

# Electrostática

Pedro Severo Infante Moreira  
Manuel Antonio Meneses Freire



ESPOCH

2022

## Electrostática

---

# Electrostática

---

**Pedro Severo Infante Moreira**  
**Manuel Antonio Meneses Freire**



**Electrostática**

© 2022 Pedro Severo Infante Moreira  
Manuel Antonio Meneses Freire

© 2022 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½  
Instituto de Investigaciones  
Dirección de Publicaciones Científicas  
Riobamba, Ecuador  
Teléfono: 593 (03) 2 998-200  
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego  
(*peer review*)

Corrección y diseño:  
Editorial Politécnica ESPOCH

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio,  
sin la previa autorización por escrito de los propietarios del  
*Copyright*

CDU: 537  
Electrostática  
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo Instituto de Investigaciones  
Dirección de Publicaciones, año 2022  
203 pp. vol: 1 17 x 24 cm  
ISBN: 978-9942-42-721-2  
1. Electricidad  
2. Electrostática

## ÍNDICE GENERAL

Introducción	7
CAPÍTULO I	9
1. VECTORES Y ESPACIO TRIDIMENSIONAL	9
1.1 Puntos en el espacio	9
1.2 Planos coordenados	9
1.3 Ecuación de una esfera en el espacio	12
1.4 Vectores	14
1.5 Ecuaciones de rectas y planos	18
1.6 Funciones vectoriales y curvas en el espacio	21
1.7 Derivadas e integrales de funciones vectoriales	24
1.8 Funciones de dos variables	27
1.9 El vector gradiente	33
1.10 Coordenadas cilíndricas y esféricas	35
1.11 Gradiente en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas	36
1.12 Divergencia en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas	37
1.13 Rotacional en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas	37
1.14 Teorema de la divergencia	38
1.15 Teorema de Stoke	39
1.16 Problemas propuestos	41
CAPÍTULO II	43
2. CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO EN AUSENCIA DE DIELECTRICOS	43
2.1 Ley de Coulomb	43
2.2 Campo eléctrico estático	45

2.3	Campo eléctrico estático para diferentes distribuciones de carga	48
2.4	Potencial electrostático	52
2.5	Intensidad de campo eléctrico a partir del potencial electrostático	61
2.6	Superficies equipotenciales	66
2.7	Ley de Gauss. Ángulo sólido	67
2.8	Comportamiento de los conductores en el campo electrostático. Pantalla electrostática	70
2.9	Forma diferencial de la Ley de Gauss	75
2.10	Ecuación de Poisson y Laplace	79
2.11	Relación entre potencial electrostático y cargas sobre cuerpos conductores. Capacitancia	80
2.12	Problemas resueltos	83
2.13	Problemas propuestos	97
CAPÍTULO III		100
3.	CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO EN PRESENCIA DE DIELECTRICOS	100
3.1	Comportamiento de dieléctricos en un campo eléctrico estático	100
3.2	Potencial y campo eléctrico de un dipolo y de un agregado de dipolo	101
3.3	Distribución de carga equivalente para un dieléctrico polarizado	107
3.4	Forma generalizada de la Ley de Gauss. El vector de desplazamiento eléctrico	111
3.5	Condiciones de frontera	115
3.6	Problemas resueltos	119
3.7	Problemas propuestos	146

---

CAPÍTULO IV	148
4. CORRIENTE ELÉCTRICA ESTACIONARIA EN CONDUCTORES	148
4.1 Densidad e intensidad de corriente	148
4.2 Ecuación de la continuidad	151
4.3 Mecanismo de flujo de corriente en sólidos y líquidos conductores	153
4.4 Fuerza electromotriz de un generador	156
4.5 Ley de Ohm en forma puntual. Conductividad y resistividad	158
4.6 Ley de Joule	160
4.7 Propiedades generales de los campos de corriente estacionaria	162
4.8 Condiciones de frontera	165
4.9 Conductancia y resistencia	169
4.10 Problemas resueltos	172
4.11 Problemas propuestos	197
Referencias bibliográficas	199

## INTRODUCCIÓN

El presente libro de Electrostática, se basa en la experiencia adquirida en las aulas de dos instituciones educativas, esto es, la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y, la Universidad Nacional de Chimborazo, durante una trayectoria de 27 años. La publicación de esta obra, es con la finalidad de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los campos electrostáticos.

La obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial, integral y vectorial. La parte teórica, presenta los principales aspectos en los que se basa la electrostática y, posteriormente aplicarlos en el desarrollo de los problemas, en los que paso a paso se va guiando al estudiante, convirtiéndose en una herramienta de trabajo de fácil entendimiento.

A partir del capítulo 2, se hace énfasis en las leyes de Coulomb, Gauss y Ohm; así como también, a los teoremas de la divergencia y de Stokes. Además, se utilizan las ecuaciones de Lorenz, Poisson y Laplace, en el desarrollo de los problemas. A continuación, se presenta una breve descripción de los contenidos en cada uno de los cuatro capítulos.

El capítulo 1, trata sobre el cálculo vectorial, se hace un breve repaso de los valores escalares y vectores. Se analiza el álgebra vectorial, haciendo énfasis en los vectores unitario y normal, la suma, resta y multiplicación de vectores con escalares, especialmente destacando el producto punto y producto cruz. Se analizan los sistemas de coordenadas ortogonales rectangulares o cartesianas, cilíndricas y esféricas. Se realiza el cálculo de funciones escalares y vectoriales, haciendo énfasis en el gradiente de una función escalar, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas; se determina la divergencia y el rotacional de una función vectorial, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Por último, se analizan los teoremas de la divergencia y de Stokes.



El capítulo 2, trata sobre el campo eléctrico estático en ausencia de dieléctricos. Se realiza el estudio de las fuerzas y campos eléctricos producidos por cargas eléctricas estáticas para distribuciones lineales, superficiales, volumétricas y puntuales; las mismas que ejercen una fuerza eléctrica en cualquier punto del espacio que las rodea y, se puede calcular la magnitud de la fuerza y la intensidad del campo eléctrico, utilizando la Ley de Coulomb. A partir del campo eléctrico, se puede determinar el potencial eléctrico o viceversa. Se analiza la Ley de Gauss a partir del ángulo sólido en forma integral y diferencial, con la que se obtienen las ecuaciones de Poisson y Laplace. Finalmente, se realiza el análisis de la capacitancia entre materiales conductores.

El capítulo 3, trata sobre el estudio del campo eléctrico en presencia de materiales dieléctricos, en el que se determina el potencial y campo eléctrico de un dipolo y de un agregado de dipolo, con las que se obtienen las densidades superficiales y volumétricas de polarización. Se obtiene la forma generalizada de la Ley de Gauss y el vector de desplazamiento eléctrico en forma integral y diferencial. Por último, se realiza un análisis de las condiciones de frontera entre dos materiales o medios de los vectores campo eléctrico y de desplazamiento.

Finalmente, el capítulo 4, trata sobre el estudio de la corriente eléctrica estacionaria en materiales conductores. Se determina la densidad e intensidad de corriente, la ecuación de la continuidad. Se realiza el análisis del mecanismo de flujo de corriente en sólidos y líquidos conductores, y se explica la ecuación de Lorenz. Posteriormente se analiza la fuerza electromotriz de un generador. Se explica la Ley de Ohm en forma puntual. Se analizan y calculan sistemas de puesta a tierra.

# CAPÍTULO I.

## 1. VECTORES Y ESPACIO TRIDIMENSIONAL

### 1.1 PUNTOS EN EL ESPACIO

Un punto en el plano se localiza mediante un par ordenado de números reales,  $(x, y)$ . En el espacio un punto es localizado por una terna de números reales  $(x, y, z)$ , por tal razón se denomina tridimensional (Stewart, 2013).

### 1.2 PLANOS COORDENADOS

**Plano xy:**  $z = 0$

En la Figura 1.1 el plano  $xy$  se puede considerar también sus ecuaciones paramétricas:

$$x = s; y = t; z = 0 \quad \text{donde } s, t \in \mathbb{R}$$

En consecuencia, todos los planos coordenados paralelos al plano  $xy$  son traslaciones verticales de este plano a lo largo del eje  $z$ , tanto en su parte positiva como en la negativa.

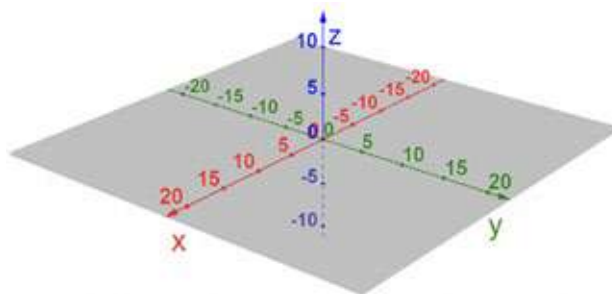


Figura 1.1 Plano xy.

**Plano xz:**  $y = 0$

En la Figura 1.2 el plano  $xz$  se puede considerar también como:

$$x = s; y = 0; z = t \quad \text{donde } s, t \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, todos los planos coordenados paralelos al plano  $xz$  son traslaciones horizontales de este plano a lo largo del eje  $y$ , tanto en su parte positiva como en la negativa.

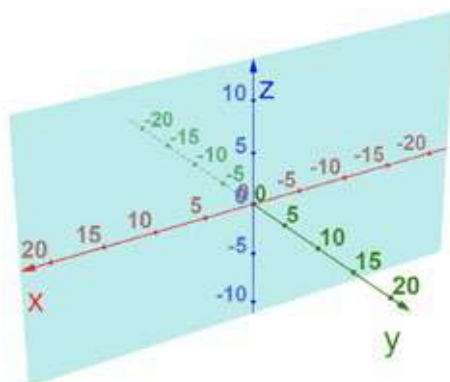


Figura 1.2 Plano  $xz$ .

### Plano $yz$ : $x = 0$

En la Figura 1.3 se considera  $x = 0$ ;  $y = s$ ;  $z = t$  donde  $s, t \in \mathbb{R}$

En consecuencia, todos los planos coordenados paralelos al plano  $yz$  son traslaciones horizontales de este plano a lo largo del eje  $x$ , tanto en su parte positiva como en la negativa.

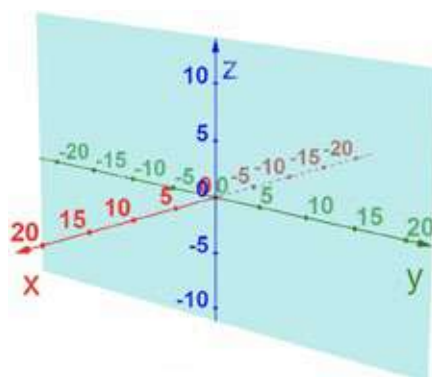


Figura 1.3 Plano  $yz$ .

### Planos paralelos a los planos coordenados

- Plano:  $x = a$  Plano:  $x=a$  es //al Plano:  $yz$  ( $x=0$ )
- Plano:  $y = b$  Plano:  $y =b$  es // al Plano:  $xz$  ( $y=0$ )
- Plano:  $z = c$  Plano:  $z=c$  es // al Plano:  $xy$  ( $z=0$ )
- Plano:  $x = 2$  Plano:  $x =a$  es // al Plano:  $yz$  ( $x=0$ )

- Plano:  $y = b$  es // al Plano:  $xz$  ( $y=0$ )
- Plano:  $z = c$  es // al Plano:  $xy$  ( $z=0$ )

### Punto

La intersección de los planos  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$  (paralelos a los planos coordenados), es el punto A de coordenadas  $(a, b, c)$  como se observa en la Figura 1.4 (Stewart, 2013).

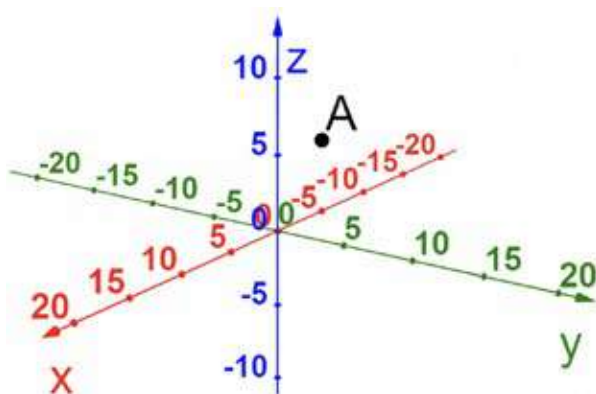


Figura 1.4 Punto A en el espacio.

### Ejemplo 1

Como representaciones numéricas, los puntos  $B(4, 3, 5)$  y  $C(3, 2, 6)$  se dibujan en la Figura 1.5 siguiente:

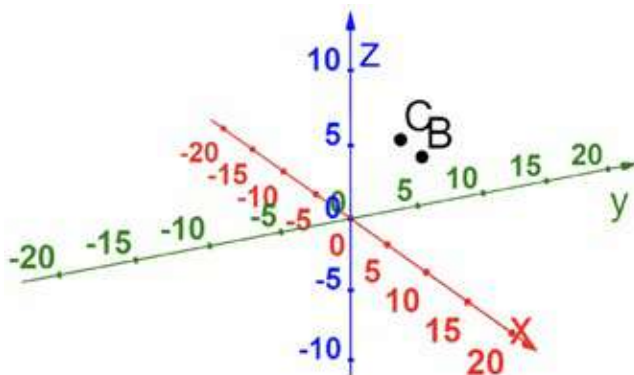


Figura 1.5 Puntos B y C.

### Fórmula de distancia de dos puntos en tres dimensiones

La distancia  $\overline{P_1P_2}$  entre los puntos  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  esta dada de la siguiente manera

(Stewart, 2013):

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

La distancia del punto  $P(2, 1, 7)$  al punto  $Q(1, 3, 5)$  es,

$$PQ = \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

## 1.3 ECUACIÓN DE UNA ESFERA EN EL ESPACIO

La ecuación de una esfera con centro  $C(h, k, l)$  y radio  $r$  es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen  $O$ , entonces la ecuación de la esfera está dada de la siguiente manera (Stewart, 2013):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

**Ejemplo 2.** Probar que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$$

es la ecuación de una esfera, y determine su centro y radio.

**Solución:**

Se puede escribir la ecuación en la forma de la ecuación de una esfera si se completan los cuadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$$

Al comparar esta ecuación con la forma estándar, se ve que es la ecuación de una esfera con centro

$(-2, 3, -1)$  y radio  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

**Ejemplo 3.** ¿Qué región en  $\mathbb{R}^3$  está representada por las siguientes desigualdades?

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

**Solución:** Las desigualdades

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

Se pueden reescribir como

$$2 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3$$

En la Figura 1.6 se representan los puntos  $(x, y, z)$  cuya distancia desde el origen es por lo menos 2, y a lo más 3. Así, las desigualdades dadas representan la región que se encuentra entre las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Además, geoméricamente cada una de estas esferas tienen como centro el origen de coordenadas  $(0, 0, 0)$  y radios 2 y 3 respectivamente, es decir se escriben las ecuaciones de las esferas:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 2^2 \text{ y } (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 3^2$$

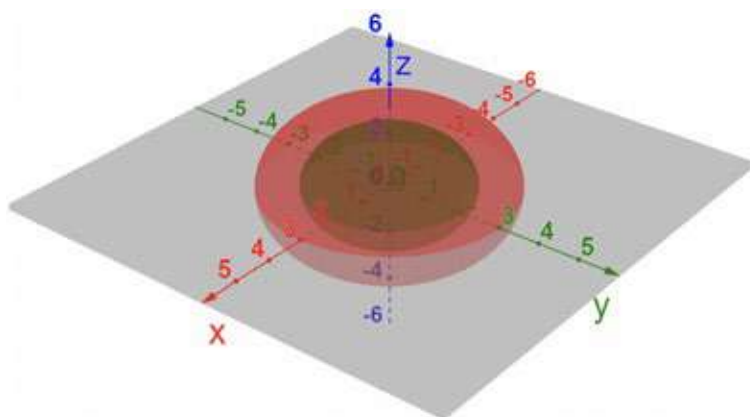


Figura 1.6 Esferas de centro en el origen y radios 2 y 3.

## 1.4 VECTORES

Un vector se representa por lo común mediante una flecha o un segmento de recta dirigido. La longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la flecha apunta en la dirección del vector (Stewart, 2013).

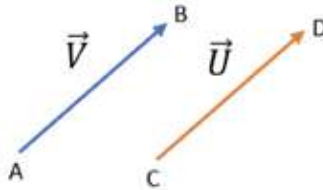


Figura 1.7 Vectores.

En la Figura 1.7 el vector de desplazamiento desde el punto A hacia el punto B se puede escribir de la forma  $\vec{V}$ .

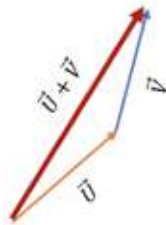
**Suma vectorial**

Figura 1.8 Suma de dos vectores.

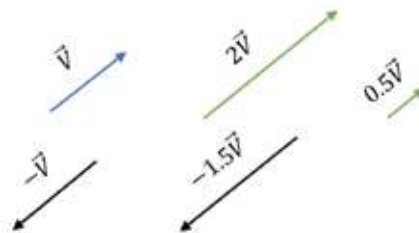
**Multiplicación por un escalar**

Figura 1.9 Vector multiplicado por escalares.

## Componentes del vector en el espacio

Para ciertos propósitos es mejor introducir un sistema de coordenadas y tratar a los vectores algebraicamente.

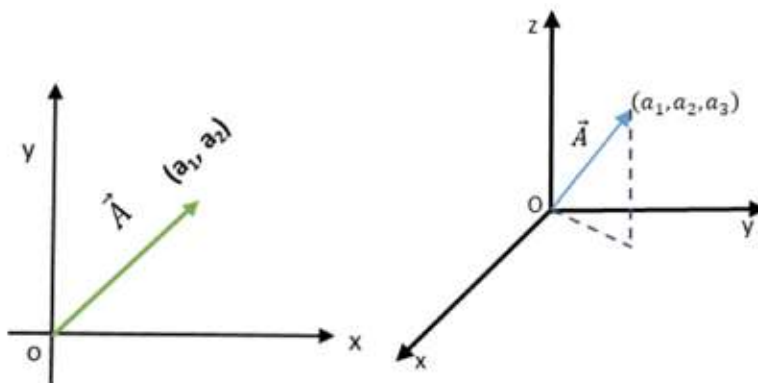


Figura 1.10 Componentes del vector  $\vec{A}$  en el plano y en el espacio.

Se emplea la notación  $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$ . En ambos casos los vectores son de posición, tienen su punto inicial en el origen y las coordenadas del punto final coinciden con las componentes del vector (Stewart, 2013).

Dados los puntos  $A(x_1, y_1, z_1)$  y  $B(x_2, y_2, z_2)$ , el vector desde el punto A hasta el punto B tiene las coordenadas  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

### Ejercicio 1

Encuentre el vector representado por el segmento de recta dirigido con punto inicial  $A(2, -3, 4)$  y punto terminal  $B(-2, 1, 1)$

### Magnitud de un vector

La magnitud del vector bidimensional  $\vec{A}(a_1, a_2)$  es,

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La longitud del vector tridimensional  $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$  es,

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



## Operaciones en coordenadas cartesianas

Si  $\vec{A} (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{B} (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$$

$$c\vec{A} = ca_1\hat{i} + ca_2\hat{j} + ca_3\hat{k}$$

## Vectores, base estándar

$$\hat{i}=(1,0,0) \quad \hat{j}=(0,1,0) \quad \hat{k}=(0,0,1)$$

Así, cualquier vector en el espacio se puede expresar en términos de los vectores base estándar  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ . Por ejemplo,  $A (4,-2,1)=4\hat{i}+(-2)\hat{j}+1\hat{k}=4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

### Vector unitario

Un vector unitario es un vector cuya magnitud es 1. Por ejemplo,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son vectores unitarios. En general, si  $\vec{A} \neq \vec{0}$ , entonces el vector unitario que tiene la misma dirección que  $\vec{A}$  es,

$$\hat{u} = \frac{1}{A} \vec{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

## Ejercicio 2

Si  $\vec{A} (-5, 4, -3)$  y  $\vec{B} (-4, 3, 2)$

- Determine el vector unitario en la dirección del vector  $\vec{A}$
- Calcule los vectores  $\vec{A} + \vec{B}$ ,  $\vec{B} - \vec{A}$ ,  $3\vec{A} + 4\vec{B}$

## El producto punto

### Definición analítica

Si  $\vec{A} (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{B} (b_1, b_2, b_3)$ , entonces el producto punto de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es el número  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  dado por (Stewart, 2013),

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

**Definición geométrica.**- Si  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , entonces

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

#### Ejemplo 4

Determine el ángulo entre los vectores  $\vec{A} (2,-3)$  y  $\vec{B} (3,1)$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{6 - 3}{\sqrt{130}} = \frac{3}{\sqrt{130}} = 0.26$$

$$\theta = 74.93^\circ$$

#### El producto cruz o producto vectorial

**Definición analítica.**- Si  $\vec{A} (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{B} (b_1, b_2, b_3)$ , entonces el producto cruz de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es el vector  $\vec{A} \times \vec{B}$  dado por (Stewart, 2013):

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\text{Si } A = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} \text{ y } B = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$$

Se puede reescribir usando determinantes de segundo orden así:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

#### Dirección del vector $\vec{A} \times \vec{B}$

Construimos el producto cruz  $\vec{A} \times \vec{B}$  de manera que sea perpendicular a  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Ésta es una de las propiedades más importantes de un producto cruz, por lo que lo se enfatiza y verifica en el siguiente teorema,

**Teorema.**- El vector  $\vec{A} \times \vec{B}$  es ortogonal a  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  (Stewart, 2013).

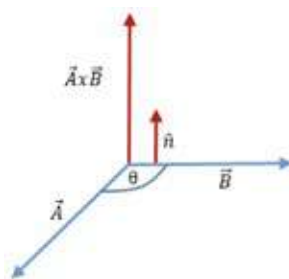


Figura 1.11 Ortogonalidad del producto cruz.

**Teorema** Si  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , entonces

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{sen}\theta$$

### Ejercicio 3

- ¿Qué significa que:  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$
- ¿Qué interpretación geométrica tiene:  $|\vec{A} \times \vec{B}|$
- Justifique sus respuestas

## 1.5 ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS

Una recta en el plano  $xy$  se determina cuando se dan un punto sobre la recta y la dirección de ésta (su pendiente o ángulo de inclinación).

De igual forma, en la Figura 1.12 se observa que una recta  $L$  en el espacio tridimensional se determina cuando se conoce un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  sobre  $L$  y la dirección de  $L$ . En tres dimensiones la dirección de una recta se describe convenientemente por un vector  $\vec{V}$  (Stewart 2013).

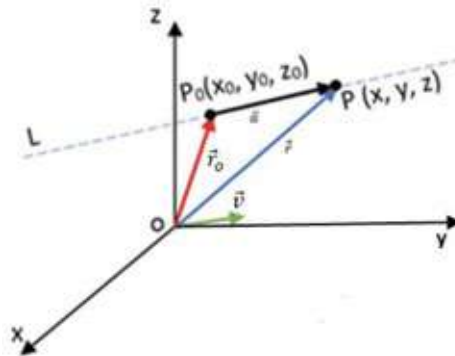


Figura 1.12 Geometría de la recta  $L$ .

### Ecuaciones de la recta en el espacio

En la Figura 1.12, la suma de vectores da  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}$

Pero, puesto que  $\vec{a}$  y  $\vec{V}$  son vectores paralelos, hay un escalar  $t$  tal que  $\vec{a} = t\vec{V}$

La ecuación vectorial es dada por,  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{V}$ , donde  $t$  es elemento de los números reales,

$$\vec{V}(a, b, c) \quad \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0) \quad \vec{r}(x, y, z)$$
$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta están dadas por,

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct, t \in \mathbb{R}$$

#### Ejercicio 4

- Encuentre la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto  $(5, 1, 3)$  y es paralela al vector  $\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$
- Encuentre otros dos puntos sobre la recta.

Otra forma de describir una recta  $L$  es eliminar el parámetro  $t$  de las ecuaciones paramétricas y si ninguno de los literales  $a$ ,  $b$  o  $c$  es 0, se puede resolver cada una de las ecuaciones paramétricas para  $t$ , igualar los resultados y se obtiene la ecuación simétrica de la recta en el espacio,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

#### Ejercicio 5

- Encuentre las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta que pasa a través de los puntos  $A(2, 4, -3)$  y  $B(3, -1, 1)$ .
- ¿En qué punto interseca esta recta el plano  $xy$ ?

#### Ecuación del plano en el espacio

Un plano en el espacio se determina por un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y un vector  $\vec{n}$  que es ortogonal al plano generado por el punto  $P$  de la Figura 1.13. Este vector ortogonal  $\vec{n}$  se llama vector normal (Stewart, 2013).

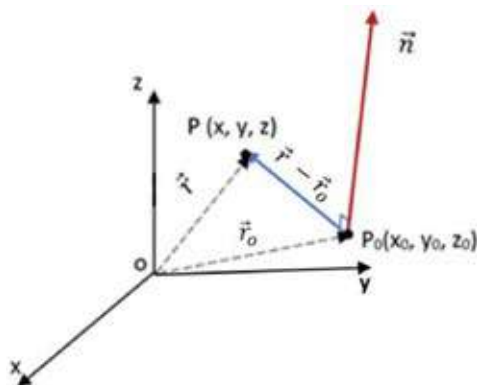


Figura 1.13 Modo de generar un plano mediante el punto P.

El vector normal  $\vec{n}$  es ortogonal a todo vector en el plano generado por el punto P. En particular,  $\vec{n}$  es ortogonal a  $r - r_0$  y, por tanto, se tiene

$$\vec{n} \cdot (r - r_0) = 0$$

Para obtener una ecuación escalar del plano, se escribe

$$\vec{n} (a, b, c) \quad r (x, y, z) \quad r_0(x_0, y_0, z_0)$$

Entonces la ecuación vectorial se transforma en la ecuación escalar del plano:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

### Ejercicio 6

Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto  $(-2, 4, 1)$  con vector normal  $\vec{n} = (2, 3, 4)$ . Determine las intersecciones con los ejes y bosqueje el plano.

### Cilindros en el espacio

Un cilindro es una superficie que consiste de las líneas rectas llamadas generatrices que son paralelas a una recta dada y pasan por una curva plana (Stewart 2013).

### Ejemplo 5

Bosqueje la gráfica de la superficie  $z = x^2$ .

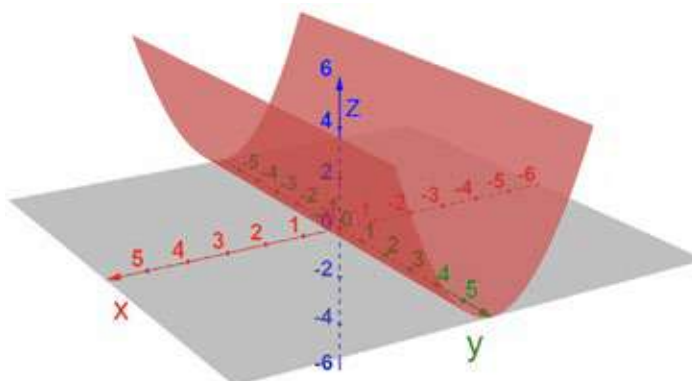


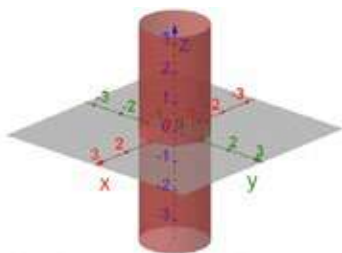
Figura 1.14 Superficie  $z = x^2$ .

La Figura 1.14 se denomina cilindro parabólico.

### Ejemplo 6

Identifique y bosqueje las superficies

a)  $x^2 + y^2 = 1$



b)  $y^2 + z^2 = 1$

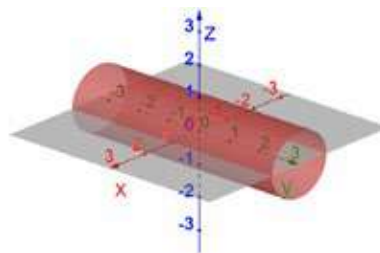


Figura 1.15 Cilindros en el espacio.

## 1.6 FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN EL ESPACIO

En general, una función es una regla que asigna a cada elemento del dominio un elemento del rango o recorrido. Una función con valores vectoriales, es decir, una función vectorial, es simplemente una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores (Larson y Edwards, 2010).

Si  $f(t)$ ,  $g(t)$  y  $h(t)$  son las componentes del vector  $\vec{r}(t)$ , entonces  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones de valores reales llamadas funciones componentes y podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

### Ejemplo 7

$$\text{Si } \vec{r}(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$$

Donde las funciones componentes son:

$$f(t) = t^3 \quad g(t) = \ln(3-t) \quad h(t) = \sqrt{t}$$

De acuerdo con la convención usual, el dominio consiste de todos los valores de  $t$  para los cuales la expresión para  $\vec{r}(t)$  está definida. Las expresiones  $t^3$ ,  $\ln(3-t)$ , y  $\sqrt{t}$  están definidas para

$3-t > 0$  y  $t \geq 0$ . Por tanto, el dominio de  $\vec{r}(t)$  es el intervalo  $[0,3)$ .

Hay una estrecha relación entre funciones vectoriales continuas y curvas en el espacio. Supongamos que  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones continuas de valores reales sobre un intervalo  $I$ . Entonces el conjunto  $C$  de todos los puntos  $(x, y, z)$  en el espacio, donde

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

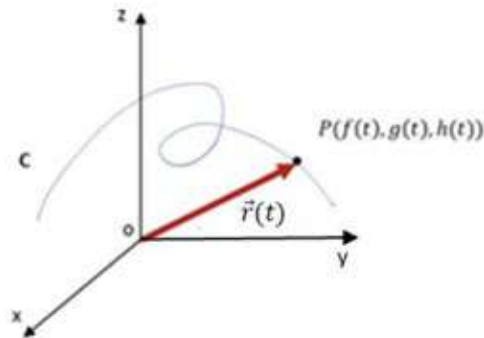


Figura 1.16  $C$  está trazada por la punta de un vector en posición  $\vec{r}(t)$ .

y  $t$  varía en todo el intervalo  $I$ , se llama curva en el espacio. Estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas de  $C$** , y  $t$  se llama **parámetro**. Podemos pensar que  $C$  está trazada por una partícula en movimiento cuya posición en el tiempo  $t$  es  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$ . Si ahora consideramos la función

$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , entonces  $\vec{r}(t)$  es el vector de posición del punto  $P(f(t), g(t), h(t))$  sobre  $C$ . Por tanto, cualquier función vectorial continua  $\vec{r}(t)$  define una curva  $C$  en el espacio trazada por la punta del vector  $\vec{r}(t)$  que se desplaza, como se ilustra en la Figura 1.16.

### Ejemplo 8

Trace la curva cuya ecuación vectorial es

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \text{sen } t, t)$$

**Solución** Las ecuaciones paramétricas para esta curva son,

$$x = \cos t \quad y = \text{sen } t \quad z = t$$

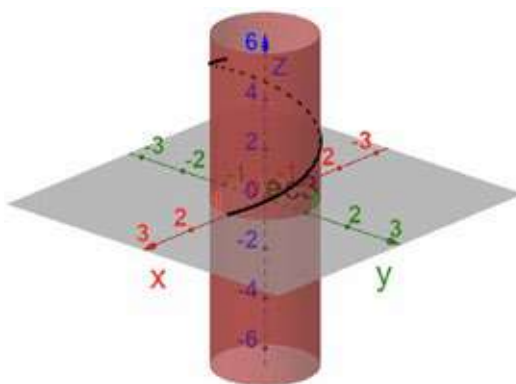


Figura 1.17 Curva trazada por la punta de un vector en posición  $\vec{r}(t)$ .

### Ejemplo 9

Determine una función vectorial que represente la curva de la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $y + z = 2$

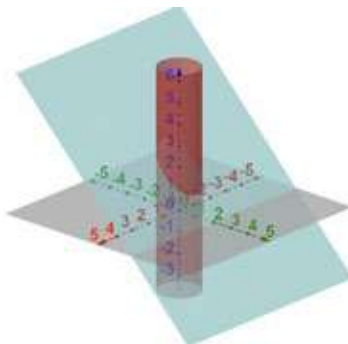


Figura 1.18 Curva trazada por la intersección del cilindro y el plano.



La proyección de C sobre el plano xy es la circunferencia  $x^2+y^2=1, z=0$ .

$$x=\cos t \quad y=\sen t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

A partir de la ecuación del plano tenemos

$$z = 2 - y = 2 - \sen t$$

La ecuación vectorial correspondiente es

$$\vec{r}(t) = \cos t \hat{i} + \sen t \hat{j} + (2 - \sen t)\hat{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Esta ecuación se llama *parametrización* de la curva C.

## 1.7 DERIVADAS E INTEGRALES DE FUNCIONES VECTORIALES

Las derivadas e integrales se calculan de las funciones vectoriales notadas con  $\vec{r}(t)$ .

### Derivadas

La derivada  $\vec{r}'(t)$  de una función vectorial  $\vec{r}(t)$  está definida de la misma manera que para las funciones de valores reales (Larson y Edwards 2010).

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

**Teorema.-** Si  $\vec{r}(t)=(f(t), g(t), h(t))=f(t)\hat{i}+g(t)\hat{j}+h(t)\hat{k}$ , donde  $f, g$  y  $h$  son funciones derivables, entonces (Larson y Edwards 2010):

$$\vec{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)) = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} + h'(t)\hat{k}$$

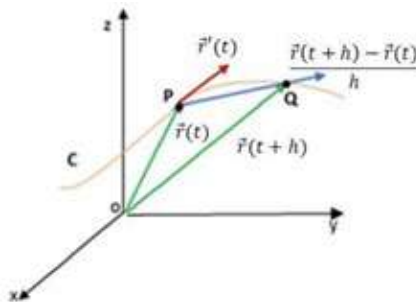


Figura 1.19 Proceso de derivada de una función vectorial.

### Ejemplo 10

- a) Calcule la derivada de  $\vec{r}(t) = (1 + t^3)\hat{i} + te^{-t}\hat{j} + \text{sen } 2t \hat{k}$ .
- b) Determine el vector tangente unitario en el punto donde  $t = 0$ .

### Solución

- a) Según el teorema anterior, se deriva cada componente de  $\mathbf{r}$ :

$$\vec{r}'(t) = 3t^2\hat{i} + (1 - t)e^{-t}\hat{j} + 2 \cos 2t \hat{k}$$

- b) Como  $\vec{r}(0) = \hat{i}$  y  $\mathbf{r}'(0) = \hat{j} + 2\hat{k}$ , el vector tangente unitario en el punto (1,0,0) es

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad \vec{T}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{|\vec{r}'(0)|} = (\hat{j} + 2\hat{k})/\sqrt{(1 + 4)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$$

### Ejemplo 11

Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice de ecuaciones paramétricas

$$x = 2 \cos t \quad y = \text{sen } t \quad z = t$$

En el punto  $(0,1, \pi/2)$ .

**Solución** La ecuación vectorial de la hélice es  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, \text{sen } t, t)$ , de modo que

$$\vec{r}'(t) = (-2 \text{sen } t, \cos t, 1)$$

El valor del parámetro que corresponde al punto  $(0,1, \pi/2)$  es  $t = \pi/2$ , de modo que el vector tangente es  $\vec{r}'(\pi/2) = (-2,0,1)$ . La recta tangente es la recta que pasa por  $(0,1, \pi/2)$  paralela al vector  $(-2,0,1)$ , de modo que de acuerdo con las ecuaciones paramétricas son:

$$x = -2t \quad y = 1 \quad z = \frac{\pi}{2} + t$$

### Reglas de derivación

El teorema siguiente muestra que las fórmulas de derivación para funciones

de valores reales tienen su equivalente para las funciones de valor vectorial.

**Teorema.-** Suponga que,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son funciones vectoriales derivables,  $c$  es un escalar y  $f$  es una función de valores reales. Entonces (Larson y Edwards, 2010),

1.  $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) + \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$
2.  $\frac{d}{dt}[c\vec{u}(t)] = c\vec{u}'(t)$
3.  $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{u}(t)] = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}'(t)$
4.  $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$
5.  $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)] = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$
6.  $\frac{d}{dt}[\vec{u}(f(t))] = f'(t)\vec{u}'(f(t))$  (Regla de la cadena)

### Integrales

La integral definida de una función vectorial continua  $\vec{r}(t)$  se puede definir casi de la misma manera que para las funciones de valores reales, excepto que la integral es un vector (Larson y Edwards, 2010).

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left( \int_a^b f(t) dt \right) \hat{i} + \left( \int_a^b g(t) dt \right) \hat{j} + \left( \int_a^b h(t) dt \right) \hat{k}$$

Esto significa que se puede evaluar una integral de una función vectorial integrando cada función componente.

Es posible generalizar el teorema fundamental del cálculo para funciones vectoriales continuas como se señala a continuación:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \vec{R}(t) \Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$$

Donde  $\vec{R}$  es una antiderivada de  $\vec{r}$ , es decir,  $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$ . Utilizamos la notación  $\int \vec{r}(t) dt$  para integrales indefinidas (antiderivadas).

### Ejemplo 12

Si  $\vec{r}(t) = 2\cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + 2t\hat{k}$ , entonces

$$\begin{aligned} \int \vec{r}(t) dt &= \left( \int 2 \cos t dt \right) \hat{i} + \left( \int \sin t dt \right) \hat{j} + \left( \int 2t dt \right) \hat{k} \\ &= 2 \sin t \hat{i} - \cos t \hat{j} + t^2 \hat{k} + C \end{aligned}$$

Donde  $C$  es un vector constante de integración, por lo que

$$\int_0^{\pi/2} \vec{r}(t) dt = \left[ 2 \operatorname{sen} t \hat{i} - \cos t \hat{j} + t^2 \hat{k} \right]_0^{\pi/2} = 2\hat{i} + \hat{j} + \frac{\pi^2}{4} \hat{k}$$

## 1.8 FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES

Definición. Una función  $f$  de dos variables es una aplicación que asigna a cada par ordenado de dos números reales  $(x, y)$  de un conjunto  $D$ , un único número real que se denota con  $f(x, y)$ . El conjunto  $D$  es el dominio de  $f$  y su imagen es el conjunto de valores que toma  $f$ , es decir,  $\{f(x,y) | (x,y) \in D\}$  (Stewart 2013).

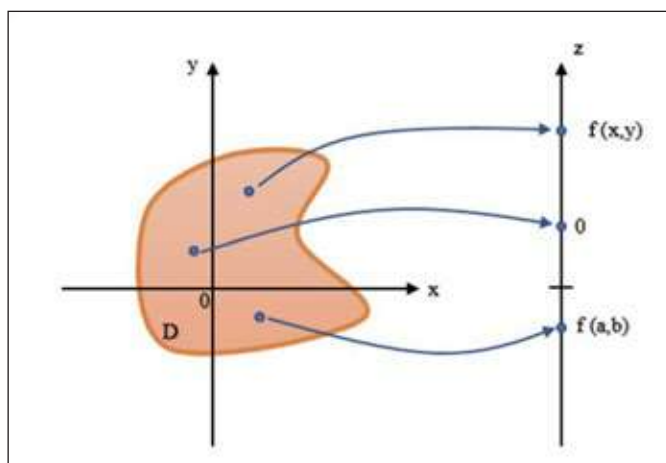


Figura 1.20 Dominio e imágenes de la función  $f$ .

### Ejemplo 13

Para las funciones siguientes, evaluar  $f(3,2)$ , determinar y graficar el dominio  $D$ .

a)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

b)  $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

### Solución

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

La expresión para  $f$  tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo de la raíz cuadrada es no negativa. Entonces, el dominio de  $f$  es,

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$

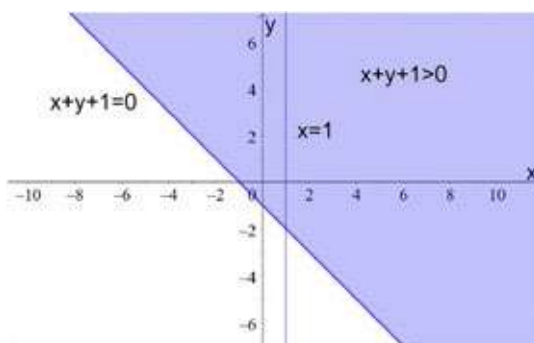


Figura 1.21 Dominio  $D$  de la función  $f$ .

$$b) f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Puesto que  $\ln(y^2 - x)$  se define solo cuando  $y^2 - x > 0$ , es decir,  $x < y^2$ , el dominio de  $f$  es

$D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$ . Éste es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola  $x = y^2$ .

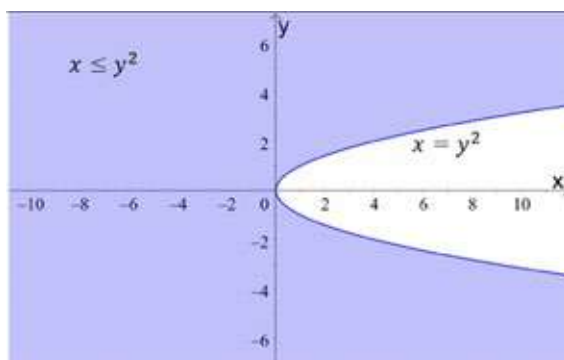


Figura 1.22 Dominio  $D$  de la función  $f$ .

### Definición

Si  $f$  es una función de dos variables con dominio  $D$ , entonces la gráfica de  $f$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y, z)$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $z = f(x, y)$  y  $(x, y)$  está en  $D$  (Stewart, 2013).

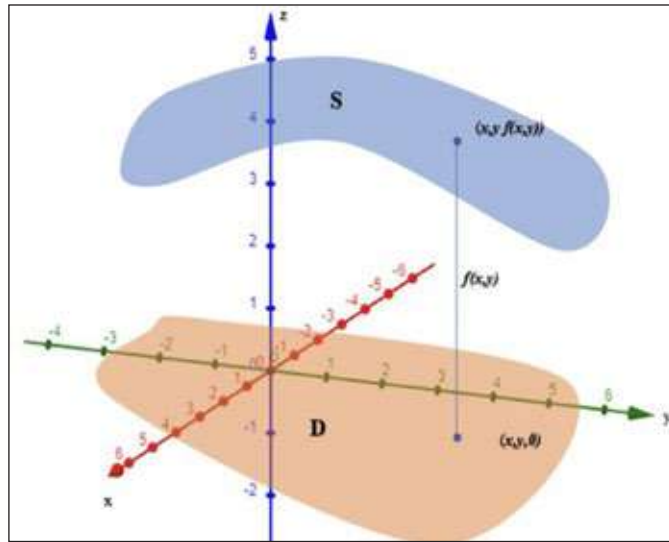


Figura 1.23 Dominio  $D$  y superficie de la función  $f$ .

### Ejemplo 14

Grafique la función  $f(x,y)=6-3x-2y$ .

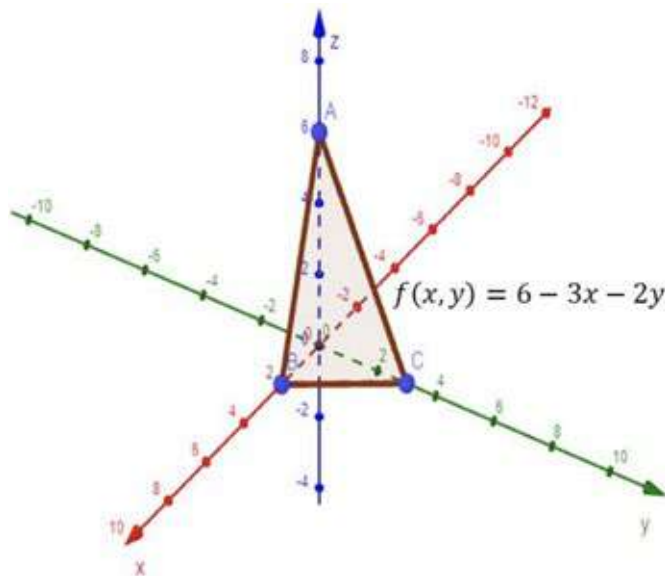


Figura 1.24 Superficie de la función  $f$ .

## Curvas de nivel

Las curvas de nivel de una función  $f$  de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son  $f(x,y)=k$  donde  $k$  es una constante (en la imagen de  $f$ ) (Stewart, 2013).

### Ejemplo 15

Grafique las curvas de nivel de la función  $f(x,y)=6-3x-2y$  para los valores  $k = -6, 0, 6, 12$ .

### Solución

Las curvas de nivel son  $6-3x-2y=k$  o bien  $3x+2y+(k-6)=0$

Ésta es una familia de rectas cuya pendiente es  $-3/2$ . Las cuatro curvas de nivel particulares con  $k=-6, 0, 6, 12$  son  $3x+2y-12=0$ ,  $3x+2y-6=0$ ,  $3x+2y=0$  y  $3x+2y+6=0$ .

Entre las curvas de nivel hay una separación igual, y dichas curvas son rectas paralelas debido a que la gráfica de  $f$  es un plano.

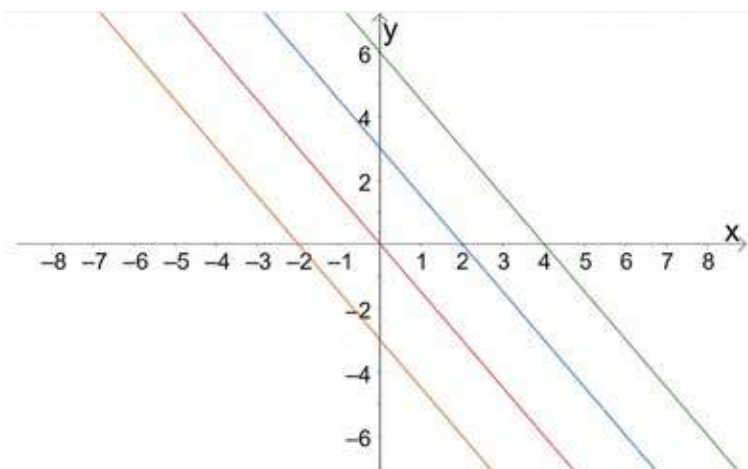


Figura 1.25 Superficie de la función  $f$ .

