

# Resistencia de materiales

Isaías Caicedo. R.  
Javier Orna Ch.  
Diego Mayorga P.  
Edwin Viteri N.



ESPOCH  
2020

## **Resistencia de materiales**

---

# Resistencia de materiales

---

J. Isaías Caicedo R.  
J. Enrique Orma Ch.  
D. Fernando Mayorga P.  
E. Fernando Viteri N.



## **Resistencia de materiales**

© 2020 J. Isaías Caicedo R., J. Enrique Orma Ch.,  
D. Fernando Mayorga P., E. Fernando Viteri N.

© 2020 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½  
Instituto de Investigaciones  
Dirección de Publicaciones Científicas  
Riobamba, Ecuador  
Teléfono: 593 (03) 2 998-200  
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego  
(*peer review*)

Corrección y diseño:  
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio,  
sin la previa autorización por escrito de los propietarios del  
*Copyright*

CDU: 621 + 692  
Resistencia de materiales  
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo  
Dirección de Publicaciones, año 2020  
195 pp. vol: 17,6 x 25 cm  
ISBN: 978-9942-38-017-3  
1. Ingeniería mecánica  
2. Partes estructurales y elementos de la construcción

## ÍNDICE GENERAL

Introducción .....	6
Lista de símbolos .....	8
Prefacio .....	10
Capítulo I. Flexión: esfuerzos normales y cortantes .....	12
1.1 Estudio de la flexión .....	13
1.1.1 Flexión pura .....	13
1.1.2 Definición de viga .....	18
1.1.2.1 Viga compuesta .....	19
1.1.2.2 Tipos de cargas en las vigas .....	20
1.1.2.3 Tipos de apoyos en las vigas .....	29
1.1.2.4 Clasificación de las vigas .....	33
1.1.2.5 Cálculo de reacciones .....	38
1.1.3 Fuerzas cortantes - momentos flectores .....	55
1.1.3.1 Diagramas de cortante y momento flector .....	56
1.1.3.2 Relaciones entre la carga, el cortante y el momento flector ....	61
1.1.3.3 Ejemplos de diagrama de cortante y momento flector .....	64
1.1.4 Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner .....	110
1.1.5 Esfuerzo normal en el rango elástico .....	118
1.1.5.1. Perfiles estructurales de acero .....	123
1.1.5.2 Los perfiles con mayor altura son mejores en la flexión .....	129
1.1.6 Esfuerzos tangenciales .....	132
1.1.6.1. Ejemplos de esfuerzos tangenciales .....	134
Capítulo II. Vigas compuestas, concentraciones de esfuerzos, flexión de elementos curvos .....	146
2.1 Vigas compuestas .....	146
2.1.1 Ejercicios de vigas compuestas .....	147
2.2 Concentraciones de esfuerzos (filetes y ranuras) .....	155
2.2.1 Filetes .....	156
2.2.2 Ranuras .....	156

2.2.3 Ejercicios de concentraciones de esfuerzos (filetes y ranuras).....	157
2.3 Flexión de elementos curvos .....	160
2.3.1 Ejercicios de flexión de elementos curvos.....	166
Problemas propuestos .....	171
Anexos .....	184

## INTRODUCCIÓN

En el diseño de estructuras o máquinas, el cabal dominio de la mecánica de materiales es indispensable. La importancia de la flexión en vigas para el diseño estructural condujo a realizar el estudio completo de este tema, que incluye:

### **Capítulo 1: Esfuerzos normales y cortantes**

Comprende: breve repaso de la de estática, determinación de diagramas de cortante, momentos flectores, esfuerzo normal y cortante.

### **Capítulo 2: Vigas compuestas, concentraciones de esfuerzos, flexión de elementos curvos**

Comprende: métodos para determinar valores de esfuerzos en una viga compuesta, como: sección transformada; análisis de las concentraciones de esfuerzos en ranuras y filetes; análisis de la flexión en elementos curvos.

Sin embargo, puesto que cada uno de estos temas se trata por separado, el profesor y el estudiante pueden optar fácilmente solo por aquellos métodos que sean de su mayor interés.

Teniendo en mente los principales problemas de los estudiantes, se ha procurado explicar los conceptos fundamentales sin escatimar palabras, pero procurando al mismo tiempo evitar la excesiva verbosidad, y empleando un lenguaje claro y conciso.

Para simplificar la labor de los estudiantes, y con la finalidad de que asimilen mejor la materia, numerosos problemas ilustrativos totalmente resueltos muestran en detalle cómo se utilizan las teorías estudiadas, y además ayudan al estudiante a cerrar la brecha entre la teoría y las aplicaciones. Este método permite al lector seguir el análisis con mayor facilidad y sin duda lo ayudará en la posterior resolución de los problemas que se proponen.

Dichos problemas presentes en este texto han sido cuidadosamente seleccionados para ilustrar los conceptos fundamentales sin abrumar al estudiante con tediosos cálculos numéricos, siempre que ello sea posible, y están dispuestos en orden de dificultad.

