx - 3\int_1^4 x dx + 2\int_1^4 dx \\ &= \frac{1}{3}\left(x^3\right)\Big|_1^4 - \frac{3}{2}\left(x^2\right)\Big|_1^4 + 2x|_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{3} - \frac{48}{2} + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) = \frac{27}{6}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.7

$$\int_0^1 a^x dx = \frac{1}{\ln|a|} a^x\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln|a|}(a-1) = \frac{a-1}{\ln|a|}$$

Ejemplo 3.2.8

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi}\frac{5}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1$$

Ejemplo 3.2.9

$$\begin{aligned}\int_1^3 \left(\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x} - 5\right) dx &= \int_1^3 x^{3/2} dx + 3\int_1^3 x^{1/2} dx - 5\int_1^3 dx \\ &= \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_1^3 + 3 \cdot \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^3 - 5x|_1^3 \\ &= \left(\frac{2}{5}9\sqrt{3} + 2{,}3\sqrt{3} - 45\right) - \left(\frac{2}{5} + 2 - 5\right) \\ &= \frac{1}{5}(48\sqrt{3} + 13) - 45 = 4{,}2277\end{aligned}$$

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$F(x) = \int_1^x \ln t dt; (x > 0) \quad F'(x) = \ln x{,}1 - \ln 1{,}0 = \ln x$

$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt; \quad F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

$J = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right) dt; \quad J' = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$

$F(x) = \int_1^x \ln t dt; (x > 0) \quad F'(x) = \ln x{,}1 - \ln 1{,}0 = \ln x$

$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt; \quad F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$

$J = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right) dt; \quad J' = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}.$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = (\arctan(x+2))|_0^1 = \arctan(3) - \arctan(0) =$ 1,25rad.

$\int_0^1 \frac{Y^3}{Y^8+1} dy = \int_0^1 \frac{y^3 dy}{\left(y^4\right)^2+1} = \frac{1}{4}\arctan\left(y^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}[\arctan(1) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{8}.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta(\sin\theta d\theta) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\theta\right) d(\cos\theta) =$

$- \left[\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = - \left[\left(\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2}\right) - \left(\cos 0 - \frac{1}{3}\cos 0\right)\right] = \frac{2}{3}$

$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-x+1}dx = \int_1^{3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{} dx = \left(\frac{1}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(x-1)^{3/2}\right)\Big|_1^3$

$= \left(\frac{1}{3}(3+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(3-1)^{3/2}\right) - \left(\frac{1}{3}(1+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(1-1)^{3/2}\right) = \frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \arctan\left(e^x\right)\big|_0^1 = \arctan\left(e^1\right) - \arctan\left(e^0\right) = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}$

$\int_0^\pi \sinh^2 t\,dt = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t + t\right]\Big|_0^\pi = \frac{1}{4}\sinh(2\pi) + \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{8} + \frac{\pi}{2}$

$\int_{-4}^6 \left|x^2 - x - 12\right| dx$ para el cálculo de integrales con valor absoluto se debe determinar primero el signo de la expresión expresión dentro de las barras así:

$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$

	$-\infty$	-3	4	$-\infty$
x-4	-	-	+	
x+3	-	+	+	
R	+	-	+	

$\therefore [-4,6] = [-4,-3] \cup [-3,4] \cup [4,6]$

$\int_{-4}^6 \left|x^2 - x - 12\right| dx = \int_{-4}^{-3}\left(x^2 - x - 12\right) dx - \int_{-3}^{4}\left(x^2 - x - 12\right) dx + \int_4^6 \left(x^2 - x - 12\right) dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x\right]\Big|_{-4}^{-3} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x\right]\big|\big|_{-3}^{4} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x\right]\Big|_4^6 = \left(-9 - \frac{9}{2} + 36\right) - \left(-\frac{64}{3} - 8 + 48\right) - \left(\frac{64}{3} - 8 - 48\right) + \left(-9 - \frac{9}{2} + 36\right) + + \left(\frac{216}{3} - 18 - 72\right) - \left(\frac{64}{3} - 8 - 48\right) = \frac{227}{3}$

3.3. Integrales impropias

A esta clase pertenecen las integrales que no están acotadas, o que su intervalo de integración no está definido y se les puede clasificar en dos grupos, las de primera especie y segunda especie.

3.3.1. Integrales impropias de primera especie.

Se les llama integrales impropias de primera especie a las integrales con funciones continuas, que tienen como intervalos de integración: $]-\infty,\ b]$, $[a,\ +\infty[$ y $]-\infty,\ +\infty[$

Primer caso: $]-\infty,\ b]$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx \tag{3.11}$$

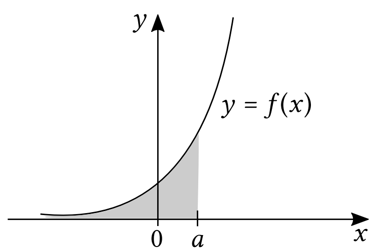


Figura 3.13: Integrales impropias de primera especie(primer caso)

Si este límite hacia la izquierda existe, se dice que la integral impropia converge hacia ese valor, en caso contrario éste diverge.

Segundo caso: $[a,\ +\infty[$

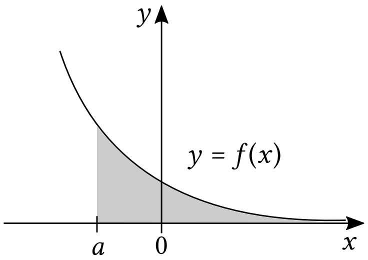


Figura 3.14: Integrales impropias de primera especie (segundo caso).

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx \tag{3.12}$$

De la misma manera si este límite hacia la derecha existe, ésta integral converge en caso contrario diverge.

Tercer caso: $]-\infty,\ +\infty[$

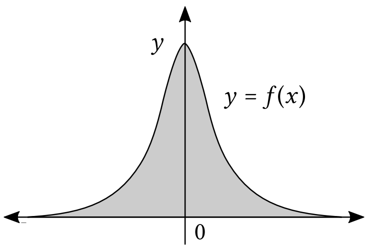


Figura 3.15: Integrales impropias de primera especie (tercer caso)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^c f(x)dx + \lim_{N\to+\infty} \int_c^N f(x)\,dx. \tag{3.13}$$

En este caso tiene que existir los límites a la izquierda y a la derecha para que la integral converja.

3.3.2. Integrales impropias de segunda especie

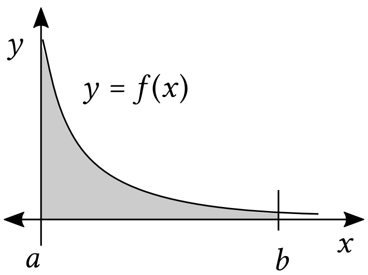


Figura 3.16: ntegrales impropias de segunda especie (discontinuidad)

Se llaman integrales impropias de segunda especie, a la integral definida que no está acotada en el intervalo de integración $[a,\ b]$ éste tipo de integrales pueden presentar de las siguientes formas:

Cuando la función tiene una discontinuidad en el límite inferior "a" (figura 3.16).

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx. \tag{3.14}$$

Si el límite existe este integral converge, en caso contrario diverge.

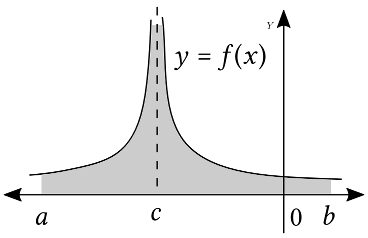


Figura 3.17: Integrales impropias de segunda especie (dentro de un intervalo dado)

Cuando la discontinuidad es "c", que está dentro del intervalo dado es decir $c \in [a, b]$ (figura 3.17)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\beta\to0} \int_{c+\beta}^b f(x)dx \tag{3.15}$$

Esta integral converge sólo si existen los dos límites.

Cuando la función tiene una discontinuidad en el límite superior "b" (figura 3.18).

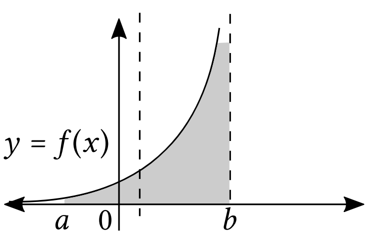


Figura 3.18: Integrales impropias de segunda especie (discontinuidad)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx \tag{3.16}$$

De la misma manera converge sólo si el límite existe. Ejemplos

Calcular las siguientes integrales impropias o determinar su divergencia:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}+\frac{1}{1}\right]$$
$$= -\frac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Al existir el límite, ésta integral es convergente y converge a 1. (figura 3.20)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \lim_{M\to-\infty} [\arctan(x)]\Big|_M^0 + \lim_{N\to+\infty} [\arctan(x)]\Big|_0^N$$
$$= \lim_{M\to-\infty} [\arctan(0) - \arctan(M)] +$$
$$\lim_{N\to+\infty} [\arctan(N) - \arctan(0)]$$
$$= -\arctan(-\infty) + \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Esta integral converge a π. (figura 3.21)

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{M\to-\infty} \int_M^1 \frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{M\to-\infty} \int_M^1 \frac{dx}{(x+2)^2+5}$$
$$= \lim_{M\to-\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)\right]\Bigg|_M^1$$
$$= \lim_{M\to-\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{M+2}{\sqrt{5}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(0{,}3\pi - \arctan(-\infty))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(0{,}3\pi + 0{,}5\pi) = 0{,}35\pi$$

Esta integral converge a $0{,}35\pi$. (figura 3.22)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to0} \int_{0+\delta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to0} 2\sqrt{x}\Big|_{0+\delta}^1 = 2\lim_{\delta\to0}(\sqrt{1} - \sqrt{0+\delta})$$
$$= 2$$

Esta integral converge a 2 (figura 3.23)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \lim_{\epsilon\to0} (\arcsin(x)) \Big|_{0}^{1-\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon\to0} [\arcsin(1-\epsilon) - \arcsin(0)] = \frac{\pi}{2}$$

Esta integral converge a $\frac{\pi}{2}$ (figura 3.24)

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\delta\to0} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon\to0} \int_{1+\epsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$= \lim_{\delta\to0} \left[\frac{-1}{x-1}\right]\Bigg|_{0}^{1-\delta} + \lim_{\epsilon\to0} \left[\frac{-1}{x-1}\right]\Bigg|_{1+\epsilon}^3$$
$$= \lim_{\delta\to0} \left[\frac{-1}{1-\delta-1} + \frac{1}{0-1}\right] + \lim_{\epsilon\to0} \left[\frac{-1}{3-1} + \frac{1}{1+\epsilon-1}\right]$$

No existen, esta integral es divergente

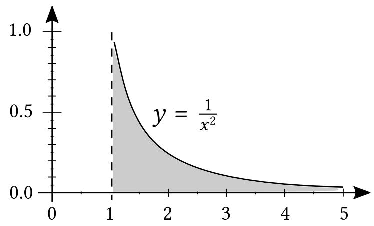


Figura 3.19: función $\frac{1}{x^2}$

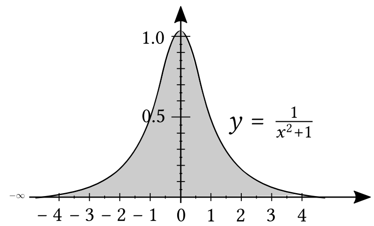


Figura 3.20: función $\frac{1}{x^2+1}$

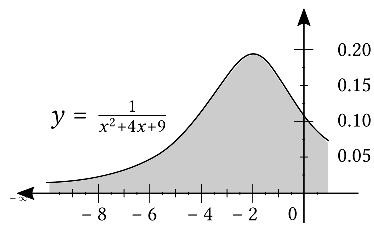


Figura 3.21: función $\frac{1}{x^2+4x+9}$

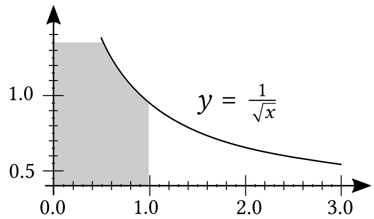


Figura 3.22: función $\frac{1}{\sqrt{x}}$

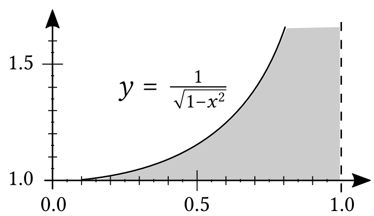


Figura 3.23: función $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

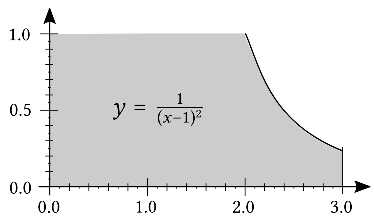


Figura 3.24: función $\frac{1}{(1-x)^2}$

3.4. Cambio de variables en la integral definida

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $x = g(t)$ es una función continua conjuntamente con su derivada $g'(t)$, en el intervalo $[t_1, t_2]$ donde $a = \varphi(t_1)$ y $b = \varphi(t_2)$, y la función $f(g(t))$ es definida y continua en el segmento $t_1 \leq t \leq t_2$, tenemos:

$$\int_a^b f(x) = \int_{t_1}^{t_2} f[g(t)]g'(t)dt \tag{3.17}$$

Lo que quiere decir esta definición es que, el momento que se cambie de variable a la función integrable, también tenemos que cambiar los límites de integración. Ejemplos:

Ejemplo 3.4.1 Encontrar el valor de la siguiente integrales valiéndose de sustituciones adecuadas:

$$\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+2}dx$$

$$= \int_1^3 \frac{\left(t^3\right)^{2/3} 3t^2dt}{\left(t^3\right)^{2/3}+2} = 3\int_1^3 \frac{t^4dt}{t^2+2} = 3\int_1^3 \left[t^2 - 2 + \frac{4}{t^2+2}\right]dt$$

$$= 3\left[\frac{t^3}{3} - 2t + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]\Big|_1^3$$

$$= 3\left[\left(\frac{27}{3} - 6 + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

$$= 3\left[(3+\pi) - \left(-\frac{5}{3} + 0{,}55\pi\right)\right] = 14 - 1{,}35\pi$$

Sustitución:

$x - 2 = t^3 \longrightarrow dx = 3t^2dt$

Cambio de límites: Si $x = 3$; $t = 1$ y si $x = 29$ $\longrightarrow$ $t = 3$

Ejemplo 3.4.2 Encontrar el valor de la siguiente integrale valiéndose de sustituciones adecuadas:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}} = 2\lim_{M\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2-2t^2}{1+t^2}}$$

$$= 2\lim_{M\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+5} = 2\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\Bigg|_0^M$$

$$= 2\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{M}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(0)\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

Sustitución:$\tan\frac{x}{2} = t \longrightarrow x = 2\arctan(t) \longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Cambio de límites: Si $x = 0$; $t = 0$ y si $x = \pi$ $\longrightarrow$ $t = \infty$