### Ejemplo 16

Grafique las curvas de nivel de la función

$$g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \text{ para } k = 0, 1, 2, 3$$

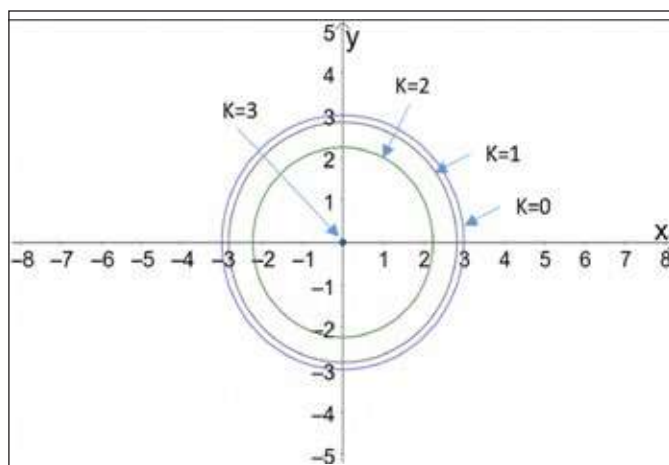


Figura 1.26 Curvas de nivel para  $k=0,1,2,3$ .

### Solución

Las curvas de nivel son  $\sqrt{9-x^2-y^2}$  o bien  $x^2 + y^2 = 9 - k^2$

Donde la ecuación anterior es una familia de circunferencias concéntricas con centro  $(0,0)$  y radio  $\sqrt{9-k^2}$ . Los casos  $k = 0, 1, 2, 3$  se ilustran en la Figura 1.26. Se intenta imaginar estas curvas de nivel elevadas desde la superficie.

### Ejemplo 17

Grafique algunas curvas de nivel de la función  $h(x,y)=4x^2+y^2+1$

**Solución**  $4x^2+y^2+1=k$  o bien  $\frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$

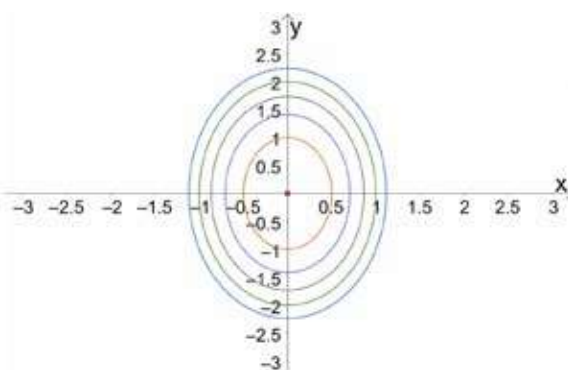


Figura 1.27 Curvas de nivel para  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .



## Derivadas parciales

Si  $f$  es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones  $f_x$  y  $f_y$ , definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

## Notaciones para derivadas parciales

Si  $z=f(x,y)$  se escribe:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

## Regla para determinar las derivadas parciales de $z=f(x,y)$

1. Para determinar  $f_x$ , conservar a  $y$  constante y derivar  $f(x,y)$  con respecto a  $x$ .
2. Para determinar  $f_y$ , conservar a  $x$  constante y derivar  $f(x,y)$  con respecto a  $y$ .

## Ejemplo 18

Si  $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$ , determine  $f_x(2,1)$  y  $f_y(2,1)$ .

## Solución

Al considerar como constante a  $y$ , y derivar con respecto a  $x$  se obtiene,  $f_x(x,y)=3x^2+2xy^3$

$$\text{entonces } f_x(2,1)=(3)(2^2)+(2)(2)(1^3)=16$$

Si consideramos como constante a  $x$  derivamos con respecto a  $y$  entonces

$$f_y(x,y)=3x^2y^2-4y$$

$$f_y(2,1)=(3)(2^2)(1^2)-(4)(1)=8$$

### Ejemplo 19

Calcular  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$  si  $z$  se define implícitamente como una función de  $x$  y  $y$  mediante la ecuación:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

## 1.9 EL VECTOR GRADIENTE

### Definición

Si  $f$  es una función de dos variables  $x$  e  $y$ , entonces el gradiente de  $f$  es la función vectorial notada por  $\vec{\nabla} f$  y definida por (Stewart 2013):

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

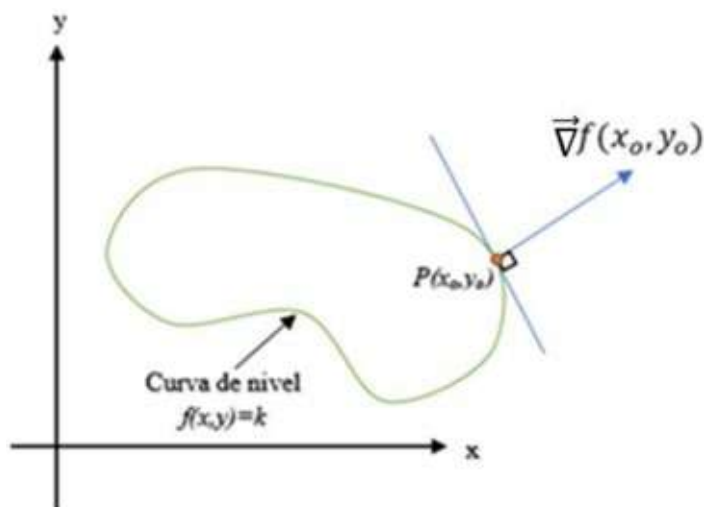


Figura 1.28 Curva de nivel y gradiente.

**Ejemplo 20**

Si  $f(x,y)=\text{sen}x+e^{xy}$ , entonces

$$\vec{\nabla}f(x,y)=(f_x,f_y)=(\cos x+ye^{xy},xe^{xy})$$

$$\vec{\nabla}f(0,1)=(2,0)$$

Para la función  $f$  de tres variables, el vector gradiente, denotado por  $\vec{\nabla}f$  o  $\text{grad } f$  es,

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z))$$

$$\vec{\nabla}f = (f_x, f_y, f_z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

**Ejemplo 21**

Si  $f(x,y,z)=x \text{ sen } yz$ , determine el gradiente de  $f$

**Solución**

a) El gradiente de  $f$  es

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z))$$

$$=(\text{sen } yz, xz \cos yz, xy \cos yz)$$

**Volúmenes en el espacio**

De una manera similar consideramos una función  $f$  de dos variables definidas sobre un rectángulo cerrado

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Y suponemos primero que  $f(x,y) \geq 0$ . La gráfica de  $f$  es una superficie con ecuación  $z=f(x,y)$ . Sea  $V$  el sólido que aparece arriba de  $R$  y debajo de la gráfica de  $f$ , es decir (Stewart 2013),

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

## 1.10 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Todo lo anterior está desarrollado en el sistema de coordenadas cartesianas. Existen otros sistemas coordenados que se utilizan para diferentes aplicaciones que facilitan operaciones de cálculo (Stewart, 2013).

### Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son una extensión del sistema de coordenadas polares al espacio tridimensional. En lugar de utilizar  $x, y, z$ , se usan  $r$ , el ángulo  $\theta$  y  $z$ .

La relación existente entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas están dadas de la siguiente manera:

$$x=r \cos \theta$$

$$y=r \operatorname{sen} \theta$$

$$z=z$$

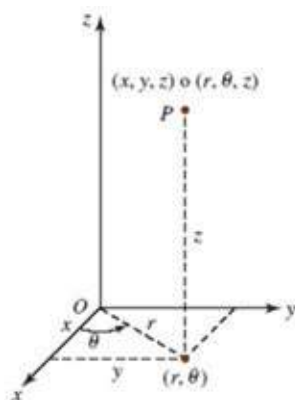


Figura 1.29 Coordenadas cilíndricas del punto P.

### Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas esféricas es un cambio total de las variables en el espacio tridimensional.

La relación existente entre las coordenadas esféricas y cartesianas están dadas de la siguiente manera:

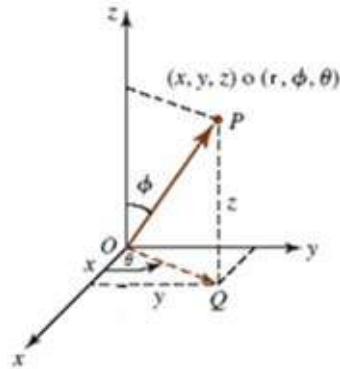


Figura 1.30 Coordenadas esféricas del punto P.

$$x = r \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta)$$

$$y = r \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta)$$

$$z = r \cos(\phi)$$

## 1.11 GRADIENTE EN COORDENADAS CARTESIANAS, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

El gradiente en coordenadas cartesianas de una función  $f = f(x, y, z)$  viene dado por la expresión (Stewart, 2013),

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z$$

Donde  $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$  son direcciones unitarias de los ejes  $x, y$  y  $z$  respectivamente.

Entonces el gradiente en coordenadas cilíndricas de la función  $f = f(r, \theta, z)$  viene dado de la siguiente manera, ver Figura 1.29,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z$$

Donde  $\hat{a}_r$  es la dirección unitaria radial,  $\hat{a}_\theta$  es la dirección unitaria del ángulo  $\theta$ .

Además, el gradiente en coordenadas esféricas de la función  $f = f(\rho, \varnothing, \theta)$  se obtiene de la siguiente expresión, ver Figura 1.30,

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{\rho \text{sen}(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varnothing} \hat{a}_\varnothing + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{a}_\theta$$

Donde  $\hat{a}_r$  es la dirección unitaria radial,  $\hat{a}_\theta$  es la dirección unitaria del ángulo  $\theta$  y  $\hat{a}_\varnothing$  es la dirección unitaria del ángulo  $\varnothing$ .

### 1.12 DIVERGENCIA EN COORDENADAS CARTESIANAS, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

La divergencia en coordenadas cartesianas de una función vectorial  $\vec{A} = (\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z)$  se define como el producto punto (Stewart 2013):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial z}$$

La divergencia en coordenadas cilíndricas de una función vectorial  $\vec{A} = (\vec{A}_r, \vec{A}_\theta, \vec{A}_z)$  se define como el producto punto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}_r}{\partial r} + \frac{\vec{A}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial z}$$

La divergencia en coordenadas esféricas de una función vectorial  $\vec{A} = (\vec{A}_r, \vec{A}_\varnothing, \vec{A}_\theta)$  se define como el producto punto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \vec{A}_r) + \frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial \vec{A}_\varnothing}{\partial \varnothing} + \frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{A}_\theta \text{sen}(\theta))$$

### 1.13 ROTACIONAL EN COORDENADAS CARTESIANAS, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

El rotacional de una función vectorial es el producto vectorial del operador nabla  $\vec{\nabla}$  con una función vectorial (Stewart, 2013).

El rotacional de la función vectorial  $\vec{A}=(\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z)$  en coordenadas cartesianas se obtiene;

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

El rotacional de la función vectorial  $\vec{A}=(\vec{A}_r, \vec{A}_\theta, \vec{A}_z)$  en coordenadas cilíndricas se obtiene;

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_z \\ \frac{r}{\partial} & \frac{\partial}{\partial} & \frac{r}{\partial} \\ \vec{A}_r & r\vec{A}_\theta & \vec{A}_z \end{vmatrix}$$

El rotacional de la función vectorial  $\vec{A}=(\vec{A}_r, \vec{A}_\theta, \vec{A}_\phi)$  en coordenadas esféricas se obtiene;

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\theta & \hat{a}_\phi \\ \frac{r^2 \text{sen}(\theta)}{\partial} & \frac{r \text{sen}(\theta)}{\partial} & \frac{r}{\partial} \\ \vec{A}_r & r\vec{A}_\theta & r \text{sen}(\theta) \vec{A}_\phi \end{vmatrix}$$

Con las definiciones de los operadores anteriores en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas se precede a realizar las aplicaciones de los teoremas de la divergencia y de Stokes.

### 1.14 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Sea  $F(x,y,z)$  un campo vectorial de tres dimensiones,  $V$  el volumen de tres dimensiones y  $S$  es la superficie de  $V$  (Stewart 2013).

El teorema de la divergencia relaciona la divergencia de  $\vec{F}$  en el volumen  $V$  con el flujo de  $\vec{F}$  hacia afuera de la superficie  $S$ :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

Donde  $\hat{n}$  representa el vector normal unitario que apunta hacia afuera a cada punto de la superficie. En aplicaciones prácticas, cuando un campo vectorial tridimensional  $\vec{F}(x,y,z)$  se considera como la representación de la corriente de un fluido, el flujo de  $\vec{F}$  a través de una superficie  $S$ , es una medida de cuánto líquido pasa a través de esa superficie por unidad de tiempo. Se mide con la siguiente integral:

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

### Ejemplo 22

Sea  $V$  un cubo de dimensiones  $1 \times 1 \times 1$  en el espacio, de tal manera que una esquina está en el origen, una esquina está en  $(1,1,1)$  y todas sus aristas son paralelas a uno de los ejes de coordenadas.  $S$  representa la superficie de este cubo, que consta de 6 caras cuadradas orientadas mediante vectores normales que apuntan hacia afuera. Calcular la siguiente integral de superficie utilizando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S (2y\hat{i} + 3y^2\hat{j} + 4z\hat{k}) \cdot d\vec{s}$$

Donde  $d\vec{s}$  son pequeños vectores tangentes a  $S$ .

### Solución

Utilizando el teorema se obtiene la igualdad,

$$\begin{aligned} \oint_S (2y\hat{i} + 3y^2\hat{j} + 4z\hat{k}) \cdot d\vec{s} &= \\ \iiint_{000}^{111} \vec{\nabla} \cdot (2y\hat{i} + 3y^2\hat{j} + 4z\hat{k}) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{000}^{111} 6y + 4 \, dx \, dy \, dz = 7 \end{aligned}$$

## 1.15 TEOREMA DE STOKES

Este teorema convierte la integral de superficie de un campo vectorial rotacional en una integral de línea alrededor de la frontera de esa superficie, es decir (Stewart 2013):

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



Donde  $\vec{A}$  es una función vectorial tridimensional,  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  es el rotacional tridimensional de  $\vec{A}$ ,  $S$  es una superficie en tres dimensiones,  $\hat{n}$  es una función que asigna vectores unitarios normales a  $S$ ,  $d\vec{l}$  son pequeños vectores tangentes a  $C$  que es la frontera de  $S$ .

### Ejemplo 23

Sea  $S$  la mitad de la esfera unitaria centrada en el origen y sobre el plano  $xy$ , orientada con vectores normales unitarios apuntando hacia afuera. Sea  $\vec{V}(x,y,z)$  la función vectorial definida como  $\vec{V}(x,y,z)=y\hat{i}$ . Calcular la integral de superficie  $\int_S \vec{V} \cdot d\vec{s}$

### Solución

Para proceder aplicar el teorema de Stokes se requiere primero encontrar una función  $\vec{A}$  cuyo rotacional sea  $y\hat{i}$ , es decir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = y\hat{i}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial y} \right) \hat{k} = y\hat{i}$$

Para hacer más sencillo encontrar  $\vec{A}$ , se particulariza a  $\vec{A}_x = 0, \vec{A}_y = 0, \vec{A}_z = \frac{y^2}{2}$

$$\vec{A} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{y^2}{2} \hat{k}$$

$$\int_S \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_l \frac{y^2}{2} \hat{k} \cdot d\vec{l} = 0$$

es decir

Se nota que esta integral sobre la circunferencia  $C$  es igual a cero debido que  $\hat{k} \cdot d\vec{l} = 0$  porque  $d\vec{l}$  son pequeños vectores tangentes a  $l$  contenida en el plano  $xy$ , por tanto  $\hat{k}$  es un vector perpendicular a  $d\vec{l}$ , ver Figura 1.31.

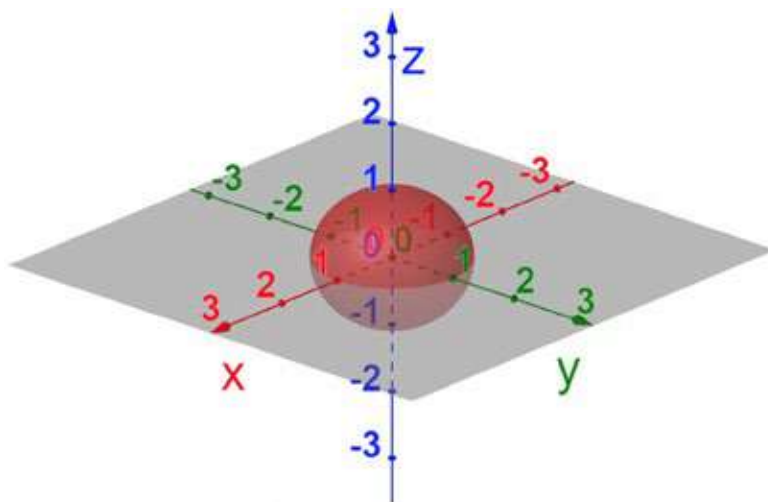


Figura 1.31 Esfera unitaria  $S$  y  $C$  circunferencia en el plano  $xy$ .

## 1.16 PROBLEMAS PROPUESTOS

- **Problema P1.1.** Se representan numéricamente los puntos  $(-4, -3, -5)$  y  $(2, 3, 5)$ . Graficar estos puntos en el espacio tridimensional.
- **Problema P1.2.** Qué superficies en el espacio tridimensional representan las siguientes ecuaciones:
  - a)  $y = -3$
  - b)  $z = 4$
  - c)  $x = 1$
- **Problema P1.3.** Probar que la siguiente ecuación representa una esfera y calcular su centro y radio

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 8y + 16z = 30$$

- **Problema P1.4.** Encuentre el vector representado por el segmento de recta dirigido con punto inicial  $(-2, 1, 3)$  y punto terminal  $(3, 4, -2)$
- **Problema P1.5.** Calcular el punto en el cual la recta con ecuaciones paramétricas  $x = 4 + 6t$ ,  $y = -8t$ ,  $z = 10 + 2t$  interseca al plano  $8x + 10y - 4z = 36$

- **Problema P1.6.** Graficar la curva de ecuación vectorial  $\vec{r}(t) = 2\cos(t)\hat{i} + 2\sin(t)\hat{j} + t\hat{k}$
- **Problema P1.7.** Calcular la longitud de arco de la hélice circular de la ecuación vectorial  $\vec{r}(t) = 2\cos(t)\hat{i} + 2\sin(t)\hat{j} + t\hat{k}$  desde el punto  $(2, 0, 0)$  hasta el punto  $(2, 0, 2\pi)$
- **Problema P1.8.** Graficar en el plano las curvas de nivel de la función  $f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$  para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$
- **Problema P1.9.** Si  $f(x,y,z) = x \cos(yz)$ , calcular el gradiente de  $f$
- **Problema P1.10.** Dada la ecuación de la esfera en coordenadas cartesianas  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , representar en coordenadas esféricas
- **Problema P1.11.** Si  $f(x,y,z) = x \cos(yz)$ , calcular el gradiente de  $f$  en coordenadas cilíndricas
- **Problema P1.12.** Dada la función  $\vec{A} = (\sin(x+y), \cos(y+z), \tan(z+x))$ , calcular la divergencia en coordenadas cartesianas.
- **Problema P1.13.** Dada la función  $\vec{A} = (\sin(x+y), \cos(y+z), \tan(z+x))$ , calcular el rotacional en coordenadas cartesianas.
- **Problema P1.14.** Sea  $V$  un cubo de dimensiones  $2 \times 2 \times 2$  en el espacio, de tal manera que una esquina está en el origen, una esquina está en  $(2,2,2)$  y todas sus aristas son paralelas a uno de los ejes de coordenadas.  $S$  representa la superficie de este cubo, que consta de 6 caras cuadradas orientadas mediante vectores normales que apuntan hacia afuera. Calcular la siguiente integral de superficie utilizando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S (2y\hat{i} + 3y^2\hat{j} + 4z\hat{k}) \cdot d\vec{s}$$

Donde  $d\vec{s}$  son pequeños vectores tangentes a  $S$ .

- **Problema P1.15.** Sea  $S$  la mitad de la esfera unitaria centrada en el origen y bajo el plano  $xy$ , orientada con vectores normales unitarios apuntando hacia afuera. Sea  $\vec{V}(x,y,z)$  la función vectorial definida como  $\vec{V}(x,y,z) = y\hat{i}$ . Calcular la integral de superficie  $\int_S \vec{V} \cdot d\vec{s}$

## CAPÍTULO II. 2. CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO EN AUSENCIA DE DIELECTRICOS

### 2.1 LEY DE COULOMB

La ley de Coulomb establece que la magnitud de la fuerza entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de la magnitud de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, tal como se muestra en la ecuación (2-1); donde,  $F_{12}$  es la fuerza que ejerce la carga  $Q_1$  sobre la carga  $Q_2$ .  $r$  es la distancia de separación entre las dos cargas y  $K$  es la constante de proporcionalidad (Hayt y Buck, 2012).

$$F_{12} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (2 - 1)$$

Si las cargas tienen signos iguales, las fuerzas  $\vec{F}_{12}$  y  $\vec{F}_{21}$  son de repulsión, como se muestra en la figura 2.1, mientras que, si las cargas tienen signos diferentes, las fuerzas son de atracción. Los vectores se dibujan en la misma dirección o línea de acción, ya sea atrayéndose o repeliéndose. En la ecuación (2-2) se muestra la fuerza  $\vec{F}_{12}$  en forma vectorial, donde  $\hat{\mu}_{12}$  es el vector unitario que va dirigido desde la carga 1 hacia la carga 2.

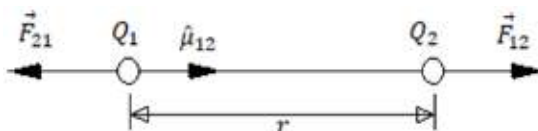


Figura 2.1 Dos cargas puntuales  $Q_1$  y  $Q_2$ .

$$\vec{F}_{12} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{\mu}_{12} \quad (2 - 2)$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío, cuyo valor es:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi \times 10^9} = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{N m}^2}$$

Para aplicar la Ley de Coulomb se debe cumplir lo siguiente:

- Se aplica entre dos cargas puntuales electrostáticas, independiente a otras cargas que se encuentren en su alrededor.
- Las cargas puntuales deben ser pequeñas o partículas.
- Para que una carga sea considerada como partícula, la distancia de separación debe ser mucho mayor que el tamaño de las cargas.
- Para dibujar el vector fuerza, sólo se necesitan los signos de las cargas. Cargas con signos iguales se repelen y cargas con signos diferentes se atraen.
- Los vectores fuerza, se dibujan en la misma dirección o línea de acción entre las dos cargas.
- La magnitud de la fuerza  $F_{12}$  es igual a la magnitud de la fuerza  $F_{21}$ , independiente de la magnitud de las cargas.

Si en el punto  $p$  se encuentra una carga puntual  $Q$  y en su alrededor existen varias cargas puntuales  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  como se muestra en la figura 2.2 entonces, para calcular la fuerza total  $\vec{F}_p$  en el punto  $p$  se aplica el principio de superposición utilizando la ecuación (2-3) con sus vectores  $\vec{F}_{1p}, \vec{F}_{2p}$  y  $\vec{F}_{np}$  y escrito en forma de sumatoria para  $n$  cargas puntuales, la ecuación (2-4).

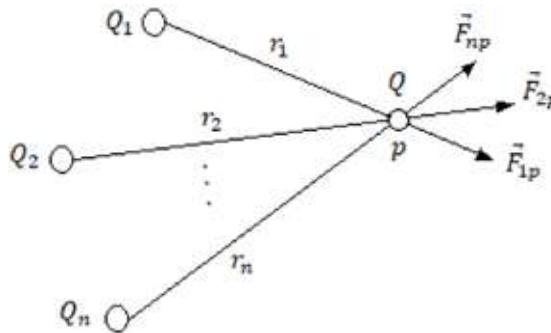


Figura 2.2 Fuerza total sobre  $Q$  producida por  $n$  cargas puntuales.

$$\vec{F}_p = \vec{F}_{1p} + \vec{F}_{2p} + \dots + \vec{F}_{np} \quad (2 - 3)$$

$$\vec{F}_p = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{ip} \quad (2 - 4)$$

## 2.2 CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

La carga puntual  $Q$  genera un campo eléctrico vectorial  $\vec{E}$  en cualquier punto del espacio que le rodea, produciendo una fuerza de tipo eléctrica debido a que la carga se encuentra estática o en reposo. Si en el punto  $p$  se coloca una carga de prueba  $\Delta Q$  positiva que se encuentra a una distancia  $r$  desde la carga  $Q$ , la fuerza eléctrica que actúa en ese punto está dada por la ecuación (2-5) y, representada en la figura 2.3, con las cargas  $Q$  y  $\Delta Q$  positivas la fuerza  $\vec{F}_{Qp}$  es de repulsión y, el vector de la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}_p$  tiene la misma dirección y sentido que la fuerza.

$$\vec{F}_{Qp} = \Delta Q \vec{E}_p \quad (2-5)$$

No obstante, al colocar la carga  $\Delta Q$ , en dicho espacio va a cambiar las condiciones del campo, para que no se altere las condiciones en ese punto, la carga de prueba  $\Delta Q$  se hace tan pequeña que se aproxima a cero, de tal manera que, la intensidad del campo eléctrico en el punto  $p$  está definido como el límite de la fuerza eléctrica dividido para la carga de prueba  $\Delta Q$  a medida que dicha carga de prueba tienda a cero, y está representado en la ecuación (2-6) (ESPOL, 1982, p.24).

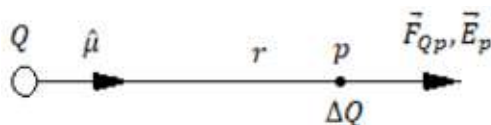


Figura 2.3 Fuerza eléctrica que ejerce la carga  $Q$  en el punto  $p$ .

$$\vec{E}_p = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{Qp}}{\Delta Q} \quad (2-6)$$

Se procede a calcular la magnitud de la intensidad de campo eléctrico utilizando la ecuación (2-2) de la Ley de Coulomb.

$$\vec{E}_p = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{Qp}}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{K \frac{Q \Delta Q}{r^2} \hat{\mu}_{12}}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{KQ \hat{\mu}_{12}}{r^2} = K \frac{Q}{r^2} \hat{\mu}_{12}$$

Dando como resultado la ecuación (2-7)

$$\vec{E}_p = K \frac{Q}{r^2} \hat{\mu}_{12} \quad (2-7)$$

Escribiendo en forma escalar y reemplazando la constante de proporcionalidad  $K$ , se tiene la ecuación (2-8),

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2-8)$$

En el caso que se tengan varias cargas puntuales ( $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ), como se muestra en la figura 2.4, se aplica el principio de superposición para calcular la intensidad de campo eléctrico total  $\vec{E}_p$  en el punto  $p$  generado por cada una de las cargas es  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$  como se muestra en la ecuación (2-9),

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \quad (2-9)$$

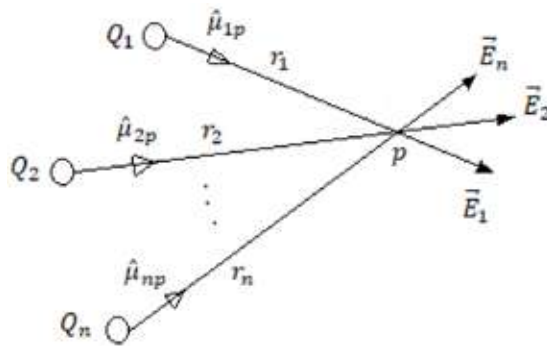


Figura 2.4 Intensidad de campo eléctrico para  $n$  cargas puntuales.

reemplazando valores (2-10),

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} \hat{\mu}_{1p} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^2} \hat{\mu}_{2p} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_n}{r_n^2} \hat{\mu}_{np} \quad (2-10)$$

en forma de sumatoria (2-11),

$$\vec{E}_p = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mu}_{ip} \quad (2-11)$$

Para calcular la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}_p$  en el punto  $p$  producido por una carga puntual  $Q$  ubicada en un plano tridimensional (figura 2.5), primeramente se coloca la carga  $Q$  a una distancia  $\vec{r}'$  desde el eje de coordenadas  $(0,0,0)$  del plano rectangular, a continuación se ubica el punto  $p$  a una distancia  $r$  desde el eje, el vector unitario  $\hat{\mu}$  va dirigido desde la carga  $Q$  al punto  $p$ , finalmente la distancia que existe desde la carga  $Q$  al punto  $p$  es  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  y, el valor de la intensidad del campo eléctrico en el punto  $p$  se muestra en la ecuación (2-12).

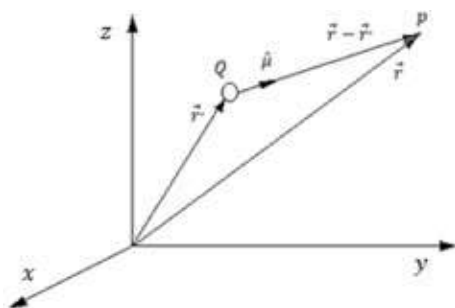


Figura 2.5 Una carga puntual  $Q$  en el espacio tridimensional.

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu} \quad (2 - 12)$$

Reemplazando el vector unitario por

$$\hat{\mu} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

reemplazando valores,

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{E}_p = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

En la figura 2.6 se muestran dos cargas puntuales  $Q_1$  y  $Q_2$  en el espacio tridimensional, con lo que se obtienen a continuación sus respectivas ecuaciones:

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^2} \hat{\mu}_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_2}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|^2} \hat{\mu}_2$$

Para  $n$  cargas puntuales, se tiene:

$$\vec{E}_p = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|^2} \hat{\mu}_n$$

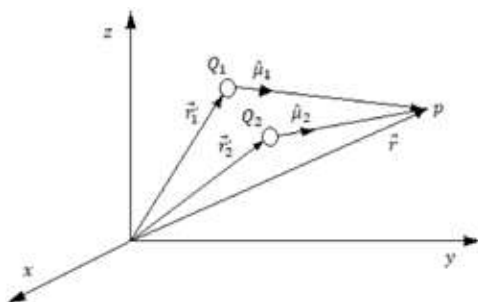


Figura 2.6 Dos cargas puntuales  $Q_1$  y  $Q_2$  en el espacio tridimensional.



## 2.3 CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO PARA DIFERENTES DISTRIBUCIONES DE CARGA

*Campo eléctrico debido a una distribución volumétrica de cargas  $\rho_v$ .* En la figura 2.7 se muestra que en un diferencial de volumen  $dv$ , se encuentra un diferencial de cargas  $dq$ , el que produce un diferencial de campo eléctrico  $d\vec{E}_p$  en el punto  $p$  que se encuentra a una distancia  $r$ . Para calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}_p$  en el punto  $p$  producido por una distribución volumétrica de cargas, se utiliza la ecuación (2-13).

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_v \frac{\rho_v dv}{r^2} \hat{u} \quad (2-13)$$

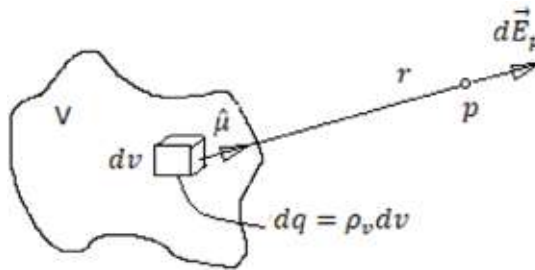


Figura 2.7 Distribución volumétrica de cargas.

*Campo eléctrico debido a una distribución superficial de cargas  $\rho_s$ .* En la figura 2.8 se muestra que en un diferencial de superficie  $ds$ , se encuentra un diferencial de cargas  $dq$ , el que produce un diferencial de campo eléctrico  $d\vec{E}_p$  en el punto  $p$  que se encuentra a una distancia  $r$ . Para calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}_p$  en el punto  $p$  producido por una distribución superficial de cargas, se utiliza la ecuación (2-14).

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s ds}{r^2} \hat{u} \quad (2-14)$$

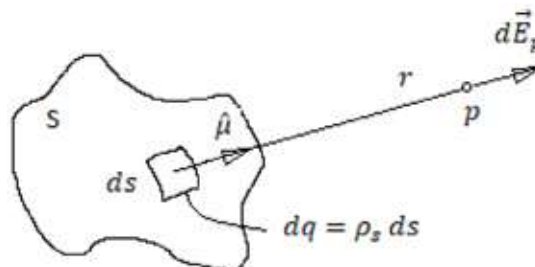


Figura 2.8 Distribución superficial de cargas.

*Campo eléctrico debido a una distribución lineal de cargas  $\rho_l$ .* En la figura 2.9 se muestra que en un diferencial de longitud  $dl$ , se encuentra un diferencial de cargas  $dq$ , el que produce un diferencial de campo eléctrico  $d\vec{E}_p$  en el punto  $p$  que se encuentra a una distancia  $r$ . Para calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}_p$  en el punto  $p$  producido por una distribución lineal de cargas, se utiliza la ecuación (2-15).

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l dl}{r^2} \hat{u} \quad (2 - 15)$$

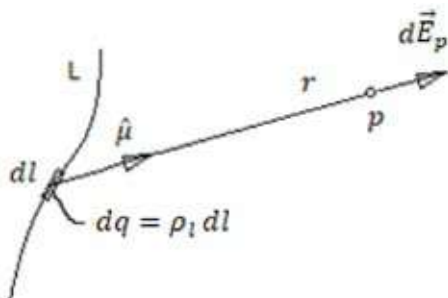


Figura 2.9 Distribución lineal de cargas.

**Problema 2.1.** Un disco circular delgado de radio  $a$  se encuentra en el plano  $xy$ , tiene una distribución superficial de cargas uniformes  $\rho_s$  como se muestra en la figura 2.10 a. Determine la intensidad de campo eléctrico en el punto  $p$  a una distancia  $h$  sobre el eje del disco circular.

**Desarrollo:**

En la figura 2.10 a, se selecciona un diferencial de superficie  $ds$ , en el que se encuentra un diferencial de cargas  $dq$ , éste a su vez, produce un diferencial de campo eléctrico  $d\vec{E}$  a una distancia  $w$  en el punto  $p$  que se encuentra a una altura  $h$  sobre el eje  $z$  del disco circular delgado, como se muestra en la figura 2.10 b. Debido a que se trata de una distribución superficial de cargas uniformes y el punto  $p$  se encuentra en el eje  $z$  del disco, las componentes del campo eléctrico en los ejes  $x$  y  $y$  son cero, esto es,

$$dE_x=0, \text{ por simetría}$$

$$dE_y=0, \text{ por simetría}$$

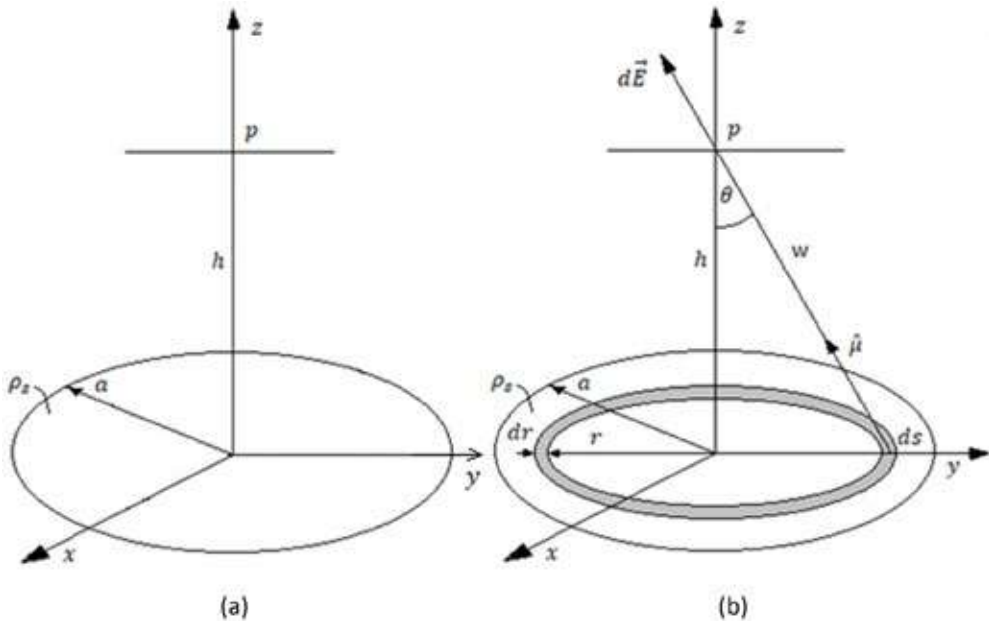


Figura 2.10 Disco circular con una distribución superficial de cargas uniformes  $\rho_s$ .

únicamente, existe en la componente  $z$ ,

$$dE_z = dE \cos \theta \quad (2 - 16)$$

utilizando la ecuación del campo eléctrico,

$$dE = K \frac{dq}{w^2} \quad (2 - 17)$$

pero,  $dq = \rho_s ds$

reemplazando en la ecuación (2-17),

$$dE = K \frac{\rho_s ds}{w^2} \quad (2 - 18)$$

Al abrir el diferencial de superficie  $ds$  forma un rectángulo (figura 2.11) que tiene un área de  $ds = 2\pi r dr$ , reemplazando en la ecuación (2-18),

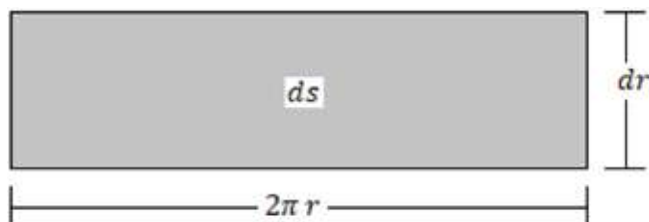


Figura 2.11 Diferencial de superficie  $ds$  del disco.

$$dE = K \frac{\rho_s 2\pi r dr}{w^2} \quad (2 - 19)$$

En el triángulo rectángulo de la figura 2.10 b,

$$w = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\cos \theta = \frac{h}{w}$$

Reemplazando en las ecuaciones (2-19) y (2-16),

$$dE_z = K \frac{\rho_s 2\pi r dr}{w^2} \frac{h}{w}$$

Reduciendo y reemplazando términos,

$$dE_z = K \frac{\rho_s 2\pi r dr}{w^3} h$$

$$dE_z = K \frac{h \rho_s 2\pi r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2 - 20)$$

Integrando la ecuación (2-20),

$$E_z = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^a \frac{h \rho_s 2\pi r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

La intensidad de campo eléctrico total  $E_p$  en el punto  $p$  es,

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

$$E_p = \sqrt{0 + 0 + E_z^2}$$

$$E_p = \sqrt{E_z^2} = E_z = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^a \frac{h \rho_s 2\pi r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_0^a \frac{h \rho_s 2\pi r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_p = \frac{h \rho_s 2\pi}{4\pi \epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$u = h^2 + r^2$$

$$du = 2r dr$$

$$E_p = \frac{h \rho_s 2\pi}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{du}{2 u^{3/2}}$$

$$E_p = \frac{h \rho_s}{4 \epsilon_0} \int u^{-(3/2)} du$$

$$E_p = \frac{h \rho_s}{4 \epsilon_0} \left[ \frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right]$$

$$E_p = -\frac{h \rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{u^{1/2}} \right]$$

$$E_p = -\frac{h \rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{(h^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^a$$

$$E_p = -\frac{h \rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{(h^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(h^2)^{1/2}} \right]$$

$$E_p = -\frac{h \rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{(h^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{h} \right]$$

Finalmente la intensidad de campo eléctrico  $E_p$  en el punto  $p$  viene dado en la ecuación (2-21),

$$E_p = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{h}{(h^2 + a^2)^{1/2}} \right] \quad (2 - 21)$$

## 2.4 POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Una carga de prueba muy pequeña de signo positivo  $\Delta Q$  que tiende a cero se desplaza dentro de un campo eléctrico externo  $\vec{E}$  desde el punto A hasta el punto B a través de dos caminos 1 y 2, tal como se muestra en la figura 2.12. Al desplazarse la carga va a realizar una variación de trabajo  $\Delta W$ , cabe mencionar que, por definición, sólo se realiza trabajo cuando la fuerza está aplicada en la misma dirección del desplazamiento, en este caso la fuerza eléctrica aplicada a la carga  $\Delta Q$  es  $\Delta Q E$ , y el vector desplazamiento  $\Delta \vec{l}$  a lo largo del camino 1, siempre va a ser tangente a esta trayectoria.

Matemáticamente se expresa en la ecuación (2-22), que es el producto punto entre los vectores  $\vec{E}$  y  $\Delta \vec{l}$ , y que se representa en la ecuación (2-23) (ESPOL, 1982, p.29).

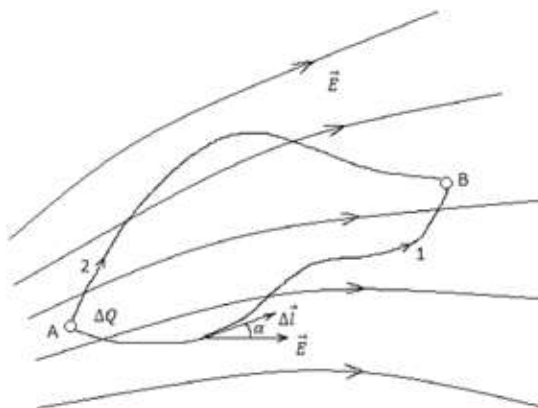


Figura 2.12 Trabajo de  $\Delta Q$  por dos caminos 1 y 2, entre A y B (ESPOL, 1982, p.29).

$$\Delta W \approx \Delta Q E \Delta l \cos \alpha \quad (2-22)$$

$$\Delta W \approx \Delta Q \vec{E} \cdot \Delta \vec{l} \quad (2-23)$$

El trabajo aproximado total realizado desde el punto A hasta el punto B está dado por la ecuación (2-24),

$$W \approx \sum_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot \Delta \vec{l} \quad (2-24)$$

Para obtener el trabajo total desde el punto A hasta el punto B, a través de cualesquiera de los dos caminos 1 o 2, se integra y se tiene:

El trabajo realizado a lo largo del camino 1, es  $W_1$  (2-25),

$$W_1 = \int_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-25)$$

El trabajo realizado a lo largo del camino 2, es  $W_2$  (2-26),

$$W_2 = \int_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-26)$$

Entonces, el trabajo que realiza la carga  $\Delta Q$  al desplazarse desde A hacia B, es el mismo  $W_{AB}$ , independiente del camino a seguir, 1 o 2, representado en la ecuación (2-27),

$$W_{AB} = \int_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-27)$$

El trabajo total  $W_T$  realizado desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  (por la trayectoria 1) y luego desde el punto  $B$  hasta el Punto  $A$  (por la trayectoria 2), es igual a cero, ecuación (2-28)

$$W_T = W_{AB} + W_{BA} = 0 \quad (2 - 28)$$

Donde,

$$W_{AB} = W_1 = \int_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{BA} = W_2 = - \int_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

El signo negativo (-) se debe a que al desplazarse por la trayectoria 2 desde  $B$  hasta  $A$ , el vector  $d\vec{l}$  va en dirección opuesta, entonces, reemplazando en (2-28),

$$W_T = \int_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_A^B \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Por lo tanto, al dirigirse de  $A$  a  $B$  y luego de  $B$  a  $A$ , es un camino cerrado representado en (2-29),

$$W_T = \oint_A^A \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2 - 29)$$

$$\oint_c \Delta Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Delta Q \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Por lo que, la ecuación (2-30), representa la **Ley de la conservación de la energía**,

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2 - 30)$$

### Definición del potencial electrostático.

Antes que nada, se debe aclarar que, si el potencial en el punto  $A$  es  $V_A$  y en  $B$  es  $V_B$ , entonces

$$V_{AB} = V_A - V_B \quad (2 - 31)$$

En la ecuación (2-31),  $V_{AB}$  significa la diferencia de potencial entre los puntos  $A$  y  $B$  y es el trabajo realizado al mover una carga  $Q$  dentro de un campo eléctrico externo  $E$  desde el punto inicial  $B$  hasta el punto final  $A$ . Seguidamente, la diferencia de potencial en términos del campo eléctrico, es

$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2 - 32)$$

El signo menos en la ecuación (2-32), significa que el límite inferior  $B$  de la integral de línea debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico y el límite superior  $A$  debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico, de tal modo que, el vector de desplazamiento  $d\vec{l}$  va dirigido desde el límite inferior  $B$  hacia el límite superior  $A$  de la integral de línea (Hayt y Buck. p 69).

Pero, si en la ecuación (2-32) el signo es positivo, entonces, significa que el límite inferior  $A$  de la integral de línea debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico y el límite superior  $B$  debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico, de tal modo que, el vector de desplazamiento  $d\vec{l}$  va dirigido desde el límite inferior  $A$  hacia el límite superior  $B$  de la integral de línea, tal como se muestra en la ecuación (2-33),

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2 - 33)$$

Por otro lado, en la figura 2.13,  $R$  es un punto de referencia, de tal forma que, el potencial electrostático en el punto  $A$  de mayor campo eléctrico con respecto al punto de referencia  $R$  de menor campo eléctrico, está definido por la ecuación (2-34).

$$V_A = \int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2 - 34)$$

Mientras que, el potencial electrostático en algún otro punto, digamos  $B$  de mayor campo eléctrico, con respecto al mismo punto de referencia  $R$  de menor campo eléctrico, es

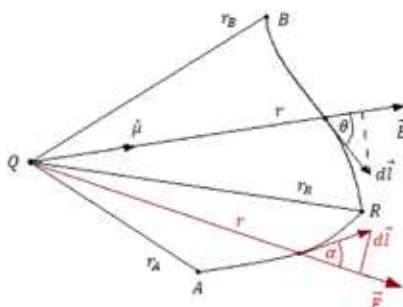


Figura 2.13 Construcción para determinar el potencial del campo creado por una carga puntual.



$$V_B = \int_B^R \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-35)$$

Utilizando la ecuación (2-30), se puede probar fácilmente que la diferencia de potencial entre dos puntos,  $A$  y  $B$ , es

$$V_A - V_B = \int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_B^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-36)$$

Se nota que el punto de referencia  $R$  no aparece en el lado derecho de la ecuación (2-36). Por tanto, la diferencia de potencial en dos puntos cualesquiera es independiente de la posición del punto de referencia. Entonces, a partir de la Ley de la conservación de la energía (2-30) y, siguiendo la trayectoria  $ARBA$  que representa un camino cerrado, se puede demostrar la ecuación (2-36) partiendo del punto  $A$  hacia el punto  $R$ , luego desde el punto  $R$  hasta el punto  $B$  y finalmente desde el punto  $B$  hasta el punto  $A$ , cerrando el camino desde y hacia el punto  $A$  (ESPOL, 1982, p.32), esto es,

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_R^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

invirtiendo los límites y pasando un término al lado derecho de la ecuación,

$$\int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_B^R \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

despejando,

$$\int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_B^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-37)$$

reemplazando las ecuaciones (2-34) y (2-35) en la (2-37),

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-38)$$

finalmente, combinando las ecuaciones (2-37) y (2-38), se llega a demostrar la ecuación (2-36).

$$V_A - V_B = \int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_B^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A partir de la figura 2.13, se procede a calcular el potencial electrostático  $V_A$  en el punto  $A$  con respecto al punto de referencia  $R$ , esto es

$$V_A = \int_A^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

al reemplazar la dirección del vector campo eléctrico  $\vec{E}$  por la dirección del vector unitario  $\hat{\mu}$ , resulta que

$$V_A = \int_A^R E \hat{\mu} \cdot d\vec{l}$$

pero, la intensidad de campo eléctrico  $E$  producido por la carga  $Q$  a una distancia  $r$ , es

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

reemplazando,

$$V_A = \int_A^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mu} \cdot d\vec{l}}{r^2}$$

al destruir el producto punto y reemplazar la magnitud del vector unitario por 1, se tiene

$$V_A = \int_A^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl \cos \alpha}{r^2}$$

pero,  $dl \cos \alpha = dr$ , el límite inferior  $r_A$  y el límite superior  $r_R$ , entonces

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_R} \frac{dr}{r^2}$$

integrando,

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_R}$$

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r_R} + \frac{1}{r_A} \right]$$

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_R} \right] \quad (2 - 39)$$

La localización del punto de referencia es totalmente arbitraria. Asumiendo que  $r_R$  está en el infinito en la ecuación (2-39), se tiene

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A}$$

De igual manera, siguiendo el mismo procedimiento, el potencial electrostático en el punto  $B$ , es

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B}$$

y, el potencial electrostático generado por la carga  $Q$  a una distancia  $r$  con respecto al infinito, es

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2 - 40)$$

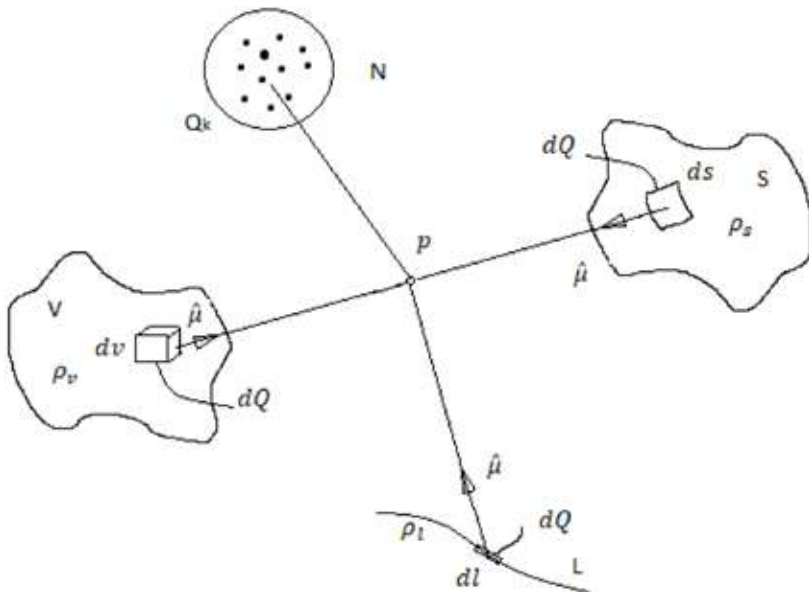


Figura 2.14 Potencial electrostático  $V_p$  en el punto  $p$ .