Para mayor utilidad se agregan en el apéndice ciertas tablas: centro de gravedad y momentos de inercia, propiedades de perfiles.

Este libro trata de suplementar a los textos normales, ayudando principalmente a los estudiantes a adquirir un conocimiento y una pericia más completos en el campo.

## LISTA DE SÍMBOLOS

**A:** área.

**A, B, C...:** puntos.

**a:** distancia hasta el momento concentrado.

**b:** espesor del material; distancia hasta la carga puntual.

**c:** distancia hasta la carga uniformemente distribuida.

**cg:** centro de gravedad.

**C, D:** constantes de integración.

**E:** módulo de elasticidad.

**EN:** eje neutro.

**F:** fuerza.

**h:** altura.

**I<sub>x</sub>:** momento de inercia.

**K<sub>o</sub>:** rigidez de la viga.

**L:** luz de viga.

**M:** momento.

**M<sub>f</sub>:** momento flector.

**n:** factor de seguridad.

**P:** fuerza; carga concentrada.

**q:** carga por unidad de longitud.

**R:** reacción.

**S<sub>x</sub>:** momento estático.

**V:** fuerza cortante.

**Y:** deformación o flecha.

$\bar{x}$ : distancia.

**y:** coordenadas del centroide.

**Y',  $\theta$ :** ángulo de giro.

**$\rho$ :** radio de curvatura o esfuerzo normal.

**$\tau$ :** esfuerzo tangencial.

## **PREFACIO**

### **OBJETIVO**

Lograr que el estudiante de ingeniería adquiera y refuerce su conocimiento, además de que desarrolle su capacidad para analizar los problemas de una manera simple y lógica, aplicando los principios fundamentales, fórmulas y métodos establecidos para la resolución de ejercicios referentes a Flexión.

### **ENFOQUE GENERAL**

El estudio de la Flexión en este libro se basa en la comprensión de conceptos fundamentales y en el uso de los problemas simplificados. Este enfoque permite la deducción de las fórmulas de una manera lógica y la identificación de las condiciones bajo las cuales se pueden aplicar, para la resolución de problemas.

### **ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOS**

En el capítulo 1 se introducen conceptos básicos para el estudio de la Flexión, los cuales se deben comprender perfectamente para continuar con los temas posteriores; se da también un pequeño repaso de cálculo de reacciones. El capítulo incluye además la obtención de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que se producen por los distintos tipos de cargas aplicadas a las vigas. El capítulo abarca el estudio de los esfuerzos normal y tangencial producidos en las vigas de acuerdo con la forma que esta tenga.

En el capítulo 2 se introducen conceptos y métodos para estudiar las vigas compuestas de varios materiales. Se abordan ecuaciones para determinar las concentraciones de esfuerzos en filetes y ranuras, y finalmente se estudia también la flexión en elementos curvos. Para la comprensión de cada uno de los métodos, se presentan fórmulas y ejercicios variados que facilitan el aprendizaje.

## **ASPECTOS PEDAGÓGICOS**

Lecciones del capítulo. El cuerpo del texto se ha dividido en capítulos que constan de teoría y problemas modelo para una mejor comprensión; se refuerza además con problemas propuestos.

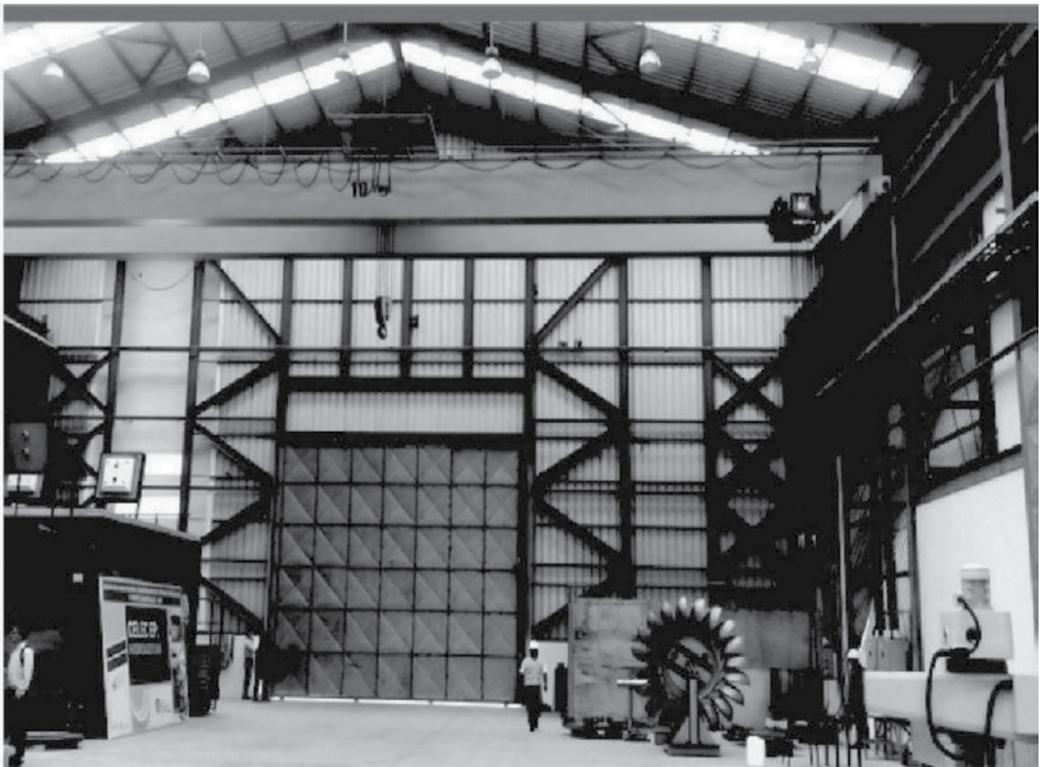
Problemas modelo. Cada capítulo contiene varios problemas resueltos que facilitan el aprendizaje de cada tema tratado.