Ejemplo 3.4.3 Encontrar el valor de la siguiente integrale valiéndose de sustituciones adecuadas:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t.\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t\,dt}{\sin^2 t}\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\csc^2 t-1\right)dt\\ &= (-ctgt-t)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \left[\left(-ctg\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-ctg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= -\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4} = 1-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Sustitución:

$x=\sin t \longrightarrow t=\arcsin(x) \longrightarrow dx=\cos t dt : \sqrt{1-x^2}=\cos t$

Cambio de límites: Si $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $t=\frac{\pi}{4}$ y si $x=1 \quad \longrightarrow \quad t=\frac{\pi}{2}$

Ejemplo 3.4.4 Encontrar el valor de la siguiente integrale valiéndose de sustituciones adecuadas:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx &= \int_0^2\frac{2tdt}{t^2+1+3} = \int_0^2\frac{2tdt}{t^2+4}\\ &= \ln\left|t^2+4\right|\Big|_1^2 = [\ln|8|-\ln|5|] = \ln\frac{8}{5}\end{aligned}$$

Sustitución:

$e^x-1=t^2 \longrightarrow e^x=t^2+1 \longrightarrow e^x dx=2tdt$

Cambio de límites

Si $x=0$; $\quad t=0 \quad y \quad$ si $x=\ln(5) \quad \longrightarrow \quad t=2$

Ejemplo 3.4.5 Encontrar el valor de la siguiente integrale valiéndose de sustituciones adecuadas:

$$\begin{aligned}\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} &= -\int_1^{\frac{1}{3}}\frac{dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} = \int_{\frac{1}{3}}^1\frac{dt}{\sqrt{1+5t+t^2}}\\ &= \int_1^1\frac{dt}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}}\\ &= \ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}\right|\Bigg|_{1/3}^1\\ &= \ln\left|\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right|-\ln\left|\frac{27}{6}\right| = \ln\left|\frac{7+2\sqrt{7}}{9}\right|\end{aligned}$$

Sustitución:

$x=\frac{1}{t} \longrightarrow \quad dx=\frac{-dt}{t^2} \quad y \quad t=\frac{1}{x}$

Cambio de límites

Si $x=1$, $\quad t=1 \quad y \quad$ si $\quad x=3 \longrightarrow \quad t=\frac{1}{3}$

4 Cálculo aproximado de integral definida

4.1. Cálculo aproximado de la integral definida

En este numeral vamos a citar las dos fórmulas más utilizadas para aproximar las integrales definidas, cuando no podemos encontrar la primitiva de la función integrable.

4.1.1. Fórmula de los trapecios

Para encontrar la fórmula de los trapecios procedemos de la siguiente manera

Dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en n partes iguales, y formamos trapecios rectangulares con una altura uniforme igual a Δ_x y bases $y_0 \cap y_1; y_1 \cap y_2; \ldots; y_{n-1} \cap y_n$ respectivamente.

Encontramos el área de cada uno de estos trapecios rectangulares formados así:

$$A_1 = \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right)\Delta x; A_2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\Delta x, \ldots, A_n = \left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)\Delta x \tag{4.1}$$

Formamos la sumatoria de las respectivas áreas.

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\Delta x + \ldots + \left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)\Delta x \\ &= \Delta_x \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}\right] \\ &= \Delta_x \left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right] \end{aligned}$$

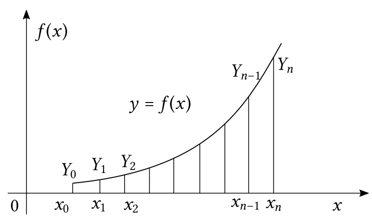


Figura 4.1: Integral en n partes iguales

Aproximando a la integral y con $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$ obtenemos la fórmula de los trapecios:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right] \tag{4.2}$$

4.1.2. Fórmula de las parábolas o de Simpson

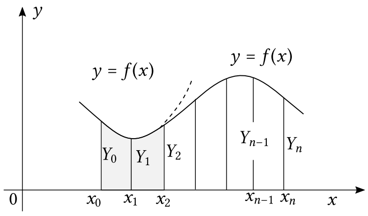


Figura 4.2: Trapecios curvilíneos

Para encontrar la fórmula de Simpson procedemos de la siguiente manera

Encontramos el área de cada uno de los trapecios curvilíneos limitados por las parábolas de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, cuya fórmula es:

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$
$$A_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$
$$A_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$
$$\vdots$$
$$A_n = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Formamos la sumatoria de las respectivas áreas

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \\ &= \frac{h}{3}[y_0 + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \end{aligned}$$

Aproximando a la integral y con $h = \frac{b-a}{n}$ obtenemos la fórmula de las parábolas, aquí el números de divisiones (n) tiene que ser siempre par:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \tag{4.3}$$

Tabla 4.1: Integral definida $\frac{1}{1+x^2}$.

x	y
$x_0 = 0$	$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$
$x_1 = \frac{1}{8}$	$y_1 = \frac{1}{1+(1/8)^2} = 0{,}985$
$x_2 = \frac{1}{4}$	$y_2 = \frac{1}{1+(1/4)^2} = 0{,}941$
$x_3 = \frac{3}{8}$	$y_3 = \frac{1}{1+(3/8)^2} = 0{,}878$
$x_4 = \frac{1}{2}$	$y_4 = \frac{1}{1+(1/2)^2} = 0{,}8$
$x_5 = \frac{5}{8}$	$y_5 = \frac{1}{1+(5/8)^2} = 0{,}719$
$x_6 = \frac{3}{4}$	$y_6 = \frac{1}{1+(3/4)^2} = 0{,}64$
$x_7 = \frac{7}{8}$	$y_7 = \frac{1}{1+(7/8)^2} = 0{,}566$
$x_8 = 1$	$y_8 = \frac{1}{1+(1)^2} = 0{,}5$

Ejemplo 4.1.1 Encontrar el valor aproximado para $n = 8$ y el exacto cuando se puede encontrar éste, de los siguientes ejercicios de integrales definidas.

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} = 0,7853$. que es el valor exacto.

Para encontrar los valores aproximados cuando n = 8 tenemos:

Determinamos el intervalo de cálculo.

Para mayor facilidad de encontrar los valores de $y_0, y_1, \ldots, y_8$ realizamos una tabla de la siguiente manera. (Tabla 4.1)

$h = \Delta_x = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$

Valor por la regla de los Trapecios:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$
$$\approx \frac{1}{16}[1 + 2(0{,}985) + 2(0{,}941) + 2(0{,}878) + 2(0{,}8) + 2(0{,}719) + 2(0{,}64)$$
$$\approx 0,757375$$

Resultado por la fórmula de Simpson:

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$\approx \frac{1}{24}[1 + 4(0{,}985) + 2(0{,}941) + 4(0{,}878) + 2(0{,}8) + 4(0{,}719) + 2(0{,}64)$

$+4(0{,}566) + 0{,}5]$

$\approx 0,76725$

Ejemplo 4.1.2 Encontrar el valor aproximado de la siguiente integral

$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$

$h = \Delta_x = \frac{\pi - 0}{8} = \frac{\pi}{8}$

Valor por la regla de los Trapecios:

$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}$

$$\approx \frac{1}{16}[2(1{,}414) + 4(1{,}361) + 4(1{,}225) + 4(1{,}071) + 2(1)]$$

$$\approx \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}$$

$\approx 1,216$

Resultado por la fórmula de Simpson:

$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x} =$

$$\approx \frac{1}{24}[2(1{,}411) + 8(1{,}361) + 4(1{,}225) + 8(1{,}071) + 2(1)]$$

$\approx 1,216$

Tabla 4.3: Integral definida $\sqrt{1+\cos^2 x}$.

x	y
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{,}414$
$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$y_1 = 1{,}414$
$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$y_2 = 1{,}225$
$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$y_3 = 1{,}071$
$x_4 = \frac{\pi}{2}$	$y_4 = 1$
$x_5 = \frac{5\pi}{8}$	$y_5 = 1{,}071$
$x_6 = \frac{3\pi}{4}$	$y_6 = 1{,}225$
$x_7 = \frac{7\pi}{8}$	$y_7 = 1{,}361$

4.2. Cálculo de áreas de las figuras planas

Esta es una de las primeras aplicaciones de la integral definida, podríamos decir que es la aplicación directa de la interpretación geométrica. Vamos a considerar el cálculo de áreas en coordenadas cartesiana (x, y), de ecuaciones dadas en forma paramétrica y de figuras dadas en coordenadas polares.

Si una gráfica continua está dada en coordenadas cartesianas como función de "x" es decir por la ecuación $y = f(x)[f(x) \geq 0]$, el área es la del trapecio mixtilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de las "x" y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y viene dado por la expresión:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \tag{4.4}$$

Demostración:

Consideremos una partición del segmento cerrado $[a, b]$, $P = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ donde el i-ésimo sub- intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tiene longitud $\Delta_i x = x_{i+1} - x_i$ y tomamos $\varepsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$ para i =1, 2, 3, ..., n luego trazamos los rectángulos que tienen una altura $f(\varepsilon_i)$ y ancho $\Delta_i x$ unidades.

4.2.1. El área en coordenadas cartesianas:

Si encontramos el área del i-ésimo rectángulo tenemos: $\Delta_i A = f(\varepsilon_i)\Delta_i x$, pero como son n rectángulos, entonces el área de los n rectángulos es la sumatoria de todas estas áreas así [8]:

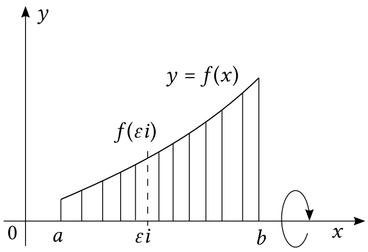


Figura 4.3: Región bajo una función

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i A = \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i)\,\Delta_i x \tag{4.5}$$

Esta expresión no es más que una sumatoria de Riemann, la misma que al llevarle al límite cuando $|\Delta_i x| \to 0$ o cuando cuando el número n de divisiones tiende al infinito, obtenemos la fórmula para encontrar el área en coordenadas rectangulares.

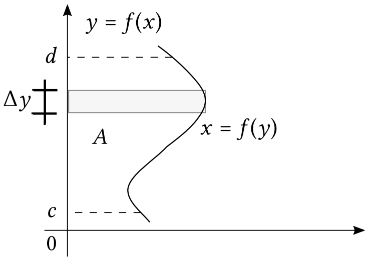


Figura 4.4: Región de una función bajo el eje y

$$A = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i)\,\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx \to A = \int_a^b f(x)dx \tag{4.6}$$

Como es necesario siempre realizar la gráfica, si observamos que una parte del área esta debajo del eje "x" es decir es negativa, para hallar el área de esta región será inevitable poner a la fórmula con valor absoluto así:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx \tag{4.7}$$

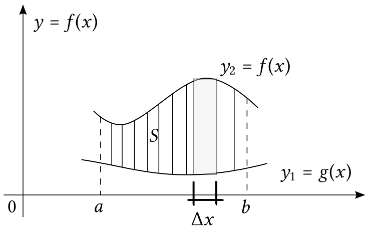


Figura 4.5: Región entre dos funciones bajo el eje x

La misma tenemos que calcularla como la suma algebraica del área positiva (figura 4.3) menos el área negativa, si c es el punto donde nace el área negativa y se cumple que $a \leq x \leq b$ tenemos :

$$A = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \tag{4.8}$$

Cuando tenemos la región (figura 4.4) que está limitada por , las rectas horizontales $y = c$, $y = d$ y el eje "y", las franjas diferenciales les hacemos horizontales y la expresión que nos permita calcular está área es:

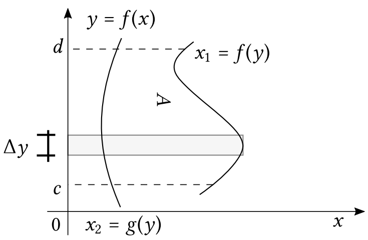


Figura 4.6: Región entre dos funciones bajo el eje y

$$A = \int_c^d f(y)dy \tag{4.9}$$

Si la región está entre dos curvas (figura 4.5) $y_1 = g() \cap y_2 = f(c)$ con el mismo segmento $[a, b]$ siendo $f(x) > g(x)$ en todo el intervalo, la fórmula para calcular esta área es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \tag{4.10}$$

Para la región (Figura 4.6) que está entre las curvas $x_1 = f(y) \cap x_2 = g(y)$ en el segmento $[c, d]$ siendo en todo el intervalo, la fórmula para calcular el área es:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy \tag{4.11}$$

4.2.2. El área en coordenadas polares

Sea $r = f(\theta)$ la ecuación de la curva en coordenadas polares, donde $f(\theta)$ es una función continua en el intervalo $[\alpha, \beta]$

El área OAB de la (figura 4.7) que está limitada por la curva $r = f(\theta)$ y los rayos que forman los ángulos α y β con el eje polar se determina por:

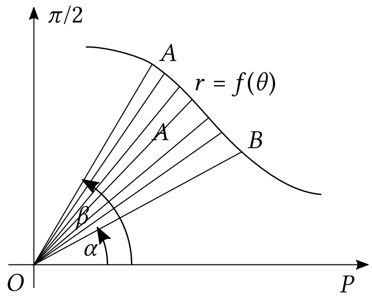


Figura 4.7: Área en cordenadas polares

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 d\theta \tag{4.12}$$

Demostración:

Para determinar el área del sector circular OABO, dividimos en n partes arbitrarias el intervalo $[\alpha, \beta]$ de tal manera que $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots . < \theta_i < \theta_{i+1} \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$ designando como $\Delta\theta_i$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ los ángulos formados por los rayos vectores trazados en la figura 4.8, quedándonos un sector circular de radio vector r_i y ángulo central $\Delta\theta_i$ cuya área es igual $\Delta A = \frac{1}{2}\overline{r_1}^2\Delta\theta_i$ como son n sectores circulares, formamos la sumatoria de Riemann, la misma que al llevarle al límite cuando $|\Delta\theta_i| \to 0$, tenemos la fórmula con integrales para hallar el área de una región dada en coordenadas polares.

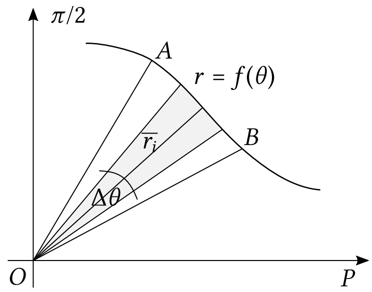


Figura 4.8: Área en cordenadas polares des A hasta B

$$A = \lim_{|\Delta\theta_i| \to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta \to A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2 d\theta \tag{4.13}$$

De la misma manera que en coordenadas rectangulares, la región R (figura 4.9) puede estar limitada por dos curvas $r_1 = f(\theta)$ y $r_2 = g(\theta)$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$ para $f(\theta) > g(\theta)$ en todo el segmento, la expresión que nos permita calcular esta área es:

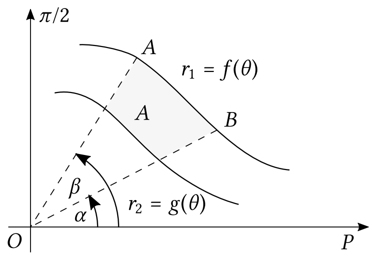


Figura 4.9: Área en cordenadas polares entre dos funciones

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2\right] d\theta \tag{4.14}$$

Ejemplo 4.2.1 Calcular el área de la figura limitad por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de abscisas (figura 4.10)

En este caso podemos observar que el área es positiva y negativa, por lo que es necesario poner a la función en valor absoluto, y aplicando su definición proceder a calcular.