En general, si se dispone de una sumatoria de cargas puntuales, de una distribución lineal de cargas, de una distribución superficial de cargas y de una distribución volumétrica de cargas, tal como se muestra en la figura 2.14, entonces, para calcular el potencial electrostático  $V_p$  en el punto  $p$  se aplica el principio de superposición para sumar algebraicamente las cuatro alternativas de distribuciones de cargas, que se representa en la ecuación (2-41),

$$V_p = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{4\pi \epsilon_0 r_k} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_v \frac{\rho_v dv}{r} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s ds}{r} + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l dl}{r} \quad (2 - 41)$$

**Problema 2.2.** Un disco circular delgado de radio  $d$  se encuentra en el plano  $zx$ , tiene una distribución superficial de cargas uniformes  $\rho_s$  como se muestra en la figura 2.15. Determinar el potencial electrostático en el punto  $M$  a una distancia  $b$  sobre el eje del disco circular.

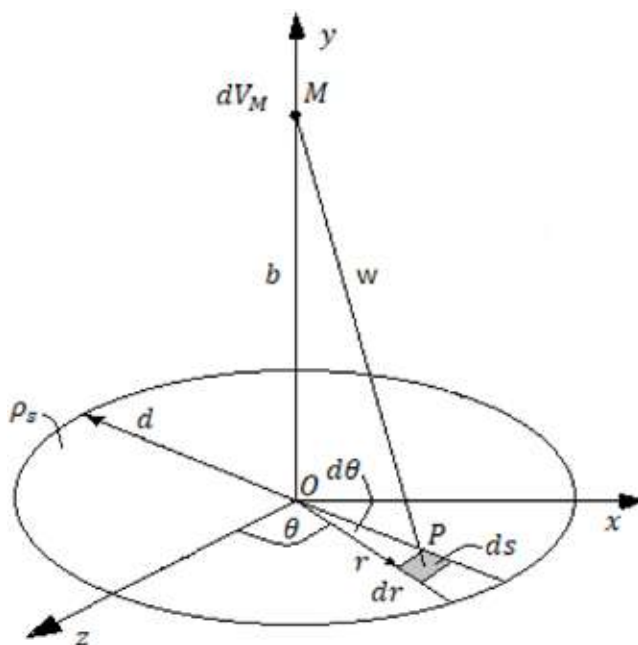


Figura 2.15 Disco circular con una distribución uniforme de cargas  $\rho_s$ .

**Solución:**

En la figura 2.15, se selecciona un diferencial de superficie  $ds$ , en el que se encuentra un diferencial de cargas  $dq$ , éste a su vez, produce un diferencial de potencial eléctrico  $dV_M$  a una distancia  $w$  en el punto  $M$  que se encuentra a una

altura  $b$  sobre el eje y del disco. A partir de la ecuación del potencial electrostático  $V_M$  en el punto  $M$  con respecto al infinito, se procede a derivar con respecto a la carga, esto es

$$V_M = k \frac{q}{w}$$

$$dV_M = k \frac{dq}{w} \tag{2 - 42}$$

pero,  $dq = \rho_s ds$ ; y  $ds = r d\theta dr$  (figura 2.16)

En el triángulo rectángulo  $MOP$  de la figura 2.15,

$$w = \sqrt{b^2 + r^2}$$

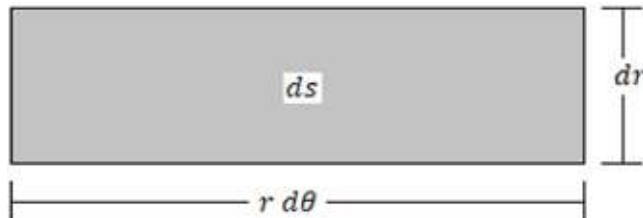


Figura 2.16 Diferencial de superficie del segmento  $ds$ .

Reemplazando en (2-42),

$$dV_M = k \frac{\rho_s ds}{w}$$

$$dV_M = k \frac{\rho_s r d\theta dr}{\sqrt{b^2 + r^2}} \tag{2 - 43}$$

Integrando la ecuación (2-43),

$$V_M = \int \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\rho_s r d\theta dr}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{4\pi \epsilon_0} \int_0^d \frac{r dr}{\sqrt{b^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{4\pi \epsilon_0} \int_0^d \frac{r dr}{\sqrt{b^2 + r^2}} [\theta]_0^{2\pi}$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{4\pi \epsilon_0} \int_0^d \frac{r dr 2\pi}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \int_0^d \frac{r dr}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

Haciendo un cambio de variables,

$$u = b^2 + r^2$$

$$du = 2r dr$$

$$r dr = \frac{du}{2}$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \int_0^d \frac{du}{2u^{1/2}}$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{4 \epsilon_0} \int_0^d u^{-1/2} du$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{4 \epsilon_0} \left[ \frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_0^d = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \sqrt{u} \right]_0^d = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \sqrt{b^2 + r^2} \right]_0^d$$

$$V_M = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \sqrt{b^2 + d^2} - \sqrt{b^2 + 0^2} \right] = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \sqrt{b^2 + d^2} - b \right]$$

Finalmente el potencial electrostático  $V_M$  en el punto  $M$  viene expresado por la ecuación (2-44),

$$V_M = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \sqrt{b^2 + d^2} - b \right] \quad (2 - 44)$$

## 2.5 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Considerando la ecuación (2-36) para el caso de dos puntos adyacentes  $A$  y  $B$ ,  $B$  se determina con respecto a  $A$  por una longitud vectorial diferencial  $d\vec{l}$ , tal como se muestra en la figura 2.17. Por lo tanto, la diferencia de potencial entre los dos puntos es infinitamente pequeña, esto es  $dV$ , y en lugar de la integral (suma), sólo se tiene un término (ESPOL, 1982, p.34). Suponiendo que el potencial aumenta en la dirección de  $d\vec{l}$ , el potencial en  $V_A = V$ , y el potencial en  $V_B = V + dV$ ; entonces, partiendo de la ecuación (2-36), se tiene  $V_A - V_B = V - (V + dV) = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

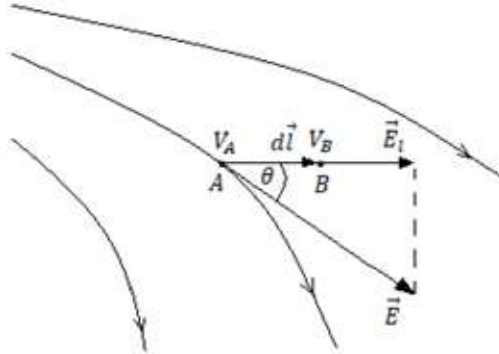


Figura 2.17 La diferencia de potencial en los puntos A y B es  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_l dl$ .

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos \theta$$

haciendo,  $E_l = E \cos \theta$

$E_l$  representa la componente de  $\vec{E}$  en la dirección de  $d\vec{l}$ , entonces

$$-dV = E_l dl$$

despejando,

$$E_l = -\frac{dV}{dl} \quad (2-45)$$

Ahora  $E_l$  es la componente del vector  $\vec{E}$  en la dirección definida por el elemento  $d\vec{l}$ . Por lo tanto,  $dV/dl$  también se puede considerar como una componente de una determinada función vectorial. Esta función vectorial se conoce como el gradiente de  $V$  y se designa como  $grad V$ . Entonces, la componente  $grad_l V$  del vector  $grad V$  en la dirección definida por  $d\vec{l}$ , es

$$grad_l V = \frac{dV}{dl} \quad (2-46)$$

A continuación, se representa el  $grad_l V$  en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas:

**En coordenadas rectangulares**, el potencial eléctrico está en función de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , esto es  $V = V(x, y, z)$

utilizando la ecuación (2-46), la variable ficticia  $l$  se reemplaza por las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , esto es,

$$\text{grad}_x V = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\text{grad}_y V = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\text{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z}$$

escribiendo el  $\text{grad } V$  en forma vectorial, es

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mu}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mu}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mu}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mu}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mu}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mu}_z$$

$$\vec{\nabla} V = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mu}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mu}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mu}_z \right) V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mu}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mu}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mu}_z$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mu}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mu}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mu}_z \quad (2 - 47)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mu}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mu}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mu}_z$$

Se puede representar el vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  en términos de la función de potencial  $V$ , como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (2 - 48)$$

ó

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (2 - 49)$$

**En coordenadas cilíndricas**, el potencial eléctrico está en función de  $r$ ,  $\varphi$  y  $z$ , esto es

$$V = V(r, \varphi, z)$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mu}_r + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\mu}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mu}_z \quad (2 - 50)$$

**En coordenadas esféricas**, el potencial eléctrico está en función de  $r$ ,  $\varphi$  y  $\theta$ , esto es



$$V = V(r, \varphi, \theta)$$

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mu}_r + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\mu}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mu}_\theta \quad (2 - 51)$$

**Problema 2.3.** A partir del potencial eléctrico  $V_M$  de la ecuación (2-44), determinar la intensidad de campo eléctrico en magnitud, dirección y sentido, utilizando la ecuación (2-48),

**Solución:**

Antes que nada, el potencial eléctrico  $V_M$  obtenido en el problema 2.2 de la ecuación (2-44), es

$$V_M = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \sqrt{b^2 + d^2} - b \right]$$

En coordenadas rectangulares, el gradiente es,

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mu}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mu}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mu}_z = \vec{\nabla}V$$

la ecuación (2-44), es

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

relacionando en el punto  $M$ , se tiene

$$\vec{E}_M = -\frac{\partial V_M}{\partial x} \hat{\mu}_x - \frac{\partial V_M}{\partial y} \hat{\mu}_y - \frac{\partial V_M}{\partial z} \hat{\mu}_z \quad (2 - 52)$$

Considerando que en el problema 2.2, la distribución de cargas es superficial uniforme  $\rho_s$ , y el punto  $M$  se encuentra en el eje del disco a una distancia  $b$ , el potencial en las componentes  $x$  y  $z$  se mantiene constante, sólo puede variar en la componente  $y$ , reemplazando la distancia  $b$  por  $y$ , se tiene

$$V_M = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \sqrt{y^2 + d^2} - y \right]$$

entonces,

$$\frac{\partial V_M}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial V_M}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial V_M}{\partial y} \neq 0$$

reemplazando en (2-52),

$$\vec{E}_M = -\frac{\partial V_M}{\partial y} \hat{\mu}_y$$

$$\vec{E}_M = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} (\sqrt{y^2 + d^2} - y) \right] \hat{\mu}_y$$

$$\vec{E}_M = -\frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} [\sqrt{y^2 + d^2} - y] \hat{\mu}_y$$

escribiendo de otra forma,

$$\vec{E}_M = -\frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} [(y^2 + d^2)^{1/2} - y] \hat{\mu}_y$$

derivando con respecto a  $y$ ,

$$\vec{E}_M = -\frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} 2y(y^2 + d^2)^{-1/2} - 1 \right] \hat{\mu}_y$$

$$\vec{E}_M = -\frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{y}{(y^2 + d^2)^{1/2}} - 1 \right] \hat{\mu}_y$$

Finalmente, la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}_M$ , es

$$\vec{E}_M = \frac{\rho_s}{2 \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{y}{(y^2 + d^2)^{1/2}} \right] \hat{\mu}_y \quad (2 - 53)$$

y se encuentra dibujado en la figura 2.18

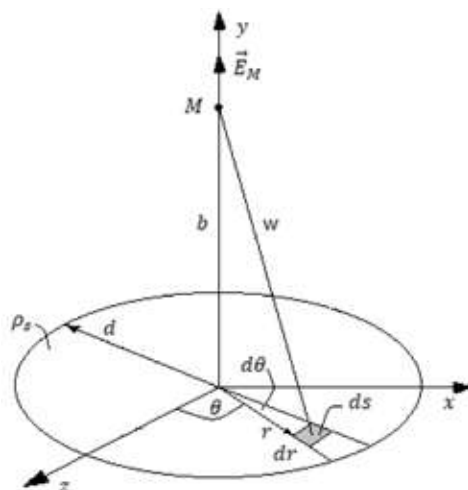


Figura 2.18 Intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}_M$  en la dirección  $y$ .

Comparando el resultado de la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}_p$  (2-23) obtenido en el problema 2.1, con el resultado de la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}_M$  (2-53) obtenido en el problema 2.3, los valores son equivalentes. Por consiguiente, el campo eléctrico se puede obtener a partir del gradiente.

## 2.6 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Las superficies cuyos puntos están al mismo potencial se denominan superficies equipotenciales, esto es, como un ejemplo, se puede decir que, las superficies equipotenciales son esferas centradas en la carga  $Q$  y se encuentran a un mismo valor de potencial eléctrico en cualquier punto a un mismo radio, tal como se muestra en la figura 2.19, suponiendo que: en la esfera de radio  $R_1$ , en cualquier punto de la superficie el potencial tiene un valor de  $V_1=\Delta V$ . En la esfera de radio  $R_2$ , en cualquier punto de la superficie el potencial tiene un valor de  $V_2=2\Delta V$ . En la esfera de radio  $R_3$ , en cualquier punto de la superficie el potencial tiene un valor de  $V_3=3\Delta V$ , finalmente, en la esfera de radio  $R_4$ , en cualquier punto de la superficie el potencial tiene un valor de  $V_4=4\Delta V$ . En general, el valor del potencial es mayor mientras más cerca se encuentra de la carga  $Q$  (ESPOL, 1982, p.36).

Si se considera dos puntos arbitrarios de una misma superficie equipotencial (superficie equipotencial de radio  $R_1$ ), la diferencia de potencial es igual a cero; mientras que, entre dos superficies equipotenciales (superficies equipotenciales de radios  $R_1$  y  $R_2$ ), la diferencia de potencial es diferente de cero, esto es:  $V_2-V_1=2\Delta V-\Delta V=\Delta V$ .

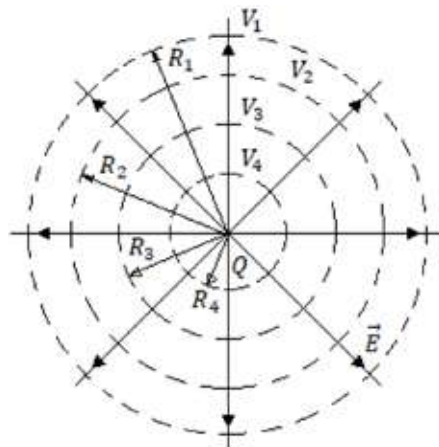


Figura 2.19 Líneas equipotenciales de una carga puntual  $Q$ .

## 2.7 LEY DE GAUSS. ÁNGULO SÓLIDO.

Ángulo sólido ( $\Omega$ ). Suponiendo que, se cortan varios conos de la misma superficie cónica mediante esferas de diferentes radios centradas en el vértice del cono (figura 2.20). La razón de sus superficies para el radio al cuadrado correspondiente, es una constante, ecuación (2-54). Esta constante es una medida de la "apertura" del cono. Se lo conoce como el ángulo sólido  $\Delta\Omega$  subtendido por la superficie  $\Delta S$  en el punto  $p$ . La unidad del ángulo sólido es el estereorradián.

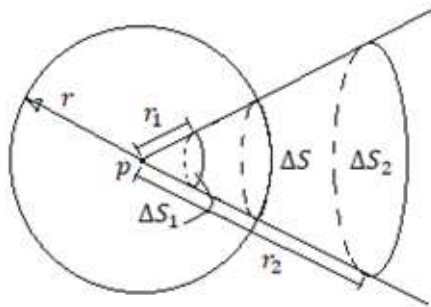


Figura 2.20 Ángulo sólido  $\Delta\Omega$ .

$$\frac{\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S}{r^2} = \frac{\Delta S_2}{r_2^2} = Cte = \Delta\Omega \quad (2 - 54)$$

En general, el ángulo sólido se representa como se muestra en la ecuación (2-55).

$$\frac{\Delta S}{r^2} = \Delta\Omega \quad (2 - 55)$$

En la figura 2.21, el ángulo sólido  $\Omega$  tiene una apertura de  $180^\circ$ , es decir, la mitad del área de la esfera. Utilizando la ecuación (2-55), se tiene

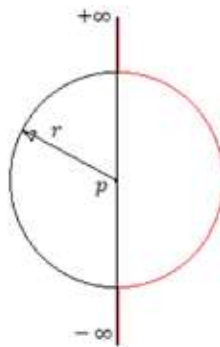


Figura 2.21 Ángulo sólido para un ángulo de  $180^\circ$ .

$$\frac{\Delta S}{r^2} = \frac{S/2}{r^2} = \frac{4\pi r^2/2}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{4\pi r^2}{r^2} = 2\pi = \Omega$$

Es decir, el ángulo sólido para la mitad de la esfera es igual a  $\Omega=2\pi$

Si el ángulo sólido tiene una abertura de  $360^\circ$ , entonces

$$\frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi = \Omega$$

**Ley de Gauss, utilizando el ángulo sólido.**

Si se considera una superficie cerrada arbitraria  $S$ , que encierra la carga  $Q$  en un solo punto (figura 2.22). El vector unitario  $\vec{\mu}_n$  normal a cualquier superficie cerrada, se define como dirigido desde la superficie hacia afuera en forma perpendicular. Esta es una convención muy importante. Con esta convención, se puede asociar un vector normal único con cada elemento  $dS$  de la superficie  $S$ . Por lo tanto, también se puede considerar el elemento  $dS$  de la superficie  $S$  como una cantidad vectorial  $d\vec{S} = dS \vec{\mu}_n$ . Así, por definición,  $d\vec{S}$  es un vector de magnitud  $dS$  y perpendicular a  $dS$  (ESPOL, 1982, p.37).

A continuación se determina el flujo eléctrico que produce la carga  $Q$  y atraviesa la superficie cerrada  $S$ , pero antes, se debe recordar que, por definición, el flujo eléctrico es el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie en forma perpendicular, la superficie puede ser abierta o cerrada, entonces

$$\varphi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{2 - 56}$$

Por lo tanto, sobre la superficie arbitraria cerrada  $S$  (figura 2.22) se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre este, se dibujan los dos vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$ , que producen un diferencial de flujo  $d\varphi_E$ , de tal modo que, la ecuación (2-56) en forma diferencial, es  $d\varphi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

al reemplazar la dirección del vector campo eléctrico  $\vec{E}$  por la dirección del vector unitario  $\hat{\mu}_r$ , resulta que

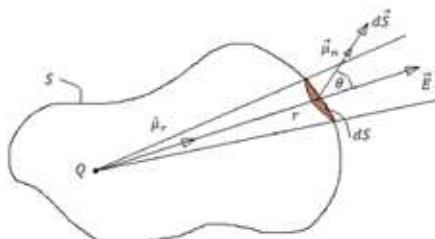


Figura 2.22 Ley de Gauss a partir del ángulo sólido.

$$d\varphi_E = E \hat{\mu}_r \cdot d\vec{S}$$

pero,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

entonces,

$$d\varphi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mu}_r \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y reemplazando la magnitud del vector unitario por 1, se tiene

$$d\varphi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

pero, utilizando la definición del ángulo sólido, el valor de

$$\frac{dS \cos \theta}{r^2} = d\Omega$$

entonces,

$$d\varphi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

El ángulo sólido para la superficie cerrada ( $360^\circ$ ) es  $4\pi$ , al integrar  $\Omega=4\pi$

$$\varphi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\varphi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

entonces,

$$\varphi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

finalmente,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(2 – 57)

Si la carga  $Q$  de la ecuación (2-57) se reemplaza por una carga neta  $Q_n$ , entonces se tiene la ecuación de la Ley de Gauss, esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_0} \quad (2-58)$$

Por lo tanto, se ha demostrado la Ley de Gauss (2-58) utilizando el ángulo sólido, que es válido para cualquier superficie cerrada, regular o irregular.

La  $Q_n$  puede ser sustituida por una sumatoria de cargas puntuales, distribuciones lineales, superficiales y volumétrica de cargas, esto es

$$Q_n = \sum_{i=1}^N q_i$$

$$Q_n = \int_l \rho_l dl$$

$$Q_n = \int_S \rho_s dS$$

$$Q_n = \int_V \rho_v dv$$

## 2.8 COMPORTAMIENTO DE LOS CONDUCTORES EN EL CAMPO ELECTROSTÁTICO. PANTALLA ELECTROSTÁTICA.

Antes que nada, se debe recordar que, si a un material conductor en estado de reposo se ingresa dentro de un campo eléctrico externo, entonces se produce la inducción de cargas, de tal manera que, en la figura 2.23 el material conductor en estado de reposo es introducido dentro de un campo eléctrico externo  $\vec{E}_{ext}$  denominada también, campo eléctrico primario  $\vec{E}_{prim}$ , en el interior del material conductor se producen fuerzas de atracción y de repulsión, debido a las cargas positivas y negativas que se desplazan a la superficie del material conductor, existiendo un campo eléctrico secundario  $\vec{E}_{sec}$ .

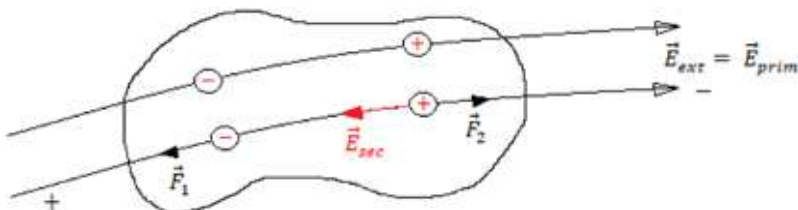


Figura 2.23 Campo eléctrico externo sobre un material conductor en reposo.

Las cargas negativas (rojo) del material conductor se desplazan a la superficie atraídas por las cargas positivas (negro) del campo eléctrico externo. De la misma manera las cargas positivas (rojo) del material conductor se desplazan a la superficie atraídas por las cargas negativas (negro) del campo eléctrico externo. Al finalizar el proceso de la inducción de cargas, las cargas positivas y negativas del material conductor se van a la superficie y en el interior del material conductor (figura 2.24 a), no existen cargas, siendo el campo eléctrico igual a cero, demostrado en la figura 2.24 b y c.

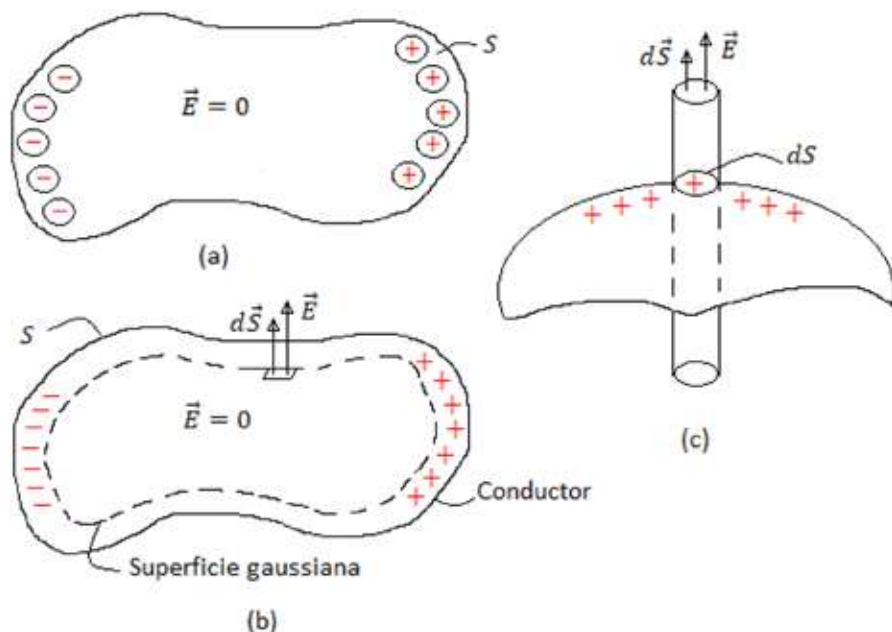


Figura 2.24 Material conductor con las cargas en la superficie.

Para demostrar que el campo eléctrico en el interior de la figura 2.24 a, es igual a cero, utilizando la Ley de Gauss (2-58) demostrada antes y que es válida para cualquier superficie cerrada regular o irregular, a partir de la figura 2.24 b, se muestra que en el interior de la superficie  $S$  no existen cargas ( $Q_n=0$ ), debido a que todas las cargas se encuentran en la superficie  $S$  del material conductor, por tanto, la intensidad del campo eléctrico es igual a cero, esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_o}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{0}{\epsilon_o}$$

$$E = 0$$



De igual manera, considerando la distribución superficial de cargas uniformes  $\rho_s$  de la figura 2.24 c, se toma un segmento de superficie, y se calcula la intensidad de campo eléctrico utilizando la Ley de Gauss, esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s ds$$

$$\int_S E ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s ds$$

$$E \int_S ds = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \int_S ds$$

$$ES = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} S$$

Las superficies  $S$  son iguales, entonces, el campo eléctrico en la superficie, es

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Un ejemplo importante de la aplicación de este hecho es el denominado blindaje electrostático. Un caparazón de material conductor vacío sin carga en su interior es una protección perfecta del volumen encerrado de los campos eléctricos estáticos externos. Dado que el campo eléctrico desaparece en la pared conductora, por muy delgada que sea la pared, no se pueden inducir cargas en la superficie interior. Por tanto, la intensidad del campo eléctrico en la cavidad es cero. Entonces, en el caso del campo eléctrico estático, una capa conductora muy delgada es suficiente para un blindaje electrostático completo. Veremos que este no es el caso de los campos eléctricos que varían en el tiempo (ESPOL, 1982, p.45).

Para calcular las componentes normales  $E_n$  y tangenciales  $E_t$  de la intensidad del campo eléctrico en la superficie del material conductor, se aplican condiciones de frontera.

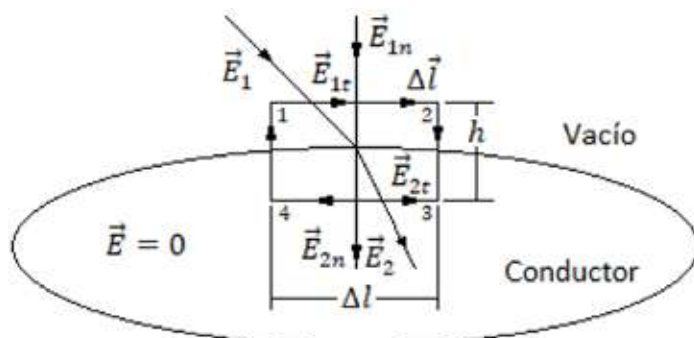


Figura 2.25 Obtención de la componente tangencial del campo eléctrico.

En primer lugar, para obtener la componente tangencial  $E_t$  de la intensidad de campo eléctrico, en el interior del material conductor (figura 2.25) el campo eléctrico es igual a cero, todas las cargas se encuentran en la superficie del material conductor, entonces, se selecciona una trayectoria cerrada 12341 de forma rectangular de dimensiones  $\Delta l$  por  $h$ , tal como se muestra en la figura 2.25,

para esto, se utiliza la integral cerrada de línea y se aplica el límite cuando  $h$  tiende a cero para que el análisis sea en la frontera de los dos medios conductor y vacío, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot \Delta \vec{l} = 0$$

la integral cerrada de línea se reemplaza por la trayectoria 12341,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{12341} \vec{E} \cdot \Delta \vec{l} = 0$$

la trayectoria cerrada 12341 se reemplaza por seis integrales abiertas, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 \vec{E}_{1t} \cdot \Delta \vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{1n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_{2n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_{2t} \cdot \Delta \vec{l} + \int_4^3 \vec{E}_{2n} \cdot \Delta \vec{l} + \int_3^2 \vec{E}_{1n} \cdot \Delta \vec{l} = 0 \right]$$

Al destruir el producto punto de todas las integrales, es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ E_{1t} \Delta l + E_{1n} \frac{h}{2} + E_{2n} \frac{h}{2} - E_{2t} \Delta l - E_{2n} \frac{h}{2} - E_{1n} \frac{h}{2} \right]$$

Aplicando el límite,

$$E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

Entonces,  $E_{1t} = E_{2t} = 0$ . Con lo que se ha demostrado, que la componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico es igual a cero.

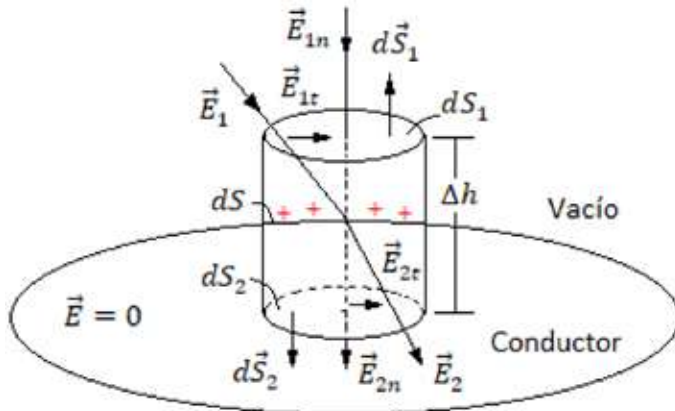


Figura 2.26 Obtención de la componente normal del campo eléctrico.

En segundo lugar, para determinar la componente normal de la intensidad de campo eléctrico, en el interior del material conductor (figura 2.26) no existen cargas por lo que el campo eléctrico es igual a cero, todas las cargas se encuentran en la superficie del material conductor. Utilizando la ecuación de la Ley de Gauss para una distribución superficial de cargas  $\rho_s$ , entonces, se selecciona una superficie gaussiana en la frontera de los dos medios, tal como se muestra en la figura 2.26 y se aplica el límite cuando  $\Delta h$  tiende a cero para que el análisis sea en la frontera de los dos medios conductor y vacío, entonces

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

La carga neta  $Q_n$  se reemplaza por una distribución superficial de cargas  $\rho_s$ , entonces

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s ds$$

Aplicando el límite,

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left[ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s ds$$

La integral cerrada de superficie se reemplaza por cuatro integrales abiertas de superficies, así

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left[ \int_{S1} \vec{E}_{1n} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S2} \vec{E}_{2n} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{SL1} \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{S}_{L1} + \int_{SL2} \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{S}_{L2} \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s ds$$

Al destruir el producto punto de todas las integrales e integrando, se tiene

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} [-E_{1n} S_1 + E_{2n} S_2 + 0 + 0] = \frac{\rho_s S}{\epsilon_0}$$

Aplicando el límite,

$$-E_{1n} S_1 + E_{2n} S_2 = \frac{\rho_s S}{\epsilon_0}$$

Pero,  $S_1 = S_2 = S$ , entonces

$$-E_{1n} + E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Pero,  $E_{2n} = 0$

Por lo que,

$$E_{1n} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Si los vectores  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  de la figura 2.26 se seleccionan en sentido contrario, entonces

Recordando que  $E_n = -\partial V / \partial n$ , también se puede escribir como

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

**Pantalla electrostática.** La pantalla electrostática está definida como un “conductor eléctrico conectado a tierra, que rodea una fuente de campo eléctrico para que el campo creado en el exterior por esa fuente sea cero” (F. R. Quintela y R. C. Redondo Melchor, 2006).

## 2.9 FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE GAUSS.

Antes que nada, “en cálculo vectorial, el **teorema de la divergencia**, también llamado teorema de Gauss o teorema de Gauss-Ostrogradsky, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie. Intuitivamente se puede concebir como la suma de todas las fuentes menos la suma de todos los sumideros da el flujo de salida neto de una región”. (“Teorema de la divergencia,” 2021).

“La **divergencia** mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes" la divergencia será positiva, y si tiene "sumideros", la divergencia será negativa. La divergencia mide la rapidez neta con la que se conduce la materia al exterior de cada punto, y en el caso de ser la divergencia idénticamente igual a cero, describe al flujo incompresible del fluido, llamado también campo solenoidal” (“Divergencia matemática,” 2021).

Matemáticamente la divergencia de un vector es el límite de su integral de superficie por unidad de volumen a medida que el volumen encerrado por la superficie tiende a cero, esto es

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (2 - 59)$$

escribiendo en forma integral, es

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dv = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2 - 60)$$

pero, la Ley de Gauss para una distribución volumétrica de cargas, es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v \, dv \quad (2 - 61)$$

reemplazando la ecuación (2-61) en la ecuación (2-60), se tiene

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v \, dv \quad (2 - 62)$$

integrando, se obtiene la ecuación (2-63), que es la *forma diferencial de la Ley de Gauss*, y es válido para cualquier sistema de coordenadas, esto es

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad \text{Forma diferencial de la Ley de Gauss} \quad (2 - 63)$$

La divergencia de una función vectorial, también se puede escribir como

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

**Demostración:** para demostrar la ecuación (2-63) en coordenadas rectangulares, se selecciona un diferencial de volumen  $dV$  de forma de un cubo (figura 2.27) y para cumplir con el enunciado del teorema de la divergencia en que el flujo del vector campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de la superficie que encierra el diferencial de volumen producido, en este caso, por la distribución volumétrica de cargas, se utiliza el lado derecho de la ecuación (2-59), y la integral cerrada de superficie

cumple con la Ley de Gauss, donde, el vector campo eléctrico en cada una de las seis superficies lo atraviesan en forma perpendicular, esto es

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

entonces, aplicando el límite

$$\frac{\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dV} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (2 - 64)$$

A partir del diferencial cerrado de superficie, se tiene seis superficies abiertas en el elemento diferencial del cubo, así

$$\begin{aligned} \oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = & \int_{ds_1} \left( \vec{E}_z + \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} dz \right) \cdot d\vec{S}_1 + \int_{ds_2} \left( \vec{E}_y + \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} dy \right) \cdot d\vec{S}_2 \\ & + \int_{ds_3} \left( \vec{E}_x + \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} dx \right) \cdot d\vec{S}_3 + \int_{ds_4} \vec{E}_y \cdot d\vec{S}_4 + \int_{ds_5} \vec{E}_x \cdot d\vec{S}_5 + \int_{ds_6} \vec{E}_z \cdot d\vec{S}_6 \end{aligned}$$

Al destruir el producto punto de las seis superficies,

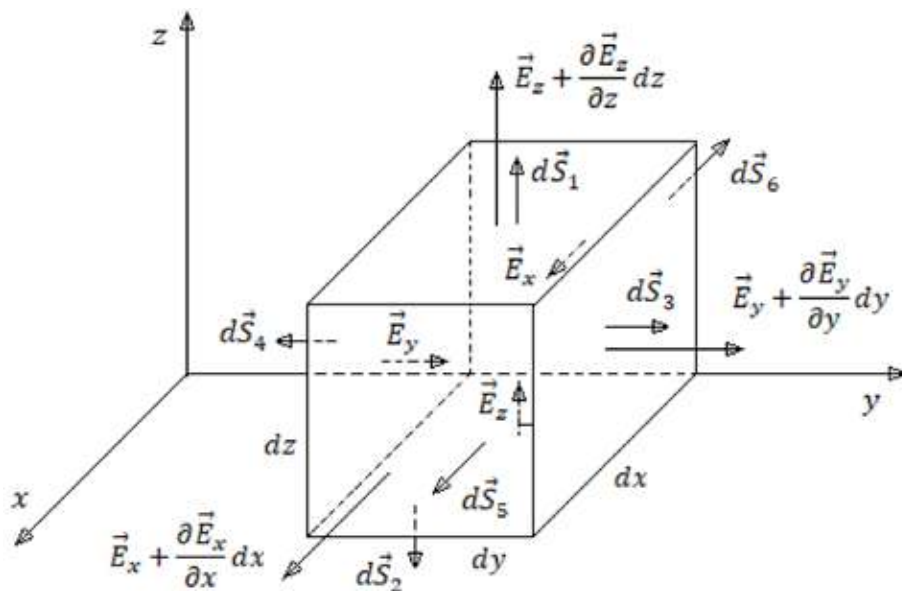


Figura 2.27. Elemento de volumen para determinar la divergencia de  $\vec{E}$  en un sistema de coordenadas rectangulares (ESPOL, 1982, p.50).

$$\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{ds_1} \left( E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) dS_1 \cos 0^\circ + \int_{ds_2} \left( E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dS_2 \cos 0^\circ$$

$$+ \int_{ds_3} \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dS_3 \cos 0^\circ + \int_{ds_4} E_y dS_4 \cos 180^\circ$$

$$+ \int_{ds_5} E_x dS_5 \cos 180^\circ + \int_{ds_6} E_z dS_6 \cos 180^\circ$$

pero,

$$dS_1 = dx dy = dS_6$$

$$dS_2 = dx dz = dS_4$$

$$dS_5 = dy dz = dS_3$$

$$\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left( E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) dx dy + \left( E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

$$- E_y dx dz - E_x dy dz - E_z dx dy$$

$$\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z dx dy + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz dx dy + E_y dx dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy dx dz + E_x dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

$$- E_y dx dz - E_x dy dz - E_z dx dy$$

$$\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

$$\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) dx dy dz$$

$$\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) dV$$

$$\frac{\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dV} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) \quad (2 - 65)$$

pero, el lado derecho de la ecuación (2-65) es la divergencia del vector campo eléctrico  $\vec{E}$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (2 - 66)$$

ó

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{E} = \left( \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x \right) \cdot (E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y + E_z \hat{a}_z) = \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Se reemplaza la ecuación (2-66) en la ecuación (2-65), entonces

$$\frac{\oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dV} = \text{div } \vec{E} \quad (2 - 67)$$

Finalmente, se reemplaza la ecuación (2-67) en la ecuación (2-64)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

De esta manera, queda demostrado la forma diferencial de la Ley de Gauss en coordenadas rectangulares, mostrado en la ecuación (2-63).

## 2.10 ECUACIÓN DE POISSON Y LAPLACE.

Combinando las ecuaciones (2-48) y (2-63) (ESPOL, 1982, p.52). Esto es

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Lo que es lo mismo,

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

resolviendo el término del lado izquierdo de la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad \text{Ecuación de Poisson} \quad (2 - 68)$$

$\nabla^2 = \text{operador Laplaciano}$

En coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$



Si a la ecuación de Poisson se les iguala a cero, resulta la ecuación de Laplace, esto es

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace} \quad (2 - 69)$$

En conclusión, la ecuación de Poisson (2-68), se aplica en un medio donde existen cargas, en cambio, la ecuación de Laplace (2-69), se aplica en un medio donde no existen cargas.

## 2.11 RELACIÓN ENTRE POTENCIAL ELECTROSTÁTICO Y CARGAS SOBRE CUERPOS CONDUCTORES. CAPACITANCIA.

**El caso de un conductor aislado.** Considerar un cuerpo conductor cargado aislado. La distribución de cargas sobre la superficie del cuerpo es tal que la superficie es equipotencial y no hay campo eléctrico en su interior. Suponer que se aumenta la densidad de carga superficial en cada punto de la superficie  $n$  veces. Nuevamente, la superficie del conductor es equipotencial, solo el potencial es diferente. De acuerdo con el teorema de la unicidad, esto implica a la inversa que la carga  $n$ -veces-mayor en el cuerpo debe distribuirse de la misma manera que antes. Entonces, la distribución relativa de cargas en un cuerpo conductor aislado es independiente de la carga total en el cuerpo. De la ecuación (2-41) se deduce que el potencial de un cuerpo conductor aislado es directamente proporcional a la carga total del cuerpo o, la carga total en un conductor aislado es directamente proporcional al potencial del conductor (ESPOL, 1982, p.57). Esto es,  $V \propto Q$  ó  $Q \propto V$

Se asigna la carga total en el cuerpo conductor por  $Q$  y su potencial correspondiente por  $V$ . Entonces

$$Q = C V \quad (\text{definición de capacitancia, cuerpo aislado}) \quad (2 - 70)$$

donde  $C$  es una constante que depende de la forma del cuerpo, pero no de  $Q$  ni de  $V$ . la constante  $C$ , obviamente, caracteriza la capacidad de un cuerpo aislado con respecto a la carga acumulada en él por unidad de potencial. Se le conoce como la capacitancia de ese cuerpo.

Despejando la capacitancia de la ecuación (2-70) el cual viene expresada en faradio en el sistema internacional (SI) de unidades,

$$C = \frac{Q}{V} \quad \left[ \frac{\text{Coul}}{\text{Volt}} \right] = [\text{Faradio}] \quad (2 - 71)$$

El caso de dos cuerpos con cargas iguales de signo opuesto (el condensador). Un condensador o capacitor, está definido como “aquel que está constituido por dos materiales conductores de igual magnitud en cargas, pero de signos diferentes”, esto es

$$Q = C(V_1 - V_2) \quad (\text{definición de capacitancia}) \quad (2 - 72)$$

La capacitancia  $C$ , va a ser función solamente de la geometría del sistema y del material dieléctrico (figura 2.28), pero no de  $Q$  o de  $(V_1 - V_2)$ .

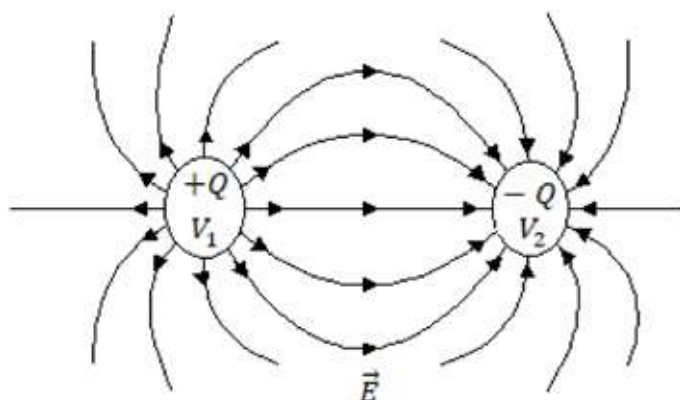


Figura 2.28 Sistema capacitivo.

**Conexión de capacitores en paralelo.** Dos o más capacitores están conectados en paralelo, cuando sus potenciales son iguales (figura 2.29), esto es,

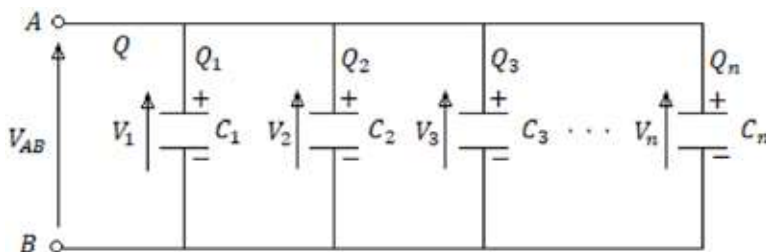


Figura 2.29 Condensadores conectados en paralelo.

$$V_{AB} = V_1 = V_2 = V_3 = V_n$$

por definición  $C = Q_{total} / V_A - V_B$

entonces, la carga total acumulada en todos los condensadores correspondiente a una diferencia de potencial  $V_A - V_B$  entre A y B es

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$C = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n}{V_A - V_B}$$

$$C = \frac{Q_1}{V_A - V_B} + \frac{Q_2}{V_A - V_B} + \frac{Q_3}{V_A - V_B} + \dots + \frac{Q_n}{V_A - V_B}$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

Entonces, la capacitancia equivalente  $C_{eq}$  de los capacitores conectados en paralelo es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

**Conexión de capacitores en serie.** Dos o más capacitores están conectados en serie, cuando sus cargas son iguales (figura 2.30), esto es,

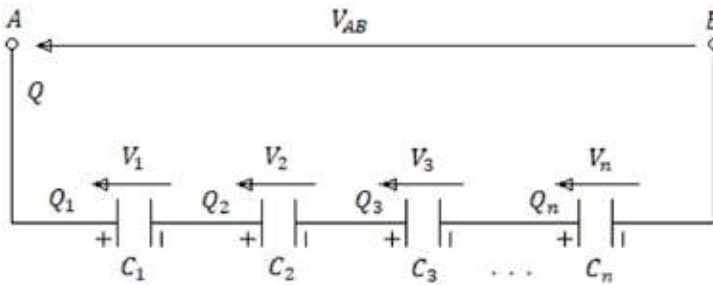


Figura 2.30 Condensadores conectados en serie.