Problemas de tarea. Los problemas propuestos en el texto tienen la finalidad de fortalecer los conocimientos adquiridos mediante la teoría y los problemas modelo.

## **CAPÍTULO I**

### **FLEXIÓN: ESFUERZOS NORMALES Y CORTANTES**

El puente grúa mostrado en la fotografía es una viga que sustenta el sistema grúa que sirve para levantar y mover cargas. Estas cargas provocan flexión en la viga. Los esfuerzos normales y cortantes resultantes producto de las cargas aplicadas a las vigas se analizan en este capítulo.



## 1.1 ESTUDIO DE LA FLEXIÓN

En el campo de la Ingeniería Mecánica, innumerables son los elementos sometidos a flexión, es decir, que están dispuestos de tal manera que deben soportar cargas o fuerzas externas. Inicialmente tienden a deformarse, pero si el incremento de la carga continúa y si no son lo suficientemente resistentes, llegarán finalmente a la ruptura.

En ingeniería se denomina *flexión* al tipo de deformación que presenta un elemento estructural alargado en una dirección perpendicular a su eje longitudinal, donde se combinan esfuerzos de tracción y de compresión. El término “alargado” se aplica cuando una dimensión es mucho mayor frente a las otras. Un caso típico son las vigas, que están diseñadas para trabajar principalmente por flexión. Igualmente, el concepto de flexión se extiende a elementos estructurales superficiales como placas o láminas.

El rasgo más destacado es que un objeto sometido a flexión presenta una superficie de puntos (llamada fibra neutra) tal que la distancia a lo largo de cualquier curva contenida en ella no varía con respecto al valor antes de la deformación. El esfuerzo que provoca la flexión se denomina *momento flector*.

En conclusión, la flexión es la deformación que sufre un elemento ubicado generalmente en posición horizontal debido a su propio peso o a cargas externas.

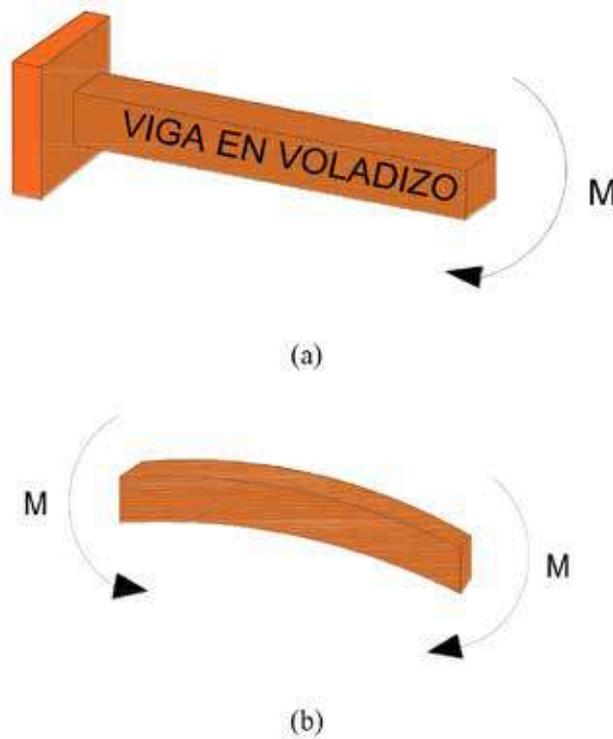
### 1.1.1 Flexión pura

La flexión pura se refiere a la flexión de un elemento bajo la acción de un momento flexionante constante. Cuando un elemento se encuentra a flexión pura, los esfuerzos cortantes sobre él son cero.

A continuación, en la figura 1.1a presentamos a una viga en voladizo que está sometida a flexión.

Fig. 1.1a. Viga sometida a flexión

Fig. 1.1b. Diagrama de cuerpo libre de la viga en voladizo (flexión pura)



A continuación, mostraremos unos ejemplos de aplicación de flexión pura.