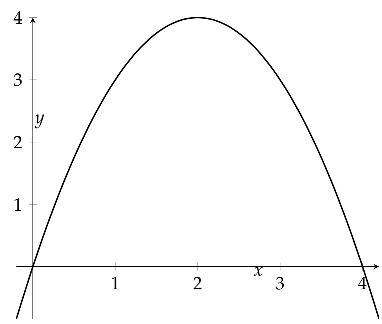


Figura 4.10: función $y = 4\,x + x^2$

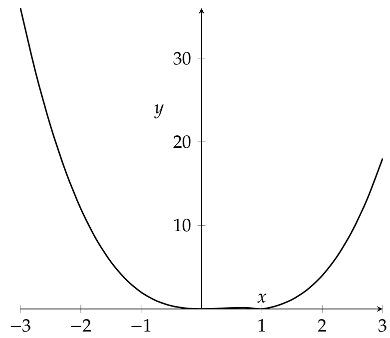


Figura 4.11: función $y = \left|x^2 - x^3\right|$

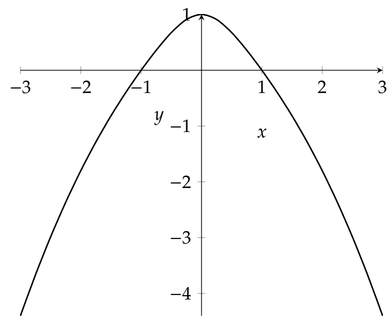


Figura 4.12: función $y = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}$

$$A = \int_0^2 \left|x^2 - x^3\right| dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx - \int_1^2 \left(x^2 - x^3\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$$

Calcular el área de la figura comprendida entre la curva de Agnesi $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ (figura 4.11)

En estos ejemplos seguimos los siguientes pasos:

Determinamos los límites de integración analíticamente, resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones dadas.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2} & (1) \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Igualando (1) y (2) tenemos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}$$
$$2 = x^2 + x^4$$
$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Factorando

$$\left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$$
$$x = \pm 1$$

Hacemos el gráfico en el intervalo de integración con preferencia, para poder tener bien claro lo que debemos hacer.

Procedemos al cálculo del área, determinando la integral definida observando el gráfico, en este ejemplo utilizamos la simetría existente.

$$A = 2\int_0^1 \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right] dx = 2\left[\arctan(x) - \frac{x^3}{6}\right]\Big|_0^1$$
$$= 2\left(\arctan(1) - \frac{1}{6}\right) = \frac{3\pi - 2}{6}u^2$$

Ejemplo 4.2.2 Calcular el área de la figura limitada por la curva $x = 2 - y - y^2$ y el eje "y".

En este ejemplo utilizamos la fórmula, cuando se usa franjas horizontales es decir cuando $x = f(y)$

$$A = \int_{-2}^1 \left(2 - y - y^2\right) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^1$$
$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)$$

Determinar el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 3 - x$ y $y^2 = x$ figura (34)

En este ejercicio seguimos los pasos del ejemplo 3.

Determinamos los límites de integración analíticamente, resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones dadas.

$$\begin{cases} y^2 = 3 - x \\ y^2 = x \end{cases}$$

Igualando (1) y (2) tenemos:

$$3 - x = x \longrightarrow 2x$$

$$= 3 \longrightarrow x = \frac{3}{2}(3)$$

Reemplazando (3) en (2) encontramos el valor de los límites, ya que vamos a usar franjas horizontales:

$$y^2 = \frac{3}{2} \quad y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Realizamos el gráfico.

Procedemos al cálculo del área, determinando la integral definida analizando el gráfico, en este ejemplo utilizamos la simetría existente.

Ejemplo 4.2.3 Hallar el área de la figura limitada por la curva dada en forma paramétrica:

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3/2}} \left(3 - y^2 - y^2\right) dy = 2\int_0^{\sqrt{3/2}} \left(3 - 2y^2\right) dy$$

$$= 2\left(3y - \frac{2y^3}{3}\right)\sqrt{3/2} = 2\left[3\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right] = 4\sqrt{\frac{3}{2}}u^2$$

Ejemplo 4.2.4 Hallar el área de la figura limitada por la curva dada en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

l área limitada por una curva dada en forma paramétrica, se calcula con la misma fórmula de coordenadas cartesianas, poniendo $f(x) = y = h(t)$ obtenemos derivando $x = g(t)$ y los límites de integración se obtiene haciendo R a t en el intervalo de $[0, 2\pi]$ o haciendo como en el cambio de variable así: $f(x) = y = a\sin^3 t$

$$x = a\cos^3 t \longrightarrow dx = -3a\cos^2 t\ \sin t\, dt$$

Cambio de los límites

$$t = \arccos\sqrt[3]{\tfrac{x}{a}}, \quad \text{para } x = 0, t = \tfrac{\pi}{2}; \quad \text{y para } x = a, t = 0$$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 4\int_{0}^{a} y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\, 3\,a\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt \\
&= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,\cos^2 t\,dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,\frac{1}{2}(1-\cos 2t) \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(1-\cos 4t)-\sin^2 2t\cos 2t\right] dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{1}{3}\sin^3 2t\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2\,u^2 = \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{8}\pi a^2\,u^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2.5 Hallar el área de la superficie comprendida entre el eje de las "x" y un arco de la cicloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a\,(1-\cos t)\,a\,(1-\cos t)\,dt \\
&= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)\,dt \\
&= a^2\int_0^{2\pi}\left[1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right] dt \\
&= a^2\left[t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{2\pi} = a^2(2\pi+\pi) = 3\pi a^2u^2
\end{aligned}
$$

Determinar el área de la figura limitada por la gráfica de la función $y = x^2-3\,|x|+2$ y el eje x

Para graficar una función de segundo grado $y = ax^2+bx+c$ se necesita hallar lo siguiente:

Intersecciones con los ejes:

Intersección con el eje "x", cuando $0 = x^2-3x+2 \longrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \longrightarrow x = 2 \cap x = 1$

Intersección con el eje "y", cuando $x = 0$, $y = 2$

Coordenadas del vértice:

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$,

$y = \frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{-9+8}{4} = -\frac{1}{4}$

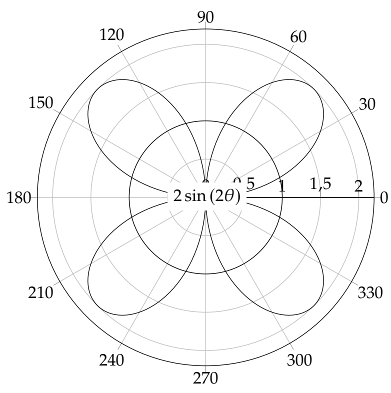


Figura 4.13: función $2\sin(2\theta)$

Al observar la gráfica, vemos que existen tanto áreas positivas como negativas, por lo que para calcular su valor es necesario poner a la función dentro valor absoluto y proceder de la siguiente manera, utilizando la simetría quedaría:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx - 2\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]\Big|\Big|_0^1 - 2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]\Bigg|_1^2 \\
&= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-2\left[\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right] = \frac{12}{6} = 2u^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2.6 Hallar el área de la figura limitada por la curva $r = 1 + \cos\theta$

Utilizando la simetría

$S = \frac{1}{2} 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta) d\theta = (\theta + \sin\theta)|_0^{\pi} = \pi u^2$

Determinar el área que se encuentra dentro de la curva $r = 2\sin 2\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$

Determinamos los límites de integración analíticamente, resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones dadas.

$$\begin{cases} r = 2\sin 2\theta \\ \quad r = 1 \end{cases}$$

Igualando (1) y (2) tenemos:

$$2\sin 2\theta = 1$$
$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$$
$$2\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$= \frac{\pi}{6}(-1)^k + \pi k \quad (k \in 0, \pm 1, \quad \text{etc.})$

Dando valores a "k", hallamos las intersecciones de las gráficas así:

Si: $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$

$\theta = \frac{\pi}{12}$, $\theta = \frac{5\pi}{12}$, $\theta = \frac{13\pi}{12}$, $\theta = \frac{17\pi}{12}$

Entonces los puntos de intersección son:

$\left(1, \frac{\pi}{12}\right), \left(1, \frac{5\pi}{12}\right), \left(1, \frac{13\pi}{12}\right), \left(1, \frac{17\pi}{12}\right)$

Y para encontrar las otras intersecciones se resuelve la ecuación $2\sin 2\theta = -1$

obteniendo los siguientes puntos:

$\left(-1, \frac{7\pi}{12}\right), \left(-1, \frac{11\pi}{12}\right), \left(-1, \frac{19\pi}{12}\right), \left(-1, \frac{23\pi}{12}\right)$

Realizamos el gráfico.

Procedemos al cálculo del área, determinando la integral definida analizando el gráfico, en este ejemplo utilizamos la simetría existente.

$$A = 4\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left(4\sin^2 2\theta - 1\right) d\theta$$
$$= 2\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left[4\frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta) - 1\right] d\theta$$
$$= 2[2\theta - \sin 4\theta - \theta] \mid_{\pi/12}^{5\pi/12}$$
$$= 2\left[\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2}\sin 4\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\sin 4\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)\right]$$
$$= 2\left[\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) u^2$$

4.3. Cálculo de la longitud de arco de una curva

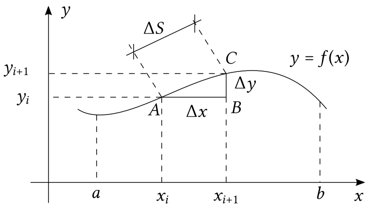


Figura 4.14: Longitud de un arco de una curva

Definición.- Sea $f : [a, b] \to R$ una función continua en el intervalo dado, entonces la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto cuya abscisa es a, hasta el punto cuya abscisa es b viene dado por la fórmula:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{4.15}$$

Demostración:

Consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, tal que: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Del triangulo rectángulo ABC de la figura se tiene:

Donde

Dividiendo la expresión por Δx^2 tendremos:

Como f es continua en $[x_{i+1}, x_i]$ y $f'(x)$ existe en el mismo intervalo, entonces por el teorema del valor medio

Luego de (2) y (1) se tiene:

A la fórmula anterior le podemos expresar de la forma:

Donde

En esta forma el diferencial del arco, realizándole algunos procedimientos algebraicos, nos permite encontrar todas las fórmulas para calcular la longitud del arco de una curva dada, en cualquier forma y coordenadas así:

Si la curva está dada por $x = g(y)$ entonces el diferencial de arco es:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1dy} \longrightarrow s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1dy} \tag{4.16}$$

Cuando la función viene dada por ecuaciones paramétricas tenemos:

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt}, \quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt}$$

Y si la función está definida en coordenadas polares es decir $r = f(\theta)$ el diferencial del arco es:

$$ds = \sqrt{r^2 + (f'(\theta))^2 d\theta}, \quad s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (f'(\theta))^2 d\theta}$$

Ejemplos:

Ejemplo 4.3.1 Calcular la longitud de arco de la parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$ (figura 4.15)

Solución:

En este ejemplo utilizamos la fórmula (1), para lo cual primero encontramos su derivada y luego de elevarle al cuadrado reemplazamos en

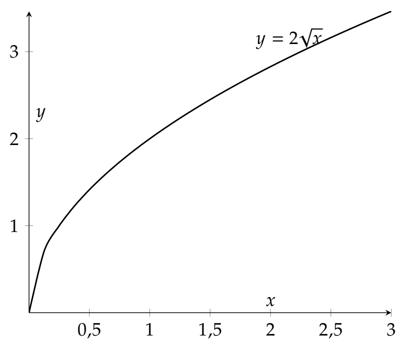


Figura 4.15: función $y = 2\sqrt{x}$

la misma.

$y = 2\sqrt{x} \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad (y')^2 = \dfrac{1}{x}$

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$$

$$= \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} t\,\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2} = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\infty} t\,\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{\sqrt{3/2}}^{N} t\,\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\left(\frac{-t}{t^2-1}\right) \mid \sqrt{\frac{3}{2}} + \int_{\sqrt{3/2}}^{N}\frac{dt}{t^2-1}\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\left(\frac{-N}{N^2-1}\right) + \frac{\sqrt{3/2}}{\frac{3}{2}-1} + \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) \mid \sqrt{\frac{N}{3/2}}\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\left(\frac{-N}{N^2-1}\right) + \sqrt{6} + \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{N-1}{N+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|\right)\right]$$

$$= \sqrt{6} - \ln\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}u$$

Cambio de variable:

$\frac{x+1}{x} = t^2 \longrightarrow x = \frac{1}{t^2-1} \therefore dx = -\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$

Cambio de límites:

$t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$, para $x = 0, \quad t = \infty \quad y \quad$ para $x = 2, \quad t = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ejemplo 4.3.2 Hallar la longitud del arco de la rama derecha de la tractriz

$x = \sqrt{a^2-y^2} + a\ \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right|$

Desde $y = a$ hasta $y = b(0 < b < a)$

Solución:

En este ejemplo utilizamos la fórmula (2), para lo cual encontramos su derivada y luego de elevarle al cuadrado reemplazamos en la misma

$$x = \sqrt{a^2-y^2} + a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| \quad ; \frac{dx}{dy} = x'$$

$$x' = \frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}} + a\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\left|\frac{y\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}} - \left(a+\sqrt{a^2-y^2}\right)}{y^2}\right|$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{ay}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\left|\frac{-y^2 - a\sqrt{a^2-y^2} - a^2 + y^2}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}\right|$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{ay}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\left|\frac{-a\left(\sqrt{a^2-y^2}+a\right)}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}\right|$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{a^2}{y\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{a^2-y^2}{y\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

$$(x')^2 = \frac{a^2-y^2}{y^2}$$

$$s = \int_b^a \sqrt{\frac{a^2-y^2}{y^2}+1}dy = \int_b^a \sqrt{\frac{a^2-y^2+y^2}{y^2}}dy$$

$$= \int_b^a \frac{ady}{y} = a\ln|y||_b^a = a\ln\left|\frac{a}{b}\right|u$$

Calcular la longitud del astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Solución

En este ejemplo el procedimiento es igual al del ejemplo 1

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \longrightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y'$$

$$0 = y' = \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$(y')^2 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$$

$$s = 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}}dx = 4a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}} = 4a^{1/3}\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]\Big|_0^a$$

$$= 4a^{1/3}\left[\frac{3}{2}a^{2/3}\right] = 6au$$

Ejemplo 4.3.3 Determinar la longitud total de la curva $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ dada en coordenadas polares, y cuyo valor de θ varía entre $0 \le \theta \le 3\pi$

Solución: En este ejemplo utilizamos la fórmula (4), encontramos su derivada y luego de elevarle al cuadrado reemplazamos en la misma

$$
\begin{aligned}
r &= a\sin^3\frac{\theta}{3}\\
r' &= a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\\
(r')^2 &= a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}\\
s &= \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cdot\cos^2\frac{\theta}{3}}d\theta\\
&= \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\left(\sin^2\frac{\theta}{3}+\cos^2\frac{\theta}{3}\right)}d\theta\\
&= a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta = a\int_0^{3\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta\\
&= a\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3}{4}\sin\frac{2\theta}{3}\right)\Big|_0^{3\pi} = a\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3}{4}\sin 2\pi\right) = \frac{3a\pi}{2}u
\end{aligned}
$$

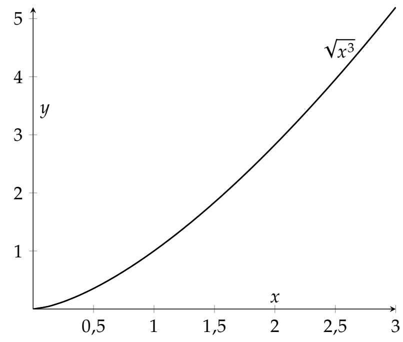


Figura 4.16: función $\sqrt{x^3}$

Ejemplo 4.3.4 Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ esde el origen de coordenadas hasta el punto cuyas coordenadas son $x = 4$, y $y = 8$.