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_n \tag{2 - 73}$$

La diferencia de potencial entre el nodo  $A$  y  $B$ , es

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \tag{2 - 74}$$

pero

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \quad C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \quad C_3 = \frac{Q_3}{V_3} \quad C_n = \frac{Q_n}{V_n}$$

despejando

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} \quad V_3 = \frac{Q_3}{C_3} \quad V_n = \frac{Q_n}{C_n} \tag{2 - 75}$$

reemplazando la ecuación (2-75) en la ecuación (2-74),

$$V_{AB} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \dots + \frac{Q_n}{C_n} \tag{2 - 76}$$

reemplazando la ecuación (2-73) en la ecuación (2-76),

$$V_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

sacando factor común  $Q$ ,

$$V_{AB} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

haciendo,

$$\frac{V_{AB}}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Pero,

$$\frac{V_{AB}}{Q} = \frac{1}{C}$$

entonces,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

donde,  $C$  es la capacitancia equivalente  $C_{eq}$  de los capacitores conectados en paralelo, esto es

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

## 2.12 PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1.** Un hilo conductor muy largo es cargado con una densidad lineal de cargas  $\rho_l$ . Determinar la densidad de campo eléctrico en el punto  $p$  a una distancia  $x$  desde el centro del hilo conductor, tal como se muestra en la figura 2.31.

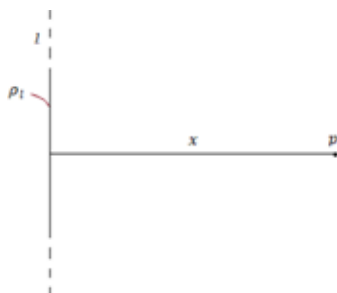


Figura 2.31 Hilo conductor con distribución de cargas lineales  $\rho_l$ .

**Desarrollo:**

Sobre el alambre de la figura 2.31 se selecciona un diferencial de longitud  $dl$ , sobre éste diferencial de longitud existe un diferencial de cargas  $dq$ , en la que, éste diferencial de cargas produce un diferencial de campo eléctrico  $d\vec{E}$  en el punto  $p$  a una distancia  $r$ , como se muestra en la figura 2.32. Para resolver este problema, se selecciona un sistema de referencia, donde el eje  $x$  debe coincidir con el centro del alambre y, el eje  $y$  debe coincidir con el alambre.

El vector  $d\vec{E}$  tiene sus componentes en el eje  $x$ ,  $d\vec{E}_x$  y en el eje  $y$ ,  $d\vec{E}_y$ . Para calcular la magnitud de la intensidad del campo eléctrico  $dE$  en el punto  $p$ , en el triángulo rectángulo se plantean las ecuaciones de las componentes escalares, tanto en el eje  $x$ , así como en el eje  $y$ , así

$$dE_y = dE \operatorname{sen} \theta = 0, \text{ por simetría} \quad (2 - 77)$$

y

$$dE_x = dE \cos \theta \quad (2 - 78)$$

La ecuación (2-77) se hace cero por simetría, debido a que en el sistema de referencia el eje  $x$  está situado en el centro del alambre que divide en dos partes iguales al eje  $y$ ; de tal forma que, sólo existe la componente en el eje  $x$ , es decir, la ecuación (2-78). La ecuación para calcular la intensidad de campo eléctrico producido por una carga  $q$  a una distancia  $r$ , es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Pero, un diferencial de carga produce un diferencial de campo eléctrico  $dE$ , entonces

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad (2 - 79)$$

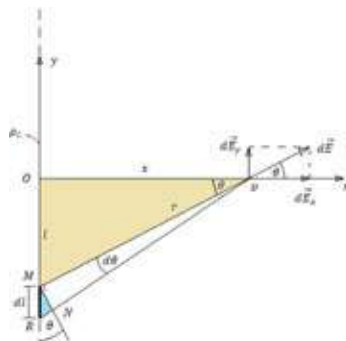


Figura 2.32 Campo eléctrico en el punto  $p$  producido por una distribución  $\rho_l$ .

De acuerdo a este problema, en el alambre conductor existe una distribución lineal de cargas  $\rho_l$ , por lo que, el diferencial de cargas  $dq$ , es

$$dq = \rho_l dl \quad (2 - 80)$$

Reemplazando la ecuación (2-80) en la ecuación (2-79), se tiene

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl}{r^2} \quad (2 - 81)$$

La ecuación (2-81) se reemplaza en la ecuación (2-78), entonces

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl}{r^2} \cos \theta \quad (2 - 82)$$

En el triángulo rectángulo  $OpM$ , se aplica la función trigonométrica  $\cos\theta$  y se despeja la hipotenusa  $r$ , así

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + l^2}$$

reemplazando en la ecuación (2-82),

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl}{r^2} \frac{x}{r}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l x dl}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l x dl}{(\sqrt{x^2 + l^2})^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l x dl}{(x^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l x dl}{(x^2 + l^2)^{3/2}}$$

integrando,

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l x dl}{(x^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\rho_l x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(x^2 + l^2)^{3/2}}$$

Debido a la simetría en el eje  $y$ , se puede integrar de 0 al  $\infty$  multiplicado por 2, así

$$E_x = \frac{2\rho_l x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dl}{(x^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\rho_l x}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dl}{(x^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\rho_l x}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dl}{(x^2 + l^2)^{3/2}} \quad (2 - 83)$$

La solución de la integral (2-83), es

$$E_x = \frac{\rho_l x}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{l}{x^2(x^2 + l^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left[ \frac{l}{(x^2 + l^2)^{1/2}} \right]_0^\infty$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left[ \frac{l}{(x^2 + l^2)^{1/2}} \right]_0^\infty$$

En este caso se debe aplicar el límite cuando  $l$  tiende a infinito, entonces

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l}{(x^2 + l^2)^{1/2}} - 0 \right\}$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{l^2} + 1\right)^{1/2}} - 0 \right\} = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{\infty} + 1\right)^{1/2}} \right\}$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{(0 + 1)^{1/2}} \right\} = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{1} \right\} = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} 1 \right\} = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0}$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \quad (2 - 84)$$

Finalmente, la intensidad de campo eléctrico en el punto  $p$ , es

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_x^2 + 0} = \sqrt{E_x^2} = E_x$$

$$E_p = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \quad (2 - 85)$$

Este problema, también se puede resolver de otra forma:

En el triángulo rectángulo  $MNR$  de la figura 2.32, el segmento  $\overline{MN}$  es igual a:

$$\overline{MN} = dl \cos \theta \quad (2 - 86)$$

Pero, debido a que el diferencial de longitud  $dl$  es muy pequeño, el segmento  $\overline{MN}$  se considera como si fuera parte de una circunferencia, entonces, viene a ser el arco del triángulo  $MpN$ . Por definición el arco  $MN$  es

$$MN = r d\theta \quad (2 - 87)$$

Igualando las dos ecuaciones (2-86) y (2-87), se tiene

$$dl \cos \theta = r d\theta \quad (2 - 88)$$

La ecuación (2-88) se reemplaza en la ecuación (2-78), así

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l r d\theta}{r^2}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l r d\theta}{r^2}$$

integrando y, sabiendo que la variable de integración es el ángulo, entonces los límites de integración van desde  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ , debido a que el alambre conductor es muy largo y delgado que se puede considerar como de longitud infinita, entonces

$$E_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l r d\theta}{r^2}$$

Debido a la simetría del eje y se puede integrar de 0 a  $\pi/2$  y multiplicado por 2, así

$$E_x = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l d\theta}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$r = \frac{x}{\cos \theta}$$

$$E_x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos \theta d\theta}{x} = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} [\text{sen } \theta]_0^{\pi/2}$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} [\text{sen } \theta]_0^{\pi/2} = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} [\text{sen } 90^\circ - \text{sen } 90^\circ] = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} [1 - 0] = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0}$$

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\pi x \epsilon_0} \quad (2 - 89)$$

Con lo cual se demuestra que, la respuesta de la ecuación (2-89) es igual a la ecuación (2-84).

**Problema 2.** Dentro de una superficie esférica de radio  $a$ , hay una distribución volumétrica de cargas  $\rho(r)$ ,

$$\rho(r) = \frac{\rho_0(a-r)}{a}$$

Donde,  $r$  es la distancia que une un elemento de carga a su centro. Calcular:



- La intensidad del campo eléctrico  $E$ , dentro y fuera de la esfera.
- El valor máximo de la intensidad del campo eléctrico  $E$ .
- El potencial eléctrico, dentro y fuera de la esfera.
- Graficar, la intensidad del campo eléctrico con respecto al radio ( $E$  vs  $r$ ) y, el potencial eléctrico con respecto al radio ( $V$  vs  $r$ ).

**Desarrollo:****a) Calcular la intensidad del campo eléctrico  $E$ , dentro y fuera de la esfera.**

Para calcular la intensidad de campo eléctrico  $E$  dentro y fuera de la esfera, se utiliza la Ley de Gauss mostrada en la ecuación (2-90), así

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_0} \quad (2 - 90)$$

**Para  $r > a$** 

Para calcular la intensidad de campo eléctrico  $E$  fuera de la esfera (figura 2.33), se dibuja una superficie gaussiana  $S$  para un radio  $r > a$ , en la que se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre ésta se dibujan los dos vectores, el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  y el vector diferencial de superficie  $d\vec{S}$ . La dirección y sentido del vector campo eléctrico va desde el diferencial de superficie  $dS$  en forma radial hacia el infinito, debido a que se tiene una distribución de cargas volumétricas positivas, las cargas negativas se asume que están en el infinito, entonces, el campo eléctrico por definición se debe dibujar desde una carga positiva hacia una carga negativa. El criterio para dibujar el vector superficie  $d\vec{S}$  es perpendicular de la superficie  $dS$  hacia afuera.

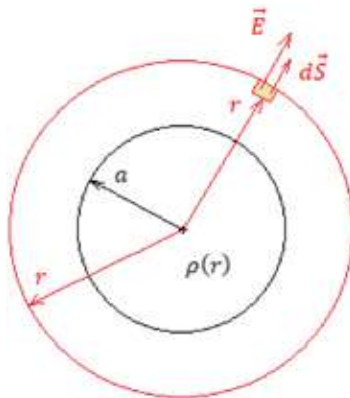


Figura 2.33 Campo eléctrico  $E$  para  $r > a$ .

La integral cerrada de superficie de la esfera, ecuación (2-90), se convierte en una sola integral abierta de superficie con sus límites de 0 a  $r$  y, la carga  $Q_n$  como dato de este problema se debe reemplazar por la distribución volumétrica de cargas con sus límites de 0 a  $a$ , debido a que la superficie imaginaria encierra la totalidad de las cargas, así

$$\int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \rho(r) dv$$

El volumen de la esfera, es

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3$$

derivando con respecto al radio,

$$dv = 4\pi r^2 dr$$

Entonces, destruyendo el producto punto y reemplazando valores, se tiene

$$\int_0^r E dS \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho_0(a-r)}{a} 4\pi r^2 dr$$

Resolviendo la ecuación

$$\int_0^r E dS = \frac{4\pi\rho_0}{a\epsilon_0} \int_0^a (a-r)r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{a\epsilon_0} \left[ \int_0^a ar^2 dr - \int_0^a r^3 dr \right]$$

$$E[S]_0^r = \frac{4\pi\rho_0}{a\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{ar^3}{3} \right]_0^a - \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^a \right\}$$

$$E[4\pi r^2]_0^r = \frac{4\pi\rho_0}{a\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{ar^3}{3} \right]_0^a - \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^a \right\}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\rho_0}{a\epsilon_0} \left\{ \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right\} = \frac{4\pi\rho_0 a^4}{a\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{\epsilon_0} \left( \frac{4-3}{12} \right) = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{12\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{12\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 r^2} \tag{2-91}$$

En la ecuación (2-91) la intensidad del campo eléctrico se escribe en función del radio para poder graficar en el literal d), así

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 r^2} \quad (2 - 92)$$

Para  $r < a$

Para calcular la intensidad de campo eléctrico  $E$  dentro de la esfera (figura 2.34), se dibuja una superficie gaussiana  $S$  para un radio  $r < a$ , en la que se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre ésta se dibujan los dos vectores, el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  y el vector diferencial de superficie  $d\vec{S}$ . Se aplican los mismos criterios para  $r > a$ .

La integral cerrada de superficie de la esfera, ecuación (2-90), se convierte en una sola integral abierta de superficie con sus límites de 0 a  $r$  y, la carga  $Q_n$  se debe reemplazar por la distribución volumétrica de cargas con sus límites de 0 a  $r$ , debido a que la superficie imaginaria no encierra la totalidad de las cargas, así

$$\int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) dv$$

reemplazando valores y resolviendo la integral, se tiene

$$\int_0^r E dS \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \frac{\rho_0(a-r)}{a} 4\pi r^2 dr$$

$$E[4\pi r^2]_0^r = \frac{4\pi\rho_0}{a\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{ar^3}{3} \right]_0^r - \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^r \right\}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\rho_0}{a\epsilon_0} \left\{ \frac{ar^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right\} = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{a\epsilon_0} \left\{ \frac{a}{3} - \frac{r}{4} \right\} = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{a\epsilon_0} \left\{ \frac{4a-3r}{12} \right\}$$

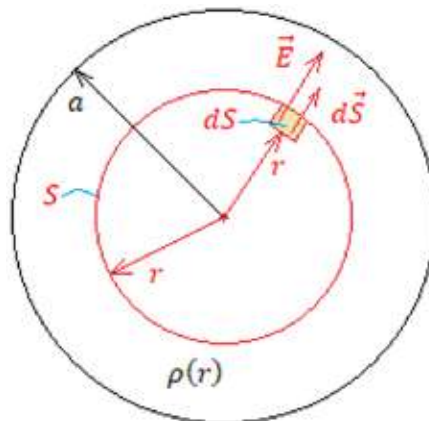


Figura 2.34 Campo eléctrico  $E$  para  $r < a$ .

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{a\epsilon_0} \left\{ \frac{4a - 3r}{12} \right\}$$

$$E = \frac{\rho_0 r}{12a\epsilon_0} (4a - 3r) \quad (2 - 93)$$

En la ecuación (2-93) la intensidad del campo eléctrico se escribe en función del radio para poder graficar en el literal d), así

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{12a\epsilon_0} (4a - 3r) \quad (2 - 94)$$

### b) Cálculo del valor máximo de la intensidad del campo eléctrico $E$ .

Para calcular el valor máximo de la intensidad de campo eléctrico  $E$ , esto ocurre en el interior de la esfera, entonces se procede a derivar la ecuación (2-94), luego se iguala a cero y se despeja el valor de  $r$  que viene a ser el  $r_{max}$ . Con el valor del radio máximo se reemplaza en la ecuación (2-94), con lo que se ha encontrado el valor del campo eléctrico máximo  $E_{max}$ , así

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{12a\epsilon_0} (4a - 3r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{4a\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{4a\epsilon_0}$$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r}{2a\epsilon_0} = 0$$

$$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0 r_{max}}{2a\epsilon_0} = 0$$

$$r_{max} = \frac{2}{3} a$$

$$E(r = r_{max}) = \frac{\rho_0 r_{max}}{12a\epsilon_0} (4a - 3r_{max})$$

$$E(r_{max}) = \frac{\rho_0 \frac{2}{3} a}{12a\epsilon_0} \left( 4a - 3 \frac{2}{3} a \right) = \frac{\rho_0}{18\epsilon_0} (4a - 2a) = \frac{\rho_0}{18\epsilon_0} (2a) = \frac{a\rho_0}{9\epsilon_0}$$

$$E(r_{max}) = \frac{a\rho_0}{9\epsilon_0} \quad (2 - 95)$$

### c) Cálculo del potencial eléctrico, dentro y fuera de la esfera.

Para calcular el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera, se utiliza la ecuación (2-96), así

$$V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2 - 96)$$

**Para  $r > a$**

Para calcular la diferencia de potencial eléctrico fuera de la esfera (figura 2.35), en un punto a una distancia  $r$  del centro de la esfera para un radio  $r > a$ , se dibujan los dos vectores, el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  y el vector de desplazamiento  $d\vec{l}$ . La dirección y sentido del vector campo eléctrico va dirigido desde el punto en forma radial hacia el infinito, debido a que se tiene una distribución de cargas volumétricas positivas, las cargas negativas se asumen que están en el infinito, entonces, el campo eléctrico por definición se debe dibujar desde una carga positiva hacia una carga negativa.

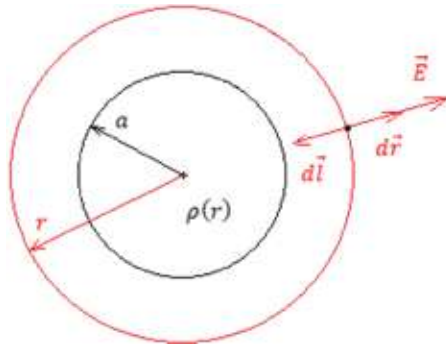


Figura 2.35 Potencial eléctrico para  $r > a$ .

El criterio para dibujar el vector de desplazamiento  $d\vec{l}$  cuando la ecuación (2-96) tiene signo negativo, el límite inferior se ubica en un punto de menor campo eléctrico y el límite superior se ubica en un punto de mayor campo eléctrico, de tal forma que, el vector  $d\vec{l}$  va dirigido de un punto de menor a mayor campo eléctrico, tal como se muestra en la figura 2.35

Para  $r > a$  en la ecuación (2-96), el límite inferior  $A$  se ubica en el infinito y, el límite superior  $B$  se ubica en el punto a un radio  $r$ , entonces

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_r - V_\infty = - \int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En la figura 2.35, entre los dos vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  forman un ángulo de  $180^\circ$ , entonces

$$V_r - V_\infty = - \int_\infty^r E dl \cos 180^\circ = \int_\infty^r E dl$$

$$V_r - V_\infty = \int_\infty^r E dl \quad (2 - 97)$$

Pero,  $dl$  es una variable ficticia que debe ser reemplazado por la variable real del problema, en este caso es el radio  $r$ , por lo tanto, en la figura 2.35  $dl = -dr$  ya que los dos vectores  $d\vec{l}$  y  $d\vec{r}$  están en la misma dirección pero en sentidos opuestos. Por otro lado, el potencial en el infinito es igual a cero, esto es  $V_\infty = 0$ . Finalmente, reemplazando valores en la ecuación (2-97), especialmente el valor del campo eléctrico  $E$  de la ecuación (2-91), entonces

$$V_r = - \int_\infty^r \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 r^2} dr$$

integrando,

$$V_r = - \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0} \int_\infty^r r^{-2} dr = - \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0} \left[ \frac{r^{-1}}{-1} \right]_\infty^r = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_\infty^r = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right] = \frac{\rho_0 a^3}{12r\epsilon_0}$$

$$V_r = \frac{\rho_0 a^3}{12r\epsilon_0}$$

Específicamente,  $V_r$  es el potencial eléctrico que está en función del radio, así

$$V_r = V(r)$$

$$V(r) = \frac{\rho_0 a^3}{12r\epsilon_0} \quad (2 - 98)$$

Debido a que se está evaluando para un radio  $r > a$ , entonces, en el límite, el potencial para  $r=a$ , es

$$V(r = a) = \frac{\rho_0 a^3}{12r\epsilon_0} = \frac{\rho_0 a^3}{12a\epsilon_0} = \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

$$V(r = a) = \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} \quad (2 - 99)$$

**Para  $r < a$**

Para calcular la diferencia de potencial eléctrico dentro de la esfera (figura 2.36), en un punto a una distancia  $r$  del centro de la esfera para un radio  $r < a$ , se dibujan los dos vectores, el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  y el vector de desplazamiento  $d\vec{l}$ . Se aplican los mismos criterios para  $r > a$

Para  $r < a$  en la ecuación (2-96), el límite inferior  $A$  se ubica en el radio  $r=a$  y, el límite superior  $B$  se ubica en un radio  $r$  en el interior de la esfera, entonces

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_r - V_a = - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En la figura 2.35, entre los dos vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  forman un ángulo de  $180^\circ$ , entonces

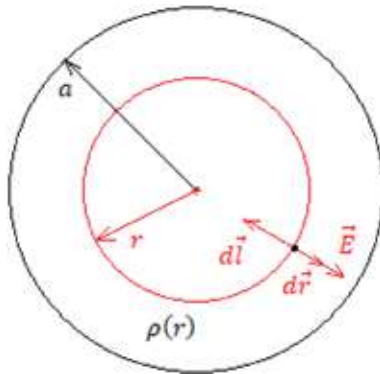


Figura 2-36 Potencial eléctrico para  $r < a$ .

$$V_r - V_a = - \int_a^r E dl \cos 180^\circ = \int_a^r E dl$$

$$V_r - V_a = \int_a^r E dl$$

$$V_r = \int_a^r E dl + V_a \tag{2 - 100}$$

Pero,  $dl = -dr$  por las mismas razones explicadas para  $r > a$ .

reemplazando valores en la ecuación (2-100), especialmente el valor del campo eléctrico  $E$  de la ecuación (2-93) y (2-99), entonces

$$V_r = - \int_a^r \frac{\rho_0 r}{12a\epsilon_0} (4a - 3r) dr + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

integrando,

$$V_r = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int_a^r r dr + \frac{\rho_0}{4a\epsilon_0} \int_a^r r^2 dr + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

$$V_r = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_a^r + \frac{\rho_0}{4a\epsilon_0} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_a^r + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

$$V_r = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{\rho_0}{4a\epsilon_0} \left( \frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

$$V_r = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (r^2 - a^2) + \frac{\rho_0}{12a\epsilon_0} (r^3 - a^3) + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

$$V_r = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 r^3}{12a\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^3}{12a\epsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 r^3}{12a\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

$$V_r = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 r^3}{12a\epsilon_0}$$

$$V_r = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0} \left( -2r^2 + 2a^2 + \frac{r^3}{a} \right)$$

Específicamente,  $V_r$  es el potencial eléctrico que está en función del radio, así

$$V_r = V(r)$$

$$V(r) = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0} \left( -2r^2 + 2a^2 + \frac{r^3}{a} \right) \quad (2 - 101)$$

También, para calcular el campo eléctrico y el potencial eléctrico, dentro de la esfera, se puede hacer un solo gráfico (figura 2.37), así

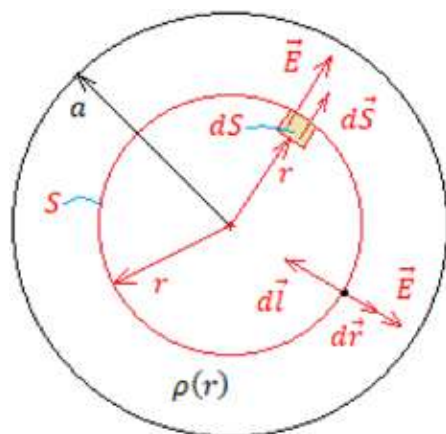
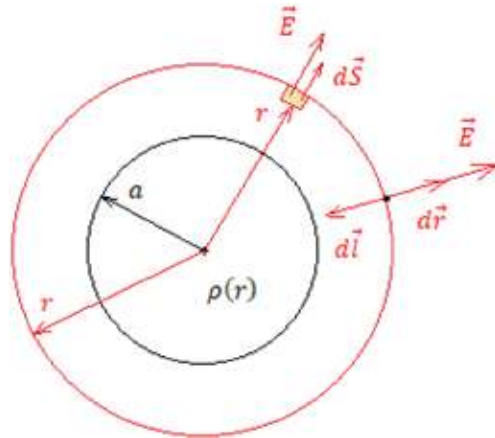


Figura 2.37 Potencial y campo eléctrico para  $r < a$ .

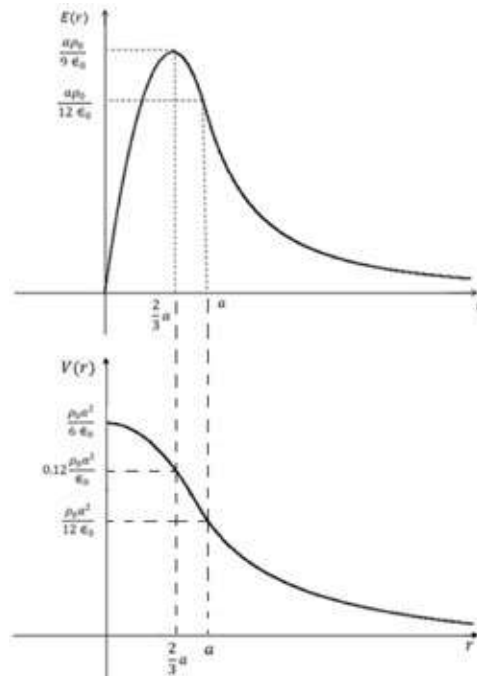


Figura 2.38 Potencial y campo eléctrico para  $r > a$ .

De igual manera, para calcular el campo eléctrico y el potencial eléctrico, fuera de la esfera, se puede hacer un solo gráfico (figura 2.38), así

**d) Graficar, la intensidad del campo eléctrico con respecto al radio ( $E$  vs  $r$ ) y, el potencial eléctrico con respecto al radio ( $V$  vs  $r$ ).**

Para proceder a graficar, se muestra en forma resumida las ecuaciones de la intensidad de campo eléctrico  $E(r)$  y del potencial eléctrico  $V(r)$ , dentro y fuera de la esfera. Además, el valor del campo eléctrico máximo  $E(r_{max})$  dentro de la esfera.

Figura 2.39 Gráfica de  $E$  vs.  $r$ , y  $V$  vs.  $r$ .

$$E(r = a) = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 a^2} = \frac{\rho_0 a}{12\epsilon_0}$$

$$E(r = a) = \frac{\rho_0 a}{12\epsilon_0}$$

$$V(r = 2a/3) = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0} \left( -2r^2 + 2a^2 + \frac{r^3}{a} \right) = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0} \left( -2 \left( \frac{2a}{3} \right)^2 + 2a^2 + \frac{\left( \frac{2a}{3} \right)^3}{a} \right) = 0.1173 \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}$$

$$V(r = 2a/3) = 0.1173 \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}$$

	$r < a$	$r > a$	$r = a$	$r_{max} = 2a/3$
$E(r)$	$\frac{\rho_0 r}{12a\epsilon_0} (4a - 3r)$	$\frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 r^2}$	$\frac{\rho_0 a}{12\epsilon_0}$	$\frac{a\rho_0}{9\epsilon_0}$
$V(r)$	$\frac{\rho_0}{12\epsilon_0} \left( -2r^2 + 2a^2 + \frac{r^3}{a} \right)$	$\frac{\rho_0 a^3}{12r\epsilon_0}$	$\frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$	$0.1173 \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}$

## 2.13 PROBLEMAS PROPUESTOS

- Problema P2.1.** Se dispone de cuatro cargas  $q_1 = -3q$ ,  $q_2 = 7q$ ,  $q_3 = 5q$  y  $q_4 = -8q$  ubicadas en los vértices de un rectángulo, de dimensiones, la base  $a$  y la altura  $b$ . Sabiendo que: la carga  $q_1$  está situada en el vértice superior izquierdo, la carga  $q_2$  está situada en el vértice superior derecho, la carga  $q_3$  está situada en el vértice inferior derecho y la carga  $q_4$  está situada en el vértice inferior izquierdo. Calcular la fuerza total (en magnitud, dirección y sentido) en el punto  $p$  situado en la intersección de las dos diagonales del rectángulo, producida por las cuatro cargas ( $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$ ). En el punto  $p$  se encuentra una carga  $q_5 = 9q$ . Utilizar el método de las componentes.
- Problema P2.2.** Repetir el problema 2.1 para calcular el campo eléctrico total (en magnitud, dirección y sentido) en el punto  $p$ ; pero, para este problema, no considere la carga  $q_5$ .
- Problema P2.3.** Un anillo circular delgado de radio  $a$  se encuentra en el plano  $xy$ , tiene una distribución lineal de cargas uniformes  $\rho_l$ . Determine la intensidad de campo eléctrico en el punto  $p$  a una distancia  $h$  sobre el eje  $z$  del anillo circular.

- **Problema P2.4.** Un anillo circular delgado de radio  $R$  se encuentra en el plano  $xy$ , tiene una distribución lineal de cargas uniformes  $\rho_l$ . Determine el potencial eléctrico en el punto  $M$  a una distancia  $b$  sobre el eje  $z$  del anillo circular.
- **Problema P2.5.** A partir del potencial eléctrico  $V$  obtenido en el problema 2.4, determine la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$  en el punto  $M$ . Utilizar la ecuación  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ .
- **Problema P2.6.** En una línea trifásica de alta tensión, considerando que cada fase es una superficie equipotencial, responda lo siguiente: a) si una persona se agarra con las dos manos colgando de una sola fase, ¿qué le sucede?; b) si una persona se agarra con la una mano en una fase y con la otra mano en la otra fase, ¿qué le sucede?
- **Problema P2.7.** En la ecuación de la Ley de Gauss, cuando se utiliza una superficie imaginaria que encierre la totalidad de las cargas que se encuentran distribuidas en el volumen de una esfera, haciendo uso del ángulo sólido, explicar por qué da lo mismo, hacer uso de una superficie imaginaria esférica, que una superficie totalmente irregular.
- **Problema P2.8.** Explicar el proceso de la inducción de cargas en un material conductor dentro de un campo eléctrico externo. ¿Qué entiende por pantalla electrostática?
- **Problema P2.9.** A partir de la ecuación de la Ley de Gauss, esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

utilizando el teorema de la divergencia, demostrar que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

- **Problema P2.10.** Se tiene dos cilindros conductores concéntricos de radios  $a$  y  $b$ , entre ellos existe el vacío. En la superficie de radio  $a$  existe un voltaje  $V_1$  y en la superficie de radio  $b$  existe un voltaje  $V_2$ , tal como se muestra en la figura 2.40. Determine la función de potencial eléctrico entre los dos conductores cilíndricos de radios  $a$  y  $b$ . Utilice la ecuación de Laplace  $\vec{\nabla}^2 V=0$ .

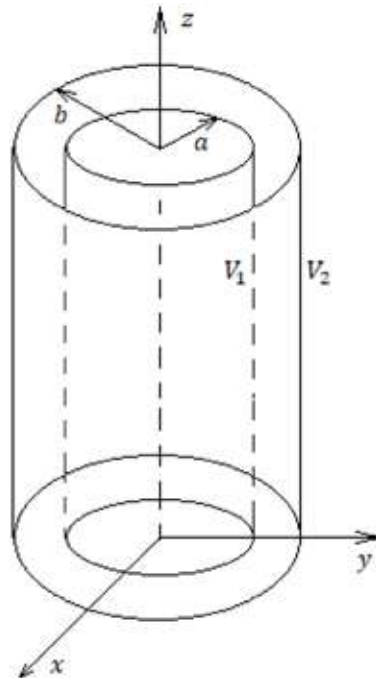


Figura 2.40 Cilindros conductores concéntricos de radios  $a$  y  $b$

- **Problema P2.11.** El conductor exterior de un cable coaxial tiene un radio fijo  $b$ . Determine el radio  $a$  del conductor interior de modo que, para una diferencia de potencial dada entre los conductores, la intensidad del campo eléctrico en su superficie sea mínima. Determine la capacitancia por unidad de longitud de dicho cable.

### CAPÍTULO III

## 3. CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO EN PRESENCIA DE DIELECTRICOS

### 3.1 COMPORTAMIENTO DE DIELECTRICOS EN UN CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO

Los dieléctricos son sustancias, que en circunstancias ordinarias no poseen cargas eléctricas libres. Considere un solo átomo del dieléctrico (figura 3.1 a) que consiste de dos esferas concéntricas uniformemente cargadas que llevan cargas iguales de signos opuestos, por lo que es eléctricamente neutro y que no crea ningún campo eléctrico apreciable en el punto  $p$ , es decir, el campo eléctrico es igual a cero. Si a este átomo, se aplica un campo eléctrico externo  $E_{\text{externo}}$  (figura 3.1 b) se producirá un cierto desplazamiento  $d$  entre las dos esferas en direcciones opuestas, dependiendo de la intensidad del campo externo. A estas dos cargas puntuales estrechamente espaciadas de igual magnitud, pero de signo opuesto se denomina dipolo eléctrico (ESPOL, 1982, p.81),

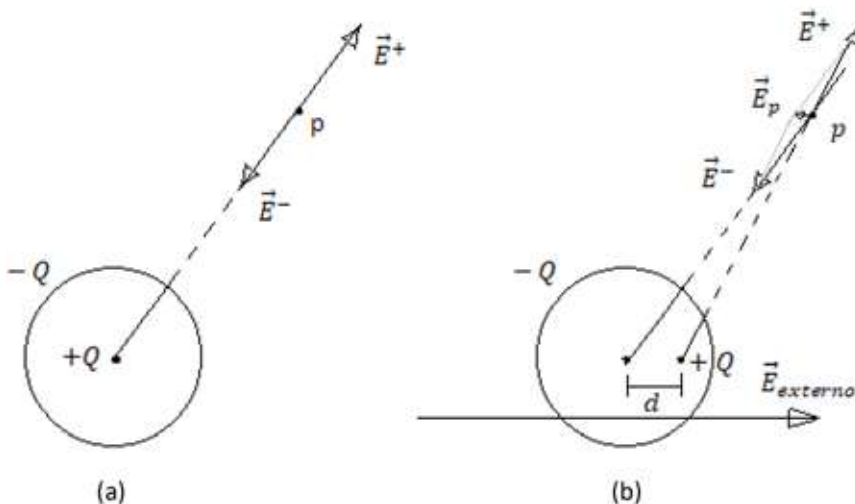


Figura 3.1 (a) Modelo de un átomo neutro. (b) El mismo átomo en un campo eléctrico externo (ESPOL, 1982, p.81).

Dado que los centros de las dos esferas no están en el mismo punto, ahora, el campo eléctrico en el punto  $p$  ya no es cero, en este caso es  $\vec{E}_p = \vec{E}^+ + \vec{E}^-$ .

Si se considera una molécula dieléctrica (figura 3.2) que está dentro de un campo eléctrico externo  $\vec{E}_{ext}$ , la fuerza sobre la carga del dipolo positivo está en la dirección del campo y la de la carga del dipolo negativo en la dirección opuesta. Esto da como resultado un torque (par) que tiende a alinear todos los dipolos en la dirección del campo aplicado. En consecuencia, todas las sustancias dieléctricas introducidas en un campo eléctrico pueden considerarse equivalentes a una gran cantidad de diminutos dipolos eléctricos.

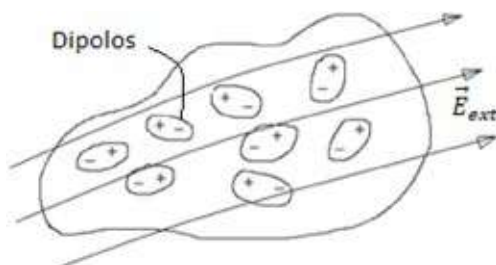


Figura 3.2 Molécula dieléctrica Dipolos.

En un material dieléctrico existen moléculas polares y no polares. Las moléculas no polares son aquellas que no son dipolos en circunstancias ordinarias; y, las moléculas polares son aquellas que forman dipolos permanentes. También se puede decir que, las moléculas no polares son simétricas; mientras que, las moléculas polares son asimétricas. Finalmente, las moléculas no polares se forman cuando la carga eléctrica es nula, es decir, se tiene igual número de cargas positivas y negativas, en cambio, las moléculas polares se forman cuando las densidades de carga están presentes solamente en uno de los átomos o en una región de la molécula.

### 3.2 POTENCIAL Y CAMPO ELÉCTRICO DE UN DIPOLO Y DE UN AGREGADO DE DIPOLO

#### Potencial y campo eléctrico de un dipolo.

Considérese el dipolo eléctrico mostrado en la figura 3.3, con el cual se va a calcular el potencial eléctrico en el punto  $p$ . Antes que nada, se debe recordar que, un dipolo eléctrico está formado por dos cargas  $Q$  de igual magnitud y signos diferentes, y están separados una distancia  $d$ .

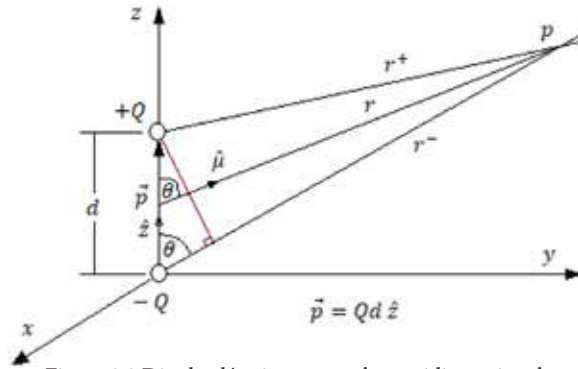


Figura 3.3 Dipolo eléctrico en un plano tridimensional.

El vector momento de dipolo eléctrico  $\vec{p}$  siempre va dirigido desde la carga negativa hacia la carga positiva y su magnitud es igual a  $Qd$ . La distancia de la carga positiva y negativa al punto  $p$  es  $r^+$  y  $r^-$ , respectivamente; mientras que, la distancia del centro del dipolo al punto  $p$  es  $r$ . De igual manera, el vector unitario va dirigido del centro del dipolo al punto  $p$ .

Para calcular el potencial eléctrico en el punto  $p$  producido por el dipolo, primeramente se debe calcular el potencial producido por las cargas individuales  $+Q$  y  $-Q$ , de tal manera que, utilizando la ecuación del potencial eléctrico  $V_p$  en un punto  $p$  cualquiera con respecto al infinito, es la suma del potencial de la carga positiva  $+Q$  y el potencial de la carga negativa  $-Q$  (ESPOL, 1982, p.82). Esto es

$$V_p = \frac{+Q}{4\pi \epsilon_0 r^+} + \frac{-Q}{4\pi \epsilon_0 r^-}$$

entonces,

$$V_p = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^+} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^-}$$

sacando factor común,

$$V_p = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-} \right)$$

$$V_p = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{r^- - r^+}{r^+ r^-} \right)$$

(3 - 1)

En el triángulo rectángulo,

$$\cos \theta = \frac{r^- - r^+}{d}$$

despejando,

$$r^- - r^+ = d \cos \theta \quad (3 - 2)$$

Reemplazando la ecuación (3-2) en la ecuación (3-1),

$$V_p = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{d \cos \theta}{r^+ r^-} \right)$$

Antes que nada, para calcular el potencial en el punto  $p$  producido por el dipolo eléctrico, la distancia  $r$  debe ser mucho mayor que  $d$  ( $r \gg d$ ), entonces la distancia  $r^+$  es aproximadamente igual a la distancia  $r^-$ , con lo que  $r^+ r^- \cong r^2$ , esto es

$$V_p = \frac{Qd}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right)$$

Pero, la magnitud del dipolo eléctrico  $p$ , es

$$p = Qd$$

reemplazando,

$$V_p = \frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (3 - 3)$$

Pero, en la ecuación (3-3) la magnitud del producto punto entre el vector momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  y el vector unitario  $\hat{\mu}$  es  $p \cos \theta$ , entonces

$$V_p = \frac{\vec{p} \cdot \hat{\mu}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (3 - 4)$$

A partir del potencial eléctrico  $V_p$  se calcula la intensidad de campo eléctrico  $E_p$  utilizando el gradiente del potencial, como sigue

$$\vec{E}_p = -\vec{\nabla} V_p$$

El gradiente en coordenadas esféricas, es

$$\vec{\nabla} V_p = \frac{\partial V_p}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_p}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_p}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \quad (3 - 5)$$

De acuerdo a la ecuación (3-3) solamente varía en función de  $r$  y de  $\theta$ , entonces

$$\vec{E}_p(r, \theta, \varphi) = - \left( \frac{\partial V_p}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_p}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_p}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right)$$



La intensidad de campo eléctrico con respecto al radio es

$$\vec{E}_p(r) = -\frac{\partial V_p}{\partial r} \hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r} V_p \hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) \hat{r} = -\frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}_p(r) = -\frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left( -\frac{2}{r^3} \right) \hat{r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{Qd \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} \hat{r}$$

$$\vec{E}_p(r) = \frac{Qd \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} \hat{r}$$

La intensidad de campo eléctrico con respecto al ángulo  $\theta$  es

$$\vec{E}_p(\theta) = -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_p}{\partial \theta} \right) \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) \hat{\theta} = -\frac{p}{r^3 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \hat{\theta}$$

$$\vec{E}_p(\theta) = -\frac{p}{r^3 4\pi \epsilon_0} (\text{sen } \theta) \hat{\theta} = -\frac{Qd}{r^3 4\pi \epsilon_0} (\text{sen } \theta) \hat{\theta}$$

$$\vec{E}_p(\theta) = -\frac{Qd \text{sen } \theta}{r^3 4\pi \epsilon_0} \hat{\theta}$$

En forma general,

$$\vec{E}_p(r, \theta, \varphi) = \frac{Qd \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} \hat{r} - \frac{Qd \text{sen } \theta}{r^3 4\pi \epsilon_0} \hat{\theta}$$

### Agregado de dipolos eléctricos

Ahora considere un agregado de dipolos eléctricos elementales que representan una sustancia polarizada (figura 3.4). Dado que se trata de una teoría macroscópica, no interesa la posición y el momento de cada dipolo.

Para fines macroscópicos, basta con conocer su densidad media en un punto. Donde el término densidad se entiende en el siguiente sentido. Si se considera un pequeño volumen  $dv$  de sustancia polarizada en la cual se encuentra la suma de todos los momentos de dipolos eléctricos (ESPOL, 1982, p.83). La densidad de momento de dipolo eléctrico, está dado por:

$$\vec{P} = \frac{\sum dv \vec{P}}{dv} \quad (3-6)$$

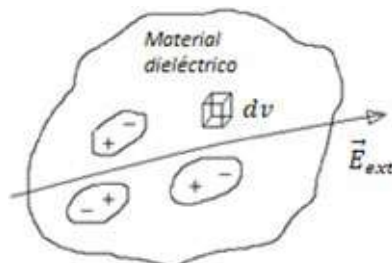


Figura 3.4 Agregado de dipolos eléctricos.

donde,  $\vec{P}$  es el *vector polarización* o también llamado *densidad de momento de dipolo eléctrico*.

Para calcular el potencial eléctrico en el punto  $M$  producido por todos los momentos dipolares eléctricos que se encuentran en el material dieléctrico de volumen  $V$  de la figura 3.5, tomando la definición del vector polarización  $\vec{P}$  en la ecuación (3-6), el momento dipolar eléctrico  $d\vec{p}$  de un volumen elemental  $dv$  que encierra un punto en el que el vector de polarización es  $\vec{P}$  viene dado por,

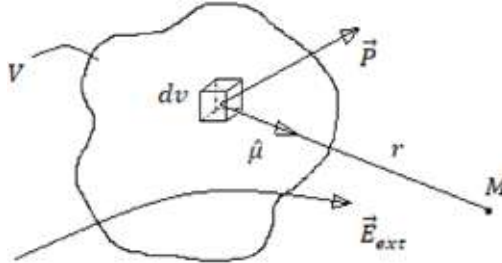


Figura 3.5 Potencial  $V_M$  en el punto  $M$  debido a los dipolos en  $V$ .

$$d\vec{p} = \vec{P} dv \quad (3 - 7)$$

Pero, de la ecuación (3-4) en el punto  $M$ , es

$$V_M = \frac{\vec{p} \cdot \hat{\mu}}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Entonces, en un diferencial de momento dipolar  $d\vec{p}$  existe un diferencial de potencial  $dV_M$ , esto es

$$dV_M = \frac{d\vec{p} \cdot \hat{\mu}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (3 - 8)$$

Se aplica el producto punto con el vector unitario en ambos lados de la ecuación (3-7)

$$d\vec{p} \cdot \hat{\mu} = \vec{P} \cdot \hat{\mu} dv \quad (3 - 9)$$

Reemplazando la ecuación (3-9) en la ecuación (3-8),

$$dV_M = \frac{\vec{P} \cdot \hat{\mu} dv}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

integrando,

$$V_M = \int_v \frac{\vec{P} \cdot \hat{\mu} dv}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (3 - 10)$$

Desde el punto de vista experimental, hay evidencia que muestra que el vector de polarización  $\vec{P}$  para la mayoría de las sustancias, con moléculas tanto polares como no polares, en circunstancias normales es proporcional a la intensidad total del campo eléctrico (ESPOL, 1982, p.84). Esto es

$$\vec{P} = \epsilon_0 x_e \vec{E} \quad (3 - 11)$$

donde,

$\epsilon_0$  = permitividad en el vacío

$x_e$  = susceptibilidad eléctrica

La susceptibilidad eléctrica  $x_e$  es característica de todo material dieléctrico e indica la facilidad del dieléctrico para ser polarizado por un campo eléctrico, es adimensional y, decrece con la temperatura debido a que en sustancias con moléculas polares, la vibración térmica o el movimiento de las moléculas polarizadas impide su alineación bajo la influencia del campo eléctrico, por lo que la susceptibilidad eléctrica decrece con la temperatura (Web susceptibilidad).

Los materiales dieléctricos pueden ser anisotrópicos e isotrópicos como se muestra en la figura 3.6:

Materiales ANISOTRÓPICOS, son aquellos en las cuales el vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  está en dirección arbitraria a la dirección del vector polarización  $\vec{P}$ , tal como se muestra en la figura 3.6 a.

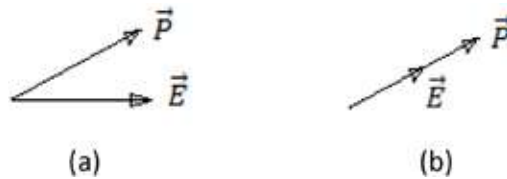


Figura 3.6 Materiales (a) Anisotrópicos, (b) Isotrópicos.

Materiales ISOTRÓPICOS, es cuando el vector polarización  $\vec{P}$  y el vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  están en la misma dirección (figura 3.6 b).

### 3.3 DISTRIBUCIÓN DE CARGA EQUIVALENTE PARA UN DIELECTRICO POLARIZADO

Al aplicarse un campo eléctrico externo  $\vec{E}_{ext}$  a un material dieléctrico (figura 3.7 a), se forman dipolos eléctricos que tienden a alinearse en la dirección del campo aplicado (figura 3.7 b), de tal forma que, existirán dipolos eléctricos  $\vec{p}$  en el volumen del material dieléctrico denominado *densidad volumétrica de polarización*  $\rho_{vp}$  y, también existirán dipolos eléctricos en la superficie del material dieléctrico, llamado, *densidad superficial de polarización*  $\rho_{sp}$ . Ahora bien, se debe recordar que, la sumatoria de todos los momentos dipolares del material dieléctrico se representa mediante el vector polarización  $\vec{P}$ .

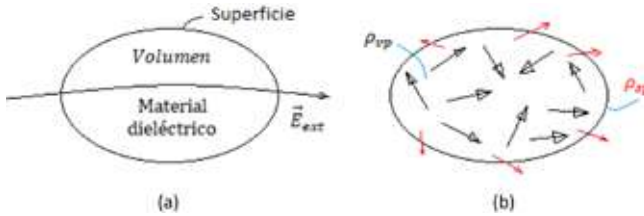


Figura 3.7 Agregado de dipolos eléctricos,  $\rho_{vp}$  y  $\rho_{sp}$ .

