

# Análisis de circuitos eléctricos en estado estable y circuitos acoplados

Pedro Infante Moreira

Tomo 2



ESPOCH  
2016





**Análisis de circuitos eléctricos  
en estado estable y circuitos acoplados**

---



# Análisis de circuitos eléctricos en estado estable y circuitos acoplados

---

Tomo 2

Pedro Infante Moreira



**Análisis de circuitos eléctricos  
en estado estable y circuitos acoplados**

© 2015 Pedro Infante Moreira

© 2015 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2

Instituto de investigación

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC060155

**Aval ESPOCH**

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego  
(*peer review*).

**Corrección y diseño:**

La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa  
autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 537 + 621.3

Análisis de circuitos eléctricos en estado estable y circuitos acoplados. Tomo 2.

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Instituto de Investigaciones; 2015

80 p. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-14-181-1

1. Circuitos eléctricos
2. Circuitos en estado estable
3. Circuitos acoplados
4. Electricidad
5. Magnetismo

## CONTENIDO TOMO 2

Capítulo III. Potencia promedio y valores eficaces .....	9
3.1 Potencia instantánea.....	9
3.2 Potencia promedio.....	16
3.3 Valores eficaces .....	23
3.4 Potencia aparente .....	27
3.5 Factor de potencia .....	27
3.6 Potencia compleja.....	28
3.7 Triángulo de potencia.....	33
3.8 Mejoramiento del factor potencia .....	36
3.9 Porcentaje de regulación de voltaje.....	41
Capítulo IV. Circuitos trifásicos .....	45
4.1 Generación de voltajes trifásicos.....	45
4.2 Conexión en estrella .....	46
4.3 Conexión en delta .....	47
4.4 Voltajes fasoriales .....	48
4.5 Sistema trifásico balanceado conectado en estrella - estrella (Y-Y) incluyendo el neutro .....	52
4.6 Sistema trifásico balanceado conectado en estrella - delta (Y- $\Delta$ )....	54
4.7 Potencias con cargas trifásicas balanceadas conectadas en estrella (Y)..	56
4.8 Potencias con cargas trifásicas balanceadas conectadas en delta ( $\Delta$ ) ..	58
Capítulo V. Circuitos acoplados magnéticamente.....	63
5.1 Autoinductancia .....	63
5.2 Inductancia mutua.....	64
5.3 Análisis de bobinas acopladas.....	64
5.4 Coeficiente de acoplamiento .....	70
5.5 Transformador ideal .....	73
Referencias .....	79
Bibliografía complementaria.....	79



## CAPÍTULO III

### POTENCIA PROMEDIO Y VALORES EFICACES

#### 3.1 Potencia instantánea

La potencia instantánea viene dada por el producto del voltaje y la corriente instantánea, cuya fórmula se expresa en la ecuación (3-1).

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (3-1)$$

Para representar una función variable en el tiempo, se escribe con letras minúsculas. La potencia instantánea que es variable con el tiempo se puede representar como  $p = vi$ , siempre y cuando se esté trabajando en corriente alterna.

La figura 3.1 muestra un circuito resistivo puro, el mismo que está constituido por una fuente de voltaje  $v(t) = V_m \cos(\omega t)$  y una resistencia  $R$ . La potencia que recibe la resistencia  $R$  puede expresarse en términos de la corriente o del voltaje:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R}$$

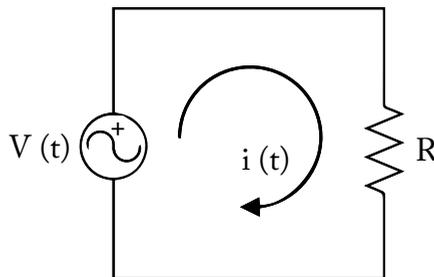


Figura 3.1. Circuito resistivo puro

La figura 3.2 muestra un circuito inductivo puro, el mismo que está constituido por una fuente de voltaje  $v(t) = V_m \cos(\omega t)$  y un inductor  $L$ . La potencia que recibe el inductor  $L$  puede expresarse en términos de la corriente o del voltaje:

En términos de la corriente:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$p(t) = v(t) i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt}$$

En términos del voltaje:

$$di(t) = \frac{v(t)}{L} dt$$

$$i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{v(t)}{L} dt$$

Se reemplaza:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t) \int_{-\infty}^t \frac{v(t)}{L} dt$$

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{v(t)}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt$$

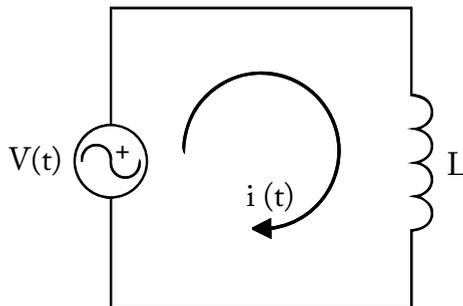


Figura 3.2. Circuito inductivo puro

La figura 3.3 muestra un circuito capacitivo puro, el mismo que está constituido por una fuente de voltaje  $v(t) = V_m \cos(\omega t)$  y un capacitor  $C$ . La potencia que recibe el capacitor  $C$  puede expresarse en términos de la corriente o del voltaje:

En términos de la corriente:

$$v(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Se integra el voltaje  $v(t)$ :

$$i(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

Se reemplaza:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{C} i(t) \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

En términos del voltaje:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt}$$

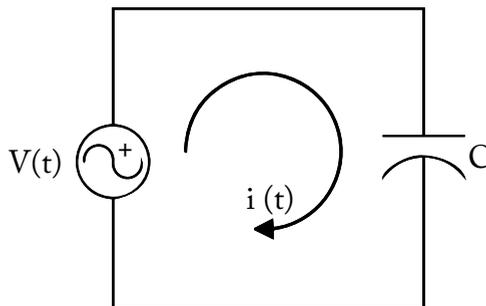


Figura 3.3. Circuito capacitivo puro

**Ejemplo:** Considere el circuito RL excitado por una fuente coseno-  
dal de voltaje  $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ , mostrado en la figura 3.4. Determinar la  
potencia total entregada por la fuente o absorbida por la red pasiva.

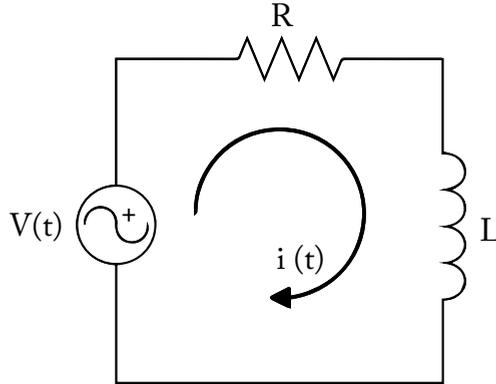


Figura 3.4. Circuito RL excitado por una fuente  $v(t) = V_m \cos(\omega t)$

*Solución:*

Para resolver este problema de una manera más fácil, el circuito de  
la figura 3.4 se transforma a un circuito fasorial, tal como se muestra en la  
figura 3.5. El fasor se representa con letras negrillas.

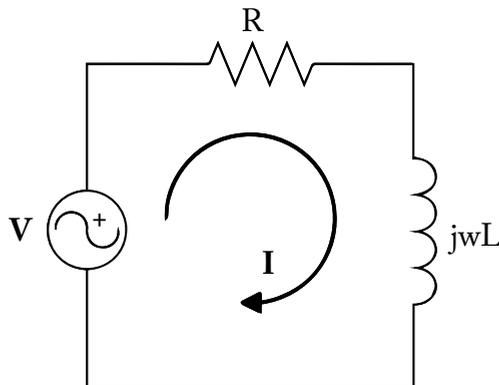


Figura 3.5. Circuito RL en forma fasorial

Se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) en el lazo de la figura 3.5:

$$-V + R I + j\omega L I = 0$$

$$-V + (R + j\omega L) I = 0$$

$$I = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{V}{Z} \quad (3-2)$$

Donde  $Z$  es la impedancia:

$$Z = R + j\omega L$$

En formato fasorial:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \theta$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Pero la fuente de excitación cosenoidal aplicado al circuito es:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

Se convierte a fasor:

$$V = V_m \angle 0^\circ \quad (3-3)$$

La ecuación (3-3) se reemplaza en la ecuación (3-2):

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_m \angle 0^\circ}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \theta} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (0^\circ - \theta) = I_m \angle -\theta$$

Donde,

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle -\theta \quad (3-4)$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\theta$$

Se expresa en forma exponencial:

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \theta)}$$

Para convertir la corriente en función del tiempo, se toma la parte real de la función exponencial. Esto es:

$$i(t) = \text{Real} \{\mathbf{I}\} = \text{Real} \left\{ \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{Cos}(\omega t - \theta) + j \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{Sen}(\omega t - \theta) \right\}$$

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{Cos}(\omega t - \theta)$$

$$i(t) = I_m \text{Cos}(\omega t - \theta) \quad (3-5)$$

Utilizando la fórmula de la potencia instantánea que se encuentra en la ecuación (3-1), tenemos:

$$p(t) = [V_m \text{Cos} \omega t] \left[ \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{Cos}(\omega t - \theta) \right]$$

$$p(t) = \frac{V_m^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t)(\omega t - \theta) \quad (3-6)$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

Reemplazando:

$$A = \omega t$$

$$B = (\omega t - \theta)$$

$$\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} [\cos(\omega t - (\omega t - \theta)) + \cos(\omega t + (\omega t - \theta))] ]$$

$$\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t + \theta) + \cos(\omega t + \omega t - \theta)]$$

$$\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} [\cos(\theta) + \cos(2\omega t - \theta)] \quad (3-7)$$

Reemplazando la ecuación (3-7) en la ecuación (3-6), tenemos:

$$p(t) = \frac{V_m^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{1}{2} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)]$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{|Z|} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{|Z|} \cos(2\omega t - \theta)$$

Escrito de otra forma, tenemos:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m \frac{V_m}{|Z|} \cos \theta + \frac{1}{2} V_m \frac{V_m}{|Z|} \cos(2\omega t - \theta)$$

Donde,

$$I_m = \frac{V_m}{|Z|}$$

Se reemplaza valores:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta + \frac{1}{2} V_m I_m \cos (2\omega t - \theta) \quad (3-8)$$

De tal manera que la potencia instantánea viene dada por la fórmula que se encuentra en la ecuación (3-8).

### 3.2 Potencia promedio

La potencia promedio de una onda periódica se representa tal como lo indica la ecuación (3-9).

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (3-9)$$

Siendo:

$T$  = período

$p(t)$  = potencia instantánea

$P$  = potencia promedio

Se reemplaza la ecuación (3-8) en la ecuación (3-9):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [\frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta + \frac{1}{2} V_m I_m \cos (2\omega t - \theta)] dt$$

$$P = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m I_m \cos \theta \, dt + \frac{1}{2T} \int_0^T V_m I_m \cos (2\omega t - \theta) \, dt \quad (3-10)$$

Resolviendo el primer término de la ecuación (3-10), tenemos:

$$P_1 = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m I_m \cos \theta \, dt$$

$$P_1 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta \int_0^T dt$$

$$P_1 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta [t]_0^T = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta (T - 0) = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta (T)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$$

Resolviendo el segundo término de la ecuación (3-10), tenemos:

$$P_2 = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m I_m \cos (2\omega t - \theta) dt$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \int_0^T \cos (2\omega t - \theta) dt$$

$$\cos (2\omega t - \theta) = (\cos 2\omega t) (\cos \theta) + (\sin 2\omega t) (\sin \theta)$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \int_0^T [(\cos 2\omega t)(\cos \theta) + (\sin 2\omega t)(\sin \theta)] dt$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \int_0^T (\cos 2\omega t)(\cos \theta) dt + \frac{1}{2T} V_m I_m \int_0^T (\sin 2\omega t) \sin \theta dt$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta \int_0^T (\cos 2\omega t) dt + \frac{1}{2T} V_m I_m \sin \theta \int_0^T (\sin 2\omega t) dt$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta \frac{1}{2\omega} [\sin 2\omega t]_0^T + \frac{1}{2T} V_m I_m \sin \theta \frac{1}{2\omega} [-\cos 2\omega t]_0^T$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta \frac{1}{2\omega} [\sin 2\omega T - \sin 0] - \frac{1}{2T} V_m I_m \sin \theta \frac{1}{2\omega} [\cos 2\omega T - \cos 0]$$

Pero,

$$\omega T = 2\pi$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta \frac{1}{2\omega} [\sin 2(2\pi) - \sin 0] - \frac{1}{2T} V_m I_m \sin \theta \frac{1}{2\omega} [\cos 2(2\pi) - \cos 0]$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta \frac{1}{2\omega} [0 - 0] - \frac{1}{2T} V_m I_m \sin \theta \frac{1}{2\omega} [1 - 1]$$

$$P_2 = \frac{1}{2T} V_m I_m \cos \theta \frac{1}{2\omega} [0] - \frac{1}{2T} V_m I_m \sin \theta \frac{1}{2\omega} [0]$$

$$P_2 = 0 + 0 = 0$$

La potencia promedio total:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = (\frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta) + 0$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta \quad (3-11)$$

La potencia promedio que se encuentra en la ecuación (3-11) tiene como unidad el watio;  $I_m$  y  $V_m$  son las amplitudes máximas de las ondas de corriente y voltaje; mientras que  $\theta$  es el ángulo de desfase entre la corriente y el voltaje.