**Ejemplo 1.** En la figura 1.2 observamos a un levantador de pesas; es de mucha importancia saber a qué par flector está sometida la barra, y para ello primero realizamos un diagrama de cuerpo libre (figura 1.3).

Fig. 1.2. Levantador de pesas. Barra sometida a par flector.

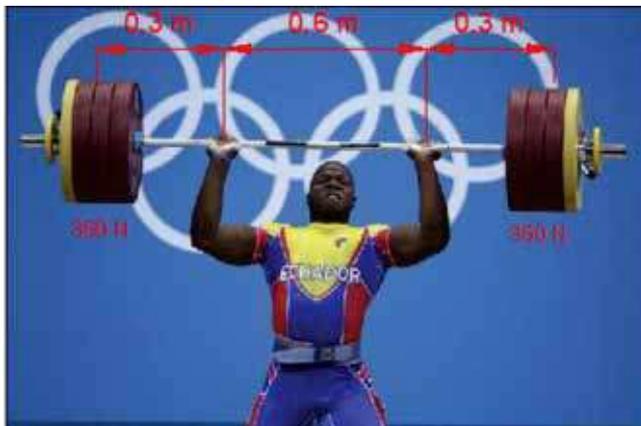
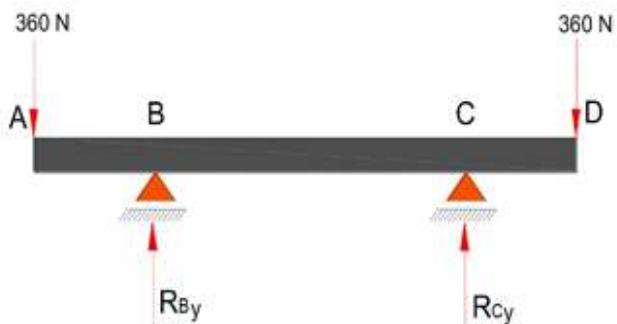


Fig. 1.3. Diagrama de cuerpo libre de la barra del pesista.



Observe que el diagrama de cuerpo libre de la barra muestra que sus apoyos son las manos del pesista. A continuación, el procedimiento parte calculando las reacciones en los mencionados apoyos.

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \quad + \curvearrowright - \curvearrowleft \\ -360 \text{ N}(0,3\text{m}) - R_{Cy}(0,6\text{m}) + 360 \text{ N}(0,9\text{m}) \\ -108 \text{ N}\cdot\text{m} - R_{Cy}(0,6\text{m}) + 324 \text{ N}\cdot\text{m} &= \\ R_{Cy} &= \frac{216 \text{ N}\cdot\text{m}}{0,6\text{m}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{R_{Cy} = 360 \text{ N}}$$

$$\sum F_x = 0 \quad + \rightarrow - \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow + \downarrow -$$

$$-360 \text{ N} + R_{By} + R_{Cy} - 360 \text{ N} = 0$$

$$-720 \text{ N} + R_{By} + R_{Cy} = 0$$

$$R_{By} + R_{Cy} = 720 \text{ N}$$

$$R_{By} = 720 \text{ N} - R_{Cy}$$

$$R_{By} = (720 - 360) \text{ N}$$

$$\mathbf{R_{By} = 360 \text{ N}}$$

Lo analizado muestra que la carga de la barra del pesista provoca un par flector de 108 N.m tal como se muestra a continuación.

$$M = F * d$$

M = momento flector

F = fuerza

d = distancia perpendicular a la fuerza

$$M = 360 \text{ N} * 0,3 \text{ m}$$

$$\mathbf{M = 108 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

Fig. 1.4. Barra sometida a par flector de 180 N.m.

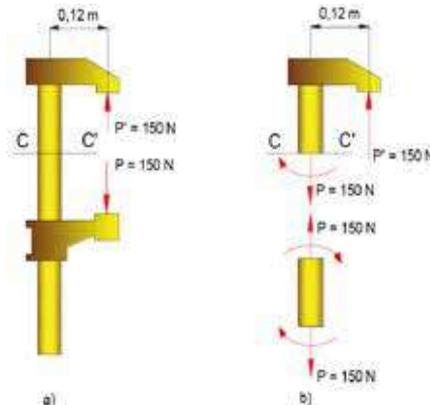


**Carga excéntrica:** carga aplicada a una columna o pilote que no es simétrica respecto del eje central y que por tanto produce un momento flector. También llamada fuerza 10 excéntrica.

**Ejemplo 2.** La figura 1.5 muestra una prensa de barra de acero de 0,12 m utilizada para ejercer fuerzas de 150 N sobre dos piezas de madera mientras se unen con adhesivo. La figura 1.5a presenta las fuerzas iguales y opuestas ejercidas por la madera sobre la prensa. Estas fuerzas producen una carga excéntrica de la porción recta de la prensa. En la figura 1.5b se efectuó un corte CC' a través de la prensa y se ha dibujado un diagrama de cuerpo libre de la porción superior de la prensa, del que se concluye que las fuerzas externas en la sección son equivalentes a una fuerza axial de tensión  $P$  de 150 N y a un par  $M$  de 18 N.m.