Desde el punto de vista de la teoría macroscópica, una sustancia polarizada puede considerarse como un agregado de dipolos eléctricos elementales situados en el vacío. Se mostrará ahora que el campo eléctrico de estos dipolos elementales también puede atribuirse a un cierto volumen equivalente y distribución superficial de cargas, situadas en el vacío. Esta distribución de carga equivalente se puede derivar del vector de polarización  $\vec{P}$ . Considerar un elemento de superficie imaginaria  $dS$  situado en el dieléctrico polarizado, tal como se muestra en la figura 3.8, sobre el diferencial de superficie  $dS$  se dibuja el vector  $d\vec{S}$ , que es perpendicular de la superficie hacia fuera. El vector polarización  $\vec{P}$  tiene la misma dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$ , ya que se trata de un material isotrópico (3-11). El círculo representa la posición de la molécula antes de la polarización. N representa el número de moléculas por unidad de volumen.

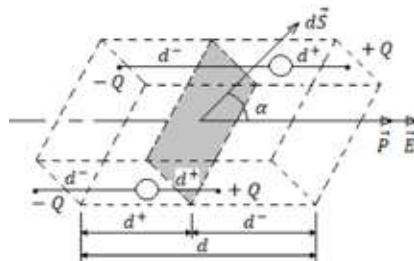


Figura 3.8 En el proceso de polarización, las cargas positivas se mueven a una distancia  $d^+$  y las negativas a una distancia  $d^-$  (ESPOL, 1982, p.85).

En el proceso de polarización la superficie  $dS$  es cruzada por un cierto número de cargas positivas  $+Q$  en una dirección, y por un cierto número de cargas negativas  $-Q$  en la dirección opuesta. El cruce por la superficie en la dirección negativa  $d^-$  por cargas negativas es igual al cruce por la superficie en la dirección positiva  $d^+$  por cargas positivas (ESPOL, 1982, p.85). El total de cargas que cruzan la superficie  $dS$  en su dirección positiva en el proceso de polarización es:

$$dQ = NQ d^+ dS \cos\alpha - N(-Q) d^- dS \cos\alpha$$

Sacando factor común,

$$dQ = NQ dS \cos\alpha (d^+ + d^-)$$

pero,  $d = d^+ + d^-$  y  $P = NQd$

entonces,

$$dQ = P dS \cos\alpha$$

Reemplazando por el producto punto,

$$dQ = \vec{P} \cdot d\vec{S} \tag{3 - 12}$$

Al considerar una superficie cerrada imaginaria muy pequeña  $\Delta S$ , la carga positiva total que dejó el volumen encerrado por la superficie  $\Delta S$  en el proceso de polarización según (3-12), es

$$\Delta Q = \oint_{\Delta S} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Consecuentemente, la carga que permaneció dentro de  $\Delta S$  es igual a  $-\Delta Q$ , entonces

$$\Delta Q = - \oint_{\Delta S} \vec{P} \cdot d\vec{S} \tag{3 - 13}$$

La densidad volumétrica de polarización  $\rho_{vp}$ , es

$$\rho_{vp} = - \frac{\Delta Q}{\Delta v} \tag{3 - 14}$$

Reemplazando la ecuación (3-14) en la ecuación (3-13), se tiene

$$\rho_{vp} = - \frac{\oint_{\Delta S} \vec{P} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} \tag{3 - 15}$$

Aplicando el límite cuando la variación de volumen  $\Delta v$  tiende a cero en la ecuación (3-15), la parte derecha de la ecuación (3-16) se convierte en una divergencia

del vector polarización  $\vec{P}$ , dando como resultado la ecuación (3-17), que es el valor de la densidad volumétrica de polarización.

$$\rho_{vp} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} - \frac{\oint_{\Delta S} \vec{P} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} \quad (3 - 16)$$

$$\rho_{vp} = -\text{div } \vec{P} \quad \text{Densidad volumétrica de polarización} \quad (3 - 17)$$

### Superficie límite entre un material dieléctrico y el vacío

Las cargas ligadas no compensadas existen sólo en la capa delgada en la superficie de la figura 3.9, se asume que el vector polarización  $\vec{P}$  del dieléctrico polarizado cerca de la superficie límite (frontera) forma un ángulo  $\alpha$  con el vector unitario  $\hat{\mu}_n$  normal a la superficie. En la figura 3.9 se ve que los extremos positivos de los dipolos sobresalen de la superficie hasta una distancia  $d^+ \cos\alpha$  medida a lo largo de  $\hat{\mu}_n$ . Además, dentro del dieléctrico hasta una distancia  $d^- \cos\alpha$ , también medida a lo largo del vector unitario normal  $\hat{\mu}_n$ , solo existen extremos positivos de dipolos. Más a la izquierda, los extremos positivo y negativo de los dipolos se encuentran en igual número y su campo macroscópico no existe (ESPOL, 1982, p.86).

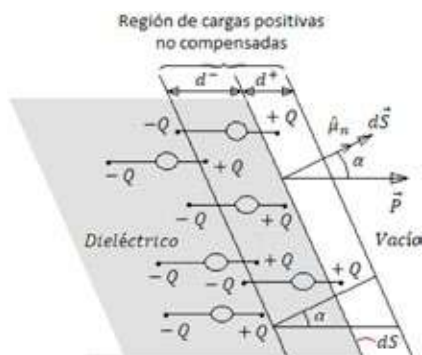


Figura 3.9 Superficie límite entre un dieléctrico y el vacío (ESPOL, 1982, p.86).

Por lo tanto, las cargas ligadas no compensadas solo existen en la capa delgada indicada en la figura 3.9. Dado que el número de dipolos por unidad de volumen es  $N$ , la carga acumulada en esta capa por unidad de área es:

$$\rho_{sp} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (3 - 18)$$

donde,  $\rho_{sp}$  es la densidad superficial de polarización

El cruce por la superficie  $dS$  en la dirección negativa  $d^-$  por cargas negativas es igual al cruce por la superficie  $dS$  en la dirección positiva  $d^+$  por cargas positivas. El total de cargas que cruzan la superficie  $dS$  en su dirección positiva en el proceso de polarización es:

$$dQ = NQ d^+ dS \cos \alpha - N(-Q) d^- dS \cos \alpha \quad (3 - 19)$$

Si en la ecuación (3-18) se toma el límite cuando la variación de superficie  $\Delta s$  tiende a cero, entonces

$$\rho_{sp} = \frac{dQ}{dS} \quad (3 - 20)$$

Reemplazando la ecuación (3-19) en la ecuación (3-20), es

$$\rho_{sp} = \frac{NQ d^+ dS \cos \alpha - N(-Q) d^- dS \cos \alpha}{dS}$$

$$\rho_{sp} = NQ d^+ \cos \alpha - N(-Q) d^- \cos \alpha$$

sacando factor común,

$$\rho_{sp} = NQ(d^+ + d^-) \cos \alpha$$

pero,  $d = d^+ + d^-$

entonces,

$$\rho_{sp} = NQd \cos \alpha$$

donde,

$$P = NQd$$

$$\rho_{sp} = P \cos \alpha$$

Escribiendo en forma vectorial, la densidad superficial de polarización es igual a:

$$\rho_{sp} = \vec{P} \cdot \hat{\mu}_n \quad \text{Densidad superficial de polarización} \quad (3 - 21)$$

Para el caso en la cual el  $dS$  está en el límite (frontera) de dos medios dieléctricos diferentes (figura 3.10), la distribución de las cargas sobre la superficie límite tiene una densidad superficial de polarización igual a la suma del producto punto de cada uno de los medios. El vector unitario normal  $\hat{\mu}_{n1}$  es perpendicular de la superficie del medio 1 (dieléctrico 1) hacia fuera, mientras que, el vector unitario normal  $\hat{\mu}_{n2}$  es perpendicular de la superficie del medio 2 (dieléctrico 2) hacia fuera, esto es

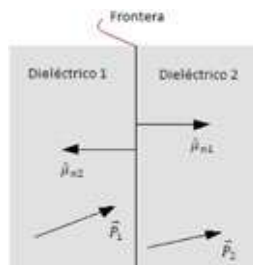


Figura 3.10 Superficie límite (frontera) entre dos dieléctricos (ESPOL, 1982, p.87).

$$\rho_{sp} = \vec{P}_1 \cdot \hat{\mu}_{n1} + \vec{P}_2 \cdot \hat{\mu}_{n2} \quad (3 - 22)$$

destruyendo el producto punto,

$$\rho_{sp} = P_1 + (-P_2)$$

$$\rho_{sp} = P_1 - P_2$$

donde  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$  son los vectores de polarización en los dieléctricos 1 y 2, respectivamente, y  $\hat{\mu}_{n1}$  y  $\hat{\mu}_{n2}$  son los vectores normales al límite de la superficie de los dieléctricos 1 y 2.

### 3.4 FORMA GENERALIZADA DE LA LEY DE GAUSS. EL VECTOR DE DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

Antes que nada, para calcular la intensidad del campo eléctrico  $E$  creado por una distribución volumétrica de cargas libres en el vacío, se utiliza la Ley de Gauss (ESPOL, 1982, p.89). Esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho_v dv$$

De igual manera, se puede obtener la intensidad del campo eléctrico creado por las cargas libres y de polarización de acuerdo con las mismas fórmulas, derivadas para el campo electrostático de cargas situadas en el vacío, es decir

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v (\rho_v + \rho_{vp}) dv \quad (3 - 23)$$

Donde,

$\rho_v$  = densidad volumétrica de cargas libres

$\rho_{vp}$  = densidad volumétrica de polarización  $\rho_{vp} = -\text{div } \vec{P}$

Separando las integrales de la ecuación (3-23) y reemplazando el valor de la densidad volumétrica de polarización, se tiene

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_v dv + \int_v -\text{div } \vec{P} dv$$

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_v dv - \int_v \text{div } \vec{P} dv \quad (3 - 24)$$



En el segundo término del lado derecho de la ecuación (3-24), se aplica el teorema de la divergencia, que dice que, la divergencia de una función vectorial en una integral de volumen, es igual al producto punto de la función vectorial con el vector superficie en una integral cerrada de superficie, en otras palabras, una integral de superficie se reemplaza por una integral de volumen, como sigue

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_v \text{div } \vec{P} \, dv \quad (3-25)$$

Reemplazando la ecuación (3-25) en la ecuación (3-24), se tiene

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_v \, dv - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

pasando el término al lado izquierdo,

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_v \, dv \quad (3-26)$$

Debido a que las dos integrales cerradas de superficie de la ecuación (3-26) son iguales, se pueden sumar los dos vectores, el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el vector polarización  $\vec{P}$  en una sola integral cerrada de superficie, entonces

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_v \, dv$$

pero,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3-27)$$

donde,

$\vec{D}$  = Vector de desplazamiento eléctrico o densidad de flujo eléctrico

entonces,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_v \, dv \quad (3-28)$$

La ecuación (3-28), es la Ley generalizada de Gauss en forma integral, que también se puede reemplazar la distribución volumétrica de cargas libres totales por la carga neta  $Q_n$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_n \quad (3-29)$$

La carga neta  $Q_n$  se puede reemplazar por cualquiera de las cuatro alternativas de distribuciones de cargas, que pueden ser distribuciones de cargas puntuales, lineales o volumétricas, esto es

$$Q_n = \sum_{i=1}^n q_i$$

$$Q_n = \int_l \rho_l dl$$

$$Q_n = \int_S \rho_s dS$$

$$Q_n = \int_V \rho_v dv$$

donde,

$\rho_l$ = densidad lineal de cargas

$\rho_s$ = densidad superficial de cargas

$\rho_v$ = densidad volumétrica de cargas

A partir de la Ley generalizada de Gauss en forma integral (3-28), nuevamente se aplica el teorema de la divergencia en el término de la izquierda de la ecuación para obtener la Ley de Gauss generalizada en forma diferencial, entonces

$$\int_V \text{div } \vec{D} dv = \int_V \rho_v dv \quad (3 - 30)$$

Los dos términos de la ecuación (3-30) corresponden al mismo volumen, entonces, integrando, se tiene

$$\text{div } \vec{D} = \rho_v \quad (3 - 31)$$

O escrito de otra manera

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (3 - 32)$$

Las ecuaciones (3-31) o (3-32), es la Ley generalizada de Gauss en forma diferencial.

### Para materiales lineales:

En el caso de los materiales lineales e isotrópicos, el vector polarización  $\vec{P}$  es proporcional al campo eléctrico  $\vec{E}$ , entonces, al reemplazar la ecuación (3-11) en la ecuación (3-27), se tiene

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

sacando factor común,

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (3 - 33)$$

pero,  $\epsilon_r = (1 + \chi_e)$

donde,

$\epsilon_r =$  permitividad relativa del material

Al reemplazar en la ecuación (3-33), es

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

pero,

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

donde,

$\epsilon =$  es la permitividad del material

Entonces, el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  se relaciona con el vector de campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de la ecuación (3-34), esto es

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3 - 34)$$

A partir de la ecuación (3-27), se procede a despejar el vector de desplazamiento eléctrico, entonces

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \quad (3 - 35)$$

Reemplazando la ecuación (3-34) en la ecuación (3-35), se tiene

$$\vec{P} = \epsilon \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E}$$

Sacando factor común, se tiene

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (3 - 36)$$

La ecuación (3-36), establece la relación que existe entre el vector de polarización y el vector campo eléctrico en un material dieléctrico.

De igual manera, en la ecuación (3-31) de la Ley generalizada de Gauss en forma diferencial se reemplaza el vector de desplazamiento eléctrico (3-34) y, se obtiene

$$\text{div } \epsilon \vec{E} = \rho_v$$

ó

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3 - 37)$$

### 3.5 CONDICIONES DE FRONTERA

Antes que nada, se debe saber qué sucede cuando los vectores, intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  y de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  atraviesan la frontera entre dos medios diferentes, para lo cual, se deben determinar las componentes tangenciales y normales de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ , en la interface o frontera entre los dos medios dieléctricos diferentes.

En primer lugar, para determinar la componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}_t$  en el límite o frontera entre el medio dieléctrico 1 y el medio dieléctrico 2, se utiliza la ecuación de la integral cerrada de línea en un pequeño contorno rectangular  $\Delta l$  por  $h$  a lo largo de la trayectoria 12341, como se muestra en la figura 3.11 (ESPOL, 1982, p.95). Esto es

$$\oint_{12341} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3 - 38)$$

Como se trata de obtener los valores de  $\vec{E}_t$  en la frontera de los dos medios dieléctricos, entonces en la ecuación (3-38) se debe aplicar el límite cuando  $h$  tiende a cero, esto es

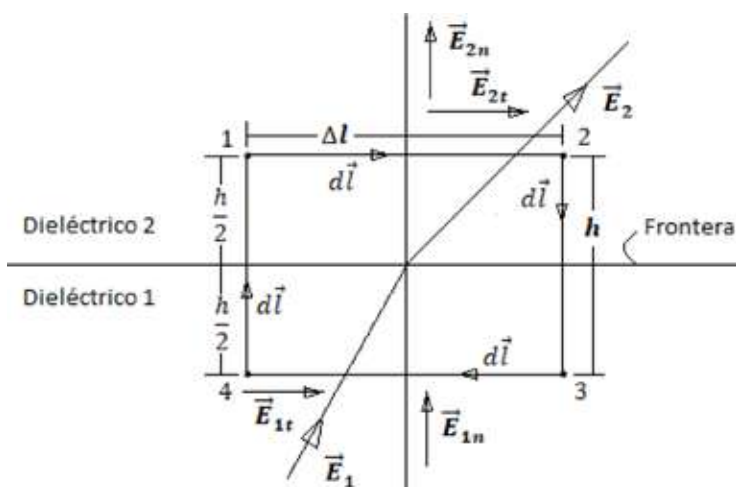


Figura 3.11 Condiciones de frontera para la componente tangencial.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{12341} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

De la integral cerrada de línea se obtienen cuatro segmentos abiertos, esto es, de 1 a 2, de 2 a 3, de 3 a 4 y de 4 a 1, entonces, para las componentes tangenciales, es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} \right] = 0$$

Destruyendo el producto punto de todos los términos, es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl \cos 0^\circ + \int_2^3 E_{2t} dl \cos 90^\circ + \int_2^3 E_{1t} dl \cos 90^\circ + \int_3^4 E_{1t} dl \cos 180^\circ + \int_4^1 E_{1t} dl \cos 90^\circ + \int_4^1 E_{2t} dl \cos 90^\circ \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl + \int_2^3 E_{2t} dl 0 + \int_2^3 E_{1t} dl 0 - \int_3^4 E_{1t} dl + \int_4^1 E_{1t} dl 0 + \int_4^1 E_{2t} dl 0 \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl + 0 + 0 - \int_3^4 E_{1t} dl + 0 + 0 \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl - \int_3^4 E_{1t} dl \right] = 0$$

integrando

$$\lim_{h \rightarrow 0} [E_{2t} \Delta l - E_{1t} \Delta l] = 0$$

Aplicando el límite cuando  $h$  tiende a cero

$$E_{2t} \Delta l - E_{1t} \Delta l = 0$$

Entonces, las componentes tangenciales  $E_{1t}$  y  $E_{2t}$  son iguales en la frontera de los dos medios dieléctricos, es decir, es continua en la frontera, esto es

$$E_{2t} = E_{1t} \tag{3 - 39}$$

Cuando los dos dieléctricos son lineales

$$E_{1t} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} \tag{3 - 40}$$

$$E_{2t} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \tag{3 - 40}$$

Reemplazando las ecuaciones (3-40) y (3-41) en la ecuación (3-39), se tiene

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \quad (3 - 42)$$

La ecuación (3-42) es válida sólo cuando los medios 1 y 2 son lineales.

Para las componentes normales, no es necesario el planteamiento de la ecuación, debido a que la evaluación de la integral cerrada de línea es igual a cero, pero se procede a demostrar que este valor es igual a cero, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 \vec{E}_{2n} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{2n} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{1n} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_{1n} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_{1n} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_{2n} \cdot d\vec{l} \right] = 0$$

Destruyendo el producto punto de todos los términos, es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2n} dl \cos 90^\circ + \int_2^3 E_{2n} dl \cos 180^\circ + \int_2^3 E_{1n} dl \cos 180^\circ + \int_3^4 E_{1n} dl \cos 90^\circ \right. \\ \left. + \int_4^1 E_{1n} dl \cos 0^\circ + \int_4^1 E_{2n} dl \cos 0^\circ \right] = 0$$

Destruyendo el producto punto de todos los términos, es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2n} dl 0 - \int_2^3 E_{2n} dl - \int_2^3 E_{1n} dl + \int_3^4 E_{1n} dl 0 + \int_4^1 E_{1n} dl + \int_4^1 E_{2n} dl \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ 0 - \int_2^3 E_{2n} dl - \int_2^3 E_{1n} dl + 0 + \int_4^1 E_{1n} dl + \int_4^1 E_{2n} dl \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ - \int_2^3 E_{2n} dl - \int_2^3 E_{1n} dl + \int_4^1 E_{1n} dl + \int_4^1 E_{2n} dl \right] = 0$$

Integrando,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ -E_{2n} \frac{h}{2} - E_{1n} \frac{h}{2} + E_{1n} \frac{h}{2} + E_{2n} \frac{h}{2} \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [0] = 0$$

Entonces, finalmente se ha llegado a demostrar que el valor de la integral cerrada de línea es igual a cero.  $0 = 0$

En segundo lugar, para determinar la componente normal del vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}_n$  en el límite o frontera entre el medio dieléctrico 1y el medio dieléctrico 2, se utiliza la ecuación de la integral cerrada de superficie aplicada en una pequeña superficie gaussiana de forma cilíndrica, como se muestra en la figura 3.12, para esto se utiliza la ecuación (3-29) de la Ley generalizada de Gauss, esto es

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_n$$

Como se trata de obtener los valores de  $\vec{D}_n$  en la frontera de los dos medios dieléctricos, entonces en la ecuación de la ley generalizada de Gauss se debe aplicar el límite cuando  $h$  tiende a cero y, la carga neta  $Q_n$  se reemplaza por una distribución superficial de cargas uniformes, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS \quad (3-43)$$

De la integral cerrada de superficie (3-43), se obtienen tres integrales abiertas de superficie, esto es, la superficie lateral y las superficies de las dos tapas superior e inferior, entonces

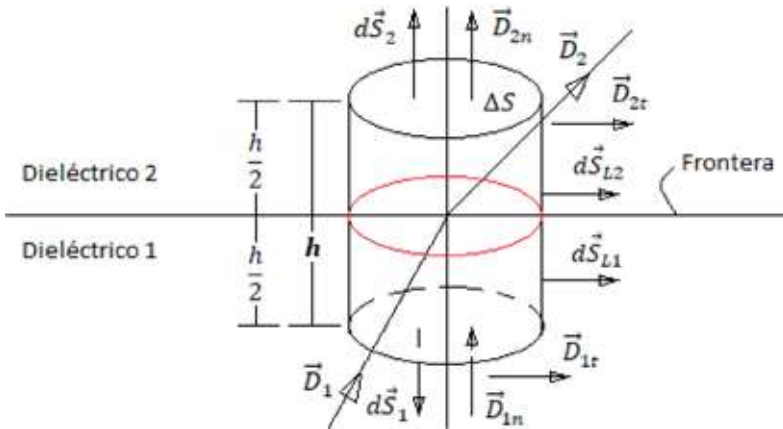


Figura 3.12 Condiciones de frontera para la componente normal.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} \vec{D}_{2n} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{TI} \vec{D}_{1n} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{SL1} \vec{D}_{1n} \cdot d\vec{S}_{L1} + \int_{SL2} \vec{D}_{2n} \cdot d\vec{S}_{L2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS$$

Destruyendo el producto punto de todos los términos, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} D_{2n} dS_2 \cos 0^\circ + \int_{TI} D_{1n} dS_1 \cos 180^\circ + \int_{SL1} D_{1n} dS_{L1} \cos 90^\circ + \int_{SL2} D_{2n} dS_{L2} \cos 90^\circ \right] \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} D_{2n} dS_2 - \int_{TI} D_{1n} dS_1 + \int_{SL1} D_{1n} dS_{L1} 0 + \int_{SL2} D_{2n} dS_{L2} 0 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} D_{2n} dS_2 - \int_{TI} D_{1n} dS_1 + 0 + 0 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} D_{2n} dS_2 - \int_{TI} D_{1n} dS_1 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \rho_s dS$$

Integrando

$$\lim_{h \rightarrow 0} [D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S] = \lim_{h \rightarrow 0} [\rho_s \Delta S]$$

Aplicando el límite cuando  $h$  tiende a cero

$$D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S = \rho_s \Delta S$$

simplificando

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

### 3.6 PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 3.1.** Se dispone de un cable coaxial cuyo cilindro conductor interno de radio  $a$  y longitud  $h$ , tiene una distribución superficial de cargas uniformes totales  $+Q$ . Concéntricamente se encuentra una malla cilíndrica conductora de radio  $d$ , de espesor despreciable. Entre los dos cilindros conductores se encuentra dos materiales dieléctricos de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , como se muestra en la figura 3.13. El cilindro de radio  $d$  está aterrizado. Determinar las densidades superficiales y volumétricas de polarización del cable coaxial.

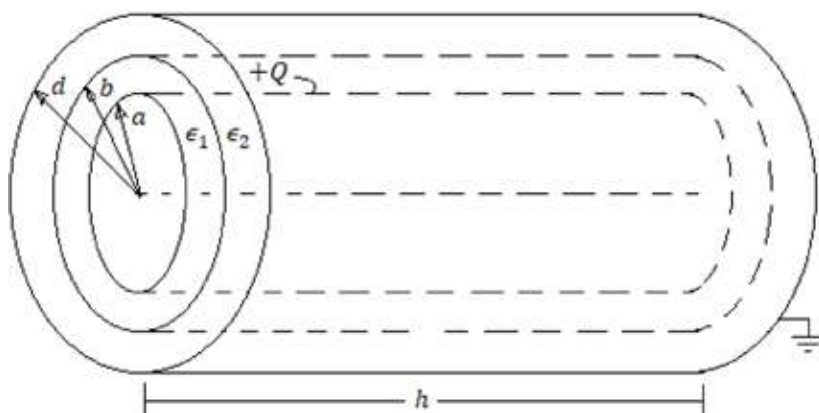


Figura 3.13 Cable coaxial de radios  $a$  y  $b$  con permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .

#### Desarrollo.

En la figura 3.13, se muestra claramente que, el cilindro dieléctrico de permitividad  $\epsilon_1$  tiene un espesor de radios  $a$  y  $b$ , mientras que, el cilindro dieléctrico de permitividad  $\epsilon_2$  tiene un espesor de radios  $b$  y  $d$ , sabiendo que, la longitud del cilindro es  $h$ . Además, como se pide determinar o calcular las densidades superficiales y volumé-



tricas de polarización del cable coaxial, entonces, se debe realizar el análisis en forma separada en el material dieléctrico de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ ; de tal manera que, para el material dieléctrico 1 se debe trabajar en un rango de  $a < r < b$  y para el material dieléctrico 2 se debe trabajar en un rango de  $b < r < d$ . Por último, para calcular las densidades superficiales y volumétricas de polarización, primero se debe calcular el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  utilizando la Ley generalizada de Gauss.

### Para $a < r < b$

Antes que nada, en la figura 3.13, como dato se tiene la carga total  $+Q$  ( $Q_n = +Q$ ) distribuida sobre la superficie total del cilindro de radio  $a$ , para dibujar el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}_1$ , primero se dibuja el vector campo eléctrico  $\vec{E}$ , y con la ecuación (3-34) que relaciona el campo eléctrico con el vector de desplazamiento eléctrico, se obtiene la dirección de  $\vec{D}_1$ .

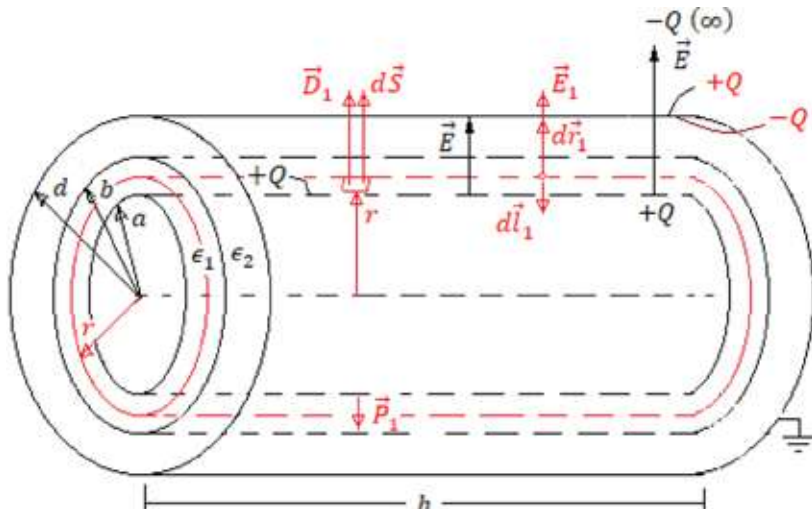


Figura 3.14 Superficie gaussiana para  $a < r < b$ .

En la figura 3.14, para dibujar el vector  $\vec{E}$  la carga  $-Q$  se lo imagina en el infinito ( $\infty$ ), de tal forma que, las líneas de campo eléctrico se dibujan de  $+Q$  a  $-Q$ , además, se asume que la longitud  $h$  del cilindro es mucho mayor que el radio  $d$  ( $h \gg d$ ) para que las líneas de campo eléctrico salgan en forma radial y paralelas desde la superficie de radio  $a$ . El campo eléctrico al pasar por el material conductor de radio  $d$  cuyo espesor es despreciable, se produce la inducción de cargas. La carga positiva  $+Q$  (color rojo) del material conductor de radio  $d$  con la carga positiva  $+Q$  (color negro) distribuida sobre la superficie de radio  $a$ , se produce una fuerza de repulsión, donde la carga positiva de color rojo se va a la superficie externa superior y, a su vez, ésta se va a tierra, debido a que en la figura el cilin-

dro de radio  $d$  está aterrizado. En cambio, la carga positiva  $-Q$  (color rojo) del material conductor de radio  $d$  con la carga positiva  $+Q$  (color negro) distribuida sobre la superficie de radio  $a$ , se produce una fuerza de atracción, donde la carga negativa de color rojo se va a la superficie interna inferior, tal como se muestra en la figura 3.14. Finalmente el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  va dirigido desde la superficie de radio  $a$  hasta la superficie de radio  $d$ . Utilizando la ecuación (3-29), se tiene

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = Q_n$$

En ésta figura se selecciona una superficie gaussiana de radio  $r$  entre los cilindros de radio  $a$  y  $b$ , sobre ésta superficie se selecciona un diferencial de superficie escalar  $dS$  y sobre ésta se dibujan los dos vectores  $\vec{D}_1$  y  $d\vec{S}$ . El criterio para dibujar el vector  $\vec{D}_1$  es que tiene la misma dirección y sentido del vector  $\vec{E}$  y como se trata del medio 1, será  $\vec{E}_1$ ; mientras que, el criterio para dibujar el vector superficie  $d\vec{S}$  es perpendicular de la superficie hacia afuera, entonces, la integral cerrada de superficie del cilindro se obtiene tres superficies abiertas, esto es

$$\int_{SL} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{TI} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{TD} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = +Q$$

Debido a que el vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}_1$  y el vector superficie  $d\vec{S}$ , tanto en la tapa izquierda ( $TI$ ) así como en la tapa derecha ( $TD$ ), los dos vectores forman un ángulo de  $90^\circ$ , entonces al destruir el producto punto, las dos integrales se hacen cero. Únicamente se tiene la integral de la superficie lateral ( $SL$ ), esto es

$$\int_0^r D_1 dS_{SL} \cos 0^\circ = Q$$

$$D_1 [S_{SL}]_0^r = Q$$

$$D_1 [2\pi rh]_0^r = Q$$

$$D_1 = \frac{Q}{2\pi rh}$$

pero, en el medio 1

$$D_1 = \epsilon_1 E_1$$

despejando y reemplazando valores

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 rh}$$

escribiendo en forma vectorial, el vector unitario  $\hat{r}$  tiene la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico  $\vec{E}_1$ , así

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 r h} \hat{r} \quad (3 - 44)$$

Para  $b < r < d$

En la figura 3.15 se selecciona una superficie gaussiana de radio  $r$  entre los cilindros de radio  $b$  y  $d$ , sobre ésta superficie se selecciona un diferencial de superficie escalar  $dS$  y sobre ésta se dibujan los dos vectores  $\vec{D}_2$  y  $d\vec{S}$ . El criterio para dibujar el vector  $\vec{D}_2$  es que tiene la misma dirección y sentido del vector  $\vec{E}$  y como se trata del medio 2, será  $\vec{E}_2$ ; mientras que, el criterio para dibujar el vector superficie  $d\vec{S}$  es perpendicular de la superficie hacia afuera, entonces

$$\oint_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = Q_n$$

La integral cerrada de superficie del cilindro se obtiene tres superficies abiertas, esto es

$$\int_{SL} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{TI} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{TD} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = +Q$$

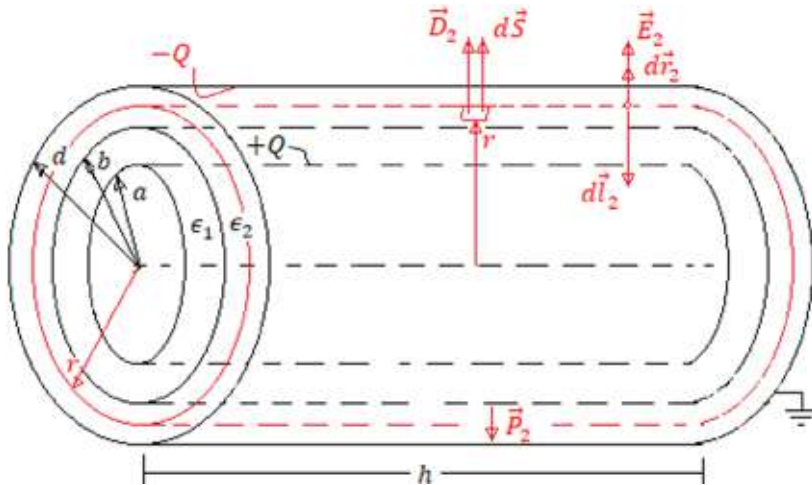


Figura 3.15 Superficie gaussiana para  $b < r < d$ .

Debido a que el vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}_2$  y el vector superficie  $d\vec{S}$ , tanto en la tapa izquierda (TI) así como en la tapa derecha (TD), los dos vectores forman un ángulo de  $90^\circ$ , entonces al destruir el producto punto, las dos integrales se hacen cero. Únicamente se tiene la integral de la superficie lateral (SL), esto es

$$\int_0^r D_2 dS_{SL} \cos 0^\circ = Q$$

$$D_2 [S_{SL}]_0^r = Q$$

$$D_2 [2\pi rh]_0^r = Q$$

$$D_2 = \frac{Q}{2\pi rh}$$

pero, en el medio 2

$$D_2 = \epsilon_2 E_2$$

despejando y reemplazando valores

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 rh}$$

escribiendo en forma vectorial, el vector unitario  $\hat{r}$  tiene la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico  $\vec{E}_2$ , así

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 rh} \hat{r} \quad (3 - 45)$$

Para calcular los vectores de polarización  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$  se utiliza la ecuación (3-36) para los medios 1 y 2, respectivamente, esto es

El vector polarización  $\vec{P}_1$  tiene la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico  $\vec{E}_1$ , tal como se muestra en la figura 3.14, así

$$\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1$$

Reemplazando el valor de la ecuación (3-44)

$$\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 rh} \hat{r}$$

Escribiendo en forma escalar

$$P_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 rh} \quad (3 - 46)$$

El vector polarización  $\vec{P}_2$  tiene la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico  $\vec{E}_2$ , tal como se muestra en la figura 3.15, así

$$\vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2$$

Reemplazando el valor de la ecuación (3-45)

$$\vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 rh} \hat{r}$$

Escribiendo en forma escalar

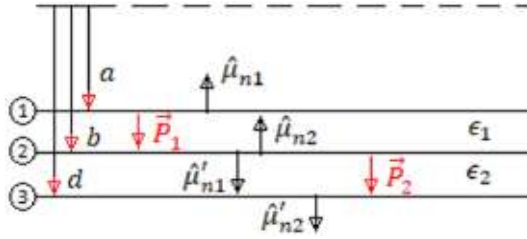


Figura 3.16 Corte transversal del cilindro.

$$P_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 rh} \quad (3 - 47)$$

Cálculo de las densidades superficiales de polarización en las tres fronteras: ①, ② y ③.

La figura 3.16 es un corte transversal de la figura 3.13 con sus respectivos vectores de polarización  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$  obtenidos en las figuras 3.14 y 3.15. Además, están dibujados los vectores unitarios normales.

#### Frontera 1:

El vector unitario normal  $\hat{\mu}_{n1}$  es perpendicular de la superficie del medio 1 hacia afuera, entonces, para calcular la densidad superficial de polarización  $\rho_{sp1}$  en la frontera 1, se utiliza la ecuación (3-21) para el medio 1, esto es

$$\rho_{sp1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{\mu}_{n1}$$

$$\rho_{sp1} = P_1 \cos 180^\circ = -P_1$$

Reemplazando el valor de  $P_1$  de la ecuación (3-46), entonces

$$\rho_{sp1} = -\frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_1 ah}$$

#### Frontera 2:

El vector unitario normal  $\hat{\mu}_{n2}$  es perpendicular de la superficie del medio 2 hacia afuera, y el vector unitario normal  $\hat{\mu}'_{n1}$  es perpendicular de la superficie del medio 1 hacia afuera, entonces, para calcular la densidad superficial de polarización  $\rho_{sp2}$  en la frontera 2, se utiliza la ecuación (3-22) para el medio 1 y el medio 2, esto es

$$\rho_{sp2} = \vec{P}_1 \cdot \hat{\mu}'_{n1} + \vec{P}_2 \cdot \hat{\mu}_{n2}$$

$$\rho_{sp2} = P_1 \cos 0^\circ + P_2 \cos 180^\circ$$

$$\rho_{sp2} = P_1 - P_2$$

Reemplazando el valor de  $P_1$  de la ecuación (3-46) y el valor de  $P_2$  de la ecuación (3-47), esto es

$$\rho_{sp2} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 bh} - (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 bh}$$

Reduciendo términos,

$$\rho_{sp2} = \frac{Q}{2\pi be} \left\{ \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} - \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\epsilon_2} \right\}$$

$$\rho_{sp2} = \frac{Q}{2\pi be} \frac{\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_0) - \epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\epsilon_1\epsilon_2}$$

$$\rho_{sp2} = \frac{Q}{2\pi be} \frac{\epsilon_2\epsilon_1 - \epsilon_2\epsilon_0 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_0}{\epsilon_1\epsilon_2}$$

$$\rho_{sp2} = \frac{\epsilon_0 Q}{2\pi be} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1\epsilon_2}$$

### Frontera 3:

El vector unitario normal  $\hat{\mu}'_{n2}$  es perpendicular de la superficie del medio 2 hacia afuera, entonces, para calcular la densidad superficial de polarización  $\rho_{sp3}$  en la frontera 3, se utiliza la ecuación (3-21) para el medio 2, esto es

$$\rho_{sp3} = \vec{P}_2 \cdot \hat{\mu}'_{n2}$$

$$\rho_{sp3} = P_2 \cos 0^\circ = P_2$$

Reemplazando el valor de  $P_2$  de la ecuación (3-47), entonces

$$\rho_{sp3} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 dh}$$

$$\rho_{sp1} = \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon_2 dh}$$

Cálculo de las densidades volumétricas de polarización en los medios 1 y 2.

### Para el medio 1:

Para calcular el valor de la densidad volumétrica de polarización  $\rho_{vp1}$  en el medio 1, se utiliza la ecuación (3-17), esto es

$$\rho_{vp1} = -\text{div } \vec{P}_1$$

También se puede escribir como,

$$\rho_{vp1} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1$$

La divergencia de la función vectorial  $\vec{P}_1$  en coordenadas cilíndricas, es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r P_{1r}) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{1\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_{1z}}{\partial z}$$

De la ecuación (3-46), el valor de  $P_1$  solamente varía con respecto al radio  $r$ , esto es  $P_{1r}$ , mientras que, no existen valores de  $\varphi$  y  $z$  en  $P_1$ , por lo que sería una constante  $P_{1\varphi}$  y  $P_{1z}$  al derivar con respecto a  $\varphi$  y  $z$ , entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 r h} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 r h} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 r h} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 r h} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} 0 + 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 h} \right) \right] + \frac{1}{r} 0 + 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = \frac{1}{r} [0] + \frac{1}{r} 0 + 0 = 0$$

entonces

$$\rho_{vp1} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = -(0)$$

$$\rho_{vp1} = 0$$

### Para el medio 2:

Para calcular el valor de la densidad volumétrica de polarización  $\rho_{vp2}$  en el medio 2, se utiliza la ecuación (3-17), esto es

$$\rho_{vp2} = -div \vec{P}_2$$

También se puede escribir como,

$$\rho_{vp2} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2$$

La divergencia de la función vectorial  $\vec{P}_2$  en coordenadas cilíndricas, es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r P_{2r}) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{2\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_{2z}}{\partial z}$$

De la ecuación (3-47), el valor de  $P_2$  solamente varía con respecto al radio  $r$ , esto es  $P_{2r}$ , mientras que, no existen valores de  $\varphi$  y  $z$  en  $P_2$ , por lo que sería una constante  $P_{2\varphi}$  y  $P_{2z}$  al derivar con respecto a  $\varphi$  y  $z$ , entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r h} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r h} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r h} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 h} \right) \right] + \frac{1}{r} 0 + 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r} [0] + \frac{1}{r} 0 + 0 = 0$$

entonces

$$\rho_{vp2} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = -(0)$$

$$\rho_{vp2} = 0$$

En conclusión, en vez de hacer tres gráficos por separados (figuras 3.14, 3.15 y 3.16), se puede graficar en uno solo, como se muestra en la figura 3.17

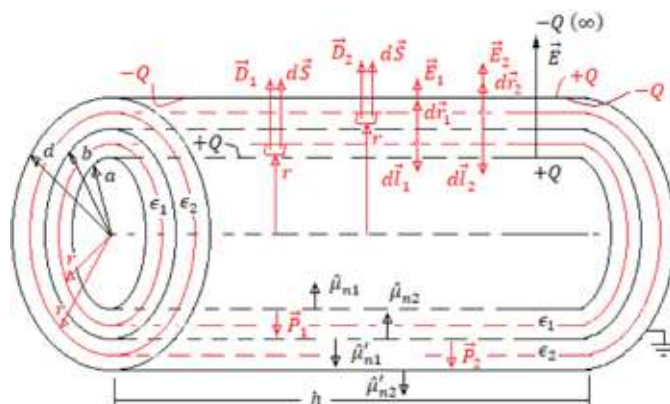


Figura 3.17 Vectores dentro y fuera del cilindro.

**Problema 3.2.** Una esfera dieléctrica de radio  $a$ , tiene una distribución volumétrica de cargas libres  $\rho_v(r)=Ar^2$  y una permitividad dieléctrica  $\epsilon$ , en el exterior de la esfera existe vacío, tal como semuestra en la figura 3.18. Determinar el potencial eléctrico en el centro de la esfera (punto  $p$ ) y, las densidades superficiales y volumétricas de polarización.

**Solución:**

Para calcular las densidades superficial y volumétrica de polarización, primero se debe determinar el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  o también llamado



densidad de flujo eléctrico, dentro y fuera de la esfera, para esto, se debe utilizar la ecuación (3-28) de la Ley generalizada de Gauss en forma integral.

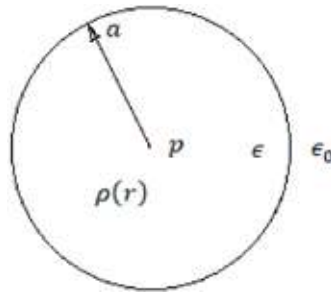


Figura 3.18 Esfera dieléctrica dentro del vacío con  $\rho_v(r) = Ar^2$ .