De las ecuaciones (3-3) y (3-4), se realiza el diagrama fasorial que se muestra en la figura 3.6 y se tiene:

$$\mathbf{V} = V_m \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle -\theta$$

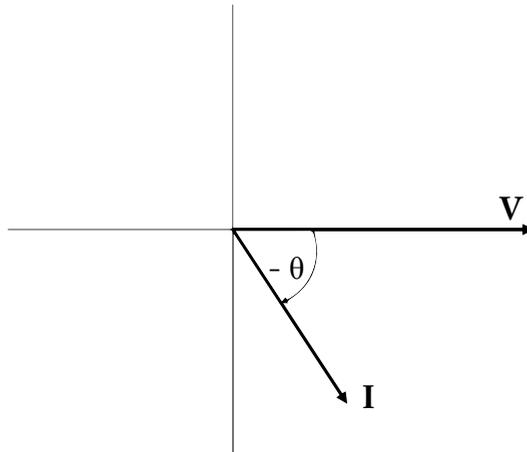


Figura 3.6. Diagrama fasorial de  $\mathbf{V} = V_m \angle 0^\circ$  e  $\mathbf{I} = I_m \angle -\theta$   
La corriente  $\mathbf{I}$  atrasa al voltaje  $\mathbf{V}$  en  $\theta$  grados

A continuación, se presentan tres casos en los cuales se aprecia el desfase entre la corriente y el voltaje:

**Caso 1:** considerar las ondas cosenoidales de voltaje (3-12) y de corriente (3-13).

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (3-12)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta) \quad (3-13)$$

Se escribe en forma polar

$$\mathbf{V} = V_m \angle \alpha \quad (3-14)$$

$$\mathbf{I} = I_m \angle \beta \quad (3-15)$$

El diagrama fasorial de las ecuaciones (3-14) y (3-15) se encuentra en la figura 3.7.

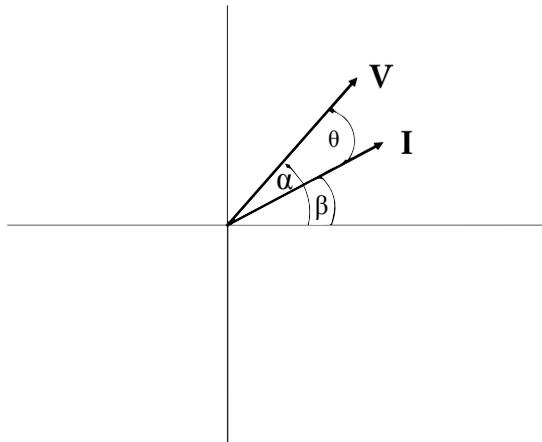


Figura 3.7. Diagrama fasorial de  $\mathbf{V} = V_m \angle \alpha$  y  $\mathbf{I} = I_m \angle \beta$

Como se puede apreciar en la figura 3.7, el desfase entre la corriente y el voltaje es  $\theta$ ; es decir, en este caso es la diferencia de  $\alpha - \beta = \theta$ . La potencia promedio viene dada por:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$$

**Caso 2:** considerar las ondas sinusoidales de voltaje (3-12) y de corriente (3-16).

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \beta) \quad (3-16)$$

Escribiendo en forma polar la ecuación (3-16), se tiene:

$$\mathbf{I} = I_m \angle -\beta \quad (3-17)$$

El diagrama fasorial de las ecuaciones (3-14) y (3-17) se encuentra en la figura 3.8.

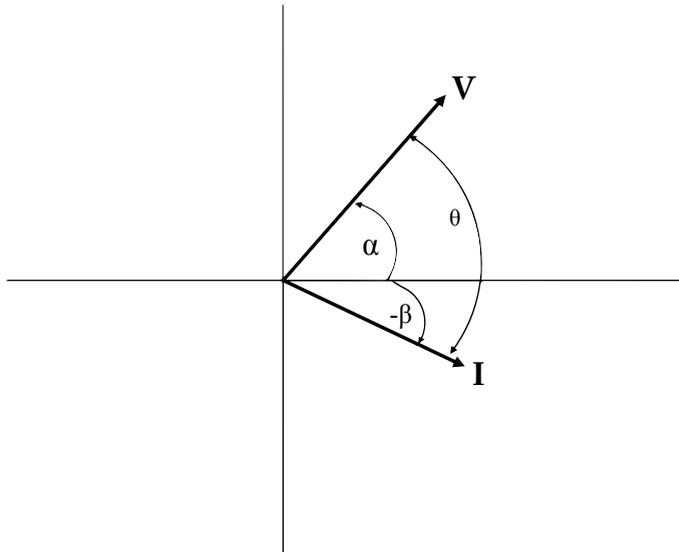


Figura 3.8. Diagrama fasorial de  $\mathbf{V} \angle \alpha = V_m$  y  $\mathbf{I} = I_m \angle -\beta$

Como se puede apreciar en la figura 3.8, el desfase entre la corriente y el voltaje es  $\theta$ ; es decir, en este caso es la suma de  $\alpha + \beta = \theta$ . La potencia promedio viene dado por:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$$

**Caso 3:** considerar las ondas cosenoidales de corriente (3-16) y de voltaje (3-18).

$$v(t) = V_m \cos(\omega t - \alpha) \quad (3-18)$$

Escribiendo en forma polar la ecuación (3-18), se tiene (3-19):

$$\mathbf{V} = V_m \angle -\alpha \quad (3-19)$$

El diagrama fasorial de las ecuaciones (3-17) y (3-19) se encuentra en la figura 3.9.

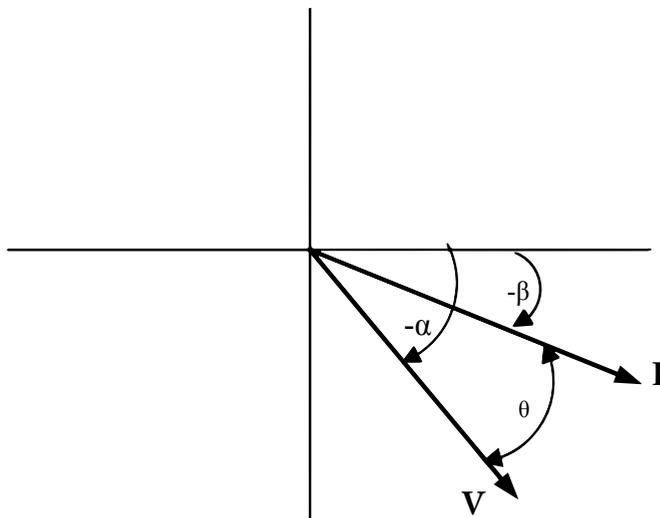


Figura 3.9. Diagrama fasorial de  $\mathbf{V} = V_m \angle -\alpha$  y  $\mathbf{I} = I_m \angle -\beta$

Como se puede apreciar en la figura 3.9, el desfase entre la corriente y el voltaje es  $\theta$ ; es decir, en este caso es la diferencia de  $\alpha - \beta = \theta$ . La potencia promedio viene dada por:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$$

### 3.3 Valores eficaces

El valor eficaz de una corriente periódica (corriente alterna) es equivalente al valor de la corriente continua que, al circular por una misma resistencia  $R$ , le entrega la misma potencia.

La potencia promedio entregada a la resistencia  $R$  por la corriente periódica  $i(t)$  de la figura 3.1 es:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int i^2 dt \quad (3-20)$$

Donde,  $T$  es el período de  $i(t)$ .

La potencia entregada por la corriente continua  $I_{ef}$  de la figura 3.10 es:

$$P = I_{ef}^2 R \quad (3-21)$$

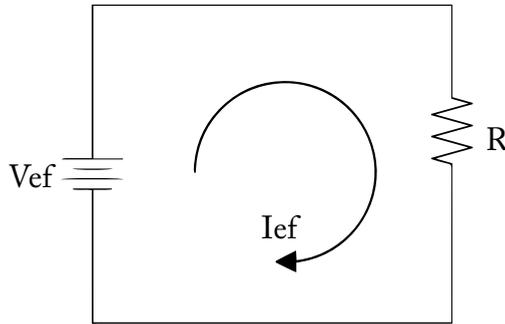


Figura 3.10. Circuito resistivo puro de corriente continua  $I_{ef}$ .

Como la definición del valor eficaz es: la potencia promedio entregada a la resistencia  $R$  por un circuito de corriente alterna (figura 3.1) es igual a la potencia entregada a la misma resistencia  $R$  en corriente continua (figura 3.10); entonces, la ecuación (3-21) es igual a la ecuación (3-20).

$$I_{ef}^2 R = \frac{R}{T} \int i^2 dt$$
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3-22)$$

El valor eficaz con frecuencia recibe el nombre de raíz media cuadrática o simplemente valor RMS, por sus siglas en inglés (Root-Mean-Square).

Si la corriente  $i(t)$  que circula por la resistencia  $R$  del circuito de la figura 3.1, es:

$$I(t) = I_m \cos (wt + \varphi)$$

$$\text{cuyo período es } T = \frac{2\pi}{w}, wT = 2\pi$$

Sustituyendo en la ecuación (3-22), se tiene:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 (wt + \varphi) dt}$$

La identidad trigonométrica

$$\cos^2 (wt + \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2wt + 2\varphi)$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2wt + 2\varphi)] dt}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T [\frac{1}{2} \cos(2wt + 2\varphi)] dt}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2T} [t|_0^T + \frac{1}{T} \frac{1}{4w} [\text{Sen}(2wt + 2\varphi)]_0^T}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2T} (T - 0) + \frac{1}{T} \frac{1}{4w} [\text{Sen}(2wT + 2\varphi) - \text{Sen}(0 + 2\varphi)]}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2T} (T) + \frac{1}{T} \frac{1}{4w} [\text{Sen}(2wT + 2\varphi) - \text{Sen}(0 + 2\varphi)]}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{T} \frac{1}{4w} [\text{Sen}(2wT + 2\varphi) - \text{Sen}(2\varphi)]}$$

La identidad trigonométrica:

$$\text{Sen}(2wT + 2\varphi) = \text{Sen} 2wT \text{Cos} 2\varphi + \text{Cos} 2wT \text{Sen} 2\varphi$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4wT} [\text{Sen}(2wT)\text{Cos}2\varphi + \text{Cos}(2wT) \text{Sen}(2\varphi) - \text{Sen}(2\varphi)]}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4(2\pi)} [\text{Sen}(2(2\pi))\text{Cos}2\varphi + \text{Cos}(2(2\pi)) \text{Sen}(2\varphi) - \text{Sen}(2\varphi)]}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4(2\pi)} [(0)\text{Cos}2\varphi + (1) \text{Sen}(2\varphi) - \text{Sen}(2\varphi)]}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4(2\pi)} [0 + \text{Sen}(2\varphi) - \text{Sen}(2\varphi)]}$$

$$I_{ef} = I_m \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (3-23)$$

Por tanto, el valor eficaz de una corriente senoidal es una cantidad real independiente del ángulo de fase, y numéricamente igual a 0,707 veces su amplitud, tal como se indica en la ecuación (3-23).

De igual forma, realizamos el procedimiento similar para calcular el voltaje efectivo o eficaz, cuya fórmula se encuentra representado en la ecuación (3-24).

$$V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (3-24)$$

Reemplazando los valores eficaces de la corriente y el voltaje en la ecuación (3-11) de la potencia promedio, tenemos:

$$P = \frac{1}{2} (V_{ef} \sqrt{2}) (I_{ef} \sqrt{2}) \cos \theta$$

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos \theta \quad (3-25)$$

Las unidades de la potencia promedio vienen expresadas en: Watios (W), Kilovatios (kW), Megavatios (MW), Gigawatios (GW), etc. A continuación, se dan algunas equivalencias:

$$1 \text{ KW} = 10^3 \text{ W}$$

$$1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$$

$$1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$$

### 3.4 Potencia aparente

La potencia aparente simbolizada por el módulo de la potencia compleja  $\mathbf{S}$ , viene dado por el producto de los valores eficaces de la corriente y el voltaje y se representa por la ecuación (3-26):

$$|\mathbf{S}| = V_{ef} I_{ef} = \frac{1}{2} V_m I_m \quad (3-26)$$

Las unidades de la potencia aparente vienen expresadas en: Voltio amperio (VA), kilovoltio amperio (KVA), megavoltio amperio (MVA), etc.