De esta manera pueden combinarse los conocimientos adquiridos acerca de los esfuerzos bajo una carga centrada y los resultados del análisis subsiguiente de los esfuerzos en flexión pura para obtener la distribución de esfuerzos bajo una carga excéntrica.

Fig. 1.5. Prensa: a) Barra sometida a carga excéntrica.  
b) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

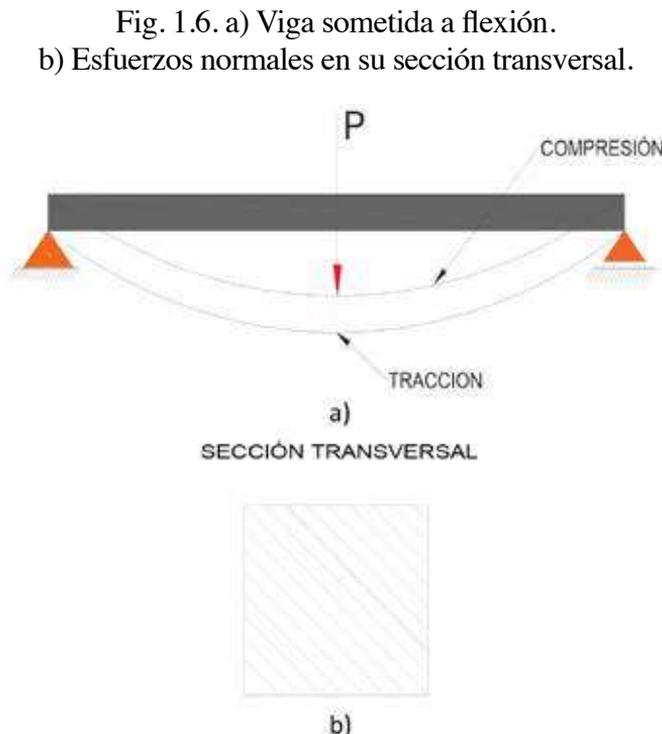


Uno de los elementos principalmente sometidos a flexión se denomina viga porque se trata de un elemento geométrico que tiene tres dimensiones y una de ellas es más larga en consideración con las otras dos; en esta sección larga se generan cargas que someten a flexión a la viga.

### 1.1.2 Definición de viga

Una viga es un elemento solicitado por cargas o momentos actuantes en un plano por el cual atraviesa su eje longitudinal; generalmente, estas cargas actúan perpendicularmente al eje.

Las vigas, según sea su aplicación, poseen distintas secciones transversales o perfiles de la viga. Estos perfiles pueden ser comerciales (es decir, existen ya pre-determinados o prefabricados según un determinado fabricante) y también podría haber secciones transversales diseñadas. Con el fin de optimizar mejor las vigas de trabajo o reducción de costo, estas secciones transversales se podrían construir mediante planchas comerciales.



### 1.1.2.1 Viga compuesta

Viga laminada verticalmente, fabricada a partir de la unión de diversos miembros menores mediante clavos o pernos, formando una viga de mayores dimensiones; o viga de acero compuesta por diferentes planchas rematadas o soldadas entre sí. También llamada viga ensamblada o viga de alma llena. Sirven para aumentar la rigidez y la resistencia.

Fig. 1.7. Viga compuesta.



En conclusión, una viga compuesta no se encuentra comercialmente ya que se diseña y se fabrica de acuerdo con nuestra necesidad. Por ejemplo, en los perfiles para puentes.

Volviendo al gráfico principal de la flexión figura (1.6a), podemos observar que la viga está sometida a una carga y tiene apoyos. A continuación profundizaremos en los tipos de cargas y los tipos de apoyos.

## 1.1.2.2 Tipos de cargas en las vigas

a) **Carga puntual o concentrada:** Según la longitud de la viga, existen elementos auxiliares que trabajan dispuestos sobre ella, ejerciendo determinada carga en espacios muy pequeños. En estos casos, podemos considerar como si la carga estuviera actuando en un punto; en consecuencia, a estas cargas se les denominan *cargas puntuales* o *concentradas*.

**Ejemplo:** Carga ejercida por las correas en la viga de una estructura.

Fig. 1.8. a) Viga sometida a cargas puntuales.  
b) Esquema de la viga y sus cargas puntuales.