**Determinación de  $\vec{D}_1$  fuera de la esfera o para  $r > a$**

Para determinar el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}_1$  fuera de la esfera, se utiliza la ley generalizada de Gauss en forma integral. Se selecciona una superficie imaginaria (figura 3.19) o gaussiana en forma esférica de radio  $r$  mayor que  $a$ , para garantizar que todas las líneas de campo eléctrico  $\vec{E}_1$  y por ende  $\vec{D}_1$  (debido a que el campo eléctrico se relaciona con el vector de desplazamiento eléctrico a través de la ecuación ( $\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$ )) atraviesen dicha superficie imaginaria en forma perpendicular, que es uno de los requisitos para aplicar Gauss. La integral cerrada de superficie de la esfera, se convierte en una sola superficie abierta, entonces

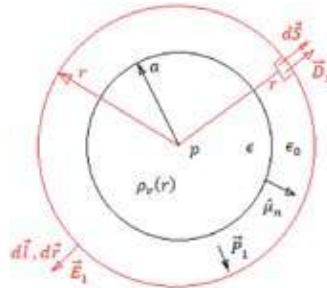


Figura 3.19 Vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{E}_1$ , fuera de la esfera.

$$\int_0^r \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_0^a \rho_v(r) dv \tag{3 - 48}$$

Antes que nada, la parte izquierda de la ecuación (3-48) corresponde a lo imaginario cuyos límites va de 0 a  $r$ , sobre la superficie imaginaria se selecciona un diferencial de superficie escalar  $dS$  y, sobre ésta se dibujan los dos vectores  $\vec{D}_1$  y  $d\vec{S}$ ; mientras que, el lado derecho de la ecuación corresponde a la parte real, es donde se encuentran las cargas físicas encerradas por la superficie imaginaria, en este caso los límites van

de 0 a  $a$ . Para este problema, la densidad volumétrica de cargas  $\rho_v(r)$  depende del radio, no es una constante, por tanto, esta variable no debe salir de la integral y debe ser multiplicado por el diferencial de volumen  $dv$ , entonces, el volumen de la esfera, es

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3$$

derivando con respecto al radio  $r$ , se tiene

$$dv = 4\pi r^2 dr$$

Destruyendo el producto punto, reemplazando el valor de  $\rho_v(r)$  y el valor de  $dv$  en la ecuación (3-48), se tiene

$$\int_0^r D_1 dS \cos 0^\circ = \int_0^a Ar^2 (4\pi r^2 dr)$$

Integrando,

$$D_1 \int_0^r dS = 4\pi A \int_0^a r^4 dr$$

$$D_1 [S]_0^r = 4\pi A \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^a$$

Pero, la superficie de la esfera, es

$$S = 4\pi r^2$$

Entonces,

$$D_1 [4\pi r^2]_0^r = 4\pi A \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^a$$

$$D_1 4\pi [r^2]_0^r = \frac{4\pi A}{5} [r^5]_0^a$$

$$D_1 [r^2]_0^r = \frac{A}{5} [r^5]_0^a$$

$$D_1 (r^2 - 0) = \frac{A(a^5 - 0)}{5}$$

$$D_1 r^2 = \frac{Aa^5}{5}$$

$$D_1 = \frac{Aa^5}{5r^2}$$

(3 - 49)

Para determinar el valor del campo eléctrico  $E_1$ , se parte de la relación  $D_1 = \epsilon_1 E_1$ , en este caso el medio 1 es el vacío, entonces  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ , esto es

$$D_1 = \epsilon_0 E_1$$

Despejando el valor de  $E_1$

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0} = \frac{Aa^5}{5\epsilon_0 r^2}$$

$$E_1 = \frac{Aa^5}{5\epsilon_0 r^2} \tag{3 - 1}$$

### Determinación de $\vec{D}_2$ dentro de la esfera o para $r < a$

Para determinar el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}_2$  dentro de la esfera, se utiliza la ley generalizada de Gauss en forma integral. Se selecciona una superficie imaginaria (figura 3.20) o gaussiana en forma esférica de radio  $r$  menor que  $a$ , para garantizar que todas las líneas de campo eléctrico  $\vec{E}_2$  y por ende  $\vec{D}_2$  (debido a que el campo eléctrico se relaciona con el vector de desplazamiento eléctrico a través de la ecuación  $\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$  atraviesen dicha superficie imaginaria en forma perpendicular, que es uno de los requisitos para aplicar Gauss). La integral cerrada de superficie de la esfera, se convierte en una sola superficie abierta, entonces

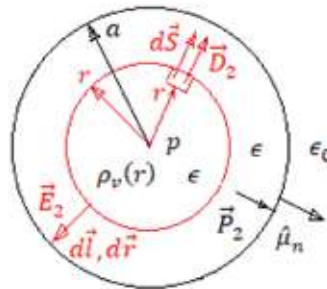


Figura 3.20 Vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{E}_1$ , dentro de la esfera.

$$\int_0^r \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = \int_0^r \rho_v(r) dv \tag{3 - 51}$$

Antes que nada, la parte izquierda de la ecuación (3-51) corresponde a lo imaginario cuyos límites va de 0 a  $r$ , sobre la superficie imaginaria se selecciona un diferencial de superficie escalar  $dS$  y, sobre ésta se dibujan los dos vectores  $\vec{D}_2$  y  $d\vec{S}$ ; mientras que, el lado derecho de la ecuación corresponde a la parte real, es donde se encuentran las cargas físicas encerradas por la superficie imaginaria, en este caso los

límites también van de 0 a r, porque la superficie gaussiana no encierra la totalidad de las cargas. Para este problema, la densidad volumétrica de cargas  $\rho_v(r)$  depende del radio, no es una constante, por tanto, esta variable no debe salir de la integral y debe ser multiplicado por el diferencial de volumen  $dv$ , entonces, igual que en el caso anterior, al reemplazar en la ecuación (3-51), se tiene

$$\int_0^r \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = \int_0^r Ar^2 (4\pi r^2 dr)$$

Integrando,

$$D_2 \int_0^r dS = 4\pi A \int_0^r r^4 dr$$

$$D_2[S]_0^r = 4\pi A \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^r$$

Pero, la superficie de la esfera, es

$$S = 4\pi r^2$$

Entonces,

$$D_2[4\pi r^2]_0^r = 4\pi A \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^r$$

$$D_2 4\pi [r^2]_0^r = \frac{4\pi A}{5} [r^5]_0^r$$

$$D_2 [r^2]_0^r = \frac{A}{5} [r^5]_0^r$$

$$D_2 (r^2 - 0) = \frac{A(r^5 - 0)}{5}$$

$$D_2 r^2 = \frac{Ar^5}{5}$$

$$D_2 = \frac{Ar^3}{5}$$

(3 - 52)

Para determinar el valor del campo eléctrico  $E_2$ , se parte de la relación  $D_2 = \epsilon_2 E_2$ , en este caso el medio 2 es el material dieléctrico, entonces  $\epsilon_2 = \epsilon$ , esto es

$$D_2 = \epsilon E_2$$

Despejando el valor de  $E_2$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon} = \frac{Ar^3}{5\epsilon}$$

$$E_2 = \frac{Ar^3}{5\epsilon} \quad (3 - 53)$$

Para determinar el potencial eléctrico  $V_p$  en el centro de la esfera, esto es, en el punto  $p$ , se utiliza la ecuación en cualquier punto  $r$  con respecto al infinito y, con el signo positivo, esto es

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3 - 54)$$

La parte derecha de la ecuación (3-54) tiene signo positivo, entonces, el límite inferior de la integral debe ubicarse en un punto de mayor campo eléctrico, en el caso de este problema es en el centro de la esfera, es decir, cuando  $r = 0$ , esto es,  $V(r = 0) = V_p$  y, el límite superior de la integral debe ubicarse en un punto de menor campo eléctrico, en el caso de este problema, en el infinito, es decir cuando  $r = \infty$ , pero el potencial en el infinito vale cero ( $V(\infty) = 0$ ). Como se trata de dos medios, la integral se divide en dos partes, reemplazando valores, resulta

$$V_p - 0 = \int_0^a \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_a^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} \quad (3 - 55)$$

Los vectores  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  y  $d\vec{l}$  están graficados en la figura 3.19 y figura 3.20, como se puede ver, los vectores  $d\vec{l}$  están dirigidos desde un punto de mayor a menor campo eléctrico. Destruyendo el producto punto de los dos términos, es

$$V_p = \int_0^a E_2 dl \cos 0^\circ + \int_a^{\infty} E_1 dl \cos 0^\circ$$

$$V_p = \int_0^a E_2 dl + \int_a^{\infty} E_1 dl$$

Pero, de acuerdo a las figuras 3.19 y 3.20,  $dl = dr$ , entonces

$$V_p = \int_0^a E_2 dr + \int_a^{\infty} E_1 dr$$

reemplazando los valores de la intensidad de campo eléctrico  $E_1$  y  $E_2$  de las ecuaciones (3-50) y (3-53), se tiene

$$V_p = \int_0^a \frac{Ar^3}{5\epsilon} dr + \int_a^{\infty} \frac{Aa^5}{5\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V_p = \frac{A}{5\epsilon} \int_0^a r^3 dr + \frac{Aa^5}{5\epsilon_0} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

Resolviendo la integral, es

$$V_p = \frac{A}{5 \epsilon} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^a + \frac{Aa^5}{5 \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^\infty$$

$$V_p = \frac{A}{5 \epsilon} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^a + \frac{Aa^5}{5 \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^\infty$$

$$V_p = \frac{A}{20 \epsilon} (a^4 - 0) - \frac{Aa^5}{5 \epsilon_0} \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{a} \right)$$

$$V_p = \frac{A}{20 \epsilon} a^4 - \frac{Aa^5}{5 \epsilon_0} \left( 0 - \frac{1}{a} \right)$$

$$V_p = \frac{A}{20 \epsilon} a^4 + \frac{Aa^4}{5 \epsilon_0}$$

$$V_p = \frac{Aa^4}{20 \epsilon \epsilon_0} (\epsilon_0 + 4\epsilon)$$

Para calcular los vectores de polarización  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$  se utiliza la ecuación (3-36) para los medios 1 y 2, respectivamente, esto es

El vector polarización  $\vec{P}_1$  tiene la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico  $\vec{E}_1$ , tal como se muestra en la figura 3.19, así

$$\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1$$

Reemplazando el valor de la ecuación (3-50) y el valor del medio 1, esto es,  $\epsilon_1 = \epsilon_0$

$$\vec{P}_1 = (\epsilon_0 - \epsilon_0) \frac{Aa^5}{5 \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Escribiendo en forma escalar

$$P_1 = 0 \tag{3 - 56}$$

El vector polarización  $\vec{P}_2$  tiene la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico  $\vec{E}_2$ , tal como se muestra en la figura 3.20, así

$$\vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2$$

Reemplazando el valor de la ecuación (3-53) y el valor del medio 2, esto es  $\epsilon_2 = \epsilon$

$$\vec{P}_2 = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Ar^3}{5\epsilon} \hat{r}$$

Escribiendo en forma escalar

$$P_2 = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Ar^3}{5\epsilon} \quad (3 - 57)$$

Determinación de la densidad superficial de polarización  $\rho_{sp}$  en la única frontera cuando  $r = a$ , esto es

### Frontera 1:

El vector unitario normal  $\hat{\mu}_n$  es perpendicular de la superficie del medio 2 hacia afuera, entonces, para calcular la densidad superficial de polarización  $\rho_{sp}$  en la frontera 1 cuando  $r = a$ , se utiliza la ecuación (3-21) para el medio 2, esto es

$$\rho_{sp} = \vec{P}_2 \cdot \hat{\mu}_n$$

$$\rho_{sp} = P_2 \cos 0^\circ = P_2$$

Reemplazando el valor de  $P_2$  de la ecuación (3-57), entonces

$$\rho_{sp} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Aa^3}{5\epsilon}$$

Para calcular el valor de la densidad volumétrica de polarización  $\rho_{vp}$  en el medio 2, se utiliza la ecuación (3-17), esto es

$$\rho_{vp} = -\text{div } \vec{P}_2$$

También se puede escribir como,

$$\rho_{vp} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 \quad (3 - 58)$$

La divergencia de la función vectorial  $\vec{P}_2$  en coordenadas esféricas, es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_{2r}) \right] + \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{2\theta} \text{ sen } \theta) \right] + \frac{1}{r \text{ sen } \theta} \frac{\partial P_{2\varphi}}{\partial \varphi}$$

De la ecuación (3-57), el valor de  $P_2$  solamente varía con respecto al radio  $r$ , esto es  $P_{2r}$ , mientras que, no existen valores de  $\theta$  y  $\varphi$  en  $P_2$ , por lo que  $P_{2\theta} = 0$  y  $P_{2\varphi} = 0$ , entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_{2r}) \right]$$

Reemplazando valores

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Ar^3}{5\epsilon} \right) \right]$$

Derivando con respecto al radio  $r$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = \frac{1}{r^2} \left[ (\epsilon - \epsilon_0) \frac{A}{5\epsilon} 5 r^4 \right]$$

simplificando

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_2 = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{A}{\epsilon} r^2 \quad (3 - 59)$$

Finalmente, reemplazando la ecuación (3-59) en la ecuación (3-58), se tiene el valor de la densidad volumétrica de polarización en el interior de la esfera de radio  $a$ , esto es

$$\rho_{vp} = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{A}{\epsilon} r^2$$

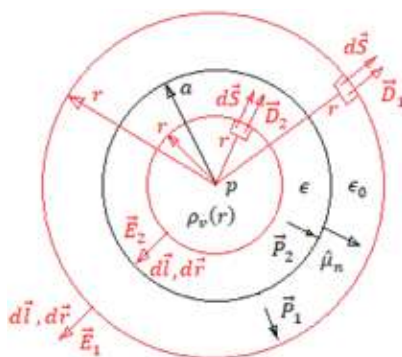


Figura 3.21 Vectores dentro y fuera de la esfera.

Como conclusión, en vez de hacer dos gráficos por separados (figuras 3.19 y 3.20), se puede graficar en uno solo, como se muestra en la figura 3.21.

**Problema 3.3.** Un cilindro conductor de radio  $a$  con un potencial eléctrico  $V_a$  está dentro de un tubo conductor de radio  $b$  con un potencial eléctrico  $V_b$ , que tiene un espesor despreciable, como se muestra en la figura 3.22. Determinar la función de potencial entre los dos cilindros conductores.

**Desarrollo:**

De acuerdo al problema, entre el cilindro de radio  $a$  y  $b$  existe el vacío y no hay cargas, entonces se puede aplicar la ecuación de Laplace ya que es válido para medios donde no existan cargas. Para determinar la función de potencial entre los cilindros de radios  $a$  y  $b$  se traza un cilindro imaginario de radio  $r$ , como se muestra en la figura 3.23, y se aplica la ecuación de Laplace (3-60) en coordenadas cilíndricas (3-61), esto es



$$\nabla^2 V = 0 \quad (3-60)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (3-61)$$

Se reemplaza la ecuación (3-61) en la ecuación (3-60), así

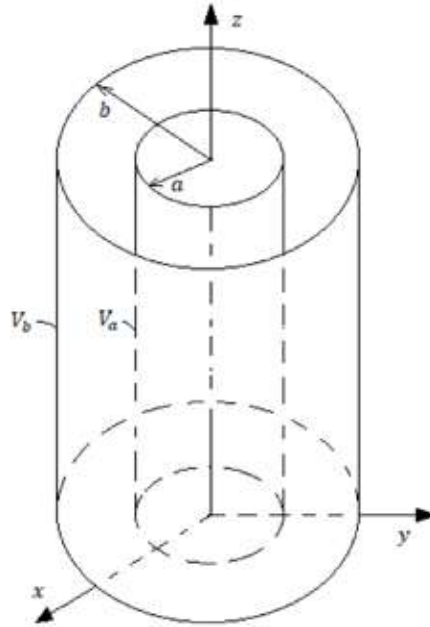


Figura 3.22 Un cilindro coaxial concéntrico de radios  $a$  y  $b$ .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Los potenciales a lo largo de los cilindros de radios  $a$  y  $b$  son constantes, entonces las derivadas parciales con respecto al ángulo  $\varphi$  y a la distancia  $z$  son iguales a cero, así

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

entonces,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad (3-62)$$

Para despejar el potencial  $V$  de la ecuación (3-62), se procede a integrar varias veces. Primero se despeja el diferencial y se integra, como se trata de una integral indefinida se adiciona una constante de integración  $K_1$ , esto es

$$\int \partial \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

$$r \frac{\partial V}{\partial r} = K_1 \quad (3 - 63)$$

Luego, nuevamente se despeja el diferencial y se integra por segunda vez, como se trata de una integral indefinida se adiciona otra constante de integración  $K_2$ , esto es

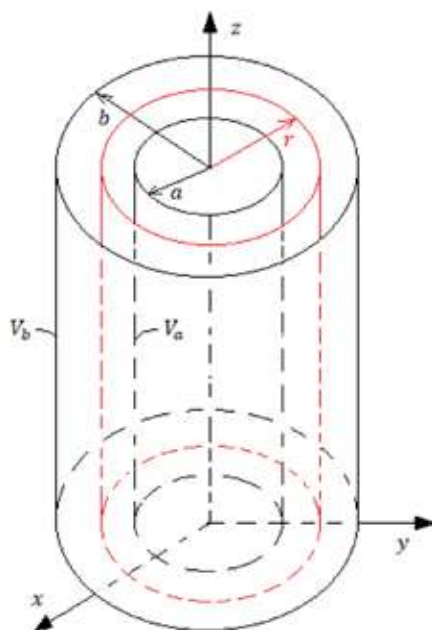


Figura 3.23 Cilindro imaginario de radio  $r$ .

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{K_1}{r}$$

$$\int \partial V = \int \frac{K_1}{r} \partial r$$

$$V = K_1 \ln r + K_2 \quad (3 - 64)$$

El potencial eléctrico de la ecuación (3-64) debe variar con respecto al radio  $r$  dentro del rango de  $a < r < b$ , entonces se debe escribir de la siguiente manera:

$$V(r) = K_1 \ln r + K_2 \quad (3 - 65)$$

A continuación, se procede a evaluar las constantes de integración  $K_1$  y  $K_2$ , para lo cual, se evalúa la ecuación (3-65) cuando  $r = a$  se tiene un potencial de  $V_a$  y cuando  $r = b$  se tiene un potencial  $V_b$ , entonces

$$V(r = a) = K_1 \ln a + K_2 = V_a$$

despejando  $V_a$ ,

$$V_a = K_1 \ln a + K_2 \quad (3 - 66)$$

$$V(r = b) = K_1 \ln b + K_2 = V_b$$

despejando  $V_b$ ,

$$V_b = K_1 \ln b + K_2 \quad (3 - 67)$$

Utilizando el método de determinantes, de las ecuaciones (3-66) y (3-67), se plantea la matriz para hallar la constante  $K_1$ , así

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_a & 1 \\ V_b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln a & 1 \\ \ln b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{V_a - V_b}{\ln a - \ln b} = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$K_1 = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \quad (3 - 68)$$

De igual manera, se plantea la matriz para hallar la constante  $K_2$ , así

$$K_2 = \frac{\begin{vmatrix} \ln a & V_a \\ \ln b & V_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln a & 1 \\ \ln b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln a - \ln b} = \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$K_2 = \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}} \quad (3 - 69)$$

Finalmente, para obtener la función de potencial eléctrico en cualquier punto a una distancia  $r$  entre los cilindros de radio  $a$  y  $b$ , se reemplaza las ecuaciones (3-68) y (3-69) en la ecuación (3-65), esto es

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln r + \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln r + \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}} \quad (3 - 70)$$

Para simplificar la ecuación (3-70), se puede restar y sumar el siguiente término:

$$-\frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln a + \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln a$$

entonces,

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln r - \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln a + \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln a + \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

Agrupando términos

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln a + \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + \frac{V_a \ln a - V_b \ln a}{\ln \frac{a}{b}} + \frac{V_b \ln a - V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + \frac{V_a \ln a}{\ln \frac{a}{b}} - \frac{V_b \ln a}{\ln \frac{a}{b}} + \frac{V_b \ln a}{\ln \frac{a}{b}} - \frac{V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + \frac{V_a \ln a}{\ln \frac{a}{b}} - \frac{V_a \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + V_a \left( \frac{\ln a - \ln b}{\ln \frac{a}{b}} \right) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + V_a \left( \frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln \frac{a}{b}} \right) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + V_a$$

$$V(r) = \frac{V_a - V_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{a} + V_a$$

o

$$V(r) = \frac{V_b - V_a}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a} + V_a$$

**Problema 3.4.** Un disco circular delgado dieléctrico, de radio  $a$  y grosor  $b$ , es polarizado permanentemente con un momento de dipolo por unidad de volumen  $\vec{P}$ , paralelo al eje del disco que es normal a sus caras planas, como se muestra en la figura 3.24. Determinar el potencial electrostático en un punto  $p$  del eje del disco (ESPOL, 1982, p.103).

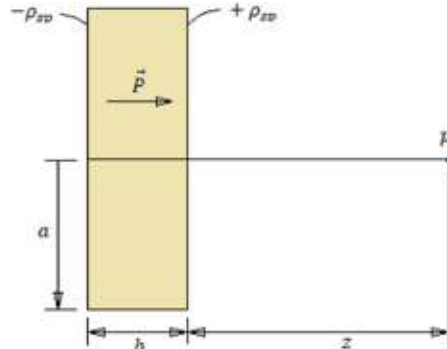


Figura 3.24 Disco dieléctrico con distribuciones superficiales de polarización  $+\rho_{sp}$  y  $-\rho_{sp}$ .

### Desarrollo:

Antes que nada, en la figura 3.24 el vector de polarización  $\vec{P}$  está dirigido de izquierda a derecha, esto quiere decir que el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  está en la misma dirección que  $\vec{P}$ , entonces al atravesar el campo eléctrico por el material dieléctrico se forman los dipolos eléctricos que tienden a alinearse en la misma dirección del campo  $\vec{E}$ , por tal razón, en este problema sobre la superficie del disco de la parte izquierda están las cargas negativas de polarización ( $-\rho_{sp}$ ) y, sobre el disco de la parte derecha, están las cargas positivas de polarización ( $+\rho_{sp}$ ).

A continuación, la figura 3.24 se le ubica en un plano tridimensional con el eje  $z$  en forma vertical y se procede a calcular el potencial total  $V_p$  en el punto  $p$  producidas por las densidades superficiales de polarización, tanto de la parte superior  $V_{p1}$  así como de la parte inferior  $V_{p2}$  del disco de radio  $a$  y espesor o grosor  $d$  (figura 3.25). El potencial total en el punto  $p$ , es

$$V_p = V_{p1} + V_{p2}$$

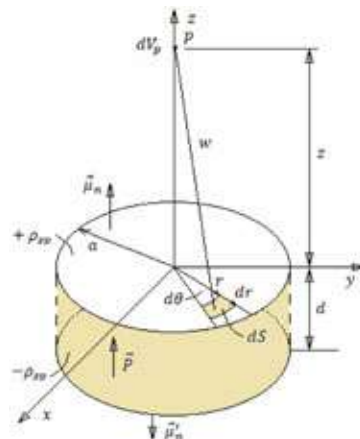


Figura 3.25 Potencial eléctrico en el punto  $p$  producido por la  $+\rho_{sp}$ .

**Cálculo del potencial de la parte superior del disco:** en la superficie superior del disco se selecciona un diferencial de superficie  $dS$ , éste produce un diferencial de potencial  $dV_{p1}$  en el punto  $p$  a una distancia  $w$ , tal como se muestra en la figura 3.25. De tal manera que, la ecuación para determinar la diferencia de potencial eléctrico en un punto  $p$  con respecto al infinito, es

$$dV_{p1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s dS}{w}$$

donde,  $\rho_s = \rho_{sp}$ , entonces

$$dV_{p1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{sp} dS}{w} \quad (3-71)$$

pero, de acuerdo a la ecuación (3-21)

$$\rho_{sp} = \vec{P} \cdot \hat{\mu}_n$$

En la figura 3.25, el ángulo entre los dos vectores  $\vec{P}$  y  $\hat{\mu}_n$  es  $0^\circ$ , siendo  $\hat{\mu}_n$  el vector unitario normal, entonces destruyendo el producto punto  $\rho_{sp} = P$ , y reemplazando en la ecuación (3-71), se tiene

$$dV_{p1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P dS}{w} \quad (3-72)$$

Pero, el diferencial de superficie  $dS$  como es tan pequeño tiene la forma de un rectángulo y, el área del rectángulo (figura 3.26) es la base del arco  $r d\theta$  por la altura  $dr$ , así

$$dS = r dr d\theta \quad (3-73)$$

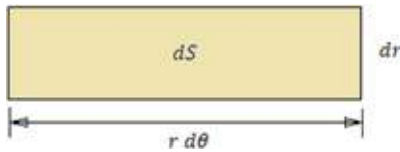


Figura 3.26 Diferencial de superficie  $dS$ .

En el triángulo rectángulo de la figura 3.25,  $w$  es igual a:

$$w = \sqrt{z^2 + r^2} \quad (3-74)$$

Reemplazando las ecuaciones (3-73) y (3-74) en la ecuación (3-72), se tiene

$$dV_{p1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Pr dr d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Integrando con respecto al ángulo  $\theta$  y al radio  $r$ , se tiene

$$V_{p1} = \int_0^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Pr dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V_{p1} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} (2\pi) = \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

esto es,

$$V_{p1} = \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} \tag{3-75}$$

Haciendo un cambio de variables

$$u = z^2 + r^2$$

manteniendo constante la distancia  $z$  y derivando con respecto al radio  $r$ ,

$$du = 2r dr$$

Reemplazando en la ecuación (3-75) y con  $\rho_{sp} = P$ ,

$$V_{p1} = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$V_{p1} = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \int u^{-1/2} \frac{du}{2} = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} |u^{1/2}| = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} |(z^2 + r^2)^{1/2}|_0^a$$

$$V_{p1} = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} |(z^2 + r^2)^{1/2}|_0^a = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} [(z^2 + a^2)^{1/2} - (z^2 + 0^2)^{1/2}] = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} [(z^2 + a^2)^{1/2} - z]$$

Finalmente el potencial en el punto  $p$  debido a la superficie superior del disco, es

$$V_{p1} = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} [(z^2 + a^2)^{1/2} - z] \tag{3-76}$$

**Cálculo del potencial de la parte inferior del disco:** en la superficie inferior del disco se selecciona un diferencial de superficie  $dS$ , éste produce un diferencial de potencial  $dV_{p2}$  en el punto  $p$  a una distancia  $w'$ , tal como se muestra en la figura 3.27. De tal manera que, la ecuación para determinar la diferencia de potencial eléctrico en un punto  $p$  con respecto al infinito, es

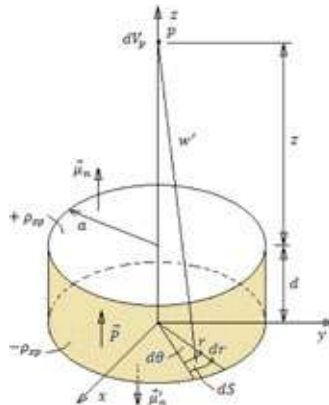


Figura 3.27 Potencial eléctrico en el punto  $p$  producido por la  $-\rho_{sp}$ .

$$dV_{p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s dS}{w'}$$

donde,  $\rho_s = \rho_{sp}$ , entonces

$$dV_{p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{sp} dS}{w'} \quad (3-77)$$

pero, de acuerdo a la ecuación (3-21)

$$\rho_{sp} = \vec{P} \cdot \hat{\mu}'_n$$

En la figura 3.27, el ángulo entre los dos vectores  $\vec{P}$  y  $\hat{\mu}'_n$  es  $180^\circ$ , siendo  $\hat{\mu}'_n$  el vector unitario normal, entonces destruyendo el producto punto  $\rho_{sp} = -P$ , y reemplazando en la ecuación (3-77), se tiene

$$dV_{p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-P dS}{w'} \quad (3-78)$$

Pero, el diferencial de superficie  $dS$  como es tan pequeño tiene la forma de un rectángulo y, el área del rectángulo (figura 3.27) es la base del arco  $r d\theta$  por la altura  $dr$ , es decir, igual que la figura 3.26, así

$$dS = r dr d\theta \quad (3-79)$$

En el triángulo rectángulo de la figura 3.27,  $w'$  es igual a:

$$w' = \sqrt{(z+d)^2 + r^2} \quad (3-80)$$

Reemplazando las ecuaciones (3-79) y (3-80) en la ecuación (3-78), se tiene

$$dV_{p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Pr dr d\theta}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}}$$

Integrando con respecto al ángulo  $\theta$  y al radio  $r$ , se tiene

$$V_{p2} = \int_0^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Pr dr}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V_{p2} = \frac{-P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{-P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} (2\pi)$$

$$V_{p2} = \frac{-P}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{(z+d)^2 + r^2}} \quad (3-81)$$

Haciendo un cambio de variables

$$u = (z+d)^2 + r^2$$



manteniendo constante la distancia  $(z + d)$  y derivando con respecto al radio  $r$ ,

$$du = 2rdr$$

Reemplazando en la ecuación (3-80) y con  $\rho_{sp} = -P$ ,

$$V_{p2} = -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$V_{p2} = -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \int u^{-1/2} \frac{du}{2} = -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} |u^{1/2}| = -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} |[z + d]^2 + r^2]^{1/2} \Big|_0^a$$

$$V_{p2} = -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ [(z + d)^2 + a^2]^{1/2} - [(z + d)^2 + 0^2]^{1/2} \}$$

$$V_{p2} = -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ [(z + d)^2 + a^2]^{1/2} - [(z + d)^2]^{1/2} \}$$

Finalmente el potencial en el punto  $p$  debido a la superficie inferior del disco, es

$$V_{p2} = -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ [(z + d)^2 + a^2]^{1/2} - (z + d) \} \quad (3 - 82)$$

Por último, el potencial eléctrico  $V_p$  en el punto  $p$  con respecto al infinito, es la suma del potencial  $V_{p1}$  del disco superior de la ecuación (3-76) y, el potencial  $V_{p2}$  del disco inferior de la ecuación (3-82), así

$$V_p = V_{p1} + V_{p2}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} [(z^2 + a^2)^{1/2} - z] + \left\{ -\frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ [(z + d)^2 + a^2]^{1/2} - (z + d) \} \right\}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} [(z^2 + a^2)^{1/2} - z] - \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ [(z + d)^2 + a^2]^{1/2} - (z + d) \}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ (z^2 + a^2)^{1/2} - z - [(z + d)^2 + a^2]^{1/2} + z + d \}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ (z^2 + a^2)^{1/2} - [(z + d)^2 + a^2]^{1/2} + d \} \quad (3 - 83)$$

Si en la ecuación (3-83), se considera que  $d \ll z$ , entonces

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \{ (z^2 + a^2)^{1/2} - [z^2 + 2zd + d^2 + a^2]^{1/2} + d \}$$

Debido a que  $d \ll z$ ,  $d$  es un valor muy pequeño y, éste elevado al cuadrado es mucho más pequeño, es decir es despreciable, entonces  $d^2 = 0$ , así

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \left\{ (z^2 + a^2)^{1/2} - [z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} + d \right\} \quad (3 - 84)$$

Pero,

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = [z^2 + a^2 + 2zd]^{1/2} \frac{(z^2 + a^2)^{1/2}}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = (z^2 + a^2)^{1/2} \frac{(z^2 + a^2 + 2zd)^{1/2}}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = (z^2 + a^2)^{1/2} \frac{(z^2 + a^2 + 2zd)^{1/2}}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = (z^2 + a^2)^{1/2} \left( \frac{z^2 + a^2 + 2zd}{z^2 + a^2} \right)^{1/2}$$

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = (z^2 + a^2)^{1/2} \left( \frac{z^2 + a^2}{z^2 + a^2} + \frac{2zd}{z^2 + a^2} \right)^{1/2}$$

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = \sqrt{z^2 + a^2} \sqrt{\left( 1 + \frac{2zd}{z^2 + a^2} + \frac{z^2 d^2}{(z^2 + a^2)^2} \right) - \frac{z^2 d^2}{(z^2 + a^2)^2}}$$

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = \sqrt{z^2 + a^2} \sqrt{\left( 1 + \frac{zd}{z^2 + a^2} \right)^2 - \frac{z^2 d^2}{(z^2 + a^2)^2}}$$

Pero,  $d^2 = 0$ , entonces

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = \sqrt{z^2 + a^2} \sqrt{\left( 1 + \frac{zd}{z^2 + a^2} \right)^2 - 0}$$

$$[z^2 + 2zd + a^2]^{1/2} = (z^2 + a^2)^{1/2} \left( 1 + \frac{zd}{z^2 + a^2} \right) \quad (3 - 85)$$

Reemplazando la ecuación (3-85) en la ecuación (3-84)

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \left\{ (z^2 + a^2)^{1/2} - (z^2 + a^2)^{1/2} \left( 1 + \frac{zd}{z^2 + a^2} \right) + d \right\}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \left\{ (z^2 + a^2)^{1/2} - (z^2 + a^2)^{1/2} - \frac{zd(z^2 + a^2)^{1/2}}{z^2 + a^2} + d \right\}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \left\{ -\frac{zd(z^2 + a^2)^{1/2}}{z^2 + a^2} + d \right\} = \frac{\rho_{sp}d}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - z(z^2 + a^2)^{1/2}(z^2 + a^2)^{-1} \right\}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}}{2\epsilon_0} \left\{ -\frac{zd(z^2 + a^2)^{1/2}}{z^2 + a^2} + d \right\} = \frac{\rho_{sp}d}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - z(z^2 + a^2)^{-1/2} \right\}$$

$$V_p = \frac{\rho_{sp}d}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - z(z^2 + a^2)^{-1/2} \right\}$$

De tal forma que, cuando el disco tiene un espesor de ( $d \ll z$ ), el potencial en el punto  $p$ , es

$$V_p = \frac{\rho_{sp}d}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\}$$

### 3.7 PROBLEMAS PROPUESTOS

- **Problema P3.1.** Cuando un material dieléctrico es introducido en un campo eléctrico  $\vec{E}$  externo, explicar lo que ocurre en el interior del material dieléctrico.

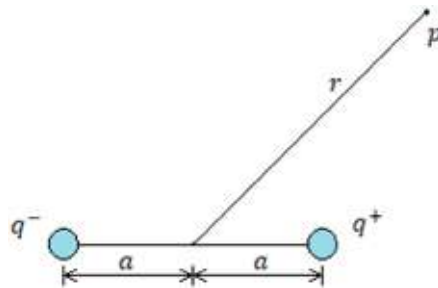


Figura 3.28 Dipolo eléctrico

- **Problema P3.2.** Un dipolo eléctrico está formado por una carga negativa  $q-$  y una carga positiva  $q+$ , y se encuentran a una distancia de separación  $2a$ . Calcular el potencial eléctrico producido por el dipolo, en el punto  $p$ , que se encuentra a una distancia  $r$  desde el centro de las dos cargas, tal como se muestra en la figura 3.28. Una vez obtenido el potencial eléctrico  $V_p$ , calcular la intensidad de campo eléctrico en el punto  $p$ , utilizando la ecuación que determina el campo eléctrico a partir del potencial, esto es,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Para los cálculos de un dipolo, asumir que  $r \gg 2a$ .

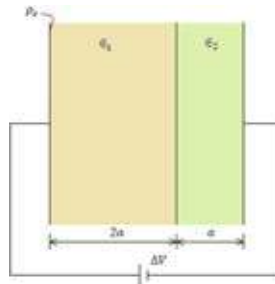


Figura 3.29

- **Problema P3.3.** En un punto de un dieléctrico polarizado, el número de dipolos por unidad de volumen es  $N$  y su momento de dipolo magnético es  $p$ . ¿Cuál es el vector de polarización en ese punto?
- **Problema P3.4.** Un capacitor de placas paralelas de superficie  $S$  tiene una distribución superficial de cargas uniformes  $\rho_s$  tal como se muestra en la figura 3.29. El dieléctrico consiste de dos capas de espesores  $a$  y  $2a$ , permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  y el potencial aplicado entre las placas es  $\Delta V$ . Determinar  $\rho_s$  y las densidades superficiales y volumétricas de polarización.
- **Problema P3.5.** Utilizando la Ley generalizada de Gauss y aplicando condiciones de frontera entre dos medios dieléctricos, obtener las componentes normales en el medio 1 y 2 del vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ .

## CAPÍTULO IV

### 4. CORRIENTE ELÉCTRICA ESTACIONARIA EN CONDUCTORES

#### 4.1 DENSIDAD E INTENSIDAD DE CORRIENTE

Antes que nada, en los capítulos anteriores se ha considerado el campo eléctrico estático, es decir, el campo debido a cargas eléctricas estáticas. En este capítulo, se tratarán los casos en los que las distribuciones continuas de cargas se encuentran macroscópicamente en un movimiento de estado estable, tal estado estable se obtiene cuando grandes agregados de cargas eléctricas elementales se mueven de manera que la imagen macroscópica del movimiento de la carga es constante en el tiempo (ESPOL, 1982, p.193). El movimiento constante de las cargas suele canalizarse mediante conductores adecuados, esto se refiere a cualquier sustancia que tenga en todo su volumen un número relativamente grande de cargas libres para moverse en su interior.

Cuantitativamente, la corriente eléctrica, es decir, el flujo de una distribución continua de cargas eléctricas, está representada por dos cantidades físicas: el vector de densidad de corriente  $\vec{J}$  que se caracteriza por el flujo de cargas en un punto y, la intensidad de la corriente  $I$  describe la tasa de flujo de cargas eléctricas a través de una superficie macroscópica (ESPOL, 1982, p.194).

Suponiendo que en un punto dentro de un conductor hay  $N$  cargas libres por unidad de volumen (figura 4.1), cada una con una carga  $Q$ , moviéndose (en el punto considerado) con una velocidad promedio  $\vec{v}$  (ESPOL, 1982, p.194). La densidad de corriente  $\vec{J}$  en ese punto se define como:

$$\vec{J} = NQ\vec{v} \quad (4 - 1)$$

Se puede ver que, de acuerdo con esta definición (4-1), el vector de densidad de corriente de cargas negativas  $\vec{J}_{-Q}$  con velocidades promedio  $-\vec{v}$  es el mismo que el vector de densidad actual de cargas positivas  $\vec{J}_{+Q}$  con velocidades promedio  $+\vec{v}$ , entonces, se puede decir que

$$\vec{J}_{-Q} = N(-Q)(-v) = NQv = \vec{J}_{+Q} \quad (4-2)$$

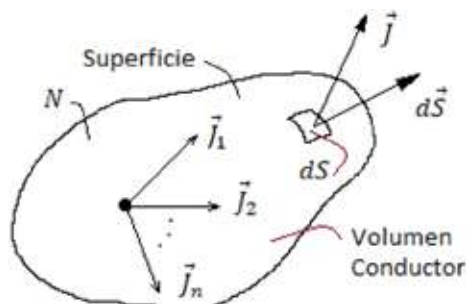


Figura 4.1 Material conductor con  $N$  cargas libres por unidad de volumen.

La definición en la ecuación (4-1) del vector de densidad de corriente implica que una corriente de cargas negativas en una dirección es equivalente a la corriente de estas cargas tomadas con el signo positivo y moviéndose en la dirección opuesta.

En el caso general, la corriente eléctrica puede estar compuesta por una distribución continua de diferentes cargas,  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  de diferentes números  $N_1, N_2, \dots, N_n$  por unidad de volumen y con diferentes velocidades  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  en el punto considerado, entonces, la densidad de corriente total  $\vec{J}_{total}$  es definido como la suma vectorial de las densidades parciales de corriente, esto es

$$\vec{J}_{total} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \dots + \vec{J}_n \quad (4-3)$$

o, utilizando la ecuación (4-1) para reemplazar en cada una de las densidades de corriente de la ecuación (4-3), así

$$\vec{J}_{total} = N_1 Q_1 \vec{v}_1 + N_2 Q_2 \vec{v}_2 + \dots + N_n Q_n \vec{v}_n \quad (4-3)$$

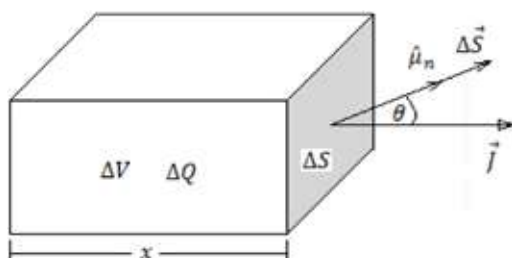


Figura 4.2 Una pequeña superficie plana  $\Delta S$  en un campo de corriente (ESPOL, 1982, p.195).

En el material conductor de la figura 4.1, se selecciona un pequeño volumen  $\Delta V$  representado en la figura 4.2, en el que se muestra una pequeña superficie plana sombreada  $\Delta S$  en una corriente de partículas cargadas que constituyen la

corriente eléctrica y que el vector de densidad de corriente  $\vec{J}$  en ese punto es igual a  $NQ\vec{v}$ , siendo  $\vec{v}$  la velocidad con que se desplazan las cargas  $Q$ . Durante un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la superficie  $\Delta S$  será atravesada por la carga  $\Delta Q$  que ocupa el volumen  $[\Delta S (v\Delta t) \cos\theta]$  del material conductor que se encuentra a la izquierda de  $\Delta S$ , como se muestra en la figura 4. 2. Se debe aclarar que, el volumen del material conductor es  $(x \Delta S \cos\theta)$ , donde  $x$  es la longitud del material igual a la velocidad por el tiempo ( $x = v\Delta t$ ), y  $\Delta S \cos\theta$  es el área transversal (ESPOL, 1982, p.195). La carga  $\Delta Q$  que cruza  $\Delta S$  en forma perpendicular en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , es entonces

$$\Delta Q = NQv \Delta S \Delta t \cos \theta \quad (4 - 5)$$

La ecuación (4-5) se encuentra balanceada, es decir, tanto al lado izquierdo como en el lado derecho, la unidad es el coulomb. La parte derecha se puede demostrar reemplazando cada variable por su unidad, así

$$NQv \Delta S \Delta t \cos \theta = \left(\frac{1}{m^3}\right) (\text{Coulomb}) \left(\frac{m}{s}\right) (m^2)(s) = \text{Coulomb}$$

Pero,  $J = NQv$

entonces, en (4-5)

$$\Delta Q = J \Delta S \Delta t \cos \theta$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = J \Delta S \cos \theta$$

Donde,  $\Delta Q / \Delta t$  es la variación de corriente  $\Delta I$  que existe debido al movimiento de las cargas dentro del material conductor, entonces, reemplazando se tiene

$$\Delta I = J \Delta S \cos \theta \quad (4 - 6)$$

El lado derecho de la ecuación (4-6) es la magnitud del producto punto entre el vector  $\vec{J}$  y el vector  $\Delta\vec{S}$ , entonces

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta\vec{S} \quad (4 - 7)$$

De la ecuación (4-7) la intensidad de corriente total  $I$  a través de una superficie arbitraria  $S$ , es decir, la carga que cruza la superficie por unidad de tiempo, es igual al flujo del vector de densidad de corriente  $\vec{J}$  a través de la superficie macroscópica  $S$  de la figura 4.1, esto es

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

En forma general, la intensidad de corriente  $I$  está definida como la razón de cambio del movimiento de las cargas al pasar por un punto de referencia dado (o por un plano de referencia dado) a razón de un coulomb por segundo (Hayt y Buck, p.92).

## 4.2 ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD

No hay evidencia experimental de que las cargas eléctricas puedan crearse o destruirse en cantidades macroscópicas. Este hecho se conoce como ley de conservación de cargas eléctricas. Para derivar la ecuación de continuidad, considerar una superficie cerrada  $S$ , que encierra en un instante de tiempo un carga total  $Q$  (figura 4.3).  $Q$  forma parte de una nube de cargas de densidad  $\rho$  (función de la posición y el tiempo), distribuidas en el espacio y moviéndose de forma arbitraria (ESPOL, 1982, p.196). La corriente total  $i_s(t)$  a través de una superficie fija  $S$ , con referencia a la normal positiva hacia afuera a  $S$ , es por definición

$$i_s(t) = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4 - 8)$$

donde,  $\vec{j}$  es el vector de densidad de corriente en  $dS$ . Ahora, la corriente  $i_s(t)$  representa por definición la carga positiva que cruza  $S$  por unidad de tiempo en la dirección positiva (hacia afuera). Pero, de acuerdo con la ley de construcción de cargas, el flujo de cargas hacia el exterior debe ir acompañado exactamente de la misma disminución de la carga encerrada por  $S$  (ESPOL, 1982, p.197). Por lo tanto,  $i_s(t)$  también se puede escribir en la forma,

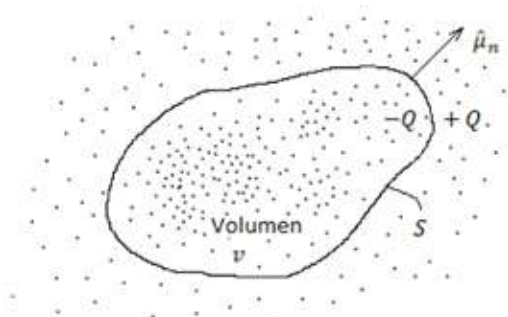


Figura 4.3 Una superficie imaginaria  $S$  que encierra un volumen  $v$  de una nube de cargas.

$$i_s(t) = \frac{dQ_{\text{cruza } S}}{dt} = -\frac{dQ_{\text{dentro volumen } S}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho_v dv \quad (4 - 9)$$



Combinando las ecuaciones (4-8) y (4-9), se tiene

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho_v dv \quad (4-10)$$

donde, la ecuación (4-10) es la ecuación de la continuidad en forma integral.

Para obtener la ecuación de la continuidad en forma diferencial, a la ecuación (4-10), se aplica el teorema de la divergencia, en la que se puede transformar una integral cerrada de superficie  $S$  del vector  $\vec{j}$  en una integral de la divergencia del vector  $\vec{j}$  del volumen  $v$  encerrado por la superficie  $S$ , esto es

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_v \text{div} \vec{j} dv \quad (4-11)$$

reemplazando la ecuación (4-11) en la ecuación (4-10), se tiene

$$\int_v \text{div} \vec{j} dv = -\frac{d}{dt} \int_v \rho_v dv$$

Además, la densidad de cargas  $\rho$  varía con respecto al espacio y el tiempo, por lo tanto, se debe considerar derivadas parciales dentro de la integral, así

$$\int_v \text{div} \vec{j} dv = - \int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Integrando,

$$\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (4-12)$$

La ecuación (4-12) es, la ecuación de la continuidad en forma diferencial.

Si la corriente eléctrica es estacionaria, la densidad de carga  $\rho$  de cada punto del conductor es constante, entonces la derivada con respecto al tiempo de  $\rho$  es igual a cero. Por lo tanto, las ecuaciones (4-11) y (4-13) son iguales a cero, esto es

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4-13)$$

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad (4-14)$$

Las ecuaciones (4-13) y (4-14) “equivalen a decir que la carga de cualquier volumen del conductor no varía o, también, que la cantidad de carga que en cada unidad de tiempo entra en un volumen del conductor sale de él. Esto debe ser así si la carga en su interior ha de permanecer constante” (F. R. Quintela y R. C. Redondo Melchor, 2006-2021).

### 4.3 MECANISMO DE FLUJO DE CORRIENTE EN SÓLIDOS Y LÍQUIDOS CONDUCTORES

Sobre el mecanismo del flujo de corriente, en la figura 4.4 se muestran dos materiales conductores de igual magnitud de cargas  $Q$  pero de signos opuestos, se encuentran incrustados en un dieléctrico sólido o líquido. En circunstancias normales, ninguna carga saldrá de la superficie del conductor. Sin embargo, suponga que una pequeña carga  $+\Delta Q$  salió de la superficie del conductor positivo y entró en el dieléctrico. Bajo la influencia del campo eléctrico  $\vec{E}$  debido a las cargas  $+Q$  y  $-Q$  en los dos cuerpos, la carga  $\Delta Q$  se acelerará en la dirección de la intensidad del campo eléctrico en  $A$ . Pero después de una trayectoria muy corta, chocará, digamos en un punto  $A'$ , con un átomo del dieléctrico, y se para. A continuación, se acelerará en la dirección de la intensidad del campo eléctrico en  $A'$ , pero, después de una trayectoria muy corta, chocará con algún otro átomo del dieléctrico y se detendrá de nuevo. El proceso continúa hasta que alcanza un punto  $B$  en el cuerpo cargado negativamente. Allí se neutraliza con una pequeña fracción  $-\Delta Q$  del total  $-Q$  cargado en el cuerpo. Es obvio que macroscópicamente la trayectoria de  $\Delta Q$  coincidirá con la línea de fuerza de  $A$  a  $B$ , como se muestra en la figura 4.4 (ESPOL, 1982, p.198).

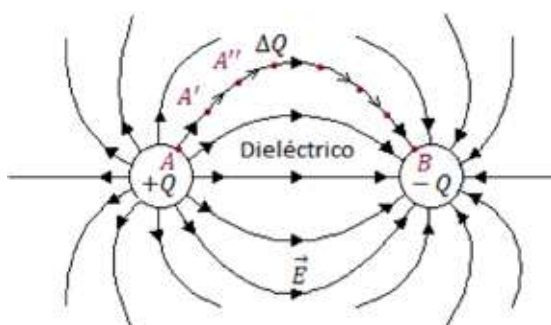


Figura 4.4 Dos electrodos incrustados en un dieléctrico.

Suponga ahora que, en lugar del dieléctrico, los dos cuerpos cargados están incrustados en algún conductor pobre (figura 4.5). Las cargas libres disponibles en todo el conductor pobre seguirán exactamente el mismo tipo de rutas que antes.

Las cadenas de cargas libres en movimiento seguirán macroscópicamente las líneas de la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$ . Sin embargo, los dos cuerpos cargados serán invadidos por cargas con los signos opuestos. Así, tarde o temprano, la carga total de los dos cuerpos se neutralizará y el campo eléctrico en el conductor

pobre desaparecerá. La fuerza propulsora sobre las cargas libres en el conductor pobre desaparece y se detiene el flujo de corriente (ESPOL, 1982, p.199).

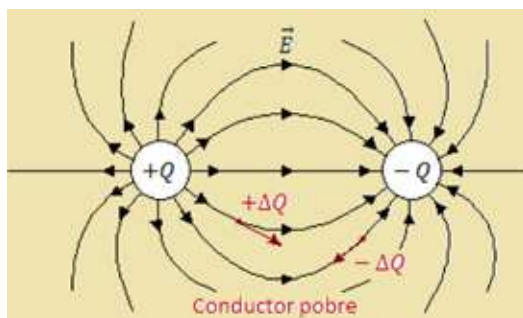


Figura 4.5 Dos electrodos incrustados en un conductor pobre en vez del dieléctrico.

Para obtener una corriente eléctrica constante en el conductor pobre, obviamente es necesario mantener constantes las cargas  $+Q$  y  $-Q$  en los cuerpos, es decir, es necesario quitar constantemente la carga que llega a un cuerpo a través del conductor pobre, y transferirlo al otro cuerpo. Se alcanzaría así el equilibrio (ESPOL, 1982, p.199).