### 3.5 Factor de potencia

Considerando la potencia promedio o potencia real de la ecuación (3-25), despejamos el  $\text{Cos } \theta$  que es igual a:

$$\text{Cos } \theta = \frac{P}{V_{ef} I_{ef}}$$

El factor de potencia simbolizada por FP es igual al coseno del ángulo de desfase  $\theta$  entre la corriente y el voltaje. Esto es:

$$\text{FP} = \text{Cos } \theta$$

Dicho de otra manera, el factor de potencia es la relación entre la potencia promedio o real y la potencia aparente:

$$\text{FP} = \text{Cos } \theta = \frac{P}{V_{ef} I_{ef}} = \frac{\text{Potencia promedio}}{\text{Potencia aparente}}$$

En un diagrama fasorial, la corriente puede estar atrasando o adelantando al voltaje, de tal forma que el ángulo de desfase  $\theta$  no es negativo y se presentan los siguientes casos:

1. En un circuito resistivo puro, la corriente y el voltaje están en fase, por lo que el ángulo de desfase  $\theta = 0^\circ$  y el FP =  $\text{Cos } 0^\circ = 1$ .
2. En un circuito capacitivo puro, la corriente adelanta al voltaje en  $90^\circ$ , por lo que el ángulo de desfase  $\theta = 90^\circ$  y el FP =  $\text{Cos } 90^\circ = 0$ . En forma simplificada, se dice que FP = 0 adelantado.
3. En un circuito inductivo puro, la corriente atrasa al voltaje en  $90^\circ$ , por lo que el ángulo de desfase  $\theta = 90^\circ$  y el FP =  $\text{Cos } 90^\circ = 0$ . En forma simplificada, se dice que FP = 0 atrasado.
4. El diagrama fasorial de la figura 3.8 representa una carga más inductiva, la corriente atrasa al voltaje en  $\theta$  grados, siendo este el ángulo de desfase y el FP =  $\text{Cos } \theta$ . Por ejemplo, si  $\theta = 30^\circ$  entonces el FP =  $\text{Cos } 30^\circ = 0.866$ ; en forma simplificada se dice que FP = 0.866 atrasado.
5. El diagrama fasorial de la figura 3.9 representa una carga más capacitiva, la corriente adelanta al voltaje en  $\theta$  grados, siendo este el ángulo de desfase y el FP =  $\text{Cos } \theta$ . Por ejemplo, si  $\theta = 30^\circ$  entonces el FP =  $\text{Cos } 30^\circ = 0.866$ ; en forma simplificada, se dice que FP = 0.866 adelantado.

### 3.6 Potencia compleja

Para definir la potencia compleja, consideremos las ecuaciones de corriente y de voltaje expresadas en forma polar.

$$V_{ef} = V_{ef} \angle \alpha$$

$$I_{ef} = I_{ef} \angle \beta$$

El diagrama fasorial de las ecuaciones de voltaje y corriente se encuentran representadas en la figura 3.11.

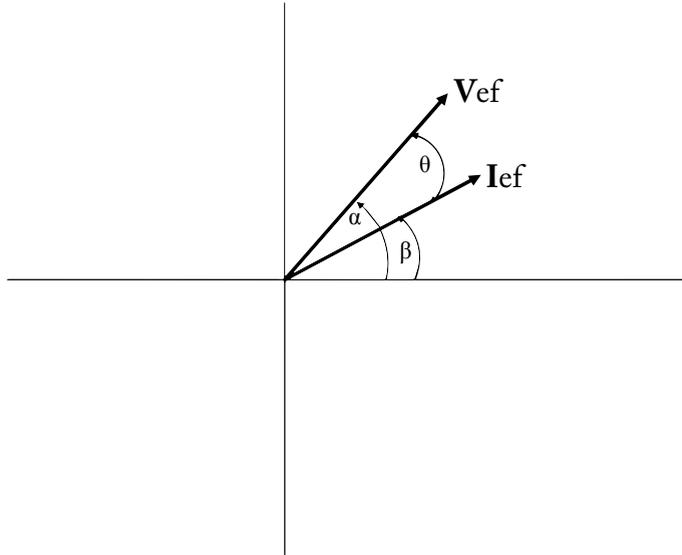


Figura 3.11. Diagrama fasorial de  $V_{ef} = V_{ef} \angle \alpha$  e  $I_{ef} = I_{ef} \angle \beta$

Utilizando la notación del conjugado de la corriente, tenemos:

$$I_{ef}^* = I_{ef} \angle -\beta$$

La potencia compleja  $S$  viene expresada como:

$$S = V_{ef} I_{ef} \angle \theta$$

Pero,

$$\theta = \alpha - \beta$$

Entonces,

$$S = V_{ef} I_{ef} \angle (\alpha - \beta)$$

$$S = (V_{ef} \angle \alpha)(I_{ef} \angle -\beta)$$

La corriente es el conjugado, escribiendo en forma fasorial, tenemos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{ef} \mathbf{I}_{ef}^* \quad (3-27)$$

Escribiendo en formato exponencial, tenemos:

$$\mathbf{S} = V_{ef} I_{ef} e^{j\theta}$$

$e^{j\theta} = \text{Cos } \theta + j \text{ Sen } \theta$ , es una identidad

$$\mathbf{S} = V_{ef} I_{ef} \text{Cos } \theta + j V_{ef} I_{ef} \text{Sen } \theta \quad (3-28)$$

Donde:

$$P = V_{ef} I_{ef} \text{Cos } \theta$$

$$Q = V_{ef} I_{ef} \text{Sen } \theta$$

$$\mathbf{S} = P + jQ \quad (3-29)$$

Donde  $P$  es la potencia promedio (real). La parte imaginaria de la potencia compleja  $\mathbf{S}$  se simboliza por  $Q$  y recibe el nombre de potencia reactiva, cuya unidad es el voltio amperio reactivo (VAR); finalmente, la potencia aparente  $|\mathbf{S}|$  representa el módulo de la potencia compleja, su unidad es el VA.

Cuando la parte imaginaria de la ecuación (3-29) es positiva, se trata de una carga inductiva y decimos que la corriente atrasa al voltaje con un ángulo  $\theta$ . Si la parte imaginaria es negativa, se trata de una carga capacitiva y decimos que la corriente adelanta al voltaje con un ángulo  $\theta$ .

**Ejemplo:** el circuito de la figura 3.12 tiene una fuente sinusoidal de voltaje que entrega energía a través de una línea de transmisión, con una impedancia de  $\mathbf{Z} = 0.01 + j0.5$  ohm, a una carga que consume una potencia de 30 Kw, a un voltaje de  $5000 \angle 0^\circ$  Vrms y con un factor de potencia de 0.8 atrasado. Calcular la onda sinusoidal de voltaje.

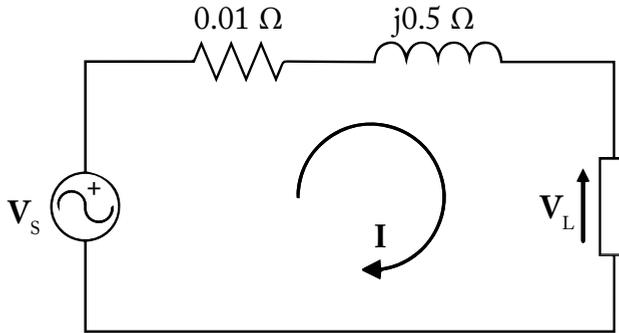


Figura 3.12. Fuente de voltaje con una línea de transmisión y una carga

*Solución:*

Del planteamiento del problema, sacamos los siguientes datos:

$$P = 30 \text{ Kw}$$

$$V_L = 5000 \angle 0^\circ \text{ Vrms}$$

$$FP = \text{Cos } \theta = 0.8 \text{ atrasado}$$

$$\theta = \text{Cos}^{-1} 0.8 = 36,87^\circ$$

$$P = V_{ef} I_{ef} \text{ Cos } \theta$$

$$I_{ef} = \frac{P}{V_{ef} \text{Cos } \theta} = \frac{30 \times 10^3}{(5000)(0.8)} = 7.5 \text{ A}$$

Para hallar el ángulo de la corriente, se realiza el diagrama fasorial, tal como se muestra en la figura 3.13. En la carga, entre el voltaje y la corriente, existe un ángulo de desfase de  $36.87^\circ$ , cuyo factor de potencia es 0.8 en atraso. Para dibujar el diagrama fasorial, primero se dibuja el fasor de voltaje  $V_L$ , que tiene un ángulo de  $0^\circ$ ; luego, se considera el ángulo del factor de potencia de la carga, el cual es  $36.87$  grados. Se considera la palabra atrasado en

sentido a favor de las manecillas del reloj, desde  $0^\circ$  hasta el ángulo de desfase de  $\theta = 36.87^\circ$ , de esta manera se puede obtener el ángulo de la corriente  $\beta = -36.87^\circ$ . El fasor de la corriente queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{I} = 7,5 \angle -36,87^\circ \text{ Arms}$$

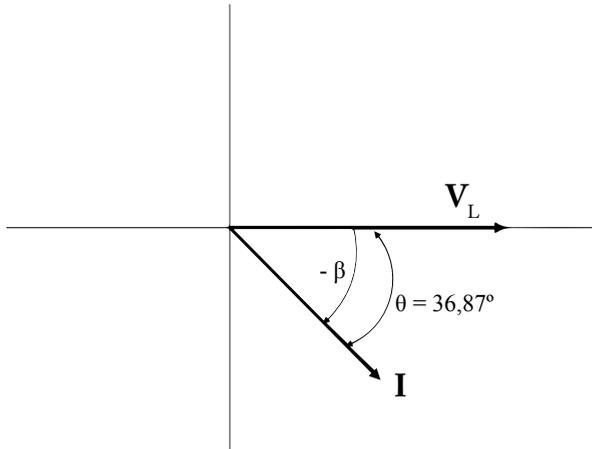


Figura 3.13. Diagrama fasorial para obtener el ángulo de la corriente  $\beta = -36.87^\circ$ .

La impedancia de la línea de transmisión es:

$$\mathbf{Z} = 0.01 + j0.5$$

$$\mathbf{Z} = 0.5 \angle 88.85^\circ$$

Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) en el circuito de la figura 3.12, tenemos:

$$-\mathbf{V}_s + 0.5 \angle 88.85^\circ \mathbf{I} + 5000 \angle 0^\circ = 0$$

$$-\mathbf{V}_s + (0.5 \angle 88.85^\circ) (7.5 \angle -36.87^\circ) + 5000 \angle 0^\circ = 0$$

$$\mathbf{V}_s = 3.75 \angle 51.98^\circ + 5000 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_s = 2.31 + j 2.95 + 5000$$

$$\mathbf{V}_s = 5002.31 + j 2.95$$

$$\mathbf{V}_s = 5002.31 \angle -0.77^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$$

La amplitud del fasor de voltaje  $\mathbf{V}_s$  está en valor eficaz. Para transformar a una función del tiempo, se debe poner en valor máximo.

$$V_m = V_{\text{ef}} \sqrt{2}$$

$$V_m = 5002.31 \sqrt{2} = 7074.34 \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_s = 7074.34 \angle -0.77^\circ \text{ V}$$

$$v_s(t) = \text{Real} \{ \mathbf{V}_s \}$$

$$v_s(t) = 7074.34 \text{ Cos} (wt - 0.77^\circ) \text{ V}$$

### 3.7 Triángulo de potencia

Tomando en consideración la potencia compleja, la potencia aparente y el factor de potencia, podemos dibujar el triángulo de potencias como se indica en la figura 3.14, el cual representa una carga inductiva, debido a que  $jQ$  es positivo, de tal forma que la potencia compleja se representa por la ecuación (3-29):  $\mathbf{S} = P + jQ$ .

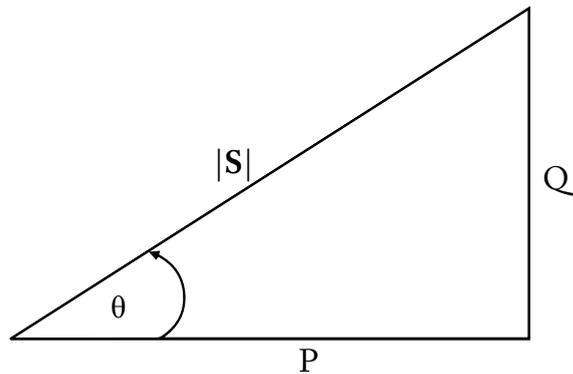


Figura 3.14. Triángulo de potencia de una carga inductiva

Cuando la carga es capacitiva, la potencia reactiva  $Q$  es negativa y el triángulo de potencia se dibuja como el que se indica en la figura 3.15. La potencia compleja se representa por la ecuación (3-30).

$$\mathbf{S} = P - jQ \quad (3-30)$$

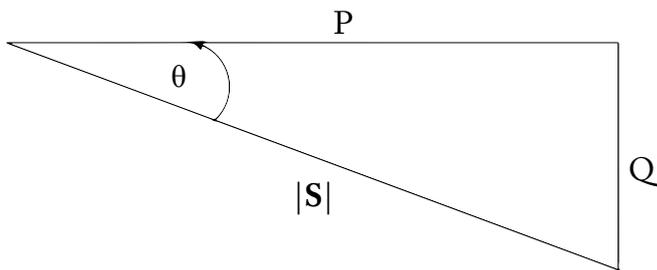


Figura 3.15. Triángulo de potencia de una carga capacitiva

**Ejemplo:** el circuito de la figura 3.16 muestra tres cargas conectadas a una fuente sinusoidal de voltaje, a través de una línea de transmisión (LT); siendo la carga 1 inductiva, la carga 2 capacitiva y la carga 3 inductiva.