Solución:

El procedimiento es igual al del ejemplo 1.

$$
\begin{aligned}
&y^2 = x^3\\
&2yy' = 3x^2\\
&y' = \frac{3x^2}{2y}\\
&(y')^2 = \frac{9x^4}{4y^2} = \frac{9x^4}{4x^3} = \frac{9}{4}x\\
&s = \int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4+9x}dx\\
&\quad = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{27}(4+9x)^{3/2}\right]\Big|_0^4 = \frac{1}{27}\left[(4+36)^{3/2}-(4)^{3/2}\right]\\
&\quad = \frac{1}{27}\left[(40)^{3/2}-(4)^{3/2}\right] = \frac{1}{27}[8{,}10\sqrt{10}-8] = \frac{8}{27}[10\sqrt{10}-1]
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.3.5 Hallar la longitud total de la curva cuyas ecuaciones paramétrica son:

$x = a(2\cos t - \cos 2t)\,;\, y = a(2\sin t - \sin 2t)$

Solución:

En este ejemplo utilizamos la fórmula (3), como siempre encontramos sus derivadas y luego de elevarle al cuadrado reemplazamos en la misma.

$$
\begin{aligned}
x &= a(2\cos t - \cos 2t)\\
x' &= a(-2\sin t + 2\sin 2t)\\
(x')^2 &= 4a^2\left(\sin^2 t - 2\sin t\sin 2t + \sin^2 2t\right)
\end{aligned}
$$

$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$
$$y' = a(2\cos t - 2\cos 2t$$
$$(y')^2 = 4a^2\left(\cos^2 t - 2\cos t\cos 2t + \cos^2 2t\right)$$
$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\left(\sin^2 t - 2\sin t\sin 2t + \sin^2 2t\right) + \ldots}$$
$$\overline{\ldots + 4a^2\left(\cos^2 t - 2\cos t\cos 2t + \cos^2 2t\right)}\,dt$$
$$= 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\sin t\sin 2t - 2\cos t\cos 2t}\,dt$$
$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-(\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t)}dt$$
$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$
$$= 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= 8a(-\cos(\pi) + \cos 0) = 8a(1+1) = 16au$$

Ejemplo 4.3.6 Calcular la longitud total de la curva $r = 2(1+\cos\theta)$ dada en coordenadas polares.

El procedimiento es igual al del ejemplo 4

$$r = 2(1+\cos\theta)$$
$$r' = -2\sin\theta$$
$$(r')^2 = 4\sin^2\theta$$
$$s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{4(1+\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$
$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta = 16\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 16\sin\frac{\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 16u$$

Ejemplo 4.3.7 Sea la región del plano limitado superiormente por $x^2 + y^2 = 2$ e inferiormente por $x^2 = -y^3$

Halle la longitud del contorno de la región R.

Solución:

Determinamos los límites de integración, hallando la intersección de las curvas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 = -y^3 \end{cases} \quad (1)$$

Ponemos (2) en (1) $-y^3 + y^2 = 2 \rightarrow y^3 - y^2 + 2 = 0 \rightarrow y = -1$ reemplazando este valor en cualquiera de las 2 ecuaciones obtenemos los puntos de intersección. $P_0 = (1,-1) \cap P_1 = (-1,-1)$

$x^2 = -y^3$

Encontramos la longitud del contorno de la siguiente manera:

$s_t = 2(s_{AB} + s_{OA}) \quad (I)$

Calculando S_{AB}, se tiene que $x = \sqrt{2-y^2}$ para $x \geq 0 \therefore x' = \frac{-y}{\sqrt{2-y^2}}$ entonces:

$$s_{AB} = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{2-y^2}}\right)^2}\, dy = \sqrt{2}\int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{dy}{\sqrt{2-y^2}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

Determinando s_{OA}, se tiene que $x = \sqrt{-y^3}$, para $x \geq 0 \therefore x' = -\frac{3y^2}{2\sqrt{-y^3}}$

$$s_{OA} = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \left(-\frac{3y^2}{2\sqrt{-y^3}}\right)^2}\, dy = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 - \frac{9}{4}y}\, dy$$

$$= -\frac{4}{9}\frac{2}{3}\left[\left(1 - \frac{9}{4}y\right)^{3/2}\right]\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{8}{27}\left(1 - \frac{13\sqrt{13}}{8}\right) = \frac{(13\sqrt{13}-8)}{27}u$$

Reemplazando (1) y (2) en (I) tenemos la solución.

$$s_t = 2\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{13\sqrt{13}-8}{27}\right) = \frac{81\sqrt{2} + 52\sqrt{13} - 32}{54}$$

4.4. Cálculo de volúmenes de revolución.

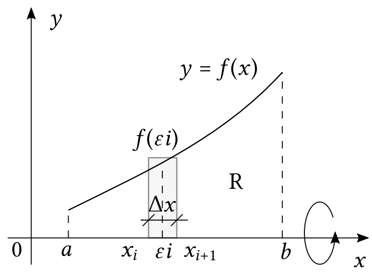


Figura 4.17: Rotación de una región plana

Definición.- Un sólido de revolución es aquel que se obtiene al rotar una región plana alrededor de una recta en el plano, llamado eje de revolución [9]

Para calcular el volumen de un sólido de revolución existen dos técnicas de cálculo que son las siguientes:

4.4.1. Método de los discos.

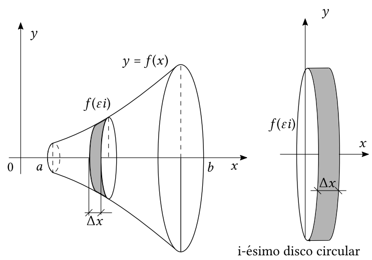


Figura 4.18: Método de los discos

Definición.- Consideremos una función f continua en un segmento cerrado $[a, b]$ suponiendo que $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$y sea S el sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje "x" la región R limitada por la curva $y = f(x)$ en el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y sea V el volumen del sólido resultante al cual definiremos por:

$$V = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f(\varepsilon_i)\right)^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b \left[f(x)^2\right] dx \to V = \pi \int_a^b \left[f(x)^2\right] dx \tag{4.17}$$

Método de los discos para una región R limitado por dos curvas.

Notas importantes:

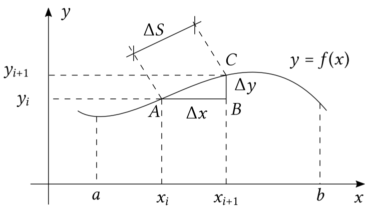
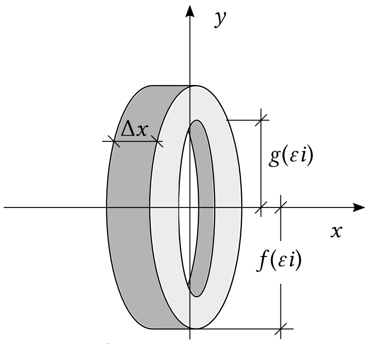


Figura 4.19: Función contínua



i-ésimo disco circular

Figura 4.20: Método de cortezas cilíndricas

Método de las cortezas cilíndricas o de las arandelas.

Definición. Consideremos una función f continua en un segmento cerrado $[a,\ b]$, suponiendo que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, y sea S el sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje y la región R limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y sea V el volumen del sólido resultante el cual está definido por:

$$V = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\epsilon_i \left(f\left(\epsilon_i\right)\right) \Delta_i x = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Dividimos la región R en n franjas verticales y trazamos los rectángulos correspondientes. Uno de ellos le hacemos girar alrededor del eje en forma paralela, produciéndose un anillo cilíndrico de altura h, radio interior r_1, radio externo r_2, y volumen. $V = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) h$.

Aplicando este concepto al i-ésimo anillo circular, que resulta de girar alrededor del eje y el rectángulo diferencial tendríamos:

$$\Delta V = \pi\left[x_{i+1}^2 - x_i{}^2\right] f\left(\epsilon_i\right) = \pi\left(x_{i+1} + x_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) f\left(\epsilon_i\right)$$
$$= 2\pi \frac{\left(x_{i+1} + x_i\right)}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right) f\left(\epsilon_i\right)$$

Si tomamos:

$\frac{(x_{i+1}+x_i)}{2} = \epsilon_i$ punto medio del segmento $[x_i,\ x_{i+1}]$

$(x_{i+1} - x_i) = \Delta_i x$ espesor de la franja diferencial

Tenemos:

$\Delta V = 2\pi\epsilon_i f\left(\epsilon_i\right) \Delta_i x$ volumen del i-ésimo anillo circular

Como son n discos anillos circulares, entonces el volumen de los n anillos es:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\epsilon_i f\left(\epsilon_i\right) \Delta_i x$$

Esta expresión no es más que una sumatoria de Riemann, la misma que al llevarle al límite cuando $|\Delta_i x| \to 0$ nos da el volumen del sólido generado, obteniendo así la fórmula para encontrar el volumen del sólido por medio del método de los caparazones cilíndricos.

$$V = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\epsilon_i f\left(\epsilon_i\right) \Delta_i x = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Notas:

1. En este método podemos diferenciar dos elementos importantes en la fórmula, uno que es x, considerado como radio de giro y $f(x)$ que es la altura del rectángulo.

Si la región está limitada por dos curvas continuas $f(x)$ y $g(x)$, en donde $f(x)$ es mayor a $g(x)$ en el segmento dado, lo único que cambia es la altura del rectángulo de $f(x)$ a $f(x)$ menos $g(x)$, quedando la fórmula de la siguiente manera:

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx$$

2. Si las regiones anteriores, en vez de girar alrededor del eje "Y", tienen como eje de revolución una recta $x = k$, siendo $a > k$ lo que cambia las fórmulas es el radio de giro de x por $(x - k)$, quedando así:

$$V = 2\pi \int_a^b (x-k) f(x)\, dx \quad \text{y} \quad V = 2\pi \int_a^b (x-k)[f(x) - g(x)] dx$$

3. En caso que las regiones anteriores, en vez de girar alrededor del eje "Y", tienen como eje de revolución una recta $x = k$, siendo $a \leq k$ lo que cambia en las fórmulas es el radio de giro de x por $(k - x)$, quedando así:

$$V = 2\pi \int_a^b (k-x) f(x) dx \quad \text{y} \quad V = 2\pi \int_a^b (k-x)[f(x) - g(x)] dx$$

Método de las secciones planas paralelas conocidas.

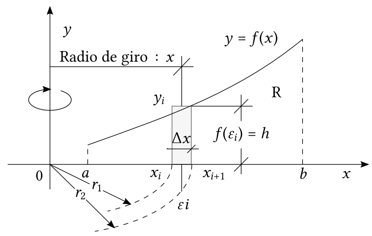


Figura 4.21: Secciones planas conocidas

Si las secciones son perpendiculares al eje "x", el volumen del sólido S es dado por la fórmula:

Ejemplos:

Ejemplo 4.4.1 Solución: Primero encontramos las intersecciones de la gráfica con el eje de las "x", estos serán los límites de integración.

Aplicando la fórmula de los discos tenemos:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^{3} \left(x^4 + 4x^2 + 9 - 4x^3 - 6x^2 + 12x\right) dx \\
&= \pi \int_{-1}^{3} \left(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9\right) dx \\
&= \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{2x^3}{3} + 6x^2 + 9x \right) \Bigg|_{-1}^{3} \\
&= \pi \left[\left(\frac{243}{5} - 81 - \frac{54}{3} + 54 + 27 \right) - \left(\frac{-1}{5} - 1 + \frac{2}{3} + 6 - 9 \right) \right] = \frac{512\pi}{15} u^3
\end{aligned}$$

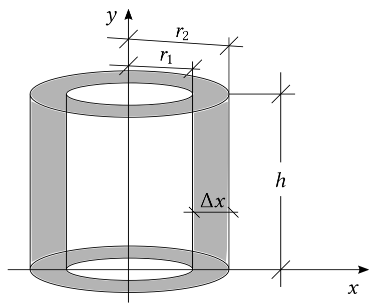


Figura 4.22: Cilindo de espesor Δx

Ejemplo 4.4.2 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje "x", la superficie comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

Solución:

a. Primero encontramos las intersecciones de las gráficas, resolviendo el sistema, los mismos que serán los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Hacemos la gráfica.

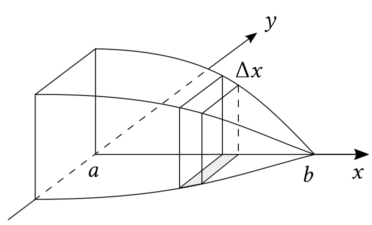


Figura 4.23: Sección de espesor Δx

Aplicando la fórmula de los discos tenemos:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right)\Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} u^3$$

Ejemplo 4.4.3 Un depósito de gasolina tiene la forma de un sólido de revolución que se obtiene al girar la región en el plano limitado por las curvas $y^2 - 3y = 2x$ y $x - y + 2 = 0$ arededor del eje de las x. ¿Cuál es el volumen del depósito?