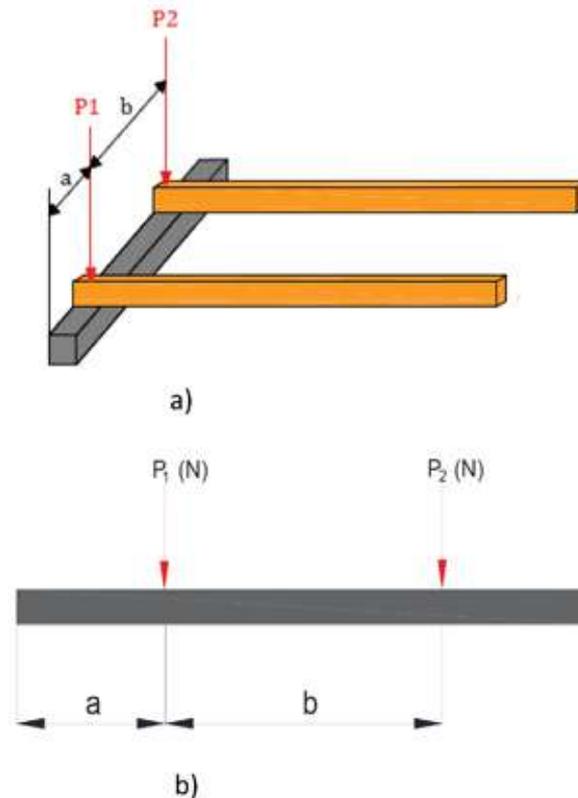
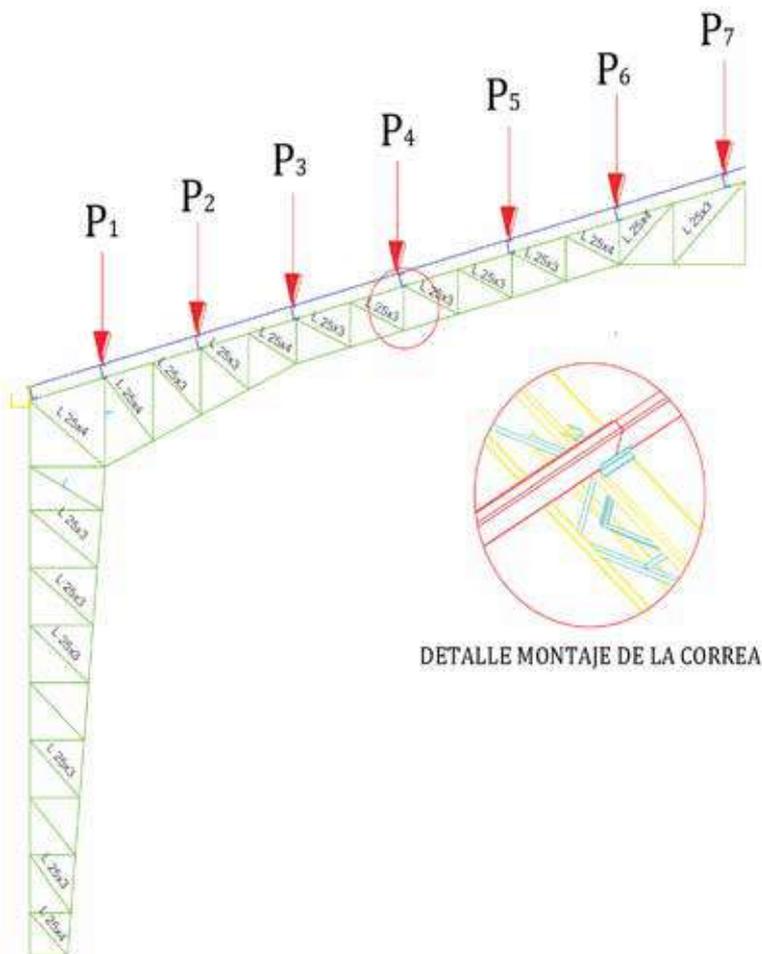


Fig. 1.9. Viga soportando el peso de las correas, las cuales al tener un área muy pequeña producen carga puntual sobre la viga.



**b) Carga uniformemente distribuida:** Es un peso o presión uniformemente distribuida sobre una longitud determinada del miembro estructural. Su representación gráfica es un rectángulo cuya altura es la intensidad de la carga  $q$  y aplicado en una longitud  $L$ .

Fig. 1.10. Techo de una cubierta soportando la presión atmosférica.

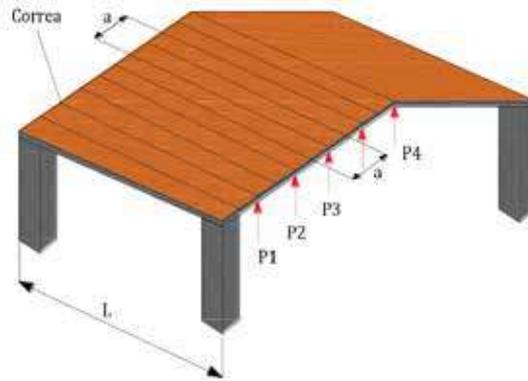
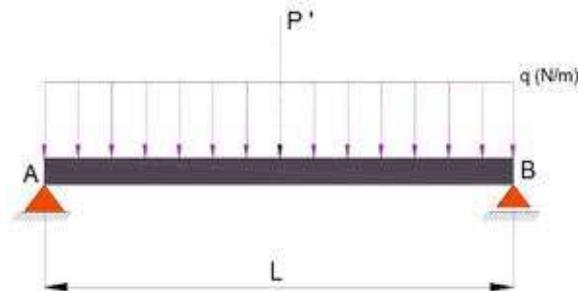


Fig. 1.11. Representación gráfica. Carga uniformemente distribuida sobre una viga.



$$q = \frac{P}{A} * a \text{ en dos dimensiones}$$

Donde:

$q$  = carga uniformemente distribuida expresada en términos de intensidad  $[N/m]$ .