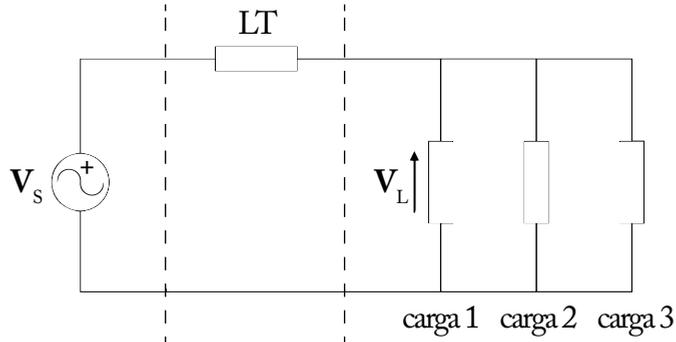


Figura 3.16. Tres cargas conectadas a una fuente a través de una LT

*Solución:*

Para la carga 1, se calculan  $P_1$ ,  $Q_1$  y  $|S_1|$ . Para la carga 2, se calculan  $P_2$ ,  $Q_2$  y  $|S_2|$ . Finalmente, para la carga 3, se calculan  $P_3$ ,  $Q_3$  y  $|S_3|$ . Para cada una de las cargas, se dibuja un triángulo de potencia y se conectan uno a continuación de otro para hallar la potencia total, tal como se muestra en la figura 3.17. La carga total se encuentra realizando la suma algebraica.

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q_T = Q_1 - Q_2 + Q_3$$

$$|S| = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

$$FP_T = \frac{P_T}{|S_T|} ; \quad \theta_T = \text{Tan}^{-1} \frac{Q_T}{P_T}$$

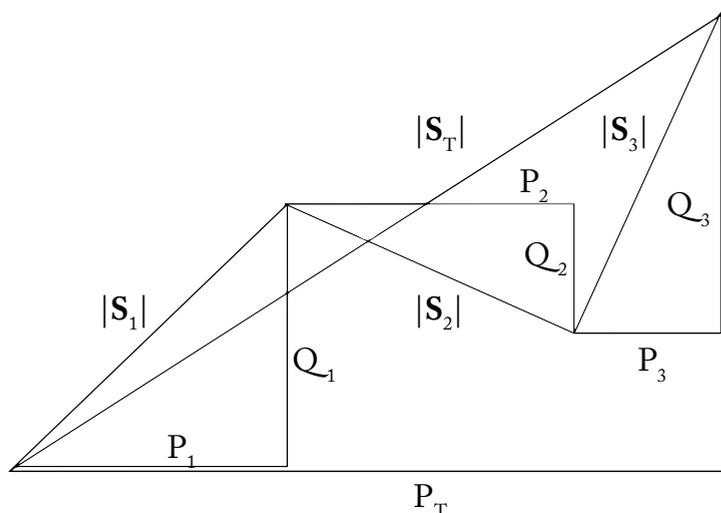


Figura 3.17. Carga total utilizando el triángulo de potencia

### 3.8 Mejoramiento del factor de potencia

Si en una línea de transmisión se conectan varias cargas inductivas en paralelo, aumenta la potencia reactiva. Para disminuir esta potencia reactiva inductiva  $Q$ , se conecta una carga reactiva capacitiva  $Q$  en paralelo, con la finalidad de disminuir la potencia reactiva inductiva el cual lleva el nombre de mejoramiento del factor de potencia. Este criterio se aclara mediante el siguiente ejemplo:

**Ejemplo:** se dispone de una fuente de 240 Vrms (figura 3.18) a una capacidad de 350 KVA, la fuente tiene una carga conectada la cual es un motor de 100 HP a un factor de potencia de 0.75 atrasado. Se desea mejorar el factor de potencia a 0.95 atrasado, determinar la capacidad en KVAR del capacitor necesario y la capacitancia del capacitor.

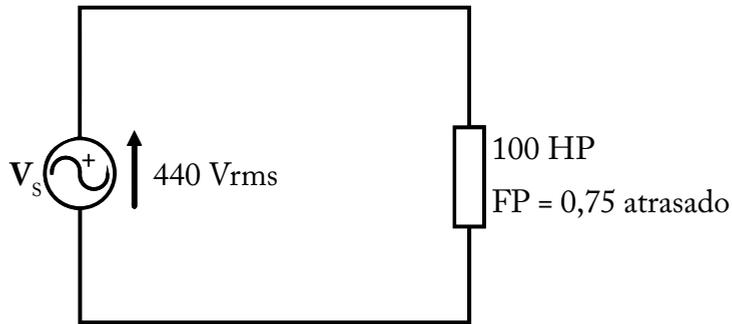


Figura 3.18

Solución:

$$\text{FP} = \text{Cos } \theta = 0.75$$

$$\theta = \text{Cos}^{-1} 0.75 = 41.41^\circ$$

$$P = 100 \text{ HP} \frac{746\text{W}}{1\text{HP}} \frac{1\text{KW}}{1000\text{W}} = 74.6 \text{ KW}$$

El triángulo de potencia de la carga de 100 HP se muestra en la figura 3.19, en la cual calculamos los valores de la potencia reactiva inductiva  $Q$  y la potencia aparente  $|\mathbf{S}|$ .

$$\text{Tan } \theta = \frac{Q}{P}$$

$$Q = P \text{ Tan } \theta = 74.6 \times 10^3 \text{ Tan } 41.41^\circ = 65\,791.89 \text{ VAR}$$

$$Q = 65.79 \text{ KVAR}$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(74.60)^2 + (65.79)^2} = 99.47 \text{ KVAR}$$

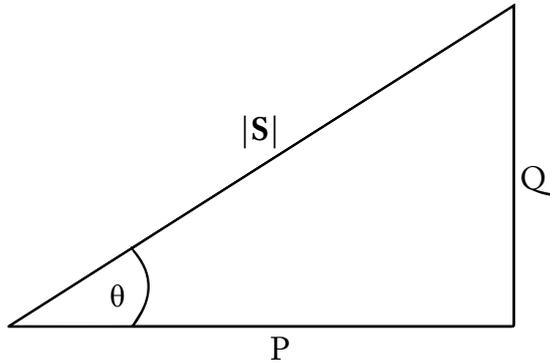


Figura 3.19. Triángulo de potencia de la carga de 100 HP

Para mejorar el factor de potencia a 0.95 atrasado, se conecta un capacitor  $C$  en paralelo con la carga de 100 HP, tal como lo indica la figura 3.20. Como se trata de una carga reactiva capacitiva pura, no existe potencia real  $P$ , únicamente existe potencia reactiva capacitiva  $Q_C$ , con un desfase de  $90^\circ$  entre el voltaje y la corriente del capacitor.

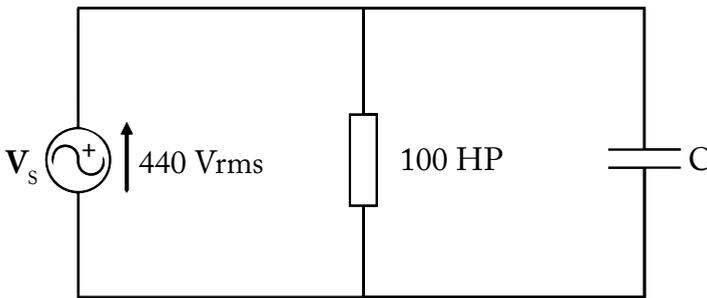


Figura 3.20. Conexión del capacitor  $C$ , para mejorar el FP a 0.95 atrasado

Después de conectar el capacitor, el nuevo triángulo de potencia se muestra en la figura 3.21, donde, debido al mejoramiento del factor de potencia, se reduce el ángulo a  $18.19^\circ$  y se procede a calcular la potencia reactiva  $Q_F$  y  $Q_C$ , para de esta manera encontrar los valores del capacitor.

$$FP = \cos \theta_m = 0.95$$

$$\theta_m = \text{Cos}^{-1} 0,95 = 18,19^\circ$$

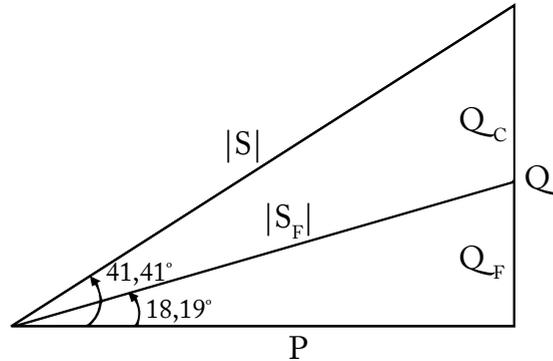


Figura 3.21. Triángulo de potencias

En el triángulo de potencia de la figura 3.21,

$$\text{Tan } 18,19^\circ = \frac{Q_F}{P}$$

$$Q_F = P \text{ Tan } 18,19^\circ = 74,6 \text{ Tan } 18,19^\circ = 24,51 \text{ KVAR}$$

$$Q = Q_C + Q_F$$

$$Q_C = Q - Q_F = 65,79 - 24,51 = 41,28 \text{ KVAR}$$

De tal forma que, la potencia reactiva del capacitor es:

$$Q_C = 41,28 \text{ KVAR}$$

$$|S_F| = \sqrt{(P)^2 + (Q_F)^2} = \sqrt{(74,60)^2 + (24,51)^2} = 78,52 \text{ KVA}$$

El nuevo valor de la potencia aparente es 78.52 KVAR, en comparación con la original de 99.47 KVAR. Representa una disminución de 20.95 KVAR, que representa un porcentaje de 21.10%.

Se procede a calcular la capacitancia del capacitor C, utilizando la fórmula de la potencia reactiva  $Q_c$  del capacitor.

$$Q_c = V_{ef} I_{ef} \text{ Sen } \theta$$

Siendo,  $\theta = 90^\circ$

$$Q_c = V_{ef} I_{ef} \text{ Sen } 90^\circ$$

$$Q_c = V_{ef} I_{ef} \quad (3-31)$$

Se aplica la Ley de Ohm en el capacitor:

$$V_{ef} = I_{ef} X_c$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \text{reactancia capacitiva}$$

$$V_{ef} = I_{ef} \frac{1}{\omega C}$$

$$I_{ef} = \omega C V_{ef} \quad (3-32)$$

La ecuación (3-32) reemplazar en la ecuación (3-31):

$$Q_c = V_{ef} \omega C V_{ef}$$

$$Q_c = \omega C (V_{ef})^2$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 60 = 376,99$$

$$C = \frac{Q_c}{\omega V_{ef}^2} = \frac{41.28 \times 10^3}{(376.99)(440)^2} = 5.65 \times 10^{-4} \text{ Faradio}$$

$$C = 565.6 \mu\text{F}$$

### 3.9 Porcentaje de regulación de voltaje

El porcentaje de regulación de voltaje (%RV) en los puntos a y b de la carga, tal como se muestra en la figura 3.22, está dado por la fórmula de la ecuación (3-33):

$$\%RV = \frac{|V_{sc}| - |V_{cc}|}{|V_{cc}|} \times 100 \quad (3-33)$$

Siendo,

$V_{sc}$  = voltaje sin carga

$V_{cc}$  = voltaje con carga

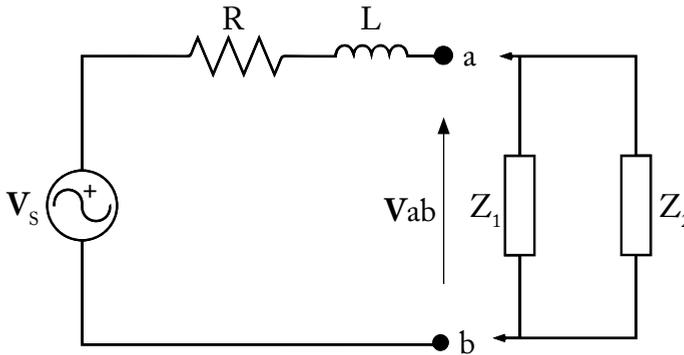


Figura 3.22. Cargas desconectadas en los puntos a y b, circuito abierto

El voltaje sin carga  $V_{sc}$ , es cuando las cargas  $Z_1$  y  $Z_2$  no están conectadas en los puntos a y b (circuito abierto), es decir, el voltaje  $V_{ab}$  es igual al voltaje de la fuente  $V_s$  y éste a su vez es igual al voltaje  $V_{sc}$ , tal como se muestra en la figura 3.22.

El voltaje con carga  $V_{cc}$  es cuando las cargas  $Z_1$  y  $Z_2$  están conectadas en los puntos a y b (circuito cerrado), es decir, el voltaje  $V_{ab}$  es igual al voltaje  $V_{cc}$ , como se indica en la figura 3.23.