Solución:

a. Primero encontramos las intersecciones de las curvas, resolviendo el sistema (), los mismos que serán los límites de integración.

$$\begin{cases} y^2 - 3y = 2x \longrightarrow x = \frac{1}{2}\left(y^2 - 3y\right) \\ x - y + 2 = 0 \longrightarrow x = y - 2 \end{cases}$$

Igualando (1) y (2) tenemos:

Reemplazando (3,1) $\cap$ (3,2) en 2 tenemos $x = 2$ y $x = -1$ respectivamente

Hacemos la gráfica.

Para realizar la gráfica de la parábola realizamos la siguiente modificación:

Aplicando la fórmula de los discos tenemos: $V = V_1 + V_2$.

$$V = \pi \left[\int_{-\frac{9}{8}}^{-1} \left[\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2\left(x + \frac{9}{8}\right)} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2\left(x + \frac{9}{8}\right)} \right)^2 \right] dx \right]$$

$$+ \pi \int_{-1}^{2} \left[\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2\left(x + \frac{9}{8}\right)} \right)^2 - (x+2)^2 \right] dx$$

$$= \pi \left[\int_{-\frac{9}{8}}^{-1} 6\sqrt{2x + \frac{9}{4}dx + \ldots} \right] dx \Big]$$

$$\ldots \int_{-1}^{2} \left[\frac{9}{4} + 3 \right] \sqrt{2x + \frac{9}{4}} + 2x + \frac{9}{4} - x^2 - 4x - 4$$

$$= \pi \left[\int_{-\frac{9}{8}}^{-1} 6\sqrt{2x + \frac{9}{4}dx + \int_{-1}^{2} [3]\, 2x + \frac{9}{4} - x^2 - 2x + \frac{1}{2}} \right] \Big] \Big]$$

$$= \pi \left[\left(2\left(2x + \frac{9}{4}\right)^{3/2} \mid -1 - 9/8 \right) + \left[\left(2x + \frac{9}{4}\right)^{3/2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{x}{2} \right] \mid \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right]$$

$$= \pi \left[2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{125}{8} - \frac{8}{3} - 4 + 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} \right] = \pi \left(\frac{63}{4} - \frac{9}{2} \right) = \frac{45\pi}{4} u^3$$

Ejemplo 4.4.4 Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje "y", la superficie comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

Solución:

Primero encontramos las intersecciones de las gráficas, resolviendo el sistema (), los mismos que serán los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Hacemos la gráfica.

Hacemos la gráfica.

Despejando x como función de y $x = \sqrt{y} \cap \quad x = y^2$.

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - \left(y^2\right)^2 \right] dy = \pi \int_0^1 \left(y - y^4\right) dx = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1$$
$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} u^3$$

Encuentre el volumen del sólido generado al girar sobre el eje "y", la región limitada por la curva $y = (x-1)^2$, el eje "x" y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ (figura 59).

Realizamos la figura.

Calculamos el volumen utilizando la fórmula de las cortezas cilíndricas.

$$V = 2\pi \int_1^3 x\,(x-1)^2\,dx = 2\pi \int_1^3 x\left(x^2 - 2x + 1\right) dx$$
$$= 2\pi \int_1^3 \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3$$
$$= 2\pi \left[\left(\frac{81}{4} - \frac{54}{3} + \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{40\pi}{3} u^3$$

Ejemplo 4.4.5 Calcular el volumen engendrado al girar sobre el eje "y", la región limitada por la curvas $y = x^3$, $y^2 = 2 - x$, $x = 0$ (figura 60).

Solución:

a. Primero encontramos las intersecciones de las gráficas, resolviendo el sistema (), los mismos que serán los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y^2 = 2 - x \end{cases}$$

Realizamos el gráfico

Calculamos el volumen aplicando la fórmula de las cortezas cilíndricas.

$$V = 2\pi \int_0^1 x\left[\sqrt{2-x} - x^3\right] dx = 2\pi \int_0^1 \left(x\sqrt{2-x} - x^4\right) dx$$

$$= 2\pi \left[-\frac{2}{3}\left(x(2-x)^{3/2}\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (2-x)^{3/2}dx + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 \right]$$

$$= 2\pi \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{15}(2-x)^{5/2}\Big|_0^1 + \frac{1}{5} \right) = 2\pi\left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{15} + \frac{16\sqrt{2}}{15} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{16\sqrt{2} - 11}{15}\right) u^3$$

Ejemplo 4.4.6 Determinar el volumen del toro engendrado que se obtiene al hacer girar alrededor de la recta $x = 1$, la región limitada por los gráficos de $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$, $y + 1 = 0$ y las rectas $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$ (figura 61)

Solución

Como tenemos solamente fórmulas para calcular los volúmenes de rotación alrededor del eje “x” y del eje “y”, pero en este ejemplo el eje de rotación es una recta paralela al eje “y”, en virtud de esto vamos a utilizar uno de los procedimientos para determinar dicho volumen de rotación, que es el de la traslación del radio de giro hacia la izquierda o derecha según el caso, luego de esto procedemos a calcular el volumen resultante.

Calculamos el volumen valiéndonos de la fórmula de los caparazones cilíndricos.

$$V = 2\pi \int_2^4 (x-1)\left[x^2 - 2x - 3 - (-1)\right] dx$$

$$= 2\pi \int_2^4 (x-1)\left[x^2 - 2x - 2\right] dx$$

$$= 2\pi \int_2^4 \left(x^3 - 2x^2 - 2x - x^2 + 2x + 2\right) dx$$

$$= 2\pi \int_2^4 \left(x^3 - 3x^2 + 2\right) dx$$

$$2\pi\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right)\Big|_2^4 = 2\pi[(64 - 64 + 8) - (4 - 8 + 4)] = 16\pi u^3$$

Ejemplo 4.4.7 Calcular el volumen del sólido obtenido al rotar la región acotada por $y = x^2$, el eje “x” y la recta $x = 1$, alrededor de la recta $y = 2$ (figura 62).

Solución:

a. Realizamos el gráfico, el original y el trasladado.

Este ejemplo es similar al anterior con la diferencia de que el eje de rotación es una recta paralela al eje “x”,en virtud de esto vamos a utilizar uno de los procedimientos para determinar dicho volumen de rotación, que es el de la traslación de la gráfica las unidades que sean necesarias hasta que la recta llegue al eje de las “x”, esto puede

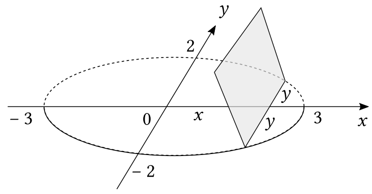


Figura 4.24: Elipse

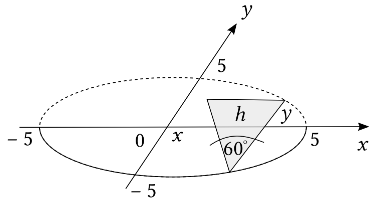


Figura 4.25: Elipse sección transversal

ser hacia arriba o hacia abajo, luego de esto procedemos a calcular el volumen de la figura resultante.

$$V = \pi \int_0^1 \left[(-2)^2 - \left(x^2-2\right)^2\right] dx = \pi \int_0^1 \left(4 - x^4 + 2x^2 - 4\right) dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2x^2 - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{7\pi}{15} u^3$$

La base de un sólido es la región $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ limitada por la elipse . Hallar el volumen del sólido, suponiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje "x" son cuadrados (figura 63).

Realizamos el gráfico.

Utilizando la fórmula anterior, encontramos el volumen.

Despejando y^2 de la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \longrightarrow y^2 = \frac{4}{9}\left(9 - x^2\right)$.

Calculando el área de la sección transversal.

$A(x) = (2y)^2 = 4y^2 = \frac{16}{9}\left(9 - x^2\right)$,

Luego el volumen es:

$V = \int_a^b A(x)dx = 2\int_0^3 \frac{16}{2}\left(9 - x^2\right) dx = 16\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 =$

$= 16(27 - 9) = 288u^3$.

Ejemplo 4.4.8 3-57. Hallar el volumen del sólido, cuya base es un círculo de radio 5 y cuyas secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo son triángulos equiláteros.

Solución:

Realizamos la figura (figura 64).

Determinamos el volumen del sólido con la misma fórmula anterior.

Despejando y^2 de la ecuación $x^2 + y^2 = 25 \longrightarrow y^2 = 25 - x^2$

Encontrando el área de la sección transversal.

Determinamos el volumen del sólido con la misma fórmula anterior.

$$A(x) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{y\ \tan(60°)\ y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(25 - x^2\right)$$

$$V = 2\int_0^5 \frac{\sqrt{3}}{2}\left(25 - x^2\right) dx = \sqrt{3}\left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = \sqrt{3}\left(125 - \frac{125}{3}\right)$$

$$= \frac{250\sqrt{3}}{3} u^3$$

Ejemplo 4.4.9 3-58. Determinar el volumen de revolución de un arco de la cicloide ; a) en torno al eje "x"; b) en torno al eje "y" y c) en torno a la recta $x = 2\pi$ (figura 65). Solución:

Volumen alrededor del eje "x".

$$V = \pi \int_a^b (y)^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2(1-\cos t)dt$$
$$= \pi \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right] dt$$
$$= \pi \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) - \left(1-\sin^2 t\right)\cos t\right] dt$$
$$= \pi \left[\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 u^3$$

Volumen alrededor del eje "y"

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx = 2\pi \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)(1-\cos t)dt$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[t - 2t\cos t + t\cos^2 t - (1-\cos t)^2 \sin t\right] dt$$
$$= 2\pi \left(\frac{t^2}{2} - 2t\sin t - 2\cos t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t^2}{4} + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{(1-\cos t)^3}{3}\right)$$
$$= 2\pi \left(2\pi^2 - 2 + 2 + 2\pi^2 - \pi^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 0\right) = 6\pi^3 u^3\, 2\pi$$

Volumen alrededor de la recta $x = 2\pi$

$$V = 2\pi \int_a^b (2\pi - x)y dx = 2\pi \int_0^{2\pi} (2\pi - t + \sin t)(1-\cos t)^2 dt$$
$$= 2\pi \left[2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt - \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt\right]$$
$$= 2\pi \left[2\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt - 3\pi^2\right]$$
$$= 2\pi \left\{2\pi \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right] dt - 3\pi^2\right\}$$
$$= 2\pi \left[2\pi \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - 3\pi^2\right]$$
$$= 2\pi \left[2\pi(3\pi) - 3\pi^2\right] = 6\pi^3 u^3$$

Ejemplo 4.4.10 3-59. Determinar el volumen de una semiesfera sólida homogénea de radio R.

Solución:

Imaginémonos al sólido cortado en rebanadas de espesor mediante planos perpendiculares al eje "z" (figura), de donde el volumen de la rebanada diferencial es igual: $\Delta V = A(z)\Delta z = \pi y_i^2 \Delta z$, realizando la suma de todas las rebanadas tenemos un volumen aproximado del sólido igual a:

$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta z$

Como la suma anterior es una Sumatoria de Riemann, podemos calcularle por medio de integrales llevándole al límite cuando $\Delta z \longrightarrow 0$ o si el número n de inervalos tienden al infinito así:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi {y_i}^2 \Delta z = \pi \int_0^R y^2\, dz = \pi \int_0^R \left(R^2 - z^2\right) dz$$

$$= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

de la circunferencia $y^2 + z^2 = R^2 \longrightarrow y^2 = R^2 - z^2$

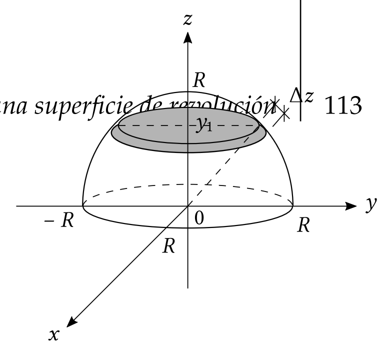


Figura 4.26: Sólido cortado en rebanadas de espesor Δz

4.5. Cálculo del área de una superficie de revolución

Definición:

El área de una superficie S obtenida de girar alrededor de un eje de rotación, el arco de una curva en un intervalo cualquiera [aa, bb], está definida por la fórmula:

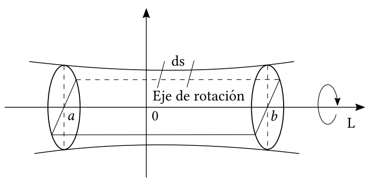


Figura 4.27: Área de una superficie que gira alrededor de un eje

$$A\left(S_L\right) = 2\pi \int_a^b y ds \tag{4.18}$$

Donde:

y: radio de giro, en que tendrá formas de acuerdo donde se haga girar el arco

ds: diferencial del arco, el que tomará forma diferentes de acuerdo al tipo de funciones así:

a) si $y = f(x)$ y el eje de rotación el ”X” tenemos:

$$A\left(S_x\right) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{4.19}$$

b) si $y = f(x)$ y el eje de rotación la recta $y = c$, el área es:

$$A\left(S_{y=c}\right) = 2\pi \int_a^b |y - c| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{4.20}$$

Si $x = g(y)$ y el eje de rotación el ordenado “y” el área está definida por:

$$A\left(S_y\right) = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \tag{4.21}$$

Cuando $x = g(y)$ y el eje de rotación la reca $x = k$ el área será

$$A\left(S_{x=k}\right) = 2\pi \int_c^d |x - k| \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \tag{4.22}$$

Si la función está dad en forma paramétrica $x = f(t) \quad \cap \quad y = g(t)$ tenemos:

$$A\left(S_x\right) = 2\pi \int_{t_1}^{t} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \tag{4.23}$$

Cuando la función está dad en coordenada polares es decir $r = f(\theta)$ el área de revolución alrededor del polo será:

$$A\left(S_{op}\right) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin\theta \sqrt{r^2 + f'(\theta)^2} d\theta \tag{4.24}$$

Ejemplos:

Ejemplo 4.5.1 Determinar el área de la superficie del "Huso", que resulta de girar una semionda cosenoidal $y = \cos x$ en el intervalo de $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, alrededor del eje x.

Solución

Hacemos el gráfico

Calculamos el área de revolución utilizando la fórmula

$y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x$.

$$A(Sx) = 2{,}2\pi \int_0^{\pi/2} y\sqrt{1 + (y')^2}dx = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 x} \cos x dx$$

$$= 4\pi \left[\frac{\sin x}{2}\sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right|\right] \mid \pi/2$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln|1 + \sqrt{2}|\right) = 2\pi(\sqrt{2} + \ln|1 + \sqrt{2}|)u^2$$

Ejemplo 4.5.2 Hallar el área de la superficie de revolución por la rotación en torno al eje de las "y", de la curva $x = y^3$, en el intervalo para y de [0,3]

Solución

Realizamos el gráfico.