Por otro lado, desde otro punto de vista, un material conductor en estado de reposo, en su interior existe igual número de cargas positivas que negativas, y al someterse a un campo eléctrico externo, se produce la inducción de cargas. Entonces, como se trata de un material conductor pobre (figura 4.5), se puede aplicar el criterio de la inducción de cargas, que es posible sólo en los materiales conductores, donde, la carga del electrodo positivo  $+Q$  ejerce una fuerza de repulsión con las cargas positivas del material conductor pobre y éstas, son atraídas por la carga del electrodo negativo  $-Q$ . De igual manera, la carga del electrodo positivo  $+Q$  ejerce una fuerza de atracción con las cargas negativas del material conductor pobre y éstas, son repelidas por la carga del electrodo negativo  $-Q$ . Al final del proceso de la inducción de cargas, en el interior del material conductor pobre no existirán cargas, todas estarán en la superficie de los dos electrodos y así se alcanzaría el equilibrio (figura 4.6).

Finalmente, con respecto a la conducción de las cargas en los materiales conductores, se puede decir que, mientras el conductor es más pobre (figura 4.5), la corriente de conducción desaparece paulatinamente, y si es un conductor perfecto, la corriente de conducción desaparece más rápidamente.

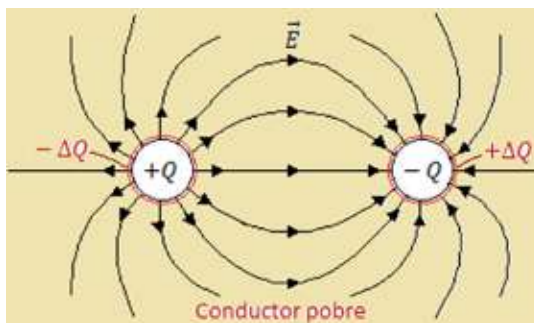


Figura 4.6 Cargas en equilibrio.

En los generadores de fuerza electromotriz, para quitar, por ejemplo, cargas positivas del cuerpo negativo y transferirlas al cuerpo positivo, es necesario realizar algún trabajo, contra las fuerzas del campo eléctrico de cargas  $+Q$  y  $-Q$ . Por tanto, para obtener una corriente eléctrica constante, es esencial una determinada fuente de energía. Dichas fuentes de energía deben actuar sobre las cargas eléctricas mediante algunas fuerzas no eléctricas, es decir, fuerzas que no se deben a cargas eléctricas estacionarias. Estas fuentes se denominan fuentes o generadores de fuerza electromotriz. La naturaleza de las fuerzas no eléctricas sobre las cargas eléctricas dentro de los generadores puede ser muy diversa. Aquí, basta con explicar cualitativamente los dos tipos de estas fuerzas que se encuentran con mayor frecuencia (ESPOL, 1982, p.199).

Históricamente, el primer tipo de fuente de fuerza electromotriz capaz de producir corrientes estables de una intensidad suficiente y durante un período de tiempo significativo fue la celda química. el funcionamiento de la celda química puede explicarse de forma muy aproximada como sigue. Considere un cuerpo metálico sumergido en una solución conductora de algún compuesto químico. El cuerpo metálico se conoce como electrodo y la solución como electrolito. En la fina capa de contacto entre el electrodo y el electrolito, ciertas fuerzas actúan sobre las cargas eléctricas. Estas fuerzas tienen diferentes magnitudes e incluso diferentes direcciones para diferentes pares de electrodos y electrolitos. Así, si se sumergen dos electrodos de diferentes materiales adecuados en el mismo electrolito, estas fuerzas podrían actuar una desde el electrodo hacia el electrolito y la otra desde el electrolito hacia el otro electrodo. Si los electrodos están conectados por un conductor metálico, estas dos delgadas capas de contacto actuarán como bombas empujando las cargas eléctricas en la misma dirección (ESPOL, 1982, p.199).

El otro tipo de fuerza sobre las cargas eléctricas aparece en todo el cuerpo que se mueve en un campo magnético, fenómeno que se explica en el área de magnetostática. Simplemente se notará aquí que estas fuerzas actúan sobre cambios eléctricos en cada punto de un cuerpo que se mueve en un campo magnético (ESPOL, 1982, p.200).

Así, en general, las cargas eléctricas libres en cualquier punto pueden ser afectadas simultáneamente por: 1) fuerzas eléctricas y 2) fuerzas no eléctricas. Los primeros se deben al campo eléctrico de cargas eléctricas distribuidas. Las fuerzas no eléctricas generalmente se denominan fuerzas externas o impresas. Si denotamos la fuerza impresa sobre una carga  $Q$  en un punto por  $\vec{F}_i$ , y la intensidad del campo eléctrico en ese punto por  $\vec{E}$ , la fuerza total sobre las cargas que pasan por el punto considerado es entonces

$$\vec{F}_{total} = Q\vec{E} + \vec{F}_i \quad (4 - 15)$$

Ahora,  $\vec{F}_i$  siempre se puede representar como un producto de  $Q$  y un cierto vector  $\vec{E}_i$ .  $\vec{E}_i$  así definido no es una intensidad de campo eléctrico real, ya que no se debe a cargas eléctricas estacionarias. Por definición, solo da la fuerza correcta sobre las cargas si se multiplica por sus cargas. Esta intensidad de campo eléctrico equivalente se suele denominar intensidad de campo eléctrico externo o impreso. A la luz de estas observaciones, la ecuación (4-15) puede estar escrita en la forma

$$\vec{F}_{total} = Q(\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (4 - 16)$$

La intensidad del campo eléctrico impreso  $\vec{E}_i$  existe solo dentro de las fuentes, mientras que la intensidad del campo eléctrico real  $\vec{E}$ , debido a las cargas distribuidas, existe tanto dentro como fuera de las fuentes (ESPOL, 1982, p.200).

Así, una corriente estacionaria no puede ser detenida por fuerzas puramente electrostáticas.

#### 4.4 FUERZA ELECTROMOTRIZ DE UN GENERADOR

Todos los generadores utilizados en la práctica tienen dos características comunes. En primer lugar, están provistos de dos terminales, generalmente metálicos, conocidos como electrodos. El electrodo de cargas positivas representado por  $P$  y, el electrodo de cargas negativas representado por la letra  $N$ , tal como se muestra en la figura 4.7. En segundo lugar, no hay corriente dentro del generador si no hay

corriente a través de los electrodos terminales, de lo contrario, el generador transformaría toda su energía en calor dentro de sí mismo (ESPOL, 1982, p.200).

La fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  de un generador está definida por la integral del campo eléctrico impreso  $\vec{E}_i$  desde el electrodo negativo  $N$  hasta el electrodo positivo  $P$ , esto es

$$\mathcal{E} = \int_N^P \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \quad \text{Definición de la fuerza electromotriz} \quad (4 - 17)$$

Ahora, dado que no hay corrientes dentro del generador, ya que se trata de un circuito abierto, entonces,  $\vec{E}_i = -\vec{E}$  en todos los puntos, de modo que,

$$\mathcal{E} = \int_N^P \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4 - 18)$$

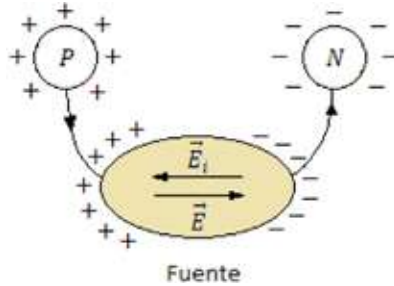


Figura 4.7 Fuente de fuerza electromotriz en circuito abierto (ESPOL, 1982, p.200).

Antes que nada, se debe recordar que, la definición del potencial eléctrico entre dos puntos, cuando la ecuación es positiva, significa que el límite inferior  $A$  debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico y el límite superior  $B$  debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico, esto es

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4 - 19)$$

mientras que, cuando la ecuación es negativa, significa que el límite inferior  $A$  debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico y el límite superior  $B$  debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico, esto es

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4 - 20)$$

De tal manera que, tomando en cuenta la ecuación (4-20), se aplica en la ecuación (4-17), entonces

$$\mathcal{E} = - \int_N^P \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \quad (4-21)$$

pero,  $\vec{E}_i = -\vec{E}$ , entonces la fuerza electromotriz a través de la fuente, es

$$\mathcal{E} = \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{A través de la fuente} \quad (4-22)$$

De igual manera, tomando en cuenta la ecuación (4-19), se aplica para el potencial eléctrico a través del dieléctrico, esto es

$$\mathcal{E} = \int_P^N \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{A través del dieléctrico} \quad (4-23)$$

La intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$  se debe a la distribución estacionaria de las cargas. Por lo tanto, este campo es el mismo que el de las cargas estáticas, entonces la integral cerrada de línea entre los potenciales de la fuente y del dieléctrico, es

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_P^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4-24)$$

La definición alternativa de la fuerza electromotriz de un generador en circuito abierto, es

$$\mathcal{E} = \int_P^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_P - V_N \quad (4-25)$$

## 4.5 LEY DE OHM EN FORMA PUNTUAL. CONDUCTIVIDAD Y RESISTIVIDAD

Para empezar, las líneas de un flujo de corriente constante coinciden macroscópicamente con las líneas de la fuerza total  $\vec{F}_{total}$  sobre las cargas en movimiento. Esto se cumple para todos los materiales conductores líquidos y sólidos, de tal forma que, la densidad de corriente  $\vec{J}$  en todos los puntos está en la dirección de la fuerza total  $\vec{F}_{total}$  sobre las cargas (ESPOL, 1982, p.202).

De acuerdo con la ecuación (4-16), se puede reemplazar el vector fuerza por,

$$\vec{F}_{total} = Q\vec{E}_{total} \quad (4-26)$$

por otro lado,

$$\vec{E}_{total} = \rho \vec{j} \quad (4 - 27)$$

donde,  $\rho$  es la resistividad del material,

Además, la resistividad es el inverso de la conductividad  $\sigma$ , entonces

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (4 - 28)$$

Combinando las ecuaciones (4-26), (4-27) y (4-28) y, reemplazando en la ecuación (4-16), se tiene

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (4 - 29)$$

La ecuación (4-29) representa la Ley de Ohm en forma puntual, en presencia de un campo eléctrico impreso.

Por otro lado, para puntos que se encuentran fuera del generador, el campo eléctrico impreso  $\vec{E}_i$  no existe, entonces

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (4 - 30)$$

La ecuación (4-30) representa la Ley de Ohm en forma puntual, en ausencia de un campo eléctrico impreso.

Despejando la conductividad del material conductor  $\sigma$  de la ecuación (4-30), se puede determinar que la unidad de la conductividad  $\sigma$ , es el *Siemen/metro*, o abreviado *S/m*, esto es

$$\sigma = \frac{J}{E} = \frac{\text{Amp}/\text{m}^2}{\text{Vol}/\text{m}} = \frac{\text{Amp } 1}{\text{Vol } \text{m}} = \frac{\text{Siemens}}{\text{m}}$$

De igual manera, se puede obtener la unidad de la resistividad del material conductor  $\rho$ , que es el inverso de la conductividad, así

$$\rho = \frac{\text{Vol } \text{m}}{\text{Amp}} = \text{Ohm} - \text{m}$$

La resistividad y la conductividad están en función de la temperatura, por lo tanto, la ecuación que relaciona la resistividad con respecto a la variación de la temperatura, es

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha\Delta T] \quad (4 - 31)$$

donde,  $\rho_0$  es la resistividad inicial del material a una temperatura inicial  $T_0$ ,  $\alpha$  es la constante de temperatura,  $\Delta T$  es la variación de temperatura y,  $\rho(T)$  es la



resistividad final a una temperatura  $T$  final. También se puede escribir de la siguiente manera:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha (T - T_0)]$$

## 4.6 LEY DE JOULES

Considerar un alambre conductor que tiene  $N$  cargas libres  $Q$  por unidad de volumen y está dentro de un campo eléctrico  $\vec{E}$ , tal como se muestra en la figura 4.8. Las cargas del material conductor se mueven a una velocidad  $\vec{v}$  debido a la fuerza  $\vec{F}$  o  $Q\vec{E}$  que actúa sobre cada una de ellas; de tal forma que, cada una de las cargas realizan un diferencial de trabajo  $dW$  igual a

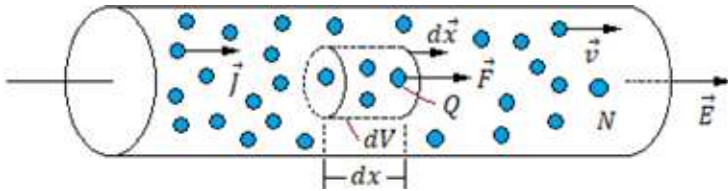


Figura 4.8 Alambre conductor en un campo externo  $\vec{E}$ .

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = Q\vec{E} \cdot d\vec{x} \quad (4 - 32)$$

pero, la velocidad de cada una de las cargas, es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (4 - 33)$$

De la ecuación (4-33) se despeja  $d\vec{x}$  y se reemplaza en la ecuación (4-32), así

$$dW = Q\vec{E} \cdot \vec{v} dt \quad (4 - 34)$$

La ecuación (4-34) es el trabajo que realiza una sola carga (ESPOL, 1982, p.204). Finalmente, para obtener el trabajo realizado por las fuerzas eléctricas en el intervalo de tiempo  $dt$  al mover todas las cargas dentro de un volumen pequeño  $dV$ , es

$$dW = NQ\vec{E} \cdot \vec{v} dt dV \quad (4 - 35)$$

pero, la densidad de corriente  $\vec{J}$  es igual a

$$\vec{J} = NQ\vec{v}$$

donde,  $N$  es el número de cargas libres por unidad de volumen, esto es

$$N = \frac{\text{número de cargas}}{\text{Volumen}}$$

entonces, reemplazando en la ecuación (4-35), se tiene

$$dW = \vec{j} \cdot \vec{E} dt dV \quad (4 - 36)$$

Antes que nada, el movimiento de las cargas libres dentro de un conductor bajo la influencia del campo eléctrico es macroscópicamente uniforme en lugar de acelerado. Esto se debe a que las cargas chocan con los átomos del conductor, y en estas colisiones transmiten a los átomos parte de la energía que adquieren por aceleración durante las sucesivas colisiones. Esta parte de la energía se transforma en calor y no se puede devolver al campo eléctrico. Para mantener la corriente eléctrica dentro de un conductor es necesario transmitir constantemente a las cargas cierta energía, que finalmente se transformará en calor. La ecuación (4-36) representa precisamente el trabajo realizado para mantener la corriente dentro de un volumen  $dV$  en un intervalo de tiempo  $dt$ , es decir, la energía transformada en  $dV$  en calor durante el intervalo de tiempo  $dt$  (ESPOL, 1982, p.204). Entonces, el diferencial de potencia  $dP$  en el diferencial de volumen  $dV$ , es

$$dP = \frac{dW}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (4 - 37)$$

Al integrar la ecuación (4-37) se obtiene la potencia total en el material conductor, esto es

$$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (4 - 38)$$

La ecuación (4-38) es la Ley de Joule en forma integral. La potencia, o la velocidad a la que la energía del campo eléctrico se transforma en calor, por unidad de volumen, es

$$\frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (4 - 39)$$

Por último, la ecuación (4-39) es la Ley de Joule en forma puntual.

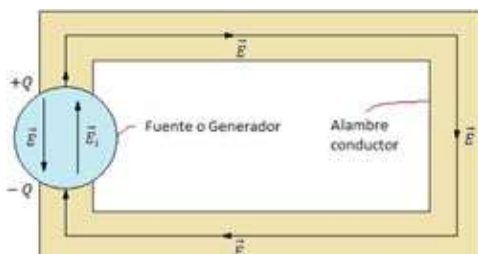


Figura 4.9 Flujo de campo eléctrico dentro y fuera del generador.

La figura 4.9 muestra una ilustración del mecanismo del flujo de corriente que por definición en el exterior de la fuente (generador) circula de + a -, mientras que en el interior de la fuente, la corriente circula de - a +. De igual manera, las líneas de campo eléctrico  $\vec{E}$  (flujo eléctrico) se dibujan desde una carga positiva  $+Q$  y terminan en una carga negativa  $-Q$ . Por otro lado, en el interior de la fuente o generador se encuentran los dos campos eléctricos, esto es, el campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por las cargas libres  $Q$  y, el campo eléctrico impreso  $\vec{E}_i$  o externo (producido por fuerzas externas) que va dirigido de - a +. En definitiva, fuera del generador, únicamente existe el campo eléctrico  $\vec{E}$ , el mismo que va dirigido desde una carga positiva  $+Q$  hasta una carga negativa  $-Q$  y, en el interior de una fuente existen los dos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{E}_i$ .

Tomando en cuenta el campo eléctrico impreso dentro del generador se puede escribir la potencia de las fuerzas externas por unidad de volumen, así

$$\frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E}_i$$

De la misma manera, se puede escribir la potencia de las fuerzas externas que inciden en el volumen, como

$$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}_i dV$$

#### 4.7 PROPIEDADES GENERALES DE LOS CAMPOS DE CORRIENTE ESTACIONARIA

Antes que nada, se debe definir lo que son las cargas y corrientes estacionarias. En primer lugar, las cargas estacionarias, se produce cuando la carga eléctrica se transmite de un material a otro, es así que, en electrostática las cargas son estacionarias si éstas se mueven a una velocidad constante, generando un flujo de cargas denominado corriente estacionaria. En segundo lugar, la corriente estacionaria, se denomina a la corriente eléctrica que se produce en un conductor de forma que la densidad de carga  $\rho_v$  de cada punto del conductor es constante, es decir que se cumple que:

$$\frac{d\rho_v}{dt} = 0 \tag{4 - 40}$$

Estas corrientes se producen de forma que la derivada parcial de la densidad de carga respecto al tiempo es cero en todos los puntos del conductor. Por tanto,

para ellas la ecuación de continuidad (4-12) toma la forma de la ecuación (4-14), ya que si  $(\partial\rho_v/\partial t) = 0$ , entonces  $\rho_v$  es una constante.

De la ecuación (4-30) se reemplaza en la ecuación (4-14)

$$\text{div } \vec{J} = 0$$

$$\text{div } \sigma \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

escribiendo de otra manera,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{4 - 41}$$

En forma general, se puede decir que, todas las corrientes eléctricas que se emplean para transportar energía, que son las de intensidad constante o corrientes continuas, así como las lentamente variable con el tiempo, entre las que se incluyen las corrientes alternas de 50 o 60 Hz, son muy aproximadamente corrientes estacionarias.

Con las definiciones realizadas anteriormente, entonces se puede decir que la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$  de las cargas estacionarias es idéntica a la intensidad del campo eléctrico de las cargas estáticas distribuidas de la misma forma. Por tanto, todas las relaciones que se aplican a un campo eléctrico de cargas estáticas también son aplicables en este caso. En particular, la integral de línea de  $\vec{E}$  alrededor de cualquier contorno cerrado es cero, esto es

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{4 - 42}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{4 - 43}$$

En la ecuación (4-42) se aplica el Teorema de Stokes, que establece, que la integral de la componente tangencial de un campo vectorial  $\vec{E}$  alrededor de la trayectoria cerrada  $C$  es igual a la componente normal del rotacional  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  en la superficie  $S$ , así

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \tag{4 - 44}$$

Entonces, reemplazando la ecuación (4-44) en la ecuación (4-42), se tiene

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

integrando,

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = 0 \quad (4-45)$$

pero, si se reemplaza la ecuación (4-43) en la ecuación (4-45), se tiene

$$\vec{\nabla}_x (-\vec{\nabla}V) = 0$$

sacando el signo menos del paréntesis

$$-\vec{\nabla}_x (\vec{\nabla}V) = 0$$

De las identidades vectoriales, el rotacional del gradiente de una función es igual a cero, con lo que se demuestra que el rotacional de  $\vec{E}$  es igual a cero.

Si se reemplaza la ecuación (4-43) en la ecuación (4-41), se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 V = 0 \quad (4-46)$$

Con lo que se obtiene la ecuación de Laplace (4-46)

La permitividad está determinada por la tendencia de un material a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico y de esa forma anular parcialmente el campo interno del material. Está directamente relacionada con la susceptibilidad eléctrica.

El concepto de permitividad de un conductor es el mismo que en el caso de los dieléctricos. Es una medida de la polarización de los átomos del conductor. En buenos conductores, la permitividad casi no influye en el flujo de corriente, porque la densidad de las cargas de polarización, proporcional a la muy pequeña intensidad del campo eléctrico dentro de un buen conductor, es insignificante. Por tanto, el error al suponer que la permitividad de buenos conductores es  $\epsilon_0$  también es insignificante (ESPOL, 1982, p.205).

Si un conductor es pobre, la densidad de las cargas de polarización puede ser comparable a la densidad de las cargas estacionarias. Para analizar el flujo de corriente en conductores pobres se debe conocer el valor exacto de su permitividad (ESPOL, 1982, p.205).

Además de las ecuaciones (4-42) y (4-43), el campo eléctrico de corrientes estables también generalmente satisface las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{(\rho_v + \rho_{vp})}{\epsilon_0} \quad (4-47)$$

$$\rho_{vp} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (4-48)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_v \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4-49)$$

Finalmente, se tiene que agregar a este sistema, la ecuación de continuidad y la ley de Ohm

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4-50)$$

De las ecuaciones (4-49) y (4-50), la densidad de cargas libres, es

$$\begin{aligned} \rho_v &= \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\epsilon \vec{E}) = \operatorname{div} \epsilon \frac{\vec{J}}{\sigma} = \operatorname{div} \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{J} \\ \rho_v &= \operatorname{div} \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{J} \end{aligned} \quad (4-51)$$

Pero, tomando en cuenta la identidad vectorial:

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f \quad (4-52)$$

La ecuación (4-52) se aplica en la ecuación (4-51), entonces

$$\begin{aligned} \rho_v &= \operatorname{div} \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{J} = \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{\epsilon}{\sigma} (0) + \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon}{\sigma} \\ \rho_v &= \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon}{\sigma} \end{aligned} \quad (4-53)$$

En un conductor no homogéneo, generalmente existe una distribución de cargas libres en todos los puntos de su interior.

Si es un conductor homogéneo, la conductividad  $\sigma$  y la permitividad  $\epsilon$  son constantes, entonces de la ecuación (4-53) la densidad volumétrica de cargas libres es igual a cero, esto es

$$\rho_v = 0$$

## 4.8 CONDICIONES DE FRONTERA

En primer lugar, para determinar la componente normal del vector de densidad de corriente  $\vec{J}_n$  en el límite o frontera entre el medio 1 y el medio 2, se utiliza

la ecuación de la integral cerrada de superficie aplicado en una pequeña superficie gaussiana de forma cilíndrica, como se muestra en la figura 4.10, para esto se utiliza la ecuación de la continuidad, esto es

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

Como se trata de obtener los valores de  $\vec{J}_n$  en la frontera de los dos medios dieléctricos, entonces en la ecuación de la continuidad se debe aplicar el límite cuando  $h$  tiende a cero, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{4 - 54}$$

De la integral cerrada de superficie (4-54), se obtiene tres integrales abiertas de superficie, esto es, la superficie lateral y las superficies de las dos tapas superior e inferior (ESPOL, 1982, p.207). Entonces

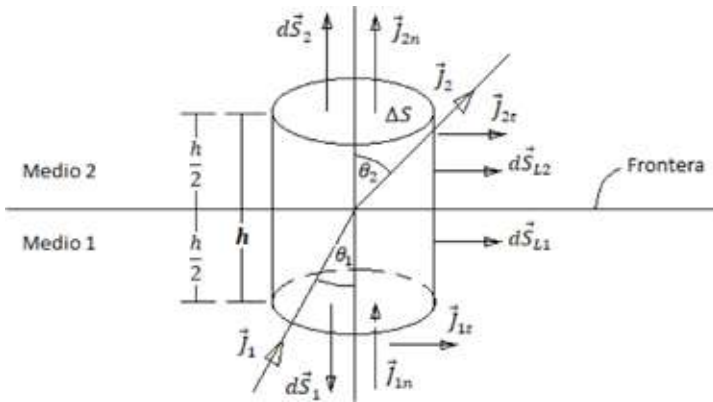


Figura 4.10 Condiciones de frontera para la componente normal.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} \vec{J}_{2n} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{TI} \vec{J}_{1n} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{SL1} \vec{J}_{1n} \cdot d\vec{S}_{L1} + \int_{SL2} \vec{J}_{2n} \cdot d\vec{S}_{L2} \right] = 0$$

Destruyendo el producto punto de todos los términos, se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} J_{2n} dS_2 \cos 0^\circ + \int_{TI} J_{1n} dS_1 \cos 180^\circ + \int_{SL1} J_{1n} dS_{L1} \cos 90^\circ + \int_{SL2} J_{2n} dS_{L2} \cos 90^\circ \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} J_{2n} dS_2 - \int_{TI} J_{1n} dS_1 + \int_{SL1} J_{1n} dS_{L1} 0 + \int_{SL2} J_{2n} dS_{L2} 0 \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} J_{2n} dS_2 - \int_{TI} J_{1n} dS_1 + 0 + 0 \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_{TS} J_{2n} dS_2 - \int_{TI} J_{1n} dS_1 \right] = 0$$

Integrando

$$\lim_{h \rightarrow 0} [J_{2n} \Delta S - J_{1n} \Delta S] = 0$$

Aplicando el límite cuando  $h$  tiende a cero

$$J_{2n} \Delta S - J_{1n} \Delta S = 0$$

simplificando

$$J_{2n} - J_{1n} = 0$$

$$J_{1n} = J_{2n} \tag{4 - 55}$$

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \tag{4 - 56}$$

En segundo lugar, para determinar la componente tangencial de la densidad de corriente  $\vec{J}_t$  en el límite o frontera entre el medio dieléctrico 1 y el medio dieléctrico 2, se utiliza la ecuación de la integral cerrada de línea en un pequeño contorno rectangular  $\Delta l$  por  $h$  a lo largo de la trayectoria 12341, como se muestra en la figura 4.11 (ESPOL, 1982, p.206). Esto es

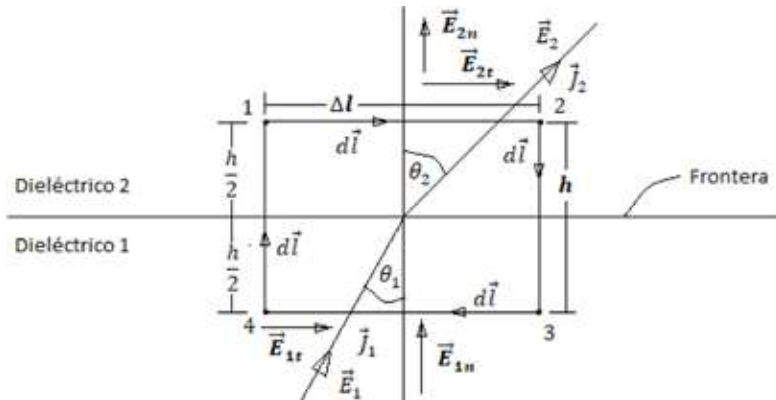


Figura 4.11 Condiciones de frontera para la componente tangencial.

$$\oint_{12341} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{4 - 57}$$

Como se trata de obtener los valores de  $\vec{E}_t$  en la frontera de los dos medios dieléctricos, entonces en la ecuación (4-57) se debe aplicar el límite cuando  $h$  tiende a cero, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{12341} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



De la integral cerrada de línea se obtienen cuatro segmentos abiertos, esto es, de 1 a 2, de 2 a 3, de 3 a 4 y de 4 a 1, entonces, para las componentes tangenciales, es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} \right] = 0$$

Destruyendo el producto punto de todos los términos, es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl \cos 0^\circ + \int_2^3 E_{2t} dl \cos 90^\circ + \int_2^3 E_{1t} dl \cos 90^\circ + \int_3^4 E_{1t} dl \cos 180^\circ + \int_4^1 E_{1t} dl \cos 90^\circ + \int_4^1 E_{2t} dl \cos 90^\circ \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl + \int_2^3 E_{2t} dl \cdot 0 + \int_2^3 E_{1t} dl \cdot 0 - \int_3^4 E_{1t} dl + \int_4^1 E_{1t} dl \cdot 0 + \int_4^1 E_{2t} dl \cdot 0 \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl + 0 + 0 - \int_3^4 E_{1t} dl + 0 + 0 \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_1^2 E_{2t} dl - \int_3^4 E_{1t} dl \right] = 0$$

integrando

$$\lim_{h \rightarrow 0} [E_{2t} \Delta l - E_{1t} \Delta l] = 0$$

Aplicando el límite cuando  $h$  tiende a cero

$$E_{2t} \Delta l - E_{1t} \Delta l = 0$$

Entonces, las condiciones de frontera para las componentes tangenciales del campo eléctrico, es continua a través de la superficie del medio, esto es

$$E_{2t} = E_{1t} \tag{4 - 58}$$

pero,  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , entonces

$$\frac{J_{2t}}{\sigma_2} = \frac{J_{1t}}{\sigma_1} \tag{4 - 59}$$

La ecuación (4-59) es válida sólo cuando los medios 1 y 2 son lineales.

En la figura 4.10 se aplica la función trigonométrica para  $\tan \theta_1$  y  $\tan \theta_2$ , entonces

$$\tan \theta_1 = \frac{J_{1t}}{J_{1n}} \tag{4 - 60}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{J_{2t}}{J_{2n}} \tag{4 - 61}$$

Se divide la ecuación (4-60) para la ecuación (4-61), así

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{J_{1t} J_{2n}}{J_{2t} J_{1n}} \quad (4 - 62)$$

La ecuación (4-55) se reemplaza en la ecuación (4-62), entonces

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{J_{1t} J_{1n}}{J_{2t} J_{1n}} \quad (4 - 63)$$

De la ecuación (4-59) se despeja  $J_{2t}$ , así

$$J_{2t} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} J_{1t} \quad (4 - 64)$$

La ecuación (4-64) se reemplaza en la ecuación (4-63)

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{J_{1t}}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} J_{1t}}$$

finalmente,

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (4 - 65)$$

La ecuación (4-65) es la *Ley de refracción para las líneas de flujo de corriente*.

La ecuación (4-65) es la Ley de refracción para las líneas de flujo de corriente.

$$\rho_s = D_{2n} - D_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} \quad (4 - 66)$$

$$\rho_s = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{2n} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_{1n} = \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n \quad (4 - 67)$$

## 4.9 CONDUCTANCIA Y RESISTENCIA

En la figura 4.12 se consideran dos electrodos de conductividad  $\sigma_1$  y permitividad  $\epsilon_1$ , incrustados en un material homogéneo de conducción pobre de conductividad  $\sigma_2$  y permitividad  $\epsilon_2$ . La fuerza propulsora sobre las cargas en el conductor pobre es el campo eléctrico  $\vec{E}$  de las cargas acumuladas en las superficies de los electrodos. Los electrodos son prácticamente equipotenciales. Los electrodos de cargas positivas  $+Q$  y cargas negativas  $-Q$ , están conectados a un generador que mantiene una diferencia de potencial  $(V_1 - V_2)$ , que es proporcional a la carga  $Q$  de los electrodos, consecuentemente mantiene un flujo de corriente estacionaria

$I$  (ESPOL, 1982, p.208). A partir de esto se puede definir la capacitancia  $C$  del capacitor o condensador formado entre los dos conductores (electrodos), aunque el aislante no es perfecto, así

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \tag{4 - 68}$$

Sin embargo, a través de dicho condensador fluye una corriente constante  $I$ . Para determinar la densidad de corriente  $\vec{j}$  que sale del electrodo con cargas positivas, se utiliza la ecuación que relaciona a la corriente y densidad de corriente, así

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{4 - 69}$$

Para aplicar la ecuación (4-69), en la figura 4.12 se selecciona una superficie imaginaria  $S$  en el electrodo de cargas positivas  $+Q$ , sobre la superficie imaginaria se dibuja el vector superficie  $d\vec{S}$  que es perpendicular de la superficie hacia afuera y, el vector  $\vec{j}$  sigue la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico  $\vec{E}$ . Pero, el vector  $\vec{j}$  tiene una componente tangencial  $\vec{j}_t$  y una componente normal  $\vec{j}_n$ , entonces, se selecciona la componente normal ya que tiene la misma dirección y sentido del campo eléctrico, así

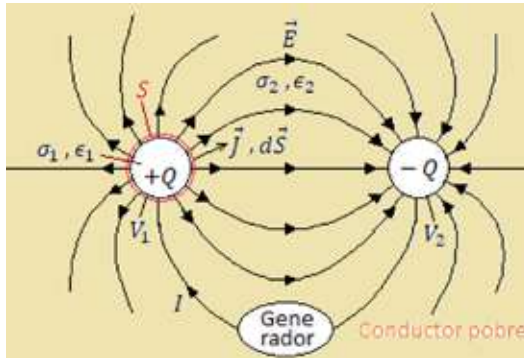


Figura 4.12 Dos electrodos incrustados en un conductor pobre.

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_S j \, dS \cos 0^\circ = \oint_S j \, dS$$

Pero,  $\vec{j} = \vec{j}_{2n}$  porque se está en un medio conductor pobre, entonces

$$I = \oint_S j_{2n} \, dS \tag{4 - 70}$$

Por otro lado, la densidad superficial de cargas libres en la frontera de la superficie de los dos medios, siendo el medio 1 los electrodos conductores y el me-

dio 2 el conductor pobre de la figura 4.12, entonces de la ecuación (4-67) debido a que la superficie imaginaria se encuentra en el medio 2, se tiene

$$\rho_s = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{2n}$$

despejando  $J_{2n}$

$$J_{2n} = \frac{\rho_s \sigma_2}{\epsilon_2}$$

reemplazando en la ecuación (4-71),

$$I = \oint_s \frac{\rho_s \sigma_2}{\epsilon_2} dS = \frac{\rho_s \sigma_2}{\epsilon_2} \oint_s dS = \frac{\rho_s \sigma_2}{\epsilon_2} S = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \rho_s S$$

Pero,  $Q = \rho_s S$ , entonces la corriente que circula entre los dos electrodos y el material conductor pobre, es

$$I = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} Q \tag{4-71}$$

Es evidente que, la carga  $Q$  es directamente proporcional a la diferencia de potencial ( $V_1 - V_2$ ) entre los electrodos, esto es

$$Q \propto (V_1 - V_2) \tag{4-72}$$

La ecuación (4-72) para que sea una igualdad, la constante de proporcionalidad es la capacitancia  $C$ , con lo que se obtiene  $Q = C (V_1 - V_2)$

Así como también, la corriente  $I$  es directamente proporcional a la diferencia de potencial de ( $V_1 - V_2$ ), así

$$I \propto (V_1 - V_2) \tag{4-73}$$

La ecuación (4-73) para que sea una igualdad, la constante de proporcionalidad se representa con la letra  $G$ , con lo que se obtiene

$$I = G(V_1 - V_2) \tag{4-73}$$

donde,

$G = \text{conductancia del material}$

despejando  $G$  de la ecuación (4-74) y reemplazando la corriente de la ecuación (4-71), se tiene

$$G = \frac{I}{(V_1 - V_2)} = \frac{\sigma_2 Q}{\epsilon_2 (V_1 - V_2)} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} C$$

Finalmente, la conductancia de un capacitor con un medio dieléctrico homogéneo o conductor pobre, es

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon} C$$

La unidad de la capacitancia es el siemens o mho (simbolizado como  $\mathcal{U}$ ), esto es

$$G = \frac{\text{Amp}}{\text{Volt}} = \text{Siemens} = \text{MHO} = \mathcal{U}$$

Por último, el recíproco de la conductancia es la resistencia  $R$ , así

$$R = \frac{(V_1 - V_2)}{I} \quad \text{definición de resistencia}$$

La unidad de la resistencia es el ohm ( $\Omega$ )

$$R = \frac{\text{Volt}}{\text{Amp}} = \text{OHM} = \Omega$$

#### 4.10 PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 4.1.** Considerando las condiciones de frontera de la figura 4.10, suponer que el medio 1 es un buen conductor y el medio 2 es un conductor pobre o cuasi conductor, esto quiere decir que, la conductividad del medio 1 ( $\sigma_1$ ) es mucho mayor que la conductividad del medio 2 ( $\sigma_2$ ), esto es,  $\sigma_1 \gg \sigma_2$ . Graficar los vectores de densidad de corriente  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  en la frontera del medio 1 y 2.

**Solución:**

Del enunciado del problema en que  $\sigma_1 \gg \sigma_2$  resulta que es igual a

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \gg 1$$

y, reemplazando en la ecuación (4-65) de la ley de refracción para las líneas de flujo de corriente, se tiene que

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \gg 1$$

$$\tan \theta_1 \gg \tan \theta_2 \quad (4 - 75)$$

Para que se cumpla la condición de la ecuación (4-75), el ángulo  $\theta_2$  debe ser aproximadamente igual a cero grados, esto es  $\theta_2 \cong 0^\circ$ . Por otro lado, de la ecuación (4-67) como  $\sigma_1 \gg \sigma_2$  el segundotérmino es despreciable, esto es,

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_{1n} \cong 0$$

Entonces, la densidad superficial de cargas en la ecuación (4-67), es igual a

$$\rho_s = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{2n}$$

De igual manera, utilizando la ecuación (4-66), como el medio 1 es un buen conductor y el medio 2 es un conductor pobre, entonces, la permitividad  $\epsilon_1$  es despreciable con respecto a  $\epsilon_2$  y, finalmente la densidad superficial de cargas es igual a:

$$\rho_s = D_{2n} - D_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$\rho_s = \epsilon_2 E_{2n} = D_{2n}$$

de tal forma que, la gráfica de los vectores de densidad de corriente  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  se muestra en la figura 4.13

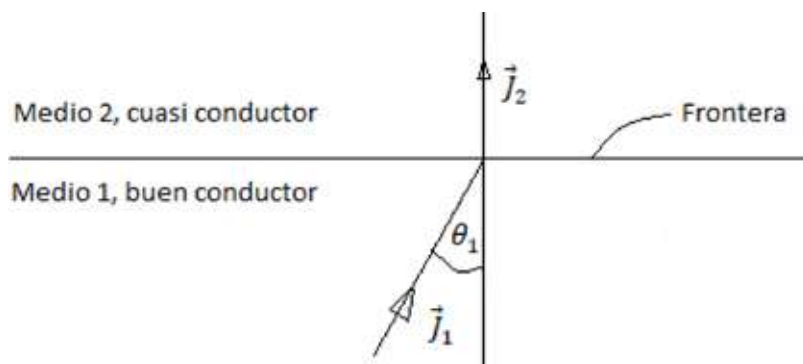


Figura 4.13 Gráfico de  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  cuando  $\sigma_1 \gg \sigma_2$ .

**Problema 4.2.** Un electrodo hemisférico de muy alta conductividad es enterrado en la tierra pobremente conductora, como se muestra en la figura 4.14. Determinar la resistencia de dicho sistema de puesta a tierra. Si una corriente  $I$  fluye del electrodo hacia la tierra, determinar la intensidad de campo eléctrico en todos los puntos sobre la superficie de la tierra. Discutir qué sucederá si un hombre que tiene zapatos no aislantes se acerca al electrodo de tierra (ESPOL, 1982, p.222).

## Solución:

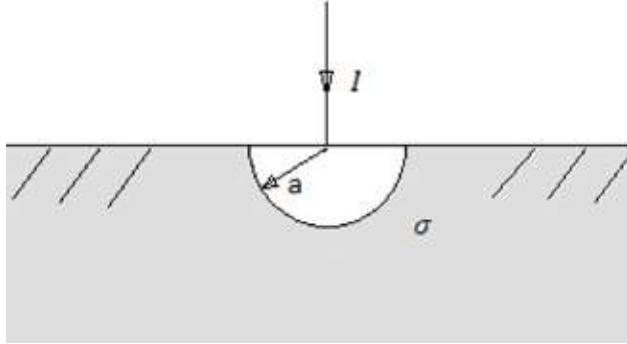
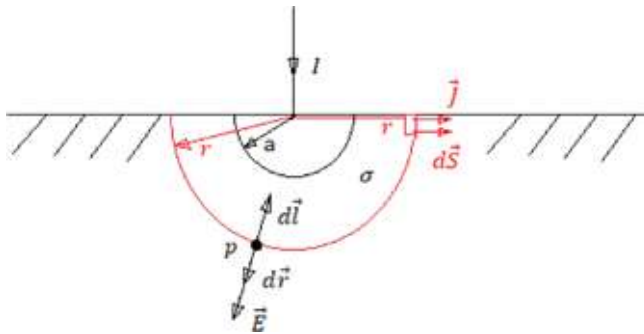


Figura 4.14 Electrodo semiesférico incrustado en la tierra.

La parte del electrodo (figura 4.14) que está enterrado en la tierra de conductividad  $\sigma$ , tiene la forma de una semiesfera de radio  $a$ . Como la corriente  $I$  del electrodo está ingresando a la tierra y como se trata de una semiesfera, las líneas de los vectores de densidad de corriente  $\vec{j}$  y de campo eléctrico  $\vec{E}$  salen en forma radial desde el electrodo hacia la tierra. Para calcular la densidad de corriente se utiliza la ecuación de la corriente

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4-76)$$

Figura 4.15 Superficie imaginaria de radio  $r$ .

Esta ecuación (4-76) exige que en la figura 4.14 se debe dibujar una superficie imaginaria de radio  $r$  que encierre al electrodo semiesférico y garantice que las líneas de campo eléctrico atraviesen en forma perpendicular la superficie imaginaria como se muestra en la figura 4.15. Sobre la superficie imaginaria se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre éste se dibujan los dos vectores  $\vec{j}$  y  $d\vec{S}$ , debiendo dibujar el vector superficie, perpendicular de la superficie  $dS$  hacia fuera, cumpliendo con la definición del vector unitario normal.

En la integral cerrada de superficie de la esfera se tiene una superficie abierta, esto es

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $r$ , así

$$I = \int_S J dS \cos 0^\circ = \int_0^r J dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2 / 2$

$$I = J \left[ \frac{S}{2} \right]_0^r = J \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^r = J [2\pi r^2]_0^r$$

$$I = J 2\pi r^2$$

despejando  $J$

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}$$

Para obtener el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$J = \sigma E$$

Despejando el campo eléctrico y reemplazando el valor de la densidad de corriente  $J$ , se tiene

$$E = \frac{I}{\sigma 2\pi r^2} \tag{4 - 77}$$

Para calcular el potencial eléctrico en el punto  $p$  con respecto al infinito ( $\infty$ ), se dibujan los dos vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  en el punto  $p$  a una distancia  $r$ . Como la ecuación que se va a utilizar es de signo negativo, entonces, el límite inferior debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico y el límite superior debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico. El vector  $d\vec{l}$  va dirigido desde el punto de menor a mayor campo eléctrico. El vector  $\vec{E}$  va en la misma dirección y sentido del vector  $\vec{j}$ , así

$$\Delta V = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



destruyendo el producto punto

$$\Delta V = - \int_{\infty}^r E dl \cos 180^\circ = \int_{\infty}^r E dl$$

$$\Delta V = \int_{\infty}^r E dl \quad (4-78)$$

Pero,  $dl$  es una variable ficticia que debe ser reemplazada por la variable real del problema, en este caso es el radio  $r$ . En la figura 4.15 el vector  $d\vec{l}$  tiene la misma dirección pero de sentido opuesto que el vector  $d\vec{r}$ , entonces  $dl = -dr$

Reemplazando el  $dl$  y el campo eléctrico de la ecuación (4-77) en la ecuación (4-78), se tiene

$$\Delta V = - \int_{\infty}^r E dr = - \int_{\infty}^r \frac{I}{\sigma 2\pi r^2} dr = - \frac{I}{\sigma 2\pi} \int_{\infty}^r r^{-2} dr$$

integrando,

$$\Delta V = - \frac{I}{\sigma 2\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r$$

$$\Delta V = \frac{I}{\sigma 2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\infty}} \right]$$

$$\Delta V = \frac{I}{\sigma 2\pi r}$$

Finalmente para obtener la resistencia  $R$  del sistema de puesta a tierra, se utiliza la siguiente ecuación:

$$R = \frac{\Delta V}{I} \quad (4-80)$$

reemplazando el valor del potencial eléctrico de la ecuación (4-79) en la ecuación (4-80), se tiene

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\frac{I}{\sigma 2\pi r}}{I} = \frac{1}{\sigma 2\pi r}$$

Por último, la resistencia del sistema, es

$$R = \frac{1}{\sigma 2\pi r} \Omega$$

Con respecto a la pregunta que se debe discutir de qué sucederá si un hombre que tiene zapatos no aislantes se acerca al electrodo de tierra. Es evidente que, si una persona que va caminando hacia el electrodo, entre más cerca se encuentre,

la diferencia de potencial va aumentando, y ésta estará en función de la intensidad de corriente que fluya por el electrodo. Si la corriente es alta, la persona que esté cerca del electrodo, recibirá una descarga eléctrica mayor, que puede ocasionarle la muerte. Debido a este peligro, en las subestaciones eléctricas, toda el área está cubierta de piedra (ripió) que es un material aislante que evita una descarga eléctrica aquellas personas que transitan por dicha área.

**Problema 4.3.** Una varilla de cobre que termina en una semiesfera de radio  $a$  y ésta semiesfera está incrustada en la tierra como se muestra en la figura 4.14. Calcular la diferencia de potencial que recibiría una persona si se encuentra junto a la varilla, si el radio de la semiesfera es de 25 cm, la distancia de separación de los pies es de 75 cm, la conductividad de la tierra es de  $10^{-2} S/m$  y la corriente que circula por el electrodo es de 500 A.

**Desarrollo:**

De acuerdo al problema, suponer que la persona se está acercando al electrodo, del centro del electrodo hasta el punto  $A$  existe una distancia  $r$ , entre los puntos  $A$  y  $B$  hay una distancia  $d$  de separación de los pies, tal como se muestra en la figura 4.16.

Para resolver este problema, el procedimiento es similar al problema 4.2. Una vez dibujado todos los vectores (figura 4.16), se procede a realizar los cálculos correspondientes.

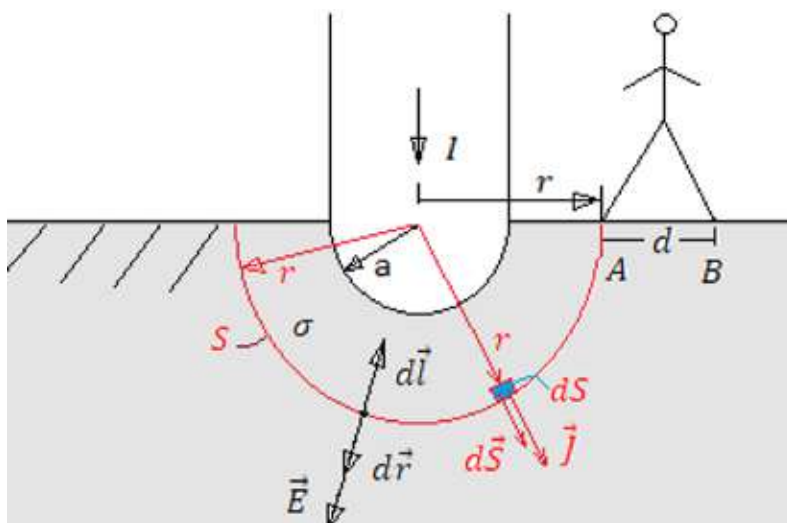


Figura 4.16 Cálculo del potencial de una persona cerca del electrodo.