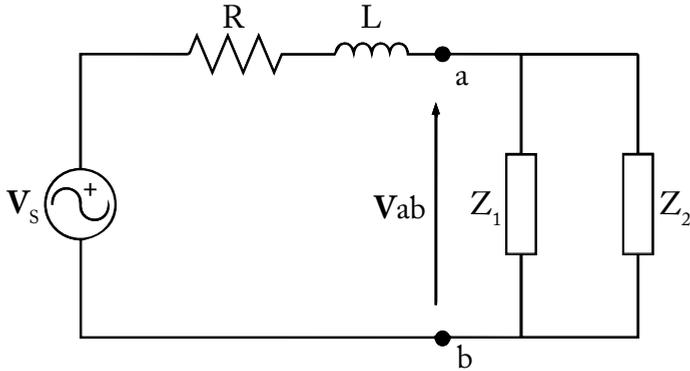


Figura 3.23. Cargas conectadas en los puntos a y b, circuito cerrado

**Ejemplo:** en el circuito de la figura 3.12, en el cual se tienen los voltajes de carga  $V_L$  y de la fuente  $V_s$ , hallar el porcentaje de regulación de voltaje.

*Solución:*

Los datos de la fuente y de la carga en el problema de la figura 3.12 son:

$$V_L = 5000 \angle 0^\circ \text{ Vrms}$$

$$V_s = 5002,31 \angle -0,77^\circ \text{ Vrms}$$

Entonces:

$$V_{sc} = V_s = 5002,31 \angle -0,77^\circ \text{ Vrms}$$

$$V_{cc} = V_L = 5000 \angle 0^\circ \text{ Vrms}$$

Reemplazando en la fórmula de la ecuación (3-33), tenemos:

$$\%RV = \frac{|V_{sc}| - |V_{cc}|}{|V_{cc}|} \times 100$$

$$\%RV = \frac{|5002.31 \angle -0.77^\circ| - |5000 \angle 0^\circ|}{|5002.31 \angle -0.77^\circ|} \times 100$$

$$\%RV = \frac{|5002.31| - |5000|}{|5002.31|} \times 100$$

$$\%RV = (4.62 \times 10^{-4}) \times 100 = 0.0462 \%$$

$$\%RV = 0.05 \%$$



## CAPÍTULO IV CIRCUITOS TRIFÁSICOS

### 4.1 Generación de voltajes trifásicos

En la figura 4.1, se muestra una vista frontal de un generador de voltaje trifásico, constituido por un rotor y un estator. El círculo central es el rotor que contiene los devanados de los tres grupos de bobinas a, b y c, llamadas fases. Las tres fases de los devanados en el rotor se encuentran separadas  $120^\circ$  una de la otra. Debido a la densidad de flujo magnético externo generado en el estator, se induce un voltaje sinusoidal en las bobinas del rotor (Edminister, 1988, p. 151).

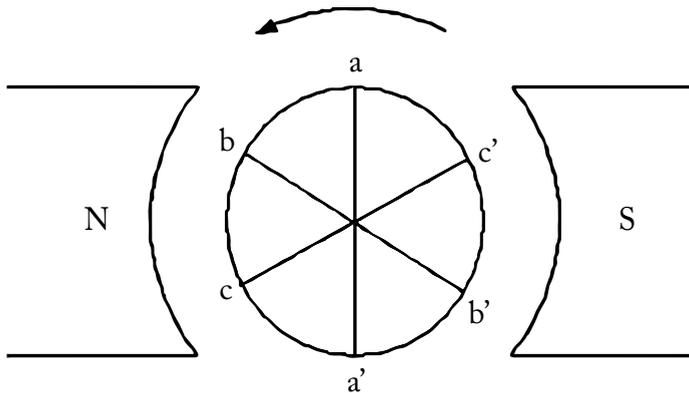


Figura 4.1. Generador de voltaje trifásico secuencia positiva abcabc.  
Vista frontal

Cuando el rotor gira en contra de las manecillas del reloj (sentido antihorario), se llama secuencia positiva (abcabc...) y, cuando gira a favor de las manecillas del reloj (sentido horario), se llama secuencia negativa (acbabc...). Los voltajes generados en los extremos de los devanados de cada una de las tres fases, se encuentran graficados en la figura 4.2 y sus valores en las ecuaciones (4-1), (4-2) y (4-3).

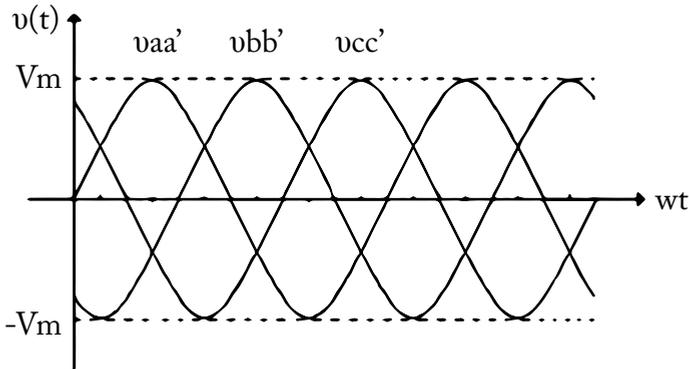


Figura 4.2. Señales sinusoidales trifásicas, secuencia abcabc...

$$v_{aa'} = V_m \text{ Sen } (\omega t) \quad (4-1)$$

$$v_{bb'} = V_m \text{ Sen } (\omega t - 120^\circ) \quad (4-2)$$

$$v_{cc'} = V_m \text{ Sen } (\omega t + 120^\circ) = V_m \text{ Sen } (\omega t - 240^\circ) \quad (4-3)$$

## 4.2 Conexión en estrella

Si los extremos de los devanados  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  de la figura 4.1 se unen a un mismo punto común llamado neutro ( $n$ ), como se muestra en la figura 4.3, a esta conexión se llama sistema trifásico conectado en estrella o en Y, con sus respectivas ecuaciones de voltajes en cada una de las fases  $v_{ab}$ ,  $v_{bc}$  y  $v_{ca}$ , que se muestran a continuación:

$$v_{an} = V_m \text{ Sen } \omega t \quad (4-4)$$

$$v_{bn} = V_m \text{ Sen } (\omega t - 120^\circ) \quad (4-5)$$

$$v_{cn} = V_m \text{ Sen } (\omega t + 120^\circ) \quad (4-6)$$

Las líneas trifásicas a, b y c del generador incluido el neutro se pueden conectar a través de la línea de transmisión A, B, C y N a una carga.

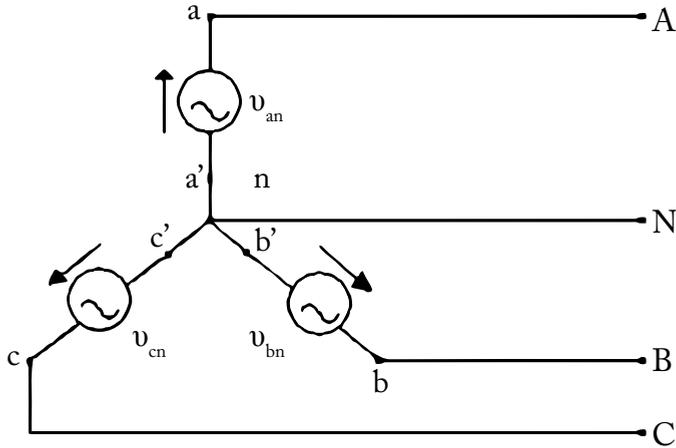


Figura 4.3. Generador trifásico conectado en estrella (Y)

### 4.3 Conexión en delta

Cuando los extremos de los devanados se conectan como se muestra en la figura 4.4, se forma un sistema trifásico conectado en delta ( $\Delta$ ). El conjunto de devanados conectados en delta no tiene punto neutro. Este tipo de conexión no es común en un generador eléctrico.

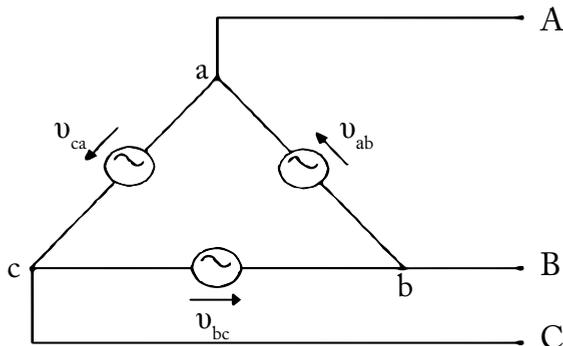


Figura 4.4. Generador trifásico conectado en delta ( $\Delta$ )

## 4.4 Voltajes fasoriales

Para representar los voltajes monofásicos y trifásicos en forma fasorial, se debe escoger un ángulo de referencia. En este caso, se selecciona un ángulo de cero grados al voltaje de la línea a con respecto al neutro n. Esto es:

$$V_{an} = 120 \angle 0^\circ$$

Donde la amplitud está expresada en valor eficaz o rms (*root mean square*).

La figura 4.5 muestra el generador conectado en estrella con su secuencia positiva y voltajes de línea a neutro ( $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  y  $V_{cn}$ ) y de línea a línea ( $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$  y  $V_{ca}$ ).

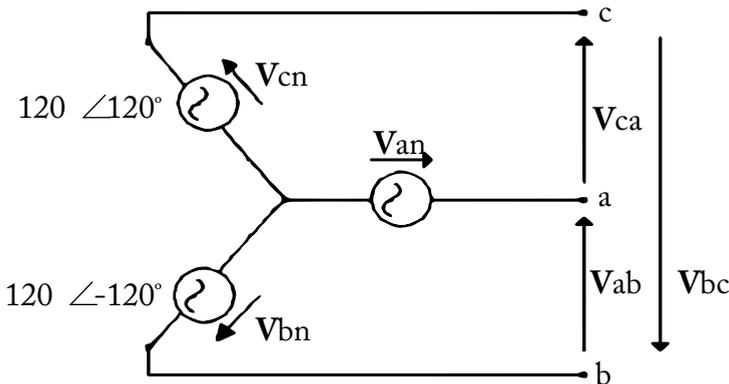


Figura 4.5. Generador conectado en estrella, secuencia positiva

### Voltajes de línea a neutro

Para generar los voltajes de línea a neutro, se toma como referencia el voltaje de línea a neutro de la fase a ( $V_{an}$ ) con un ángulo de  $0^\circ$  y una amplitud de 120 voltios eficaces o rms ( $120 V_{rms}$ ), denominándose a la

amplitud como voltaje de pico  $V_p$  ( $V_p = 120 \text{ Vrms}$ ). El voltaje de la fase b ( $V_{bn}$ ), con un ángulo de desfase de  $-120^\circ$ . Finalmente, el voltaje de la fase c ( $V_{cn}$ ), con un desfase de  $+120^\circ$ . En las ecuaciones (4-7), (4-8) y (4-9), están representadas la generación de los tres voltajes de línea a neutro.

$$V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ Vrms} = V_p \angle 0^\circ \text{ Vrms} \quad (4-7)$$

$$V_{bn} = 120 \angle -120^\circ \text{ Vrms} = V_p \angle -120^\circ \text{ Vrms} \quad (4-8)$$

$$V_{cn} = 120 \angle 120^\circ \text{ Vrms} = V_p \angle 120^\circ \text{ Vrms} \quad (4-9)$$

Donde  $V_p$  = voltaje de pico

### Voltajes de línea a línea

En el lazo  $banb$ , se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff:

$$-V_{ab} + V_{an} - V_{bn} = 0$$

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} \quad (4-10)$$

Reemplazando los voltajes de las ecuaciones (4-7), (4-8) y (4-9) en la ecuación (4-10), tenemos:

$$V_{ab} = (120 \angle 0^\circ) - (120 \angle -120^\circ)$$

$$V_{ab} = 120 - (-60 - j103.92)$$

$$V_{ab} = 120 + 60 + j103.92$$

$$V_{ab} = 180 + j103.92$$

$$V_{ab} = 207.85 \angle 29.99^\circ$$

$$V_{ab} = 208 \angle 30^\circ \text{ V}_{\text{rms}} \quad (4-11)$$

En el lazo cbnc, se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff:

$$-V_{bc} + V_{bn} - V_{cn} = 0$$

$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn}$$

$$V_{bc} = (120 \angle -120^\circ) - (120 \angle 120^\circ)$$

$$V_{bc} = -60 - j103.92 - (-60 + j103.92)$$

$$V_{bc} = -60 - j103.92 + 60 - j103.92$$

$$V_{bc} = -j207.84$$

$$V_{bc} = 207.84 \angle -90^\circ$$

$$V_{bc} = 208 \angle -90^\circ \text{ V}_{\text{rms}} \quad (4-12)$$

En el lazo acna, se aplica la Ley de Voltajes de Kirchhoff:

$$-V_{ca} + V_{cn} - V_{an} = 0$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an}$$

$$V_{ca} = (120 \angle 120^\circ) - (120 \angle 0^\circ)$$

$$V_{ca} = -60 + j103.92 - 120$$

$$V_{ca} = -180 + j103.92$$

$$V_{ca} = 207,85 \angle 150^\circ$$

$$V_{ca} = 208 \angle 150^\circ V_{rms} \quad (4-13)$$

De acuerdo con las ecuaciones (4-11), (4-12) y (4-13), todas las amplitudes de los voltajes de línea a línea son de 208 V<sub>rms</sub>; de tal forma que se presentan las siguientes ecuaciones:

$$|V_{ab}| = \sqrt{3} V_p$$

$$V_p = 120$$

$$|V_{ab}| = (\sqrt{3}) (120)$$

$$|V_{ab}| = 207.85$$

$$|V_{ab}| \approx 208$$

$$|V_{ab}| = \sqrt{3} V_p = \sqrt{3} |V_p \angle 0^\circ| = \sqrt{3} |V_{an}|$$

$$|V_{ab}| = \sqrt{3} |V_{an}|$$

$$V_{ab} = V_{LL}$$

$$V_{an} = V_{Ln}$$

El diagrama fasorial de los voltajes de línea a neutro y de línea a línea se representa en la figura 4.6.