$P$  = carga constituida por la presión atmosférica más el peso del techo  $[N]$ .

$a$  = luz, distancia entre pórticos  $[m]$ .

$P'$  = carga equivalente. Es igual al área bajo la curva y se encuentra ubicada en el centro de gravedad del área  $[N]$ .

$A$  = área.

$$q = \frac{\text{Presión atmosférica} + \text{Peso propio del techo}}{L * a} * a$$

$$q = \frac{P}{L * a} * a$$

$$q = \frac{P}{L} \left[ \frac{N}{m} \right]$$

$$P' = q * L [N]$$

## UNIDADES

Las unidades con las cuales se puede trabajar las cargas distribuidas son las siguientes:

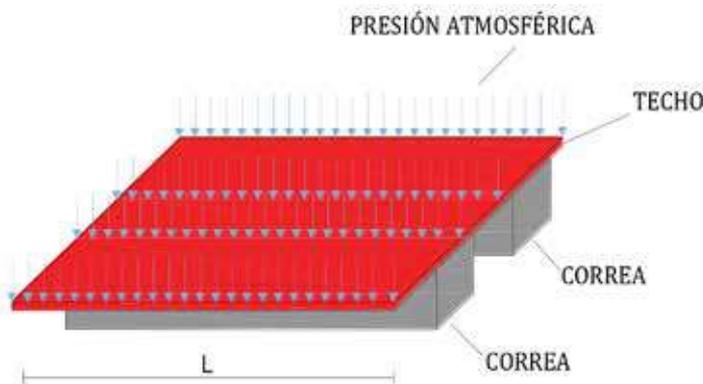
MKS  $\left[ \frac{kg}{cm} \right]$

INGLES  $\left[ \frac{lb}{pie} \right]$

INTERNACIONAL  $\left[ \frac{N}{m} \right]$

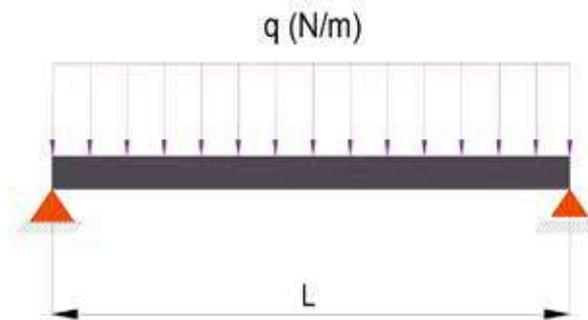
**Ejemplo:** Presión atmosférica actuando sobre el techo de una estructura.

Fig. 1.12. Presión atmosférica actuando sobre el techo de una estructura.



El peso se distribuye uniformemente a lo largo de las vigas, por tanto es considerado como una carga uniformemente distribuida.

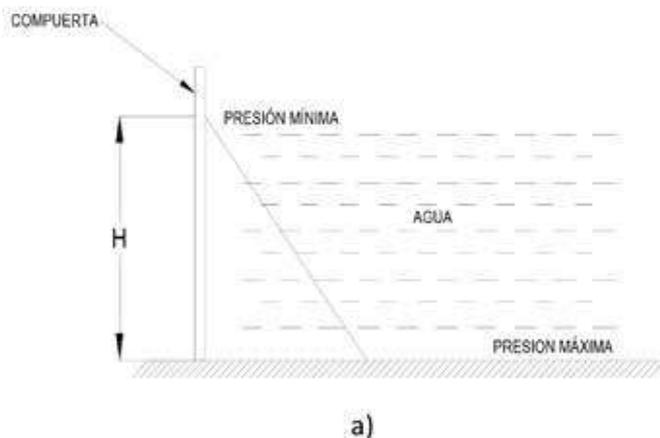
Fig. 1.13. Esquemmatización de un extracto para el análisis.



c) **Carga variada triangular:** Es un peso o presión cuya variación es definida por una función analítica. La representación de esta carga es un área encerrada por la gráfica de la función de la carga y el eje del miembro.

**Ejemplo:** la presión que el agua ejerce en la presa de una central hidroeléctrica

Fig. 1.14. a) Viga sometida a carga variada triangular.  
b) Esquemmatización de la viga con carga variada triangular.