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \int_0^r \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^r j dS \cos 0^\circ = j \left[ \frac{S}{2} \right]_0^r = j \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^r = j(2\pi r^2)$$

$$j = \frac{I}{2\pi r^2}$$

$$j = \sigma E$$

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\sigma 2\pi r^2}$$

$$E = \frac{I}{\sigma 2\pi r^2} \quad (4-81)$$

La intensidad del campo eléctrico está en función del radio  $E(r)$ , entonces

$$E(r) = \frac{I}{\sigma 2\pi r^2}$$

La diferencia de potencial eléctrico entre los puntos  $A$  y  $B$  se calcula a través de la ecuación con signo negativo, ya que el vector  $d\vec{l}$  está dirigido desde un punto de menor campo eléctrico hacia un punto de mayor campo eléctrico, así

$$V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para poner los límites de integración, el punto  $B$  al centro del electrodo se encuentra a una distancia  $(r + d)$  y, el punto  $A$  al centro del electrodo está a una distancia  $r$ . Reemplazando los límites en la integral y destruyendo el producto punto, se tiene

$$V_A - V_B = - \int_{r+d}^r E dl \cos 180^\circ = \int_{r+d}^r E dl \quad (4-82)$$

Se reemplaza la variable ficticia  $dl$  por la variable real  $dr$  de este problema (4-82), esto es

$dl = -dr$ , entonces

$$V_A - V_B = - \int_{r+d}^r E dr \quad (4-83)$$

La ecuación (4-81) se reemplaza en la ecuación (4-83), así

$$V_A - V_B = - \int_{r+d}^r \frac{I}{\sigma 2\pi r^2} dr$$

resolviendo la integral,

$$V_A - V_B = -\frac{I}{\sigma 2\pi r^2} \int_{r+d}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{I}{\sigma 2\pi r^2} \int_{r+d}^r r^{-2} dr = -\frac{I}{\sigma 2\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r+d}^r$$

$$V_A - V_B = \frac{I}{\sigma 2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r+d} \right] = \frac{I}{\sigma 2\pi} \frac{r+d-r}{r(r+d)} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{d}{r(r+d)}$$

$$V_A - V_B = \frac{I d}{2\pi\sigma r(r+d)} = \Delta V$$

$$\Delta V = \frac{I d}{2\pi\sigma r(r+d)}$$

La diferencia de potencial  $\Delta V$  de la ecuación (4-84) es válida para cualquier punto a una distancia  $r$  desde el centro del electrodo. De acuerdo al problema, la diferencia de potencial que recibiría una persona si se encuentra junto a la varilla, se debe reemplazar  $r = a$ , entonces

$$\Delta V = \frac{I d}{2\pi\sigma a(a+d)} \quad (4-84)$$

Reemplazando los valores del problema de  $I$ ,  $a$ ,  $\sigma$  y  $d$ , viene a ser la diferencia de potencial máxima, así

$$a = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

$$d = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}$$

$$\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$$

$$I = 500 \text{ A}$$

entonces,

$$\Delta V|_{max} = \frac{(500)(0.75)}{2\pi (10^{-2})(0.25)(0.25 + 0.75)} = 2387.32 \text{ Voltios}$$

$$\Delta V|_{max} = 2387.32 \text{ Voltios}$$

De acuerdo al resultado, una persona que se encuentre junto al electrodo recibirá una descarga de 2387.32 voltios.

**Problema 4.4.** Dos electrodos hemisféricos de radios  $a$  son enterrados en la tierra de conductividad  $\sigma$ , como se muestra en la figura 4.17. La distancia  $d$  entre los electrodos es mucho mayor que sus radios. La diferencia de potencial  $\Delta V$  mantiene un flujo de corriente  $I$  estacionaria. Determine la resistencia entre los dos electrodos (ESPOL, 1982, p.223).

**Solución:**

Para determinar la resistencia del sistema, esto es, la resistencia  $R$  entre los dos electrodos. En primer lugar, se debe calcular la densidad de corriente entre los electrodos. La parte del electrodo 1 de la figura 4.17 que está enterrado en la tierra de conductividad  $\sigma$ , tiene la forma de una semiesfera de radio  $a$ . Como la corriente  $I$  del electrodo está ingresando a la tierra y como se trata de una semiesfera, las líneas de los vectores de densidad de corriente  $\vec{J}$  y de campo eléctrico  $\vec{E}$  salen en forma radial desde el electrodo y de la misma manera entran en forma radial hasta el electrodo 2. Para calcular la densidad de corriente se utiliza la ecuación de la corriente (4-76), así

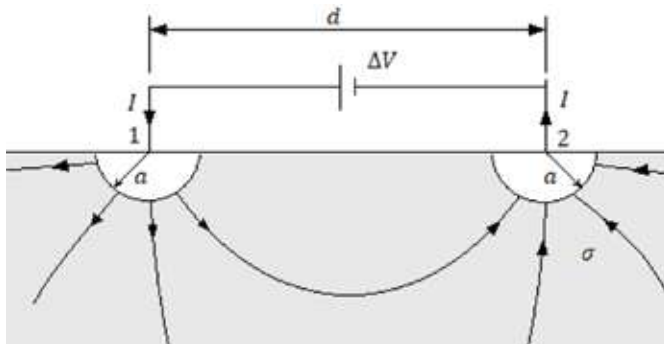


Figura 4.17 Dos electrodos enterrados en la tierra con una separación  $d$ .

$$I = \oint_S \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}$$

Esta ecuación (4-76) exige que en la figura 4.17 se debe dibujar una superficie imaginaria  $S$  de radio  $r$  que encierre al electrodo 1 semiesférico y garantice que las líneas de densidad de corriente y de campo eléctrico atraviesen en forma perpendicular la superficie imaginaria como se muestra en la figura 4.18 a. Sobre la superficie imaginaria se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre éste se dibujan los tres vectores  $\vec{J}_1$ ,  $\vec{J}_2$  y  $d\vec{S}$ , debiendo dibujar el vector superficie, perpendicular de la superficie  $dS$  hacia fuera, cumpliendo con la definición del vector unitario normal. En la integral cerrada de superficie de la esfera se tiene una superficie abierta, esto es

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Como se trata de dos electrodos, entonces

$$I = \int_S \vec{J}_1 \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $r$ , así

$$I = \int_0^r J_1 dS \cos 0^\circ = \int_0^r J_1 dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

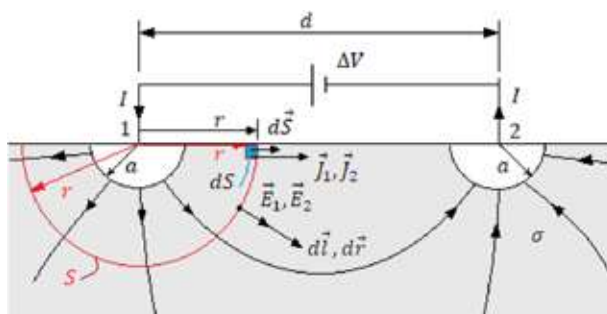
$$I = J_1 \left[ \frac{S}{2} \right]_0^r = J_1 \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^r = J_1 [2\pi r^2]_0^r$$

$$I = J_1 2\pi r^2$$

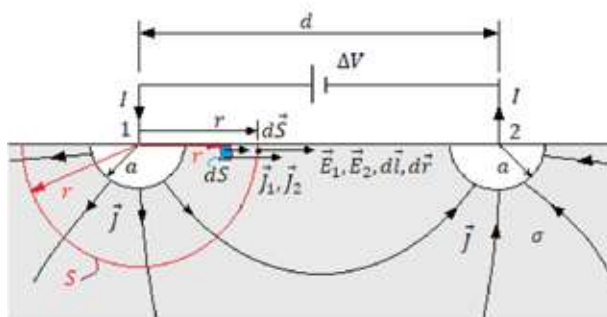
despejando  $J_1$

$$J_1 = \frac{I}{2\pi r^2}$$

(4 - 85)



(a)



(b)

Figura 4.18 Superficies imaginarias de radio  $r$  en el electrodo 1.

Para obtener el vector de la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}_1$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_1 = \sigma \vec{E}_1$$

En forma escalar

$$J_1 = \sigma E_1$$

Despejando el campo eléctrico  $E_1$  y reemplazando el valor de la densidad de corriente  $J_1$  de la ecuación (4-85), se tiene

$$E_1 = \frac{I}{\sigma 2\pi r^2} \quad (4-86)$$

De igual manera se procede con el electrodo 2, así

$$I = \int_S \vec{J}_2 \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria, pero en este caso, los límites del electrodo 2 es de 0 a  $(d - r)$ , así

$$I = \int_0^{d-r} J_2 dS \cos 0^\circ = \int_0^{d-r} J_2 dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

$$I = J_2 \left[ \frac{S}{2} \right]_0^{d-r} = J_2 \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^{d-r} = J_2 [2\pi r^2]_0^{d-r}$$

$$I = J_2 2\pi (d - r)^2$$

despejando  $J_1$

$$J_2 = \frac{I}{2\pi (d - r)^2} \quad (4-87)$$

Para obtener el vector de la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}_2$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_2 = \sigma \vec{E}_2$$

En forma escalar

$$J_2 = \sigma E_2$$

Despejando el campo eléctrico  $E_2$  y reemplazando el valor de la densidad de corriente  $J_2$  de la ecuación (4-87), se tiene

$$E_2 = \frac{I}{\sigma 2\pi (d - r)^2} \quad (4 - 88)$$

Para calcular la diferencia de potencial entre los dos electrodos  $\Delta V = V_1 - V_2$ , se selecciona un punto a una distancia  $r$  del centro del electrodo 1 sobre la superficie de la tierra (figura 4.18 b) en la línea horizontal que une el electrodo 1 y 2, y se dibujan los vectores  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$ ,  $d\vec{l}$  y  $d\vec{r}$ ; la selección del punto en el eje horizontal es para facilitar los cálculos del potencial eléctrico, debido a que la energía potencial no le interesa la trayectoria seguida desde el electrodo 1 hasta el electrodo 2, únicamente le interesa la posición inicial y la posición final. El potencial también se puede calcular con la figura 4.18 a, pero el cálculo se torna más difícil, ya que se debe considerar únicamente la componente horizontal entre los electrodos 1 y 2. Como la ecuación del potencial que se va a utilizar es de signo positivo, entonces, el límite inferior debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico ( $a$ ) y el límite superior debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico ( $d - a$ ). El vector  $d\vec{l}$  va dirigido desde el punto de mayor a menor campo eléctrico. El vector  $\vec{E}$  va en la misma dirección y sentido de los vectores  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$ , así

$$V_1 - V_2 = \int_a^{d-a} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_a^{d-a} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

destruyendo el producto punto

$$V_1 - V_2 = \int_a^{d-a} E_1 dl \cos 0^\circ = \int_a^{d-a} E_2 dl \cos 0^\circ$$

$$V_1 - V_2 = \int_a^{d-a} E_1 dl = \int_a^{d-a} E_2 dl \quad (4 - 89)$$

Pero,  $dl$  es una variable ficticia que debe ser reemplazada por la variable real del problema, en este caso es el radio  $r$ . En la figura 4.18 el vector  $d\vec{l}$  tiene la misma dirección y sentido que el vector  $d\vec{r}$ , entonces

$$dl = dr$$

Reemplazando el  $dl$  y los campos eléctricos de las ecuaciones (4-86) y (4-88) en la ecuación (4-89), se tiene



$$\begin{aligned}
 V_1 - V_2 &= \int_a^{d-a} E_1 dr + \int_a^{d-a} E_2 dr \\
 V_1 - V_2 &= \int_a^{d-a} \frac{l}{\sigma 2\pi r^2} dr + \int_a^{d-a} \frac{l}{\sigma 2\pi (d-r)^2} dr \\
 V_1 - V_2 &= \frac{l}{\sigma 2\pi} \int_a^{d-a} \frac{dr}{r^2} + \frac{l}{\sigma 2\pi} \int_a^{d-a} \frac{dr}{(d-r)^2} \tag{4-90}
 \end{aligned}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (4-90), se hace un cambio de variables para proceder a integrar, entonces

$$u = d - r$$

$$du = -dr$$

$$\begin{aligned}
 V_1 - V_2 &= \frac{l}{\sigma 2\pi} \int_a^{d-a} r^{-2} dr + \frac{l}{\sigma 2\pi} \int -u^{-2} du \\
 V_1 - V_2 &= \frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^{d-a} - \frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ -\frac{1}{u} \right] \\
 V_1 - V_2 &= \frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^{d-a} - \frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ -\frac{1}{d-r} \right]_a^{d-a} \\
 V_1 - V_2 &= -\frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ \frac{1}{d-a} - \frac{1}{a} \right] + \frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ \frac{1}{d-(d-a)} - \frac{1}{d-a} \right] \\
 V_1 - V_2 &= \frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right] + \frac{l}{\sigma 2\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right] \\
 V_1 - V_2 &= \frac{2l}{\sigma 2\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right] \tag{4-91}
 \end{aligned}$$

Finalmente para obtener la resistencia  $R$  del sistema de puesta a tierra entre los dos electrodos, se utiliza la siguiente ecuación:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} \tag{4-92}$$

reemplazando el valor del potencial eléctrico de la ecuación (4-91) en la ecuación (4-92), se tiene

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{2l}{\sigma 2\pi} \frac{\left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right]}{l} = \frac{1}{\sigma \pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right]$$

Por último, la resistencia del sistema, es

$$R = \frac{1}{\sigma\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right] \Omega$$

Debido a que  $d \gg a$ , en  $(d - a)$  el valor de  $a$  es despreciable con respecto al valor de  $d$ , entonces

$$R = \frac{1}{\sigma\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right]$$

Pero, como el valor de  $d$  es un valor muy grande que tiende a infinito ( $\infty$ ), entonces todo valor dividido para infinito es cero, así la respuesta final de la resistencia entre los dos electrodos, es

$$R = \frac{1}{\sigma\pi a} \Omega$$

**Problema 4.5.** Un electrodo hemisférico de muy alta conductividad de radio  $a$  está enterrado en una tierra de baja conductividad, que posee dos conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  como se muestra en la figura 4.19. Determine la resistencia del sistema aterrizado (ESPOL, 1982, p.223).

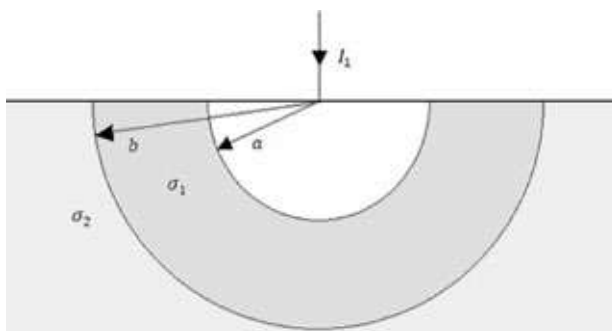


Figura 4.19 Electrodo de radio  $a$  en una tierra de conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

### Solución:

Como la corriente  $I_1$  del electrodo está ingresando a la tierra que tiene dos conductividades, entonces se tiene un  $\vec{J}_{11}$  y un  $\vec{J}_{12}$ ; así como también, un  $\vec{E}_{11}$  y un  $\vec{E}_{12}$ , donde

$\vec{J}_{11}$  = densidad de corriente del electrodo 1 y conductividad 1

$\vec{J}_{12}$  = densidad de corriente del electrodo 1 y conductividad 2

$\vec{E}_{11}$  = intensidad de campo eléctrico del electrodo 1 y conductividad 1

$\vec{E}_{12}$  = intensidad de campo eléctrico del electrodo 1 y conductividad 2

La parte del electrodo (figura 4.19) que está enterrado en la tierra de conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , tiene la forma de una semiesfera de radio  $a$ , por consiguiente las líneas de los vectores de densidad de corriente y de campo eléctrico salen en forma radial desde el electrodo 1 hacia la tierra. Para calcular la densidad de corriente se utiliza la ecuación (4-76), así

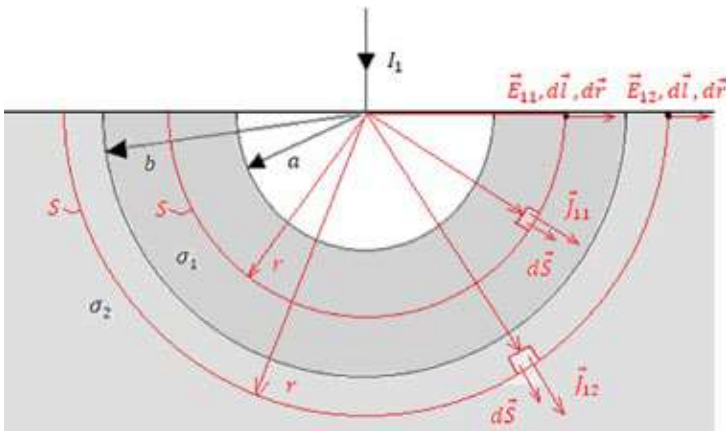


Figura 4.20 Superficies imaginarias  $S$  de radios  $r$ .

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Esta ecuación exige que en la figura 4.19 se debe dibujar una superficie imaginaria  $S$  de radio  $r$  que encierre al electrodo semiesférico por el cual fluye una corriente  $I_1$  y garantice que las líneas de campo eléctrico atraviesen en forma perpendicular la superficie imaginaria como se muestra en la figura 4.20.

**Para  $a < r < b$**

Sobre la superficie imaginaria  $S$  para un radio  $a < r < b$  se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre éste se dibujan los dos vectores  $\vec{J}_{11}$ , y  $d\vec{S}$ , debiendo dibujar el vector superficie  $d\vec{S}$ , perpendicular de la superficie  $dS$  hacia fuera, cumpliendo con la definición del vector unitario normal.

En la integral cerrada de superficie de la esfera se convierte en una superficie abierta, esto es

$$I_1 = \int_S \vec{J}_{11} \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $r$ , así

$$I_1 = \int_S J_{11} dS \cos 0^\circ = \int_0^r J_{11} dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

$$I_1 = J_{11} \left[ \frac{S}{2} \right]_0^r = J_{11} \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^r = J_{11} [2\pi r^2]_0^r$$

$$I_1 = J_{11} 2\pi r^2$$

despejando  $J$

$$J_{11} = \frac{I_1}{2\pi r^2} \quad (4-93)$$

Para obtener el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E_{11}$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{11} = \sigma_1 \vec{E}_{11} \quad (4-94)$$

En la cual se observa claramente que el campo eléctrico tiene la misma dirección de la densidad de corriente. Despejando el campo eléctrico (4-94) y escribiendo en forma escalar, se reemplaza el valor de la densidad de corriente  $J_{11}$  de la ecuación (4-93) en la ecuación (4-94), así

$$E_{11} = \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi r^2} \quad (4-95)$$

**Para  $r > b$**

De igual manera sobre la superficie  $S$  para un radio de  $r > b$  se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre éste se dibujan los vectores  $\vec{J}_{12}$  y  $d\vec{S}$ .

En la integral cerrada de superficie de la esfera se convierte en una superficie abierta, esto es

$$I_1 = \int_S \vec{J}_{12} \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $r$ , así

$$I_1 = \int_S J_{12} dS \cos 0^\circ = \int_0^r J_{12} dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

$$I_1 = J_{12} \left[ \frac{S}{2} \right]_0^r = J_{12} \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^r = J_{12} [2\pi r^2]_0^r$$

$$I_1 = J_{12} 2\pi r^2$$

despejando  $J$

$$J_{12} = \frac{I_1}{2\pi r^2} \quad (4-96)$$

Para obtener el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E_{12}$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{12} = \sigma_2 \vec{E}_{12} \quad (4-97)$$

En la cual se observa claramente que el campo eléctrico tiene la misma dirección de la densidad de corriente. Despejando el campo eléctrico (4-97) y escribiendo en forma escalar, se reemplaza el valor de la densidad de corriente  $J_{12}$  de la ecuación (4-96) en la ecuación (4-97), así

$$E_{12} = \frac{I_1}{\sigma_2 2\pi r^2} \quad (4-98)$$

Para calcular el potencial eléctrico del electrodo con respecto al infinito ( $\infty$ ), se dibujan los dos vectores  $\vec{E}_{11}$  y  $d\vec{l}$  a una distancia  $r$  para  $a < r < b$ , y los otros dos vectores  $\vec{E}_{12}$  y  $d\vec{l}$  a una distancia  $r$  para  $r > b$ , tal como se muestra en la figura 4.20. Como la ecuación que se va a utilizar es de signo positivo, entonces, el límite inferior debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico y el límite superior debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico. El vector  $d\vec{l}$  va dirigido desde el punto de mayor a menor campo eléctrico (del límite inferior al límite superior). La ecuación, es

$$\Delta V = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E}_{11} \cdot d\vec{l} + \int_b^\infty \vec{E}_{12} \cdot d\vec{l}$$

destruyendo el producto punto

$$\Delta V = \int_a^b E_{11} dl \cos 0^\circ + \int_b^\infty E_{12} dl \cos 0^\circ$$

$$\Delta V = \int_a^b E_{11} dl + \int_b^\infty E_{12} dl \quad (4-99)$$

Pero,  $dl$  es una variable ficticia que debe ser reemplazada por la variable real del problema, en este caso la variable real es el radio  $r$ . En la figura 4.20 el vector  $d\vec{l}$  tiene la misma dirección y sentido que el vector  $d\vec{r}$ , entonces

$$dl = dr$$

Reemplazando el  $dl$  y el campo eléctrico  $E_{11}$  de la ecuación (4-95) y el campo eléctrico  $E_{12}$  de la ecuación (4-98) en la ecuación (4-99), se tiene

$$\Delta V = \int_a^b \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi r^2} dr + \int_b^\infty \frac{I_1}{\sigma_2 2\pi r^2} dr$$

integrando,

$$\Delta V = \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^b + \frac{I_1}{\sigma_2 2\pi} \left[ -\frac{1}{r} \right]_b^\infty$$

$$\Delta V = -\frac{I_1}{\sigma_1 2\pi} \left[ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] - \frac{I_1}{\sigma_2 2\pi} \left[ \frac{1}{\infty} - \frac{1}{b} \right]$$

$$\Delta V = -\frac{I_1}{\sigma_1 2\pi b} + \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi a} + 0 + \frac{I_1}{\sigma_2 2\pi b}$$

$$\Delta V = -\frac{I_1}{\sigma_1 2\pi b} + \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi a} + 0 + \frac{I_1}{\sigma_2 2\pi b}$$

$$\Delta V = \frac{I_1}{2\pi b} \left( -\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) + \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi a}$$

$$\Delta V = \frac{I_1}{2\pi b} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) + \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi a} \quad (4 - 100)$$

Finalmente para obtener la resistencia  $R$  del sistema de puesta a tierra, se utiliza la siguiente ecuación:

$$R = \frac{\Delta V}{I_1}$$

reemplazando el valor del potencial eléctrico de la ecuación (4-100), se tiene

$$R = \frac{\Delta V}{I_1} = \frac{\frac{I_1}{2\pi b} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) + \frac{I_1}{\sigma_1 2\pi a}}{I_1} = \frac{1}{2\pi b} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) + \frac{1}{\sigma_1 2\pi a}$$

Por último, la resistencia del sistema, es

$$R = \frac{1}{2\pi b} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) + \frac{1}{\sigma_1 2\pi a} \quad \Omega$$

**Problema 4.6.** Dos electrodos hemisféricos de muy alta conductividad de radios  $a$  están enterrados en una tierra de baja conductividad, que posee dos conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , como se muestra en la figura 4.21. La distancia  $L$  entre los electrodos es mucho mayor que sus radios. La diferencia de potencial  $\Delta V$  mantiene un flujo de corriente  $I$  estacionaria. Determine la resistencia entre los dos electrodos (ESPOL, 1982, p.224).

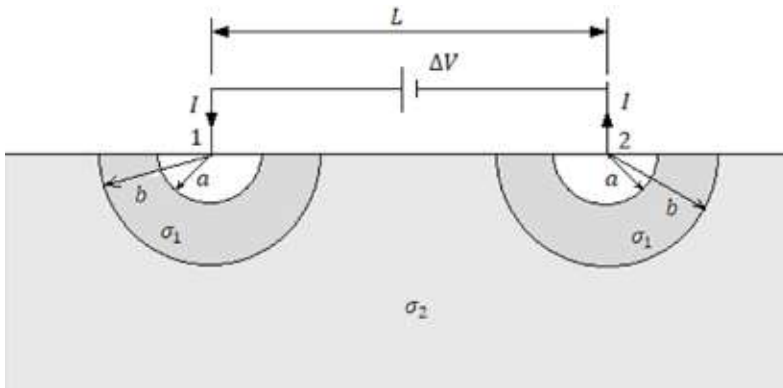


Figura 4.21 Electrodos 1 y 2 en una tierra de conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

### Solución:

Para determinar la resistencia  $R$  del sistema, esto es, entre los dos electrodos. Primeramente, se debe calcular la densidad de corriente entre los electrodos. La parte de los electrodos 1 y 2 de la figura 4.21 que está enterrado en la tierra de conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , tienen la forma de una semiesfera de radio  $a$ . Como la corriente  $I$  del electrodo 1 está ingresando a la tierra que tiene dos conductividades, entonces se tiene cuatro densidades de corriente  $\vec{J}_{11}$ ,  $\vec{J}_{12}$ ,  $\vec{J}_{21}$  y  $\vec{J}_{22}$ ; así como también, cuatro intensidades de campo eléctrico  $\vec{E}_{11}$ ,  $\vec{E}_{12}$ ,  $\vec{E}_{21}$  y  $\vec{E}_{22}$ , donde

$\vec{J}_{11}$  = densidad de corriente del electrodo 1, medio 1

$\vec{J}_{12}$  = densidad de corriente del electrodo 1, medio 2

$\vec{J}_{21}$  = densidad de corriente del electrodo 2, medio 1

$\vec{J}_{22}$  = densidad de corriente del electrodo 2, medio 2

$\vec{E}_{11}$  = intensidad de campo eléctrico del electrodo 1, medio 1

$\vec{E}_{12}$  = intensidad de campo eléctrico del electrodo 1, medio 2

$\vec{E}_{21}$  = intensidad de campo eléctrico del electrodo 2, medio 1

$\vec{E}_{22}$  = intensidad de campo eléctrico del electrodo 2, medio 2

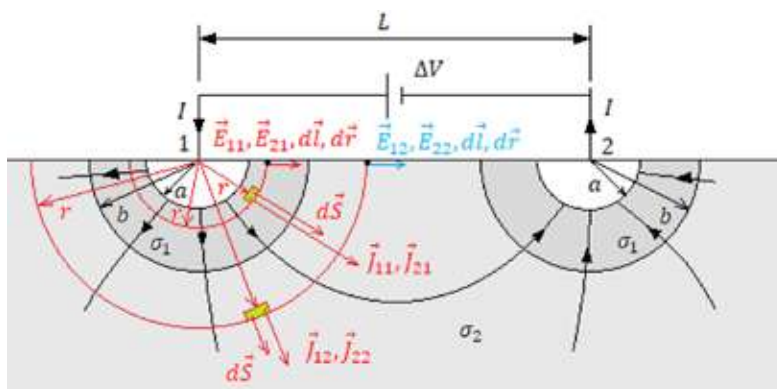


Figura 4.22 Superficies imaginarias de radios  $r$  en el electrodo 1.

La parte del electrodo 1 (figura 4.21) que está enterrado en la tierra de conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , tiene la forma de una semiesfera de radio  $a$ , por consiguiente las líneas de los vectores de densidad de corriente y de campo eléctrico salen en forma radial desde el electrodo 1 hacia el electrodo 2 a través de la tierra. Para calcular las densidades de corriente se utiliza la ecuación (4-76), así

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Esta ecuación exige que en la figura 4.21 se debe dibujar una superficie imaginaria  $S$  de radio  $r$  que encierre al electrodo 1 semiesférico por el cual fluye una corriente  $I$  y garantice que las líneas de campo eléctrico atraviesen en forma perpendicular la superficie imaginaria como se muestra en la figura 4.22. Para mayor facilidad de los cálculos, el diferencial de superficie se debe seleccionar sobre el eje horizontal entre el electrodo 1 y 2, igual que la figura 4.18 b.

**Para  $a < r < b$**

Sobre la superficie imaginaria  $S$  para un radio  $a < r < b$  se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre éste se dibujan los tres vectores  $\vec{J}_{11}$ ,  $\vec{J}_{21}$  y  $d\vec{S}$ , debiendo dibujar el vector superficie  $d\vec{S}$ , perpendicular de la superficie  $dS$  hacia fuera, cumpliendo con la definición del vector unitario normal.

En la integral cerrada de superficie de la esfera se convierte en una superficie abierta, esto es

$$I = \int_S \vec{J}_{11} \cdot d\vec{S}$$



destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $r$ , así

$$I = \int_S J_{11} dS \cos 0^\circ = \int_0^r J_{11} dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

$$I = J_{11} \left[ \frac{S}{2} \right]_0^r = J_{11} \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^r = J_{11} [2\pi r^2]_0^r$$

$$I = J_{11} 2\pi r^2$$

despejando  $J_{11}$

$$J_{11} = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (4 - 101)$$

Para obtener el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E_{11}$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{11} = \sigma_1 \vec{E}_{11} \quad (4 - 101)$$

En la cual se observa claramente que el campo eléctrico tiene la misma dirección de la densidad de corriente. Despejando el campo eléctrico (4-102) y escribiendo en forma escalar, se reemplaza el valor de la densidad de corriente  $J_{11}$  de la ecuación (4-101) en la ecuación (4-102), así

$$E_{11} = \frac{I}{\sigma_1 2\pi r^2} \quad (4 - 103)$$

Por otro lado,

$$I = \int_S \vec{J}_{21} \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $L - r$ , así

$$I = \int_S J_{21} dS \cos 0^\circ = \int_0^{L-r} J_{21} dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

$$I = J_{21} \left[ \frac{S}{2} \right]_0^{L-r} = J_{21} \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^{L-r} = J_{21} [2\pi r^2]_0^{L-r}$$

$$I = J_{21} 2\pi (L - r)^2$$

despejando  $J_{21}$

$$J_{21} = \frac{I}{2\pi (L - r)^2} \quad (4 - 104)$$

Para obtener el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E_{21}$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{21} = \sigma_1 \vec{E}_{21} \quad (4 - 105)$$

En la cual se observa claramente que el campo eléctrico tiene la misma dirección de la densidad de corriente. Despejando el campo eléctrico (4-105) y escribiendo en forma escalar, se reemplaza el valor de la densidad de corriente  $J_{21}$  de la ecuación (4-104) en la ecuación (4-105), así

$$E_{21} = \frac{I}{\sigma_1 2\pi (L - r)^2} \quad (4 - 106)$$

**Para  $b < r < (L - b)$**

De igual manera sobre la superficie  $S$  para un radio de  $b < r < (L - b)$  se selecciona un diferencial de superficie  $dS$  y sobre éste se dibujan los tres vectores  $\vec{J}_{12}$ ,  $\vec{J}_{22}$  y  $d\vec{S}$ .

En la integral cerrada de superficie de la esfera se convierte en una superficie abierta, esto es

$$I = \int_S \vec{J}_{12} \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $r$ , así

$$I_1 = \int_S J_{12} dS \cos 0^\circ = \int_0^r J_{12} dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

$$I = J_{12} \left[ \frac{S}{2} \right]_0^r = J_{12} \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^r = J_{12} [2\pi r^2]_0^r$$

$$I = J_{12} 2\pi r^2$$

despejando  $J_{12}$

$$J_{12} = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (4 - 107)$$

Para obtener el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E_{12}$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{12} = \sigma_2 \vec{E}_{12} \quad (4 - 108)$$

En la cual se observa claramente que el campo eléctrico tiene la misma dirección de la densidad de corriente. Despejando el campo eléctrico (4-108) y escribiendo en forma escalar, se reemplaza el valor de la densidad de corriente  $J_{12}$  de la ecuación (4-107) en la ecuación (4-108), así

$$E_{12} = \frac{I}{\sigma_2 2\pi r^2} \quad (4 - 109)$$

Por otro lado,

$$I = \int_S \vec{J}_{22} \cdot d\vec{S}$$

destruyendo el producto punto y poniendo los límites de integración de la superficie imaginaria de 0 a  $r$ , así

$$I = \int_S J_{22} dS \cos 0^\circ = \int_0^{L-r} J_{22} dS$$

integrando y reemplazando la superficie de la semiesfera igual a  $S = 4\pi r^2/2$

$$I = J_{22} \left[ \frac{S}{2} \right]_0^{L-r} = J_{22} \left[ \frac{4\pi r^2}{2} \right]_0^{L-r} = J_{22} [2\pi r^2]_0^{L-r}$$

$$I = J_{22} 2\pi (L - r)^2$$

despejando  $J_{22}$

$$J_{22} = \frac{I}{2\pi (L - r)^2} \quad (4 - 110)$$

Para obtener el valor de la intensidad de campo eléctrico  $E_{22}$ , se utiliza la siguiente ecuación:

$$\vec{J}_{22} = \sigma_2 \vec{E}_{22} \quad (4 - 111)$$

En la cual se observa claramente que el campo eléctrico tiene la misma dirección de la densidad de corriente. Despejando el campo eléctrico (4-111) y escribiendo en forma escalar, se reemplaza el valor de la densidad de corriente  $J_{22}$  de la ecuación (4-110) en la ecuación (4-111), así

$$E_{22} = \frac{I}{\sigma_2 2\pi (L - r)^2} \quad (4 - 112)$$

Para calcular la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los dos electrodos, en la figura 4.22 para  $a < r < b$  se dibujan los vectores  $\vec{E}_{11}$ ,  $\vec{E}_{21}$ ,  $d\vec{l}$  y  $d\vec{r}$ . De manera similar, para  $b < r < (L - b)$  se dibujan los vectores  $\vec{E}_{12}$ ,  $\vec{E}_{22}$ ,  $d\vec{l}$  y  $d\vec{r}$ . Como la ecuación que se va a utilizar es de signo positivo, entonces, el límite inferior debe estar ubicado en un punto de mayor campo eléctrico ( $a$ ) y el límite superior debe estar ubicado en un punto de menor campo eléctrico ( $L - a$ ). El vector  $d\vec{l}$  va dirigido desde el punto de mayor a menor campo eléctrico (del límite inferior al límite superior).

$$\Delta V = \int_a^{L-a} \vec{E}_{11} \cdot d\vec{l} + \int_a^{L-a} \vec{E}_{21} \cdot d\vec{l} + \int_a^{L-a} \vec{E}_{12} \cdot d\vec{l} + \int_a^{L-a} \vec{E}_{22} \cdot d\vec{l}$$

destruyendo el producto punto

$$\Delta V = \int_a^{L-a} E_{11} dl \cos 0^\circ + \int_a^{L-a} E_{21} dl \cos 0^\circ + \int_a^{L-a} E_{12} dl \cos 0^\circ + \int_a^{L-a} E_{22} dl \cos 0^\circ$$

$$\Delta V = \int_a^{L-a} E_{11} dl + \int_a^{L-a} E_{21} dl + \int_a^{L-a} E_{12} dl + \int_a^{L-a} E_{22} dl \quad (4 - 113)$$

Pero,  $dl$  es una variable ficticia que debe ser reemplazada por la variable real del problema, en este caso es el radio  $r$ . En la figura 4.22 el vector  $d\vec{l}$  tiene la misma dirección y sentido que el vector  $d\vec{r}$ , entonces

$$dl = dr$$

Reemplazando el  $dl$  y los campos eléctricos de las ecuaciones (4-103), (4-106), (4-109) y (4-112) en la ecuación (4-113), se tiene

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_a^{L-a} \frac{l dr}{\sigma_1 2\pi r^2} + \int_a^{L-a} \frac{l dr}{\sigma_1 2\pi (L-r)^2} + \int_a^{L-a} \frac{l dr}{\sigma_2 2\pi r^2} + \int_a^{L-a} \frac{l dr}{\sigma_2 2\pi (L-r)^2} \\ \Delta V &= \frac{l}{\sigma_1 2\pi} \int_a^{L-a} \frac{dr}{r^2} + \frac{l}{\sigma_1 2\pi} \int_a^{L-a} \frac{dr}{(L-r)^2} + \frac{l}{\sigma_2 2\pi} \int_a^{L-a} \frac{dr}{r^2} + \frac{l}{\sigma_2 2\pi} \int_a^{L-a} \frac{dr}{(L-r)^2} \\ \Delta V &= \left( \frac{l}{\sigma_1 2\pi} + \frac{l}{\sigma_2 2\pi} \right) \int_a^{L-a} \frac{dr}{r^2} + \left( \frac{l}{\sigma_1 2\pi} + \frac{l}{\sigma_2 2\pi} \right) \int_a^{L-a} \frac{dr}{(L-r)^2} \quad (4 - 114) \end{aligned}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (4-114), se hace un cambio de variables para proceder a integrar, entonces

$$u = L - r$$

$$du = -dr$$

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \int_a^{L-a} r^{-2} dr + \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \int -u^{-2} du \\
\Delta V &= \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^{L-a} - \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ -\frac{1}{u} \right] \\
\Delta V &= \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^{L-a} + \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ \frac{1}{L-r} \right]_a^{L-a} \\
\Delta V &= -\left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ \frac{1}{L-a} - \frac{1}{a} \right] + \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ \frac{1}{L-(L-a)} - \frac{1}{L-a} \right] \\
\Delta V &= \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right] + \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right] \\
\Delta V &= 2 \left( \frac{I}{\sigma_1 2\pi} + \frac{I}{\sigma_2 2\pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right] \\
\Delta V &= I \left( \frac{1}{\sigma_1 \pi} + \frac{1}{\sigma_2 \pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right] \tag{4-115}
\end{aligned}$$

Finalmente para obtener la resistencia  $R$  del sistema de puesta a tierra entre los dos electrodos, se utiliza la siguiente ecuación:

$$R = \frac{\Delta V}{I} \tag{4-116}$$

reemplazando el valor del potencial eléctrico de la ecuación (4-115) en la ecuación (4-116), se tiene

$$R = \frac{I \left( \frac{1}{\sigma_1 \pi} + \frac{1}{\sigma_2 \pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right]}{I} = \left( \frac{1}{\sigma_1 \pi} + \frac{1}{\sigma_2 \pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right]$$

Por último, la resistencia del sistema, es

$$R = \left( \frac{1}{\sigma_1 \pi} + \frac{1}{\sigma_2 \pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L-a} \right] \Omega$$

Debido a que  $L \gg a$ , en  $(L-a)$  el valor de  $a$  es despreciable con respecto al valor de  $L$ , entonces

$$R = \left( \frac{1}{\sigma_1 \pi} + \frac{1}{\sigma_2 \pi} \right) \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{L} \right] \Omega$$

Pero, como el valor de  $L$  es un valor muy grande que tiende a infinito ( $\infty$ ), entonces todo valor dividido para infinito es cero, así la respuesta final de la resistencia entre los dos electrodos, es

$$R = \left( \frac{1}{\sigma_1 \pi} + \frac{1}{\sigma_2 \pi} \right) \left[ \frac{l}{a} \right] \Omega$$

#### 4.11 PROBLEMAS PROPUESTOS

**Problema P4.1.** ¿Cuántos electrones por unidad de tiempo atraviesan la sección transversal de un conductor que transporta una corriente de intensidad  $I = 1A$ ?

**Problema P4.2.** Demostrar que la ecuación de la continuidad en forma integral es igual a:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_v dv$$

**Problema P4.3.** La ecuación de la fuerza total de Lorenz, está dada por la ecuación siguiente:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

Explicar cómo se genera el campo eléctrico externo o impreso  $\vec{E}_i$ .

**Problema P4.4.** Explicar y describir todo el proceso para la obtención de la fuerza electromotriz de un generador.

**Problema P4.5.** Cuando en un equipo electrónico, específicamente una computadora, se está trabajando por varias horas, la circuitería interna del computador se calienta, consecuentemente aumenta su temperatura, explicar el comportamiento de la conductividad ( $\sigma$ ) y resistividad ( $\rho$ ) a partir de la ecuación de la Ley de Ohm en forma puntual, esto es

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha \Delta T)$$

**Problema P4.6.** Repetir el problema 4.5 para explicar la Ley de Joule en forma puntual e integral, esto es:

$$\frac{dP}{dv} = \frac{dW/dt}{dv} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv$$

**Problema P4.7.** Explicar detalladamente las propiedades generales de los campos de corriente estacionaria.

**Problema P4.8.** Utilizando condiciones de frontera, demostrar que la componente normal del vector densidad de corriente en el medio 1 ( $\vec{J}_{1n}$ ) es igual al medio 2 ( $\vec{J}_{2n}$ ); y, la componente tangencial del campo eléctrico en el medio 1 ( $\vec{E}_{1t}$ ) es igual al medio 2 ( $\vec{E}_{2t}$ ), esto es:

$$\vec{J}_{1n} = \vec{J}_{2n}$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

**Problema P4.9.** El dieléctrico en un capacitor de placas paralelas, consta de dos capas de espesores  $d_1$  y  $d_2$ , permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , y conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Determine la resistencia entre los electrodos (placas paralelas de superficie  $S$ ) si la diferencia de potencial entre los electrodos es  $V$ , determine la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$ , el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  y la densidad de corriente  $\vec{J}$  en ambas capas; así como también, la densidad superficial de cargas libres  $\rho_s$  y de polarización  $\rho_{sp}$  en las tres superficies de frontera.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Larson, R. Edwards, B. (2010). Cálculo 2. (9a Ed.). México: McGraw Hill.
2. Stewart J. (2013). Cálculo de Varias Variables Trascendentes tempranas. (7a Ed.). México: Cengage Learning.
3. Hayt, Jr., W y Buck, J, (2012). Teoría Electromagnética. México: McGRAWN-HILL.
4. ESPOL. (1982). Introducción al Electromagnetismo. Guayaquil-Ecuador. Dpto. de Ingeniería Eléctrica.
5. F. R. Quintela y R. C. Redondo Melchor (2006). Diccionario de Ingeniería Eléctrica. Universidad de Salamanca. Recuperado de <https://electricidad.usal.es/Principal/Circuitos/Diccionario/Diccionario.php?b=id:624>
6. Web, susceptibilidad.  
Recuperado de  
[https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=La+susceptibilidad+el%C3%A9ctrica+x\\_e+es+caracter%C3%ADstico+de+todo+material+diel%C3%A9ctrico+e+indica+la+facilidad+del+diel%C3%A9ctrico+para+ser+polarizado+por+un+campo+el%C3%A9ctrico%2C+es+a+dimensional+y%2C+decrece+con+la+temperatura+debido+a+que+en+sustancias+con+mol%C3%A9culas+polares%2C+la+vibraci%C3%B3n+t%C3%A9rmica+o+el+movimiento+de+las+mol%C3%A9culas+polarizadas+impide+su+alineaci%C3%B3n+bajo+la+influencia+del+campo+el%C3%A9ctrico%2C+por+lo+que+la+susceptibilidad+el%C3%A9ctrica+decrece+con+la+temperatura](https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=La+susceptibilidad+el%C3%A9ctrica+x_e+es+caracter%C3%ADstico+de+todo+material+diel%C3%A9ctrico+e+indica+la+facilidad+del+diel%C3%A9ctrico+para+ser+polarizado+por+un+campo+el%C3%A9ctrico%2C+es+a+dimensional+y%2C+decrece+con+la+temperatura+debido+a+que+en+sustancias+con+mol%C3%A9culas+polares%2C+la+vibraci%C3%B3n+t%C3%A9rmica+o+el+movimiento+de+las+mol%C3%A9culas+polarizadas+impide+su+alineaci%C3%B3n+bajo+la+influencia+del+campo+el%C3%A9ctrico%2C+por+lo+que+la+susceptibilidad+el%C3%A9ctrica+decrece+con+la+temperatura)
7. Teorema de la divergencia. (11 de junio de 2021). En Wikipedia.  
Recuperado de  
[https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema\\_de\\_la\\_divergencia&oldid=136247734](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_de_la_divergencia&oldid=136247734)



8. Divergencia (matemática). (20 de marzo de 2021). En Wikipedia.  
Recuperado de  
[https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Divergencia\\_\(matem%C3%A1tica\)&oldid=134137530](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Divergencia_(matem%C3%A1tica)&oldid=134137530)
  
9. F. R. Quintela y R. C. Redondo Melchor, 2006-2021. Corriente eléctrica estacionaria  
Recuperado de  
<https://electricidad.usal.es/Principal/Circuitos/Diccionario/Diccionario.php?b=id:54>

El presente libro de Electrostática, trata sobre el análisis, generación y cálculo de los campos y potenciales eléctricos a partir la Ley de Coulomb, Ley Generalizada de Gauss y de las ecuaciones de Poisson y Laplace. Determinación de las densidades superficiales y volumétricas de polarización en materiales dieléctricos y, finalmente, la obtención de sistemas de puesta a tierra.

La obra está dirigida a estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral y matemática vectorial. Presenta una explicación y análisis de los contenidos teóricos, para posteriormente aplicarlos en el desarrollo de los problemas..

**Pedro Severo Infante Moreira** es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL). Tiene un diplomado superior en Pedagogía Universitaria, dos maestrías: una en Gestión Académica Universitaria y otra en Administración de Empresas, un doctorado en Ciencias Técnicas. Ha publicado cinco libros, uno corresponde al electromagnetismo y cuatro a circuitos eléctricos. Ha participado en congresos nacionales e internacionales. Ha publicado varios artículos científicos. Ha desarrollado dos proyectos de investigación en el área de las radiaciones electromagnéticas. Actualmente es profesor titular principal 1 en la Facultad de Informática y Electrónica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), y continúa escribiendo artículos científicos y desarrollando proyectos de investigación en el área del electromagnetismo.

**Manuel Antonio Meneses Freire** es doctor en Matemática, graduado en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Tiene un diplomado superior en Pedagogía Universitaria, una maestría en Gestión Ambiental, otra maestría en Técnicas Estadísticas, un doctorado en Estadística e Investigación Operativa. Ha publicado tres libros y dos capítulos de libro en el área de Matemáticas y Estadística. Ha participado en congresos nacionales e internacionales. Ha publicado varios artículos científicos y dos *softwares* en el CRAN de R. Está desarrollando un proyecto de investigación en el área de Estadística con datos funcionales de variables fotovoltaicas y meteorológicas. También ha participado en varios proyectos de investigación. Actualmente es profesor titular principal en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Chimborazo (UNACH).

ISBN: 978-9942-42-721-2