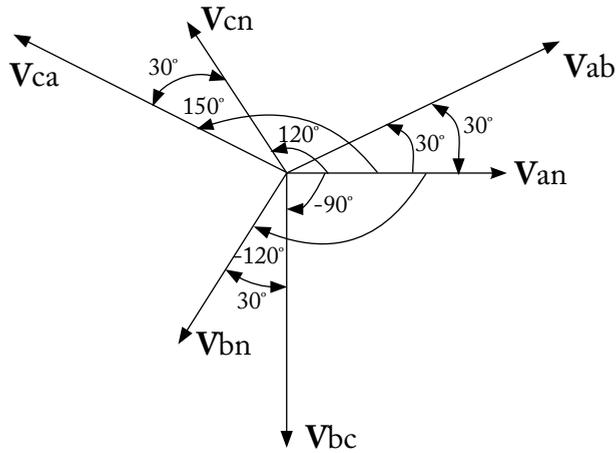


Figura 4.6. Diagrama fasorial de los voltajes de línea a neutro y de línea a línea

### 4.5 Sistema trifásico balanceado conectado en estrella – estrella (Y-Y) incluyendo el neutro

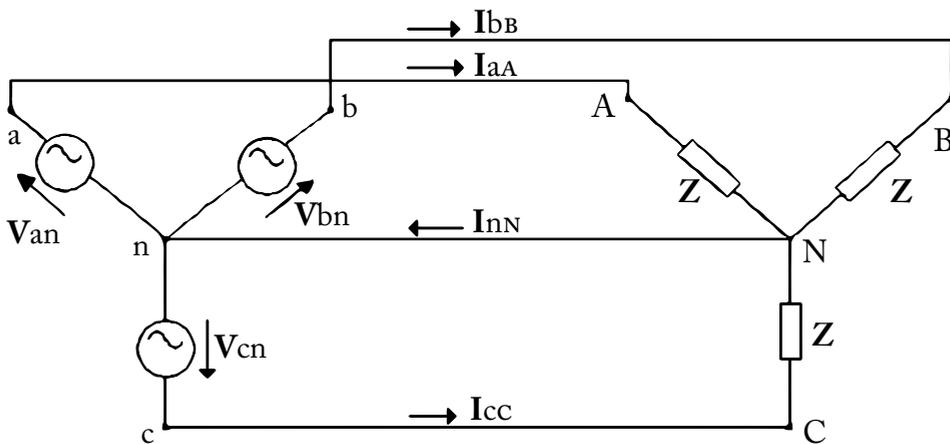


Figura 4.7. Carga  $Z$  trifásica balanceada conectada en estrella (Y)

Se conecta en estrella (Y) una carga  $Z$  trifásica balanceada a una fuente de alimentación trifásica (conexión Y), tal como se muestra en la figura 4.7.

Conocidos los voltajes de línea a neutro ( $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  y  $V_{cn}$ ) y la carga  $Z$ , se procede a calcular las corrientes de línea ( $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ ):

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z} = \frac{V_p \angle 0^\circ}{Z}$$

$$I_{bB} = \frac{V_{bn}}{Z} = \frac{V_p \angle -120^\circ}{Z} = I_{aA} \angle -120^\circ$$

$$I_{cC} = \frac{V_p \angle 120^\circ}{Z} = I_{aA} \angle 120^\circ$$

Se demuestra de esta manera, que las amplitudes de las corrientes de línea son iguales; por tal motivo, la corriente del neutro es igual a cero. Esto es:

$$I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} - I_{nN} = 0$$

$$I_{nN} = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} \quad (4-14)$$

Para demostrar que la corriente del neutro es igual a cero en un circuito de cargas balanceadas, asuma que la amplitud de la corriente de línea es 10 Arms ( $|I_{aA}| = 10$ ). Entonces,

$$I_{aA} = 10 \angle 0^\circ \text{ Arms}$$

$$I_{bB} = 10 \angle -120^\circ$$

$$I_{cC} = 10 \angle 120^\circ$$

Reemplazando los valores de las corrientes fasoriales en la ecuación (4-14), tenemos:

$$I_{nN} = 10 \angle 0^\circ + 10 \angle -120^\circ + 10 \angle 120^\circ$$

$$I_{nN} = 10 + (-5 - j8,66) + (-5 + j8,66)$$

$$I_{nN} = 10 - 5 - j8,66 - 5 + j8,66$$

$$I_{nN} = 0$$

#### 4.6 Sistema trifásico balanceado conectado en estrella – delta (Y – $\Delta$ )

Se conecta en delta ( $\Delta$ ) una carga  $Z$  trifásica balanceada a una fuente de alimentación trifásica (conexión Y), tal como se muestra en la figura 4.8. En una conexión delta de cargas trifásicas balanceadas, las amplitudes de los voltajes de línea a línea son iguales, esto es:

$$V_L = \text{amplitud de los voltajes de línea}$$

$$V_L = |V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}|$$

$$V_p = \text{amplitud de los voltajes de fase}$$

$$V_p = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

La relación que existe entre la amplitud del voltaje de línea con la amplitud del voltaje de fase es:

$$V_L = \sqrt{3} V_p$$

Entonces:

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$$

$$V_{bc} = \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = \sqrt{3} V_p \angle 150^\circ$$

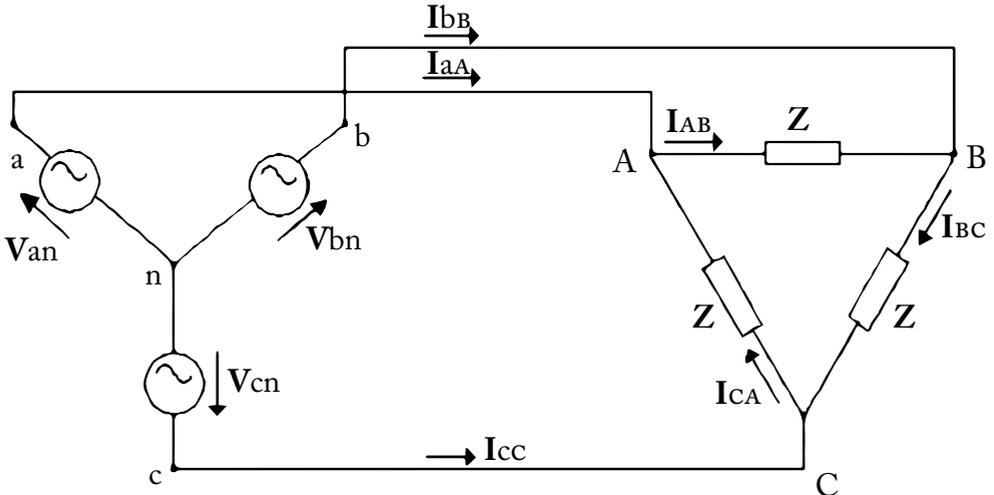


Figura 4.8. Carga  $Z$  trifásica balanceada conectada en delta ( $\Delta$ )

Para calcular las corrientes de fase  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$  e  $I_{CA}$  (figura 4.8), se procede de la siguiente manera:

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z} \qquad I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z} \qquad I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z}$$

Para calcular las corrientes de línea  $I_{a_A}$ ,  $I_{b_B}$  e  $I_{c_C}$ , se aplica la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) en los nodos A, B y C. Se asume que las corrientes que entran al nodo son positivas y las corrientes que salen del nodo son negativas.

Nodo A, se aplica la LCK:

$$I_{a_A} - I_{A_B} + I_{C_A} = 0$$

$$I_{a_A} = I_{A_B} - I_{C_A}$$

Nodo B, se aplica la LCK:

$$\mathbf{I}_{bB} - \mathbf{I}_{bC} + \mathbf{I}_{bA} = 0$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{bC} - \mathbf{I}_{bA}$$

Nodo C, se aplica la LCK:

$$\mathbf{I}_{cC} - \mathbf{I}_{cA} + \mathbf{I}_{cB} = 0$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{cA} - \mathbf{I}_{cB}$$

En una conexión delta de cargas trifásicas balanceadas, las amplitudes de las corrientes de fase y de línea son iguales; esto es:

$I_p$  = amplitud de la corriente de fase

$$I_p = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

$I_L$  = amplitud de la corriente de línea

$$I_L = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}| \quad (4-15)$$

La relación que existe entre la amplitud de la corriente de línea con la amplitud de la corriente de fase es:

$$|I_L| = \sqrt{3} |I_p|$$

#### 4.7 Potencias con cargas trifásicas balanceadas conectadas en estrella (Y)

Tomando en cuenta la figura 4.7, se procede a calcular la potencia monofásica ( $P_{1\Phi}$ ) de las tres fases. Esto es:

$$P_a = P_{1\Phi} = |\mathbf{V}_{an}| |\mathbf{I}_{aA}| \cos \theta \quad (4-16)$$

$$P_b = P_{1\Phi} = |\mathbf{V}_{bn}| |\mathbf{I}_{bB}| \cos \theta \quad (4-17)$$

$$P_c = P1\Phi = |\mathbf{V}_{cn}| |\mathbf{I}_{cc}| \cos \theta \quad (4-18)$$

$$V_{L'n} = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}| \quad (4-19)$$

Reemplazando las ecuaciones (4-15) y (4-19) en (4-16), (4-17) y (4-18), se tiene como resultado las ecuaciones (4-20), (4-21) y (4-22):

$$P_a = P1\Phi = V_{L'n} I_L \cos \theta \quad (4-20)$$

$$P_b = P1\Phi = V_{L'n} I_L \cos \theta \quad (4-21)$$

$$P_c = P1\Phi = V_{L'n} I_L \cos \theta \quad (4-22)$$

Como se trata de un circuito de cargas balanceadas, las tres potencias monofásicas son las mismas. Para obtener la potencia trifásica ( $P3\Phi$ ), se multiplica por 3 la potencia monofásica; esto es:

$$P3\Phi = 3 P1\Phi$$

$$P3\Phi = 3 V_{L'n} I_L \cos \theta$$

Pero,

$$V_{L'n} = V_{LL} / \sqrt{3}$$

$$\text{Siendo } V_{LL} = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}|$$

Entonces:

$$P3\Phi = 3 (V_{LL} / \sqrt{3}) I_L \cos \theta$$

$$P3\Phi = \sqrt{3} V_{LL} I_L \cos \theta$$

#### 4.8 Potencias con cargas trifásicas balanceadas conectadas en delta ( $\Delta$ )

Tomando en cuenta la figura 4.8, se procede a calcular la potencia monofásica ( $P_{1\Phi}$ ) de las tres fases; esto es:

$$P_{AB} = P_{1\Phi} = |V_{ab}| |I_{AB}| \cos \theta$$

$$P_{BC} = P_{1\Phi} = |V_{bc}| |I_{BC}| \cos \theta$$

$$P_{CA} = P_{1\Phi} = |V_{ca}| |I_{CA}| \cos \theta$$

$I_{\Phi}$  = corriente de fase

$$I_{\Phi} = |I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}|$$

La potencia trifásica es:

$$P_{3\Phi} = 3P_{1\Phi}$$

$$P_{3\Phi} = 3 V_{LL} I_{\Phi} \cos \theta$$

$$I_{\Phi} = I_L / \sqrt{3}$$

$$P_{3\Phi} = 3 V_{LL} (I_L / \sqrt{3}) \cos \theta$$

$$P_{3\Phi} = V_{LL} I_L \cos \theta$$

**Ejemplo:** calcular las corrientes, los voltajes y la potencia total, en el circuito mostrado en la figura 4.7; sabiendo que la impedancia es:

$$Z = 100 \angle 60^\circ \quad \Omega$$

$$V_{an} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$$

*Solución:*

Voltajes de línea a neutro  $V_{L,n}$

$$V_{an} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$V_{bn} = 200 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$V_{cn} = 200 \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$V_{L,n} = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| = 200 \text{ V}$$

$$V_{L,n} = V_p = 200 \text{ V}$$

Voltajes de línea a línea  $V_{LL}$

$$V_{LL} = \sqrt{3} V_p = \sqrt{3} 200 = 346.4 \text{ V}_{rms}$$

$$V_{ab} = 346.4 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$V_{bc} = 346.4 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$V_{ca} = 346.4 \angle 150^\circ \text{ V}$$

$$V_{LL} = |V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}| = 346.4 \text{ V}$$