Calculamos la derivada

$x = y^3 \longrightarrow x' = 3y^2$

Determinamos el área de revolución utilizando la fórmula ().

$$A(Sy) = 2\pi \int_0^3 x\sqrt{1 + 9y^4}\, dy = 2\pi \int_0^3 \sqrt{1 + 9y^4} y^3\, dy$$

$$= \frac{2\pi}{54}\left(1 + 9y^4\right)^{3/2}\Big|_0^3$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[(1 + 729)^{3/2} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left[(730)^{3/2} - 1\right] u^2$$

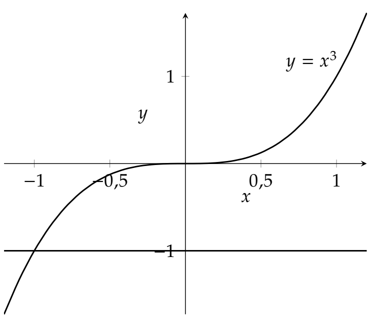


Figura 4.28: función $y = x^3$

Ejemplo 4.5.3 Encontrar el área de la superficie de revolución formada cuando la curva $y = x^3$, en el intervalo para x de [1,2], alrededor de la recta $y = -1$

Solución:

Encontramos su derivada

$y = x^3$ $y = x^3 \longrightarrow y' = 3x^2$.

Ejemplo 4.5.4 Calculamos el área de revolución utilizado la fórmula (), para lo cual calculamos el radio de giro que en este caso es igual a $y - (-1) = y + 1$.

$$\begin{aligned}
A\left(S_{y=-1}\right) &= 2\pi \int_1^2 (y+1)\sqrt{1+9x^4}dx = 2\pi \int_1^2 \left(x^3+1\right)\sqrt{1+9x^4}dx \\
&= 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+9x^4}x^3dx + 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+9x^4}dx \\
&= \frac{\pi}{27}\left[\left(1+9x^4\right)^{3/2}\right]\Big|_1^2 + 2\pi[7{,}1] \\
&= \left\{\frac{\pi}{27}\left[(145)^{3/2} - (10)^{3/2}\right] + 14{,}2\pi\right\} u^2
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.5 Encontrar el área de revolución del huso, formado cuando se hace girar alrededor del eje "x", el primer arco de la cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$

Solución:

Encontramos sus derivada

$dx = t - \sin t$; $dy = 1 - \cos t$

Aplicamos la formula

$$\begin{aligned}
A\left(s_x\right) &= 2\pi \int_a^b y\sqrt{dx^2+dy^2} \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = 4\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt \\
&= 4\pi\left[\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi} \cos t \sin\frac{t}{2}dt\right] \\
&= 4\pi\left[\left(-2\cos\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right]\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix} \\
&|= 4\pi\left[\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right] \mid \begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix} = 4\pi\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 1\right) = \frac{16}{3}\pi u^2
\end{aligned}$$

4.6. Aplicaciones físicas de la integral definida

Definición: El área de una superficie S obtenida de girar alrededor [10] de un eje de rotación, el arco de una curva en un intervalo cualquiera $[a, b]$, está definida por la fórmula:

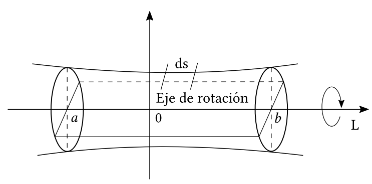


Figura 4.29: Área de un superficie

$$A\left(S_L\right) = 2\pi \int_a^b y ds \tag{4.25}$$

Dónde:

y: radio de giro, el que tendrá formas distintas de acuerdo donde se haga girar el arco.

ds: diferencial de arco, el que tomará diferentes de acuerdo al tipo de funciones así:

Si $y = f(x)$ y eje de rotación el "X" tenemos:

$$A\left(S_x\right) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{4.26}$$

Si $y = f(x)$ y eje de rotación la recta $y = c$, el área es:

$$A\left(S_{y=c}\right) = 2\pi \int_a^b |y - c| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \tag{4.27}$$

Si $x = g(y)$ y el eje de rotación el ordenado "y" el área está definida por:

$$A\left(S_y\right) = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \tag{4.28}$$

Cuando $x = g(y)|$ y el eje de rotación la recta $x = k$ el área será

$$A\left(S_{x=k}\right) = 2\pi \int_c^d |x - k| \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \tag{4.29}$$

Si la función está dada en forma paramétrica $x = f(t) \quad \cap \quad y = g(t)$ tenemos:

$$A\left(S_x\right) = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \tag{4.30}$$

Cuando la función está dada en coordenadas polares es decir $r = f(\theta)$ el área de revolución alrededor del polo será:

$$A\left(S_{op}\right) = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\theta \sqrt{r^2 + f'(\theta)^2} d\theta \tag{4.31}$$

Ejemplo 4.6.1 Determinar el área de la superficie del "Huso", que resulta de girar una semionda cosenoidal $y = \cos x$ en el intervalo de $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, alrededor del eje x (figura 66)

Encontramos su derivada

$y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x.$

Calculamos el área de revolución utilizando la fórmula

$$A(Sx) = 2{,}2\pi \int_0^{\pi/2} y\sqrt{1+(y')^2}dx = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x} \cos x dx$$

$$= 4\pi \left[\frac{\sin x}{2}\sqrt{1+\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right|\right] \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln|1+\sqrt{2}|\right) = 2\pi(\sqrt{2} + \ln|1+\sqrt{2}|)u^2$$

Ejemplo 4.6.2 Hallar el área de la superficie de revolución por la rotación en torno al eje de las "y", de la curva $x = y^3$, en el intervalo de y de $[0, 3]$ (figura 67)

Calculamos la derivada

$x = y^3 \longrightarrow x' = 3y^2$

Determinamos el área de revolución utilizando la fórmula ().

$$A(Sy) = 2\pi \int_0^3 x\sqrt{1+9y^4}dy = 2\pi \int_0^3 \sqrt{1+9y^4}y^3 dy$$

$$= \frac{2\pi}{54}\left(1+9y^4\right)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{27}\left[(1+729)^{3/2} - 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[(730)^{3/2} - 1\right] u^2$$

Ejemplo 4.6.3 Encontrar el área de la superficie de revolución formada cuando la curva $y = x^3$, en el intervalo para x de $[1, 2]$, alrededor de la recta $y = -1$ (figura 68)

Solución:

Encontramos su derivada.

$y = x^3 \longrightarrow y' = 3x^2$

Calculamos el área de revolución utilizando la fórmula (), para lo cual calculamos el radio de giro que en este caso es igual a $y - (-1) = y + 1$.

$$A\left(S_{y=-1}\right) = 2\pi \int_1^2 (y+1)\sqrt{1+9x^4}dx = 2\pi \int_1^2 \left(x^3+1\right)\sqrt{1+9x^4}dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+9x^4}x^3 dx + 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+9x^4}dx$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[\left(1+9x^4\right)^{3/2}\right]\Big|_1^2 + 2\pi[7{,}1]$$

$$= \left\{\frac{\pi}{27}\left[(145)^{3/2} - (10)^{3/2}\right] + 14{,}2\pi\right\} u^2$$

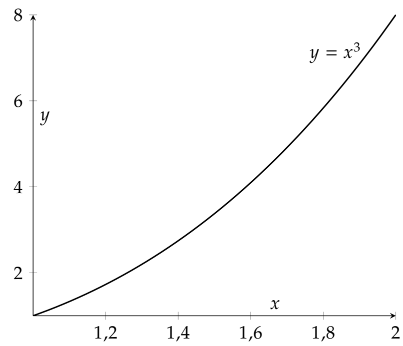


Figura 4.30: función $y = x^3$

Ejemplo 4.6.4 Encontrar el área de revolución del huso, formado cuando se hace girar alrededor del eje "x", el primer arco de la cicloide $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$

Solución

Encontramos sus derivadas

$dx = 1 - \cos t$; $dy = \sin t$

5 Ejercicios propuestos

1. Hallar las siguientes integrales, empleando para ello las reglas principales y las fórmulas básicas de integración

   1.1 $\int \left(6b^2\sqrt[3]{x^2}\right) dx$

   1.2 $\int \left(2x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{x^3}\right) dx$

   1.3 $\int x(x-1)(x+2)(x+3)dx$

   1.4 $\int \left(mx^4 + nx\right)^2 dx$

   1.5 $\int (nx)^{\frac{2+n}{n}} dx$

   1.6 $\int \frac{\left(x^3+1\right)\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^3}} dx$

   1.7 $\int \frac{\left(x^{2n+1}-x^{m-1}\right)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$

   1.8 $\int (\sqrt[3]{x} + 2)(\sqrt{x} - x + 5)dx$

   1.9 $\int \frac{dx}{x^2+11}$

   1.10 $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$

   1.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

   1.12 $\int 5^x 3^x e^x dx$

   1.13 $\int \frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}} dx$

   1.14 $\int \tan^2 2x dx$

   1.15 $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$

   1.16 $\int \cos^2 3x dx$

2. Resolver las integrales, utilizar para ello la introducción bajo el signo de la diferencial, las reglas principales y las fórmulas básicas de integración

   2.1 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

   2.2 $\int \frac{a dx}{\sqrt[3]{5-x}}$

   2.3 $\int \sqrt[4]{\sqrt{m - nx}} dx$

   2.4 $\int \frac{dx}{ax^2+b}$

   2.5 $\int \frac{dx}{3x^2-5}$

   2.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{11-3x^2}}$

   2.7 $\int \frac{(4x-7)dx}{5x^2-3}$

   2.8 $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-6}} dx$

2.9 $\int \frac{3-2x}{5x+7}dx$
2.10 $\int \frac{mx+n}{m^2x^2+n^2}$
2.11 $\int \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6-1}}$
2.12 $\int \sqrt{\frac{\arcsin 3x}{1-9x^2}}dx$
2.13 $\int \frac{\arctan\left(\frac{x}{3}\right)}{9+x^2}dx$
2.14 $\int \frac{x-\sqrt[3]{\arctan 3x}}{1+9x^2}dx$
2.15 $\int \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|}}$
2.16 $\int \frac{a^{2y}-1}{\sqrt{a^y}}dy$
2.17 $\int e^x\sqrt{m-ne^x}dx$
2.18 $\int x^2\sqrt[5]{7-x^3}dx$
2.19 $\int \tan\sqrt{t-1}\,\frac{dt}{\sqrt{t-1}}$
2.20 $\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln\left(1+x^2\right)+1}{1+x^2}dx$

3. Encontrar la solución de las siguientes integrales, utilizando para ello las sustituciones más adecuadas, dependiendo de la presentación del ejemplo.
   3.1 $\int x(2x-3)^{10}dx$
   3.2 $\int \frac{(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt[3]{x}}dx$
   3.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$
   3.4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x-3}}$
   3.5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$
   3.6 $\int x^2\sqrt{x-3}dx$
   3.7 $\int x^5\left(3x^3-2\right)^{2/3}dx$
   3.8 $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$
   3.9 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$
   3.10 $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$
   3.11 $\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2+\sqrt{(1+t^2)^3}}}$
   3.12 $\int \frac{dx}{(3-x^2)^{3/2}}$
   3.13 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-5}}$
   3.14 $\int \frac{dx}{(x^2+7)^{3/2}}$
   3.15 $\int \sqrt{\frac{m+x}{m-x}}dx$
   3.16 $\int \frac{y^2dy}{\sqrt{a^2+y^2}}$
   3.17 $\int \sqrt{u^2+m^2}du$
   3.18 $\int \sqrt{(y+a)(y+b)}dy$
   3.19 $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$
   3.20 $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$
4. Hallar las integrales, utilizando la integración por partes
   4.1 $\int x^3\ln(x)dx$
   4.2 $\int x^2e^{-x^2}dx$
   4.3 $\int e^{x/2}\cos x dx$
   4.4 $\int x^2\arctan(x)dx$
   4.5 $\int x\arcsin(x)dx$

4.6 $\int \frac{x^2 dx}{x^2-3x+1}$
4.7 $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$
4.8 $\int x^{-2} \ln^2 x dx$
4.9 $\int x(\arctan x)^2 dx$
4.10 $\int (\arcsin x)^2 dx$
4.11 $\int x \sin \sqrt{x} dx$
4.12 $\int \frac{t e^{\arctan t}}{(1+t^2)^{3/2}} dt$
4.13 $\int \sin(\ln x) dx$
4.14 $\int e^{2x} \sin x dx$
4.15 $\int \sin x \ln(\tan x) dx$
4.16 $\int e^{\sqrt[3]{t}} dt$
4.17 $\int \left(x^2 + 5x - 7\right) \cos 3x dx$
4.18 $\int x \tan^2 3x dx$
4.19 $\int \frac{x}{2^x} dx$

5. Resolver las integrales que tienen un trinomio cuadrado
5.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x-x^2}}$
5.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
5.3 $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+3x+7}}$
5.4 $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$
5.5 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$
5.6 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
5.7 $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+x+1}$
5.8 $\int \frac{(5x+3)dx}{2x^2-x+3}$
5.9 $\int \frac{5x dx}{ax^2+bx}$
5.10 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$
5.11 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$
5.12 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+4x}}$
5.13 $\int \sqrt{x^2 + 4x + 13} dx$
5.14 $\int \sqrt{x - x^2} dx$
5.15 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 3\cos x + 7}$
5.16 $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x - \ln^2 x}}$

6. Integrar los siguientes ejemplos que contienen funciones racionales
6.1 $\int \frac{x dx}{2x^3+x^2-13x+6}$
6.2 $\int \frac{\left(x^2+2x-3\right)dx}{(2x+3)(x-2)}$
6.3 $\int \frac{x^4 dx}{x^3+x^2-8x-12}$
6.4 $\int \frac{dx}{x^5-x^4-4x^3-2x^2-x-1}$
6.5 $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+x+1)(x^2+3x+7)}$
6.6 $\int \frac{dx}{x^4-x^2+1}$
6.7 $\int \frac{dx}{(x^2+3x+5)^2}$
6.8 $\int \frac{(2x-3)dx}{(x^2+x+2)^3}$
6.9 $\int \frac{x^3 dx}{x^3+1}$
6.10 $\int \frac{x^4 dx}{x^4-1}$
6.11 $\int \frac{x dx}{(x+3)(x^2+2x+6)}$

6.12 $\int \frac{dx}{x^3(x^2+3)(3x+1)}$

7. Hallar las integrales siguientes, utilizando el método de Ostrogradski.

 7.1 $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x^2+3)^2}$
 7.2 $\int \frac{dx}{(x^3+1)^3}$
 7.3 $\int \frac{\left(x^3+2x^2-x+2\right)dx}{(x^2-2x+3)^2}$
 7.4 $\int \frac{dy}{(y^4-1)^3}$