Corrientes de línea a línea  $I_{LL}$

$$|I_{LL}| = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}| = 2 \text{ A}$$

Resolviendo la fase A, tenemos:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100 \angle 60^\circ}$$

$$I_{aA} = I_{LL} = 2 \angle -60^\circ \text{ Arms}$$

La potencia absorbida por esta fase es:

$$P_{AN} = V_{ef} I_{ef} \text{Cos } \theta$$

$$P_{AN} = P_{1\Phi}$$

$P_{1\Phi}$  = Potencia monofásica

$$P_{1\Phi} = V_{L,n} I_L \text{Cos } \theta$$

$$P_{1\Phi} = (200) (2) \text{Cos } 60^\circ = 200 \text{ W}$$

Como se trata de un circuito de cargas balanceadas, las tres potencias monofásicas son las mismas. Para obtener la potencia trifásica ( $P_{3\Phi}$ ), se multiplica por 3 la potencia monofásica. Esto es:

$$P_{3\Phi} = 3 P_{1\Phi}$$

$$P_{3\Phi} = 3 P_{1\Phi} = 3 (200) = 600 \text{ W}$$

La potencia trifásica podemos calcularla por otra forma; esto es:

$$P_{3\Phi} = 3 V_{L,n} I_L \text{Cos } \theta$$

Pero:

$$V_{L^n} = V_{LL} / \sqrt{3}$$

Entonces:

$$P_{3\Phi} = 3 (V_{LL} / \sqrt{3}) I_L \cos \theta$$

$$P_{3\Phi} = \sqrt{3} V_{LL} I_L \cos \theta$$

$$P_{3\Phi} = \sqrt{3} (346,4) (2) \cos 60^\circ$$

$$P_{3\Phi} = 599.98 \text{ W}$$



## CAPÍTULO V

### CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

#### 5.1 Autoinductancia

El inductor (figura 5.1) está formado por espiras de alambre enrollado que, al circular una corriente  $i$ , generan líneas de flujo magnético  $\Phi$ , cuya dirección se obtiene aplicando la regla de la mano derecha. Es uno de los elementos que almacena energía y está definido en términos del voltaje entre sus terminales y la rapidez de cambio de la corriente que pasa a través de los devanados (espiras), siendo esta la definición de la autoinductancia o simplemente inductancia, cuya ecuación de voltaje es:

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad (5-1)$$

Donde  $L$  es la inductancia o autoinductancia y está expresada en Henry (H); el voltaje  $v_L$  es el resultado de la variación en el tiempo del flujo magnético  $\Phi$ .

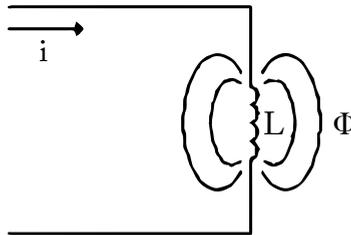


Figura 5.1. Autoinductancia  $L$

## 5.2 Inductancia mutua

La inductancia mutua se produce entre dos o más bobinas, que estén físicamente cercanas entre sí. Si se considera un par de bobinas la una cerca de la otra, tal como se muestra en la figura 5.2, el flujo enlazante ( $\phi_{12}$ ) entre las dos bobinas produce la inductancia mutua, representada por  $M$  y expresada en Henrios (H); esto se evidencia en un transformador. El flujo enlazante ( $\phi_{11}$ ) de la misma bobina produce la autoinductancia  $L$ . Si las bobinas acopladas tienen núcleo de hierro dulce, que proporciona una trayectoria para el flujo magnético, el acoplamiento es más fuerte en relación a la trayectoria dotada de núcleo de aire.

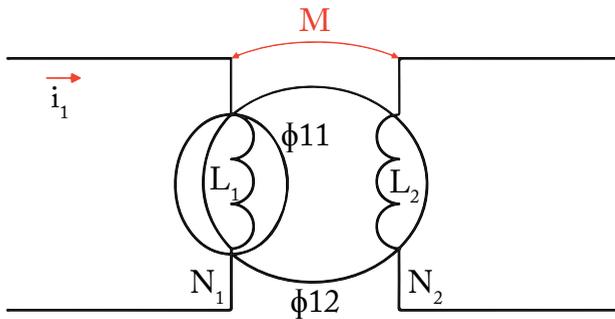


Figura 5.2. Inductancia mutua  $M$  entre las bobinas  $N_1$  y  $N_2$

## 5.3 Análisis de bobinas acopladas

En la figura 5.3, la fuente  $v_1$  del circuito primario genera una corriente  $i_1$ , la misma que, al circular por la bobina de inductancia  $L_1$ , genera un flujo  $\phi_1$  cuya dirección se la obtiene aplicando la regla de la mano derecha, donde los dedos de la mano abrazan la bobina 1 en dirección de la corriente  $i_1$  y el dedo pulgar apunta en la dirección del flujo  $\phi_1$ . Por el interior de la bobina de inductancia  $L_2$ , atraviesa el flujo  $\phi_1$ , el mismo que va a inducir un voltaje en la bobina 2. De acuerdo con la Ley de Lenz, la bobina 2 genera un flujo  $\phi_2$ , que se opone al flujo  $\phi_1$ , generando una corriente inducida  $i_2$ , cuya dirección se obtiene aplicando nuevamente la regla de la mano dere-

cha; con el pulgar apuntando en dirección del flujo  $\Phi_2$ , los dedos abrazan la bobina 2, el cual lleva la dirección de la corriente inducida  $i_2$ , tal como se muestra en la figura 5.3.

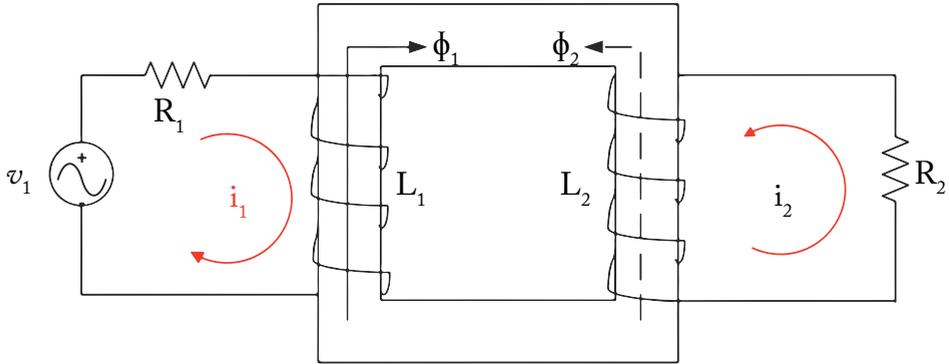


Figura 5.3. Devanados acoplados a un núcleo ferromagnético

### Regla del punto

En la figura 5.4, para asignar los puntos en el devanado primario y secundario, acoplados magnéticamente, se procede de la siguiente manera:

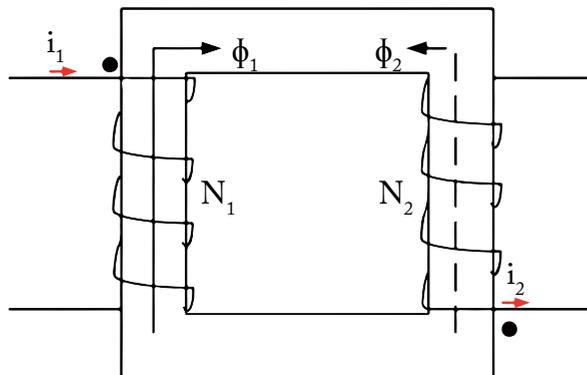


Figura 5.4. Ubicación del punto en la bobina primaria

En el devanado primario  $N_1$ , el punto se pone por donde la corriente  $i_1$  entra. Esta genera un flujo  $\Phi_1$ , cuya dirección se obtiene aplicando la regla de la mano derecha, donde los dedos de la mano abrazan la bobina 1 en dirección de la corriente  $i_1$  y el dedo pulgar apunta en la dirección del flujo  $\Phi_1$ , tal como se muestra en la figura 5.4. El flujo  $\Phi_1$  atraviesa por el interior de la bobina secundaria  $N_2$  e induce una corriente  $i_2$ . De acuerdo con la Ley de Lenz, la corriente inducida  $i_2$  genera un flujo  $\Phi_2$ , que se opone al flujo  $\Phi_1$ . La dirección de la corriente  $i_2$  se obtiene aplicando la regla de la mano derecha; de tal manera que, en la bobina secundaria el punto, se coloca por donde la corriente sale de la bobina  $N_2$ . Los terminales que tienen el punto son positivos. Con la polaridad instantánea de los devanados acoplados dada por los puntos, la representación gráfica del núcleo con sus sentidos de embobinado de la figura 5.4 ya no se necesita y los devanados acoplados pueden representarse como el que se muestra en la figura 5.5.

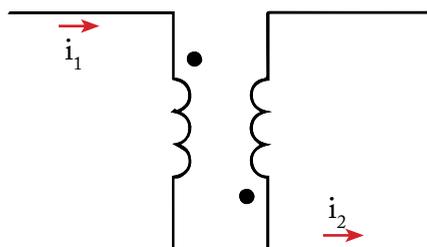


Figura 5.5. Devanados acoplados con los puntos

En conclusión, podemos establecer la siguiente regla de los puntos:

1. Cuando las corrientes entran por el punto en las dos bobinas, los signos en los términos de  $M$  son positivos.
2. Cuando las corrientes salen por el punto en las dos bobinas, los signos en los términos de  $M$  son positivos.
3. Cuando la corriente entra por el punto en la una bobina y la corriente sale por el punto en la otra bobina, los signos en los términos de  $M$  son negativos.

4. Cuando la corriente sale por el punto en la una bobina y la corriente entra por el punto en la otra bobina, los signos en los términos de  $M$  son negativos.

**Ejemplo 1:** obténgase el circuito con puntos equivalente al circuito acoplado mostrado en la figura 5.6 y únase para plantear las ecuaciones de mallas del circuito primario y secundario.

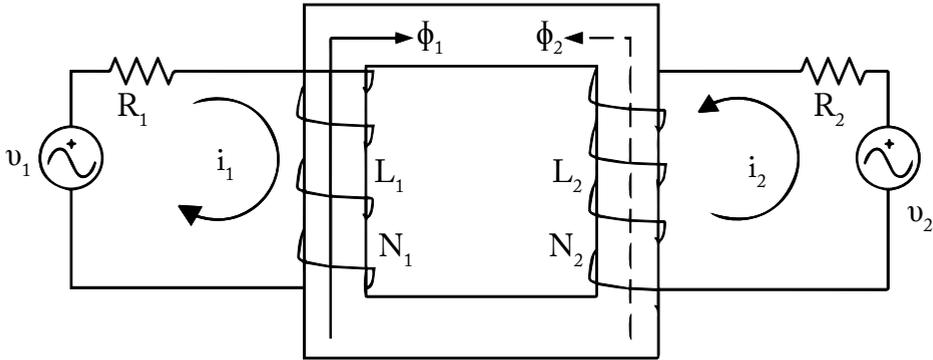


Figura 5.6. Transformador acoplado a un circuito primario y secundario

*Solución:*

En el circuito de la figura 5.6, se utiliza la regla de los puntos. En la bobina primaria, el punto se ubica por donde la corriente entra y, en la bobina secundaria, el punto se ubica por donde la corriente sale, cuyo circuito equivalente se muestra en la figura 5.7. El acoplamiento magnético de los dos circuitos se mide por la inductancia mutua  $M$ , la cual puede ser positiva o negativa.

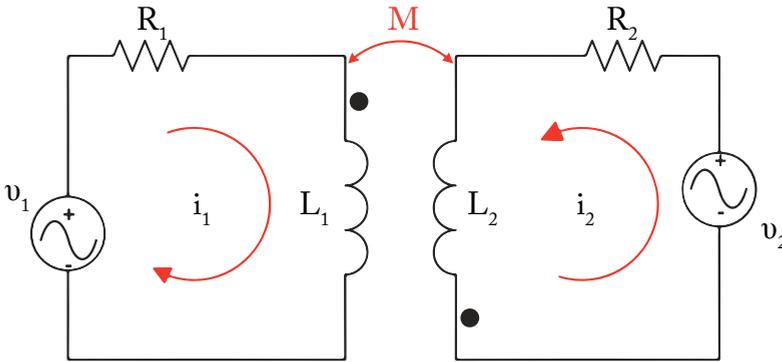


Figura 5.7. Circuito equivalente de puntos

Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) en el circuito primario de la figura 5.7, tenemos:

$$-v_1 + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (5-2)$$

El término de la inductancia mutua  $M \frac{di_2}{dt}$  en la ecuación (5-2) es negativa, ya que aplicando la regla de los puntos dice que, si en la una bobina el punto está por donde la corriente ( $i_1$ ) entra y en la otra bobina el punto está por donde la corriente ( $i_2$ ) sale, entonces el signo es negativo.