8. Resolver las siguientes integrales, de funciones irracionales

 8.1 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x+3}}$
 8.2 $\int \frac{\sqrt{x-3}+5}{(x-3)^2+2\sqrt{x-3}}dx$
 8.3 $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$
 8.4 $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$
 8.5 $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$
 8.6 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$
 8.7 $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$
 8.8 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$
 8.9 $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$
 8.10 $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$
 8.11 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$
 8.12 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$
 8.13 $\int \frac{x^4+2x^2+5}{\sqrt{1-x^2}}dx$
 8.14 $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+1}}$
 8.15 $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-2x}}$
 8.16 $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$
 8.17 $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$
 8.18 $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(x+1)}]^2}$
 8.19 $\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$
 8.20 $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$
 8.21 $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$
 8.22 $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$

9. Determinar la solución de las siguientes integrales, de funciones trigonométricas

 9.1 $\int \sin^4\left(\frac{x}{3}\right)dx$
 9.2 $\int \sin^5 3x dx$
 9.3 $\int \cos^4(bx)dx$
 9.4 $\int \cos^7 2x dx$
 9.5 $\int \tan^4(ax)dx$
 9.6 $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$
 9.7 $\int \sqrt[6]{\sin x}\cos^5 x dx$
 9.8 $\int \sin^3(ax)\sqrt{(\cos ax)^3}dx$
 9.9 $\int \sin^5\left(\frac{x}{2}\right)\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$

9.10 $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$
9.11 $\int \sin^3 ax \cos^5 ax dx$
9.12 $\int \sin^4\left(\frac{x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{x}{a}\right) dx$
9.13 $\int \sin^2 3x \cos^4 3x dx$
9.14 $\int \tan^5(mx)\sec^4(mx)dx$
9.15 $\int \tan^3\left(\frac{2x}{3}\right)\sec^5\left(\frac{2x}{3}\right) dx$
9.16 $\int \cot^4(5x)\csc^6(5x)dx$
9.17 $\int \cot^5(nx)\csc^3(nx)dx$
9.18 $\int \sin(2x+m)\sin(x+n)dx$
9.19 $\int \sin(3x)\cos(7x)dx$
9.20 $\int \cos\left(\frac{2x}{3}\right)\cos(4x)dx$
9.21 $\int \sin 2x \cos 7x \sin ax dx$
9.22 $\int \cos 3x \sin 6x \cos \frac{x}{5} dx$
9.23 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$
9.24 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$
9.25 $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$
9.26 $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$
9.27 $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin x + \cos x}$
9.28 $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$
9.29 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2-\cos 2x}}$
9.30 $\int \frac{\cos x dx}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$
9.31 $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$
9.32 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}}$

10. Integrar los siguientes ejercicios, con funciones hiperbólicas

10.1 $\int \sinh^3(ax) dx$
10.2 $\int \sinh^4 x \cosh^3 x dx$
10.3 $\int \sinh^3 x \cosh^6 x dx$
10.4 $\int \sinh^4 bx \cosh^2 bx dx$
10.5 $\int \tanh^3 ax dx$
10.6 $\int \coth^4\left(\frac{x}{4}\right) dx$
10.7 $\int \cosh^4\left(\frac{x}{2}\right) dx$
10.8 $\int \frac{dx}{\sinh^2 x + \cosh^2 x}$
10.9 $\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x}$
10.10 $\int \frac{dx}{\sinh^3 x \cosh^3 x}$

11. Hallar las siguientes integrales, utilizando para ello sustituciones trigonométricas e hiérbólicas

11.1 $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+7}}$
11.2 $\int \sqrt{x^2+3x-5}dx$
11.3 $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{10-4x-x^2}}$
11.4 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+16}}$
11.5 $\int \sqrt{5-6x-x^2}dx$
11.6 $\int \left(x^2-x+1\right)^{3/2} dx$
11.7 $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$
11.8 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$

12. Miscelánea de ejercicios sobre integrales

12.1 $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$
12.2 $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}$
12.3 $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$
12.4 $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$
12.5 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+1}}$
12.6 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$
12.7 $\int \frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)dx}{1-\sqrt{1-x^2}}$
12.8 $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$
12.9 $\int x\ln\left(4+x^4\right)dx$
12.10 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
12.11 $\int x\sqrt{1+x^2}\ln\sqrt{x^2-1}dx$
12.12 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)dx$
12.13 $\int \frac{\sin 4x dx}{\sin^8 x+\cos^8 x}$
12.14 $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx$
12.15 $\int \frac{x\arctan x dx}{\sqrt{1+x^2}}$
12.16 $\int \frac{\arctan e^{x/2}dx}{e^{x/2}(1+e^x)}$
12.17 $\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx}{(1-x^2)^2}$
12.18 $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}$
12.19 $\int \sqrt{\tanh^2 x+1}dx$
12.20 $\int \frac{dx}{x^8+x^4+1}$
12.21 $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$
12.22 $\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2-1)^3}}$
12.23 $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\right)^2}$
12.24 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
12.25 $\int \frac{1+\sqrt{\cot ax}}{\sin^2 ax}$
12.26 $\int \frac{dx}{(\tan bx+1)\sin^2 bx}$
12.27 $\int \frac{\sinh\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+1}}dt$
12.28 $\int z^2\ln\sqrt{z+1}dz$
12.29 $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^{1/4}}dx$
12.30 $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x}$
12.31 $\int e^{x^2}dx$
12.32 $\int \sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$

13. Utilizando la definición de integral definida evaluar los siguientes ejercicios.

13.1 $\int_{-1}^{1}(x+3)dx$
13.2 $\int_{1}^{3}\left(x^2-2x+5\right)dx$
13.3 $\int_{0}^{1}3x^4 dx$
13.4 $\int_{-2}^{2}\left(x^3+x^2-4x-2\right)dx$
13.5 $\int_{-2}^{1}\left(x^3+2x\right)dx$

13.6 $\int_{-1}^{3} \left(x^2-1\right)^2 dx$
13.7 $\int_{0}^{a} \sin x dx$
13.8 $\int_{0}^{4} 2\sqrt{x} dx$

14. Calcular las siguientes ejercicios, utilizando el primero y segundo (fórmula de Newton – Leibniz) teoremas fundamentales del cálculo. Halla $F'(x)$ de:

14.1 $F(x)=\int_0^x e^t \ln|t| dt$
14.2 $F(x)=\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$
14.3 $F(x)=\int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
14.4 $F(x)=\int_1^{2x} \cosh\left(2t^2+1\right) dt$
14.5 $F(x)=\int_x^{x^2} \ln^2 t dt$
14.6 $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2} \left(\cos t+t^2\right) dt$
14.7 $F(x)=\int_0^{\int_0^{x^3} \frac{dt}{1+\sin^2 t}} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$
14.8 $F(x)=\int_{x^3}^{x} \left(\frac{1}{3t+t^2}+\sqrt{1+t^4}\right) dt$

15. Encontrar los valores de las siguientes integrales definidas:

15.1 $\int_{-2}^{3} (x+2)^3 dx$
15.2 $\int_{-3}^{5} \left(x^4-2x^2+5\right) dx$
15.3 $\int_{-1}^{1} 5x\sqrt{4-x^2} dx$
15.4 $\int_{1}^{2} \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2} dx$
15.5 $\int_{0}^{1} \frac{\left(x^2+2x\right)}{\sqrt{x^3+3x^2+4}} dx$
15.6 $\int_{0}^{3} \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$
15.7 $\int_{0}^{1} \frac{x^3+1}{x+1} dx$
15.8 $\int_{-2}^{1} (x+1)\sqrt{x+3} dx$
15.9 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^3 \frac{x}{3} dx$
15.10 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 2x dx$
15.11 $\int_{0}^{1/2} \frac{x \cdot \arcsin x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15.12 $\int_{0}^{2} \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)^{3/2}} dx$
15.13 $\int_{-2}^{5} \left(\left|9-x^2\right|-x^2\right) dx$
15.14 $\int_{-1}^{1} \frac{x dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$
15.15 $\int_{1/2}^{1} \ln\left|x^2+1\right| dx$
15.16 $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|-x} dx$
15.17 $\int_{-5}^{5} \left|\frac{x+3}{x^2-16}\right| dx$
15.18 $\int_{-6}^{3} \left|x^2+3x-4\right| dx$
15.19 Demostrar que: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$

16. Calcular las siguientes integrales, utilizando el cambio de variable adecuado.

16.1 $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$
16.2 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$
16.3 $\int_{0}^{2} \frac{x^5}{\left(x^3+1\right)^{3/2}} dx$

16.4 $\int_{\sqrt{2}/2}^{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{3+x}} dx$
16.5 $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$
16.6 $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$
16.7 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$
16.8 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$
16.9 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$
16.10 $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$

17. Determinar si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes.

17.1 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$
17.2 $\int_0^1 \ln|x|dx$
17.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$
17.4 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$
17.5 $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$
17.6 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
17.7 $\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
17.8 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x^2+1)^{3/2}}dx$
17.9 $\int_0^{2a} \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}dx$
17.10 $\int_0^{+\infty} \frac{dx^2}{(x^2+3)^2}$

18. Encontrar el valor aproximado de los siguientes integrales por medio de la regla de los trapecios y de Simpson.

18.1 $\int_0^1 \frac{dx}{2+x} \quad (n=8)$
18.2 $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} \quad (n=12)$
18.3 $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}dx \quad (n=6)$
18.4 Calcular la constante de Katalan $G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}$, para $n = 10$.
18.5 $\int_1^9 \sqrt{x}dx$
18.6 $\int_0^{\frac{\pi}{1}\sqrt{x}dx} \frac{\sin x}{x}dx$

19. Determinar el área de las siguientes regiones:

19.1 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
19.2 $y^2 = x^2\left(a^2-x^2\right)$
19.3 $y = \frac{1}{x^2+1}$, en $x \in [-1,1]$
19.4 $x = -2y^2+10y-8$, en $y \in [1,4]$
19.5 $y = \ln|x|$, en $x \in [1,e]$
19.6 $y = x^3+1$, en $x \in [1,3]$
19.7 $y^2 = 16-8x$, en $y \in [-4,4]$
19.8 $x = y^2-1$, en $y \in [-1,1]$
19.9 $x = -2y^2+10y-8$, en $y \in [1,4]$
19.10 $R = \left\{(x,y)\epsilon R^2 \mid 0 \le y \le x^2, 0 \le x \le 6-y\right\}$
19.11 $R = \left\{(x,y)\epsilon R^2 \mid x^2-2x \le y \le 6x-x^2\right\}$

20. Problemas de cálculo de áreas

20.1 Hallar el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $2x - y = 4$

20.2 Calcular el área de la región comprendida entre la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$ la parábola $y = \frac{x^2}{2}$

20.3 Determinar el área de la región limitada por la gráfica $y = \frac{2|x|}{x^2+1}$, el eje "x" y las rectas $x = -2$ y $x = 1$

20.4 Hallar el área de la región limitada por los arcos de las parábolas: $x^2 = 9y - 81$, $x^2 = 4y - 16$, $x^2 = y - 1$, la región no se intercepta con el eje "y".

20.5 Determinar el área de la figura plana que forman las curvas $y = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$; $y = \pm\sqrt{x}$

20.6 Calcular el área mayor encerrada por las curvas $x^2 - 2y^3 = 0$, $x^2 - 8y = 0$; $y = 3$

20.7 Hallar el área de la región limitada por $x^2 = 4ay$, $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$

20.8 Determinar el área de la región encerrada por las curvas $y = 4 - \ln|x+1|$, $x = 0$ y $y = \ln|x+1|$

20.9 Calcular el área de la figura limitada por las funciones $y = \sqrt{x^2-3}$, $y = 0$.

20.10 Encontrar el área de un lazo de la curva $y^2(a^2+x^2) = x^2(a^2 - x^2)$

20.11 Calcular el área de la región limitada por:

20.12 $\begin{cases} \sqrt{|x-1|} & x \leq 5 \\ (x-3)^2 - 2 & x > 5 \end{cases}$

20.13 el eje de las "x" y las rectas $x = -3$, y $x = 7$

20.14 Determinar el área de la región, en el primer cuadrante limitada por las curvas:

20.15 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $y = -x^3 + 4x^2 - 3x$

20.16 Hallar el área de la región limitada por el lazo de la Folium de Descartes $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t \neq 1$.

20.17 Calcular el área de la región limitada por la curva $x = \frac{2at}{1+t^2}$, $\frac{\pi t}{1+t}$, $t \notin [0, +\infty]$ y el eje "y".

20.18 Determinar el área de una rama de la trocoide $x = a\,t - b$ sint, $y = a - b\,\cos t$, $(a < b \leq a)$.

20.19 Encontrar el área de la región limitada por la curva $x = a\,\cos^5 t$, $y = b\sin^5 t$

20.20 Hallar el área de la región encerrada por el lazo de la curva: $x = \cos^3 t$, $y = \cos^2 t\,\sin t$.

20.21 Calcular el área de la región limitada por la lemniscata $r^2 = 16\cos 2\theta$

20.22 Hallar el área de la región encerrada por la curva $r = 2\sin 2\theta$

20.23 Encontrar el área interior a $r = 4\sin\theta\,\cos^2\theta$, y exterior a $r = \sin\theta$.

20.24 Determinar el área de la región limitada por la curva $r = 2\,a\cos 3\theta$ que esta fuera del circulo $r = a$.

20.25 Calcular el área común a los cardiodes $r = a(1 \pm \cos\theta)$

21. Problemas propuestos de longitud de curva

21.1 Calcular la longitud del arco de la curva $y^2 = 4x - x^2$, comprendido entre los dos puntos en que corta al eje "x".

21.2 Determinar la longitud de arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendido dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$

21.3 Si $F(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\,dt$, encuentre la longitud de arco de la gráfica de F desde el punto $x = 0$ hasta $x = \pi$.

21.4 Calcular la longitud total de la curva $8y^2 = x^2(1-x^2)$.

21.5 Hallar la longitud del arco de la curva $x = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|y|$, si

$y \in [1, \mathrm{e}]$.

21.6 Determinar la longitud de la curva $y = \sqrt{\sec^2 x + 1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\sec^2 x+1}}{\sec x}\right|$, si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

21.7 Encuentre la longitud de la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, en el primer cuadrante, desde el punto donde $x = \frac{a}{8}$ hasta donde $x = a$.

21.8 Calcular la longitud total de la curva $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$

21.9 Hallar el perímetro de la región limitada por $y = x^2 \cap x = y^2$

21.10 Determine la longitud del arco de la curva $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$

21.11 Encuentre la longitud de la envolvente del circulo: $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ desde $t = 0$ hasta $t = T$.

21.12 Calcular la longitud de la curva cuyas ecuaciones $x = \frac{t^2}{2} + t$, $y = \frac{t^2}{2} - t$ en el segmento $[0, 1]$

21.13 Determine la longitud de la curva dada por: $x = t - a \tanh\left(\frac{t}{a}\right)$, $y = a\operatorname{sech}\left(\frac{t}{a}\right)$, si $t \in [-a, 2a]$.

21.14 Hallar la longitud de un arco de la cicloide dada por: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$

21.15 Encuentre la longitud de la curva $x = e^{-t} \sin t$, $y = e^{-t} \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

21.16 Calcular la longitud de la curva $r = a \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en el intervalo de $\theta \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

21.17 Determine la longitud de arco de la espiral hiperbólica $r\theta = 1$ desde el punto hasta el punto $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

21.18 Hallar la longitud del arco de la curva $r = \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)$ comprendida entre $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

21.19 Calcular la longitud del arco de la espiral logarítmica $r = a\,\mathrm{e}^{m}$, $(m > 0)$, que se encuentra dentro del circulo $r = a$.

21.20 Encuentre la longitud del arco de la parábola $r = a \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, cortada por la recta perpendicular que pasa por el polo.

22. Problemas propuestos sobre cálculo de volúmenes.

22.1 Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies obtenidas en la rotación de las siguientes curvas.

22.2 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$ $(0 \le x \le a)$ en torno al eje “x”.

22.3 $y = 2x - x^2$, $y = 0$ a) en torno al eje “x”; b) en torno al eje “y”; c) en torno a la recta $x = 3$ y d) en torno a la recta $y = 2$.

22.4 $y = \sin x$, $y = 0$ $(x \le x \le \pi)$ a) en torno al eje “x”; b) en torno al eje “y”; c) en torno a la recta y d) en torno a la recta $y = -1$.

22.5 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$ a) en torno al eje “y”; b) en torno a la recta $y = 2$ y c) en torno al eje “x”.

22.6 $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = 0$ $(0 \le x \le \infty)$ a) en torno al eje “x”; b) en torno al eje “y”.

22.7 $x^2 + (y - k)^2 = r^2$ $(0 < r \le k)$ en torno al eje “x”.

22.8 $x^2 - xy + y^2 = b^2$ en torno del eje “x”.

22.9 $x = y^2$, $y = 2$, $x = 0$ en torno del eje “x”.

22.10 $x = -2y^2 + 10y - 8$, $x = y - 1$: a) en torno al eje “x”; b) en torno eje “y”; c) en torno a la recta $x = 5$ y d) en torno a la recta $y = 1$.

22.11 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $\quad (0 \le t \le 2\pi)$, $y = 0$: a) en torno al eje “x”; b) en torno al eje “y”; c) en torno a la recta $x = 5$ y d) en torno a la recta $y = 1$.

22.12 $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ $\quad (0 \le t \le 2\pi)$ a) en torno al eje “x”;

b) en torno al eje "y" y c) en torno a la recta $y = 2a$. a) en torno al eje "x" y b) en torno al eje "y".

22.13 Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la superficie del lazo de la curva $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^2$ en torno: a) del eje "x"; b) del eje "y".

22.14 Determinar el volumen de una cuña, cortada de un cilindro circular por un plano, que pasando por el diámetro de la base está inclinado respecto a ella, formando un ángulo . El radio de la base es igual a R.

22.15 Hallar el volumen del cono elíptico recto, cuya base es una elipse de semiejes a y b y cuya altura es igual a h.

22.16 Calcular el volumen del obelisco, cuyas bases paralelas son rectángulos de lados A, B y a, b y la altura igual a h.

22.17 Determinar el volumen del elipsoide . $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

22.18 Hallar el volumen del solido limitado por los cilindros$x^2+z^2 = a^2 e y^2 + z^2 = a^2$

23. Ejercicios sobre cálculo de áreas de revolución. Determinar las áreas de las superficies engendradas al girar las siguientes líneas.

    23.1 $y = x\sqrt{\frac{x}{a}} \quad (0 \le x \le a)$ en torno del eje "x".

    23.2 $y = \tan x \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$ en torno del eje "x".

    23.3 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b \le a)$ a) en torno del eje "x"; b) en torno del eje "y".

    23.4 $x^2 + (y - b)^2 = a^2 (b \ge a)$ en torno del eje "x".

    23.5 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ en torno del eje "x".

    23.6 $\pm x = a \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}$ en torno al eje "x".

    23.7 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$ a) en torno al eje "x"; b) en torno al eje "y" y c) en torno a la recta $y = 2a$

    23.8 $x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t$en torno a la recta $x = \frac{3}{2}a$

    23.9 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (Lemniscata) en torno al eje polar.

    23.10 $r = 2a(1 + \sin\theta)$ (cardiode) en torno al eje $\frac{\pi}{2}$.

24. Problemas propuestos de Aplicaciones físicas.

    24.1 Calcular los momentos estáticos, respecto a los ejes de coordenadas, del segmento de la línea recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, comprendido entre dichos ejes coordenadas.

    24.2 Encontrar los momentos estáticos del rectángulo de lados a y b, respecto a estos mismos lados.

    24.3 Determinar los momentos estáticos, respecto a los ejes "x" y "y", y las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/5}$, situado en el primer cuadrante.

    24.4 Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$, comprendido entre $x = a$ y $x = a$.

    24.5 Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y por los ejes de coordenadas "x" y "y" $(x \ge 0,\ y \ge 0)(0 \le t \le 2\pi)$

    24.6 Calcular el centro de gravedad del arco de la circunferencia de radio a, que subtiende el ángulo 2α.

    24.7 Encontrar el centro de gravedad de la región limitadas por las curvas $x^2 = 8y$, $x^2 - 24 = -16y$

    24.8 Hallar el centro de gravedad de la región finita, en el primer cuadrante, comprendida entre la curva $y = x\,\mathrm{e}^x$ y el eje "x".

    24.9 Determinar el centro de gravedad de la figura limitada por las gráficas $x = 4y - y^2$, $y = x$.

24.10 Calcular el centro de gravedad de la región plana limitada por las curvas $y = -x^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

y las rectas $x = -1$, $x = 2$.

24.1 Hallar el centro de gravedad del hemisferio de radio a, con el centro en el origen de coordenadas, sobre el plano "xoy".

24.2 Determinar las coordenadas del centro de masas, momento de inercia y radio de giro respecto al eje "y", de un cono homogéneo circular recto de altura H y radio de la base R.

24.3 Encontrar el momento de inercia de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, respecto al eje "x".

24.4 Calcular el momento de inercia y el radio de giro del arco de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ donde $(0 \leq x \leq a)$ respecto al eje "y".

24.5 Hallar el momento de inercia y el radio de giro de un segmento parabólico limitado por la recta $y = 3$ y la parábola $y = 4 - x^2$, respecto al eje "x".

24.6 Determinar el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje "x" de la superficie generada por rotación, alrededor del eje "x", de un arco completo de la cicloide , $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

24.7 Un resorte tiene una longitud natural de 16 cm, si se requiere una fuerza de 60 dinas para mantener el resorte estirado 2 cm, cuanto trabajo se realizará para estirar el resorte hasta 3 cm de la posición de equilibrio.

24.8 Un muelle tiene una longitud natural de 8 pulgadas, si una fuerza de 20 libras estira el resorte pulgada. Hallar el trabajo necesario para alargar el resorte de 8 a 13 pulgadas.

24.9 Encontrar la longitudde un resorte metálico pesado, si el trabajo efectuado al alargarlo desde una longitud de 2 pies hasta una longitud de 3 pies es la tercera parte del trabajo efectuado al alargarlo de 3 pies hasta una longitud de 4 pies.

24.10 Un resorte tiene una longitud natural de 6 pulg. Una fuerza de 12500 libras comprime el resorte a $5\frac{1}{2}$ pulg. Encontrar el trabajo realizado al comprimirlo de 6 pulg a 5 pulg. La ley de Hooke se cumple para comprimir como para extender.

24.11 Un tanque de agua en forma de un cono circular recto invertido, mide 6m de diámetro en su parte superior y 5m de profundidad, si la superficie del agua está 2m por debajo de la tapa del tanque. Encuentre el trabajo realizado al bombear el agua: a) hasta la parte superior del tanque; b) hasta una altura de 2m sobre el borde del tanque.

24.12 Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paralelepípedo rectangular de 6 pies de profundidad, 18 pies de ancho y 28 pies de largo. Encuentre el trabajo necesario para bombear el agua del tanque hasta un nivel de 2 pies arriba de la superficie del tanque.

24.13 Un depósito cilíndrico vertical de radio 3m y altura 8m se encuentra lleno de petróleo. Hallar el trabajo al bombear el petróleo: a) hasta el nivel más alto del tanque; b) hasta el nivel de 6m por encima de dicho depósito.

24.14 Un cuenco semiesférico con un radio de 3m se llena de agua a una profundidad de 1.5m. Encuentre el trabajo realizado al bombear el agua la parte superior del tanque.

24.15 Que trabajo hay que realizar con una grúa para sacar un bloque de hormigón armado del fondo de un río de 20m de profundidad, si el bloque tiene forma de tetraedro equilátero de 1.5m de lado, siendo la densidad del hormigón 2.400 kg/m^3.

24.16 Determinar el trabajo realizado en la expansión adiabática del aire, hasta ocupar un volumen $V_1 = 12\,m^3$, si el volumen inicial $V_0 = 1{,}5\,m^3$ es y la presión $p_0 = 1,2\,kgf/cm^2$.

24.17 Una presa vertical tiene forma de trapecio. Calcular la fuerza total del agua sobre dicha presa, sabiendo que la base superior tiene 70 m, la base inferior 50 m y su altura 25 m.

24.18 Hallar la presión que ejerce un líquido, cuyo peso específico es , sobre una elipse vertical, de ejes 2a y 2b, el centro de la cual está sumergido hasta una profundidad h. El eje mayor 2a de la elipse es paralelo a la superficie del líquido $h \geq b$.

24.19 Un triángulo de base b y altura h está sumergido verticalmente en agua, con el vértice hacia abajo, de forma, que su base coincida con la superficie del agua. Hallar la fuerza que el agua ejerce sobre él.

Bibliografía

[1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Laurentiev. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Español. Trad. por Manuel López Rodríguez, Eduardo Abad Rius y Andrés Ruiz Merino. Nov. de 2014 (vid. pág. 2).

[2] Steven C Chapra, Raymond P Canale y Sergio M Sarmiento Ortega. *Métodos numéricos para ingenieros*. es. 7ma. OCLC: 1046069364. México, D.F.: McGraw-Hill, 2015 (vid. pág. 4).

[3] Crisólogo Dolores Flores, Gabriel Alarcón Bello y Delia Faustina Albarrán Millán. «Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria». Español. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME* 5.3 (2002). Publisher: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, págs. 225-250. (Visitado 06-01-2022) (vid. pág. 10).

[4] Dr Salvador Vega León. «Universidad Autónoma Metropolitana». es. En: (), pág. 37 (vid. págs. 10, 18).

[5] Julio del Carmen Lizarazo Osorio, Julian Mauricio Fajardo Patiño y Oscar Jardey Suárez. *Cálculo multivariado con el uso de WxMaxima*. es. OCLC: 1280138009. Colombia, 2020. (Visitado 05-01-2022) (vid. pág. 18).

[6] Ludwing Javier Salazar Guerrero y Hugo Bahena Román. *Álgebra*. es. OCLC: 1083461829. Ciudad de México: Grupo Editorial Patria, 2018. (Visitado 06-01-2022) (vid. pág. 23).

[7] Sergio Meneses Toledo. «Cálculo Diferencial Francisco J. O. Campos mibibliotecavirtual». En: (). (Visitado 06-01-2022) (vid. pág. 23).

[8] Genaro Zavala, Pablo Barniol y Santa Tejeda. «Evaluación del entendimiento de gráficas de cinemática utilizando un test de opción múltiple en español». En: *Revista Mexicana de Fisica* 65 (jul. de 2019), págs. 162-181. DOI: 10.31349/RevMexFisE.65.162 (vid. pág. 94).

[9] Francisco Suarez Vargas. *Análisis matemático de señales y sistemas*. Español. 2020.ª ed. Mayo de 2021 (vid. pág. 105).

[10] Rolando Valencia Chuquimia. «Cinemática 1, movimiento rectilíneo uniforme y variado». es. Accepted: 2017-08-31T18:37:18Z. Thesis. Ago. de 2017. (Visitado 06-01-2022) (vid. pág. 115).

AUTORES

Rafael Santiago Albuja Echeverría

Profesional especialista en la computación aplicada a la docencia en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Graduado de Ingeniero Civil en la Universidad de Guayaquil, Magister en Docencia Universitaria e Investigación Educativa, Universidad Nacional de Loja, y Magister en Matemática Básica ESPOCH. Gratamente docente de la Politécnica de Chimborazo del Departamento de Física y Matemáticas. Facultad de Mecánica desde 1991 hasta la presente. Impartiendo cátedras de Análisis Matemático, Algebra Lineal, Métodos numéricos, Geometría Plana y Analítica, Trigonometría, y Resistencia de Materiales. Coordinador del campo de Ciencias básicas, en la carrera de Ingeniería de Mantenimiento Industrial.

Alex Giovanny Tenicota García

Ecuatoriano de 34 años, magíster en Gestión del Mantenimiento Industrial de la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo, y actualmente maestrante en el programa de Matemática Computacional en la Universidad internacional de La Rioja – España. Con 5 años de experiencia en docencia universitaria en la Facultad de Mecánica ESPOCH, en asignaturas técnicas y de Ciencias básicas. Publicación alrededor de 15 obras de relevancia, y entre las principales se mencionan estudios de aerodinámica, estudio de factores el riesgo, análisis de confiabilidad, y modelación matemática y estadística.

Edisson Fernando Calderón Freire

Ingeniero mecánico, graduado en la Escuela Politécnica Nacional en el año 2012. Master en Ingeniería, Procesado y Caracterización de Materiales en la Universidad Politécnica de Valencia en el año 2016. Experiencia docente en educación superior, realizadas en el Instituto Tecnológico Superior Central Técnico, de la ciudad de Quito, impartiendo cátedras de Matemática, Informática, Soldadura de producción y Mecánica de taller. En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, de la ciudad de Riobamba las cátedras de Termodinámica, Ingeniería de Materiales, Ensayos no destructivos entre otras. Varias publicaciones de alto impacto. Conocimientos y experiencias puestas al servicio de la comunidad, y hoy en día cualidades disponibles para promover profesionales de elite que puedan solucionar problemas de la actualidad.

TOMO 1

Análisis Matemático para Ingenieros

Cálculo integral de funciones de una variable

Alex Giovanny Tenicota García
Edisson Fernando Calderón Freire

Rafael Santiago Albuja Echeverría
Docente – Investigador, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).
Magister en Docencia Universitaria e Investigación Educativa, Universidad Nacional de Loja.
Magister en Matemática Básica ESPOCH.

Alex Giovanny Tenicota García
Docente – Investigador, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).
Magíster en Gestión del Mantenimiento Industrial en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Edisson Fernando Calderón Freire
Docente – Investigador, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).
Master en Ingeniería, Procesado y Caracterización de Materiales en la Universidad Politécnica de Valencia.

ISBN: 978-9942-42-091-6

9 789942 420916

2022