Aplicando la LVK en el circuito secundario de la figura 5.7, se tiene:

$$-v_2 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (5-3)$$

**Ejemplo 2:** en el circuito de la figura 5.8, existe acoplamiento entre las bobinas  $L_1$  y  $L_2$ , lo que produce una inductancia mutua  $M_{12}$ ; también existe un acoplamiento entre las bobinas  $L_2$  y  $L_3$ , para producir una inductancia mutua  $M_{23}$ . Plantear las ecuaciones de los circuitos primario y secundario.

*Solución:*

Aplicando la LVK y la regla de los puntos, la ecuación del circuito primario es:

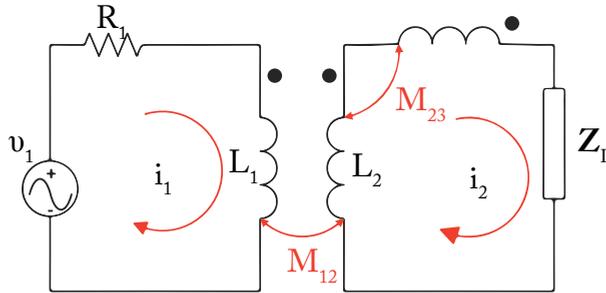


Figura 5.8. Circuito acoplado magnéticamente

$$-v_1 + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} = 0$$

Y la ecuación en el circuito secundario es:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} + Z_L i_2 = 0$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + 2M_{23} \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_2}{dt} + Z_L i_2 = 0$$

### 5.4 Coeficiente de acoplamiento

En la figura 5.9, el flujo total  $\Phi_1$  que produce la corriente  $i_1$ , que circula por los devanados de la bobina  $N_1$ , es igual al flujo de fuga  $\Phi_{11}$  o flujo autoinducido, más el flujo  $\Phi_{12}$  de acoplamiento o eslabonamiento; esto es:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

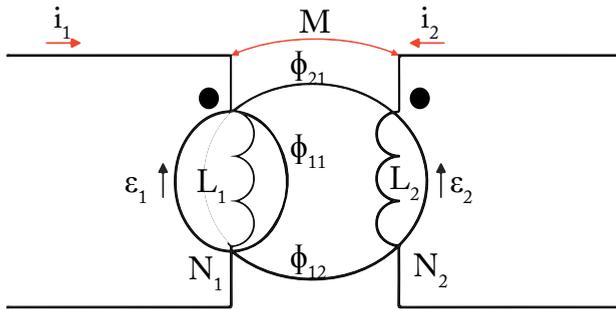


Figura 5.9. Bobinas con la regla del punto

La fuerza electromotriz inducida (fem) en el devanado acoplado (bobina secundaria) está dada por la ecuación (5-4).

$$\varepsilon_2 = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad (5-4)$$

Debido a la inductancia mutua, el voltaje en la bobina secundaria producida por la corriente  $i_1$ , está dada por la ecuación (5-5).

$$\varepsilon_2 = M \frac{di_1}{dt} \quad (5-5)$$

Al igualar las ecuaciones (5-4) y (5-5), tenemos:

$$M \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

$$M = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1} \quad (5-6)$$

La fuerza electromotriz inducida (fem) en el devanado acoplado (bobina primaria) está dada por la ecuación (5-7).

$$\varepsilon_1 = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} \quad (5-7)$$

Debido a la inductancia mutua, el voltaje en la bobina primaria producida por la corriente  $i_2$  está dada por la ecuación (5-8).

$$\varepsilon_1 = M \frac{di_2}{dt} \quad (5-8)$$

Igualando las ecuaciones (5-7) y (5-8), tenemos:

$$M \frac{di_2}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

$$M = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{di_2} \quad (5-9)$$

El *coeficiente de acoplamiento* se representa con la letra  $k$ , y se define como la razón del flujo de eslabonamiento al flujo total.

$$k = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \quad (5-10)$$

Donde,  $0 \leq k \leq 1$ .

Multiplicando las ecuaciones (5-6) y (5-9), tenemos:

$$M^2 = \left( N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1} \right) \left( N_1 \frac{d\Phi_{21}}{di_2} \right) = \left( N_2 \frac{d(k\Phi_1)}{di_1} \right) \left( N_1 \frac{d(k\Phi_2)}{di_2} \right)$$
$$M^2 = k^2 \left( N_1 \frac{d\Phi_1}{di_1} \right) \left( N_2 \frac{d\Phi_2}{di_2} \right) \quad (5-11)$$

El voltaje en la bobina primaria, debido a la autoinductancia y a la fem, es:

$$\varepsilon_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (5-12)$$

$$\varepsilon_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \quad (5-13)$$

Igualando las ecuaciones (5-12) y (5-13), se tiene:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$$
$$L_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{di_1} \quad (5-14)$$

El voltaje en la bobina secundaria, debido a la autoinductancia y a la fem, es:

$$\varepsilon_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (5-15)$$

$$\varepsilon_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} \quad (5-16)$$

Igualando las ecuaciones (5-15) y (5-16), se tiene:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = N_1 \frac{d\phi_2}{dt}$$

$$L_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{di_2} \quad (5-17)$$

Reemplazando las ecuaciones (5-14) y (5-17) en la ecuación (5-11), tenemos:

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (5-18)$$

Entonces, en la ecuación (5-18):

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

## 5.5 Transformador ideal

El análisis aproximado de un circuito que contenga un transformador con núcleo de hierro puede efectuarse en forma muy simple, sustituyendo dicho transformador por un transformador ideal, es decir, un transformador hipotético en el cual no hay pérdidas y cuyo núcleo tiene permeabilidad infinita, que origina un acoplamiento perfecto sin fuga de flujo. En los grandes transformadores de potencia, las pérdidas son tan pequeñas en relación con la potencia transferida, que las relaciones obtenidas del análisis de transformador ideal pueden ser muy útiles en las aplicaciones de ingeniería.

Con lo expresado anteriormente, podemos citar tres condiciones para que sea un transformador ideal:

- 1) El factor de acoplamiento es igual a 1 ( $k = 1$ ).
- 2) La reluctancia del circuito magnético sea igual a cero ( $R = 0$ ) y la permeabilidad del núcleo sea infinita ( $\mu = \infty$ )
- 3) No hay pérdidas eléctricas ni magnéticas donde la potencia de entrada es igual a la potencia de salida.

Se toma en cuenta la ecuación (5-13), cuyo valor de voltaje en la bobina primaria es:

$$\varepsilon_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$$

Y se despeja la variación del flujo con respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\varepsilon_1}{N_1} \quad (5-19)$$

Y la ecuación (5-16), con su valor de voltaje en la bobina secundaria igual a:

$$\varepsilon_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

Se despeja la variación del flujo con respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\varepsilon_2}{N_2} \quad (5-20)$$

Como se trata de un transformador ideal, no existen pérdidas de flujo magnético, por lo tanto, el flujo que atraviesa la bobina primaria  $\Phi_1$  es igual al flujo que atraviesa la bobina secundaria  $\Phi_2$ . Así, la ecuación (5-19) es igual a la ecuación (5-20).

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{N_1} = \frac{\varepsilon_2}{N_2}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Esta relación de voltaje de la bobina primaria para la bobina secundaria se conoce con el nombre de *razón de vueltas* y se representa con la letra *a*.

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \tag{5-21}$$

La figura 5.10 lo representa en forma fasorial, donde  $V_1 = \varepsilon_1$  y  $V_2 = \varepsilon_2$ . Se procede a calcular la impedancia de entrada en la bobina primaria ( $Z_{en}$ ) o, dicho en otras palabras, la impedancia reflejada en el circuito primario.

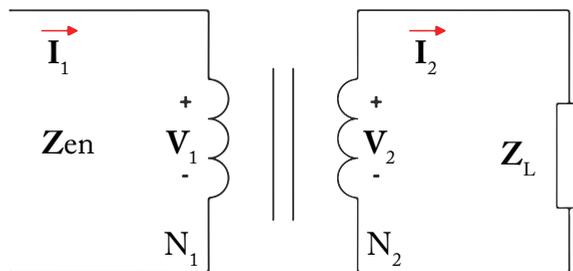


Figura 5.10. Transformador ideal

En el circuito primario, aplicamos la Ley de Ohm y se despeja la impedancia de entrada  $Z_{en}$ :

$$Z_{en} = \frac{V_1}{I_1} \quad (5-22)$$

En el circuito secundario, aplicamos la Ley de Ohm y se despeja la impedancia de la carga  $Z_L$ :

$$Z_L = \frac{V_2}{I_2} \quad (5-23)$$

Considerando la figura 5.10 y la ecuación (5-21), el voltaje inducido en la bobina primaria  $\varepsilon_1$  se reemplaza por  $V_1$  y el voltaje inducido en la bobina secundaria  $\varepsilon_2$  se reemplaza por  $V_2$ . Entonces, se reescribe la ecuación (5-21):

$$a = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (5-24)$$

Se despeja  $V_1$ :

$$V_1 = V_2 \frac{N_1}{N_2} \quad (5-25)$$

Las potencias de entrada y de salida son:

$$P_{ent} = V_1 I_1$$

$$P_{sal} = V_2 I_2$$

Como se trata de un transformador ideal, no existen pérdidas, de tal forma que la potencia de entrada es igual a la potencia de salida.

$$P_{ent} = P_{sal}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

$$I_1 = I_2 \frac{I_1}{I_2} \tag{5-26}$$

Las ecuaciones (5-24), (5-25) y (5-26) se reemplazan en la ecuación (5-22):

$$Z_{en} = \frac{V_2 \frac{N_1}{N_2}}{I_2 \frac{N_2}{N_1}} = \frac{V_2}{I_2} \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 = Z_L \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 = Z_L a^2$$

$$Z_{en} = Z_L a^2 \tag{5-27}$$

La ecuación (5-27) es la impedancia reflejada en el circuito primario, tal como se muestra en la figura 5.11.

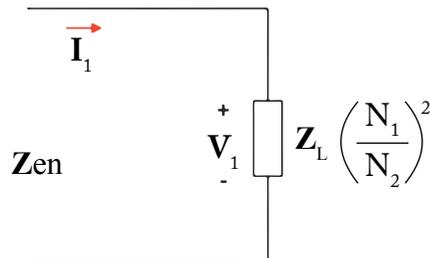


Figura 5.11. Impedancia reflejada en el circuito primario



## REFERENCIAS

- Edminister, J. A. (1988). *Circuitos eléctricos*. (2a ed.). México: Mc Graw Hill.
- Hayt Jr. W. H. y Kemmerly, J. (1988). *Análisis de circuitos en ingeniería*. (4a ed.). México: Mc Graw-Hill.
- Hayt Jr. W. H., Kemmerly, J. y Durbin, S. (2012). *Análisis de circuitos en ingeniería*. (8a ed.). México: Mc Graw-Hill.

## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- Chapman, S. J. (1993). *Máquinas eléctricas*. (2a ed.). Colombia: Mc Graw Hill.
- Richardson, D. V. y Caisse Jr., A. J. (1997). *Máquinas eléctricas rotativas y transformadores*. (4a ed.). México: Prentice Hall.
- Dorf, R. C. y Svoboda, J. A. (2011). *Circuitos eléctricos*. (8a ed.). México: Alfaomega.
- Salas, S. L., y Hille, E. (1976). *CALCULUS de una y varias variables con Geometría Analítica*. España: Reverté.
- Alexander, CH. K. y Sadiku, M. N. O. (2006). *Fundamentos de circuitos eléctricos*. (3a ed.). México: Mc Graw-Hill.



La presente obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencias e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, álgebra, números complejos, geometría y trigonometría, con el único propósito de ayudarlos en el aprendizaje para resolver problemas de circuitos eléctricos.

El desarrollo de los cinco capítulos teóricos se basa en la experiencia del autor como docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, tomando como base los argumentos teóricos de varios autores, especialmente William H. Hayt Jr. y Jack E. Kemmerly.

El capítulo 1 comprende el análisis de los circuitos en corriente continua y estado estable, utilizando los métodos de análisis de nodos, análisis de mallas, divisores de corriente, divisores de voltaje, transformaciones de fuentes de corriente y de voltaje, superposición, teoremas de Thévenin y de Norton.

El capítulo 2 trata del análisis de los circuitos eléctricos en corriente alterna y en estado estable, usando los fasores para la resolución de los problemas y utilizando los diferentes métodos del capítulo 1.

El capítulo 3 comprende el análisis de la potencia promedio y valores eficaces, referenciados a potencias bajas y medias, utilizando el triángulo de potencias para su resolución.

El capítulo 4 se refiere al análisis de circuitos trifásicos con cargas balanceadas.

Finalmente, en el capítulo 5 se contempla el análisis de circuitos acoplados magnéticamente y transformadores.

**Pedro Infante Moreira** nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.