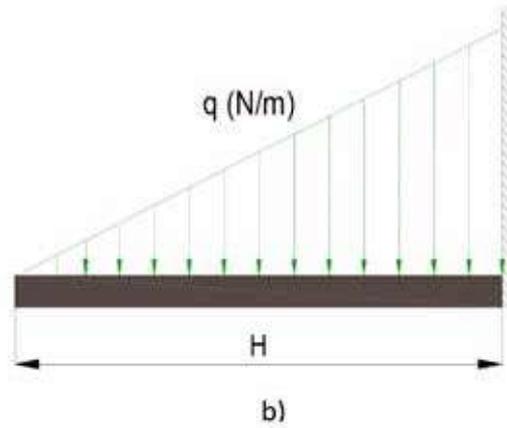
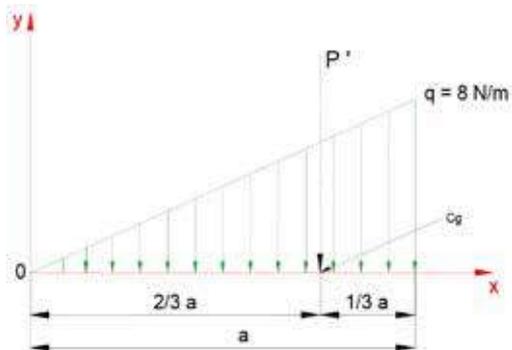


Fig. 1.15. Presa Hidroeléctrica Agoyán.



Fig. 1.16. Carga variada triangular.



La carga equivalente es igual al área bajo la curva y está ubicada en el centro de gravedad del área.

$$\begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = a & y = 8 \end{cases}$$

Sabemos que la ecuación de una recta es:

$$Y = mx + b ; \quad b = 0$$

$$Y = mx ; \quad m = \frac{8 - 0}{a - 0}$$

$$m = \frac{8}{a}$$

Reemplazando la pendiente, tenemos en la ecuación de la recta.

$$Y = \frac{8}{a}x$$

Sabemos que el área bajo la curva es igual a la integral de Y.

$$P' = \int_0^a Y \, dx$$

$$P' = \int_0^a \frac{8}{a}x \, dx$$

$$P' = \frac{8}{a} \int_0^a x \, dx$$

$$P' = \frac{8}{a} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a$$

$$P' = \frac{8}{a} \left( \frac{a^2}{2} - 0 \right)$$

$$P' = \frac{8}{a} \left( \frac{a^2}{2} \right)$$

$$P' = 4a$$

Área bajo la curva y se encuentra en el centro de gravedad.

Donde:

$a$  = base de la superficie.

$y$  = altura de la superficie.

$m$  = pendiente de la recta.

$P'$  = carga equivalente.

La carga equivalente  $P'$  se encuentra ubicada en el centro de gravedad, debido a que ahí se concentra la masa.

**d) Carga combinada (trapezoidal):** Como su nombre lo indica, es una carga que combina una carga uniformemente distribuida y una carga triangular. La resolución de la misma conlleva realizar una separación de dichas cargas y realizar su análisis de manera independiente, como se ha dispuesto anteriormente.

**Ejemplo:** rodamientos de rodillo con pista cónica.

Fig. 1.17. Esquematización de la viga cargada con cargas combinadas.

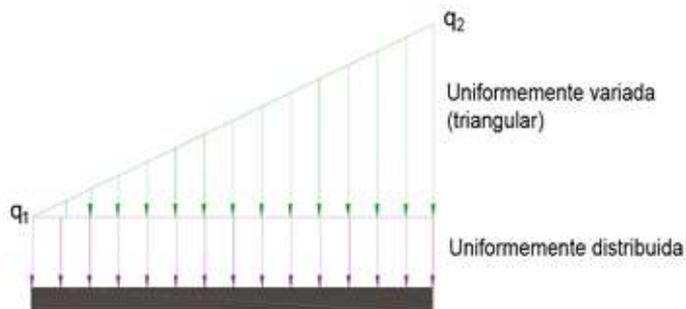
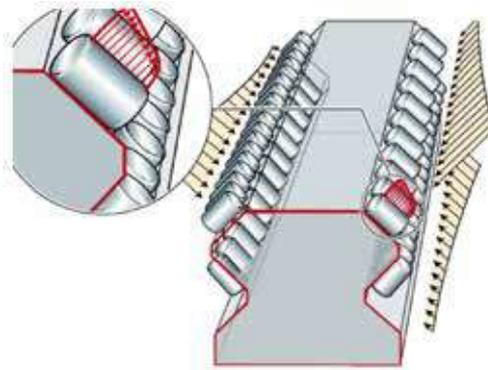


Fig. 1.18. Rodamientos dentro de un sistema. Los rodamientos al ejercer presión en el elemento de soporte generan una carga combinada.



e) **Momento concentrado:** Existen algunas vigas sobre las cuales actúan barras o dispositivos transversales, y en estos a su vez se aplican cargas o fuerzas produciendo en la viga momentos concentrados.

Fig. 1.19. a) Viga sometida a momento concentrado.  
b) Esquematización de la viga con momento concentrado.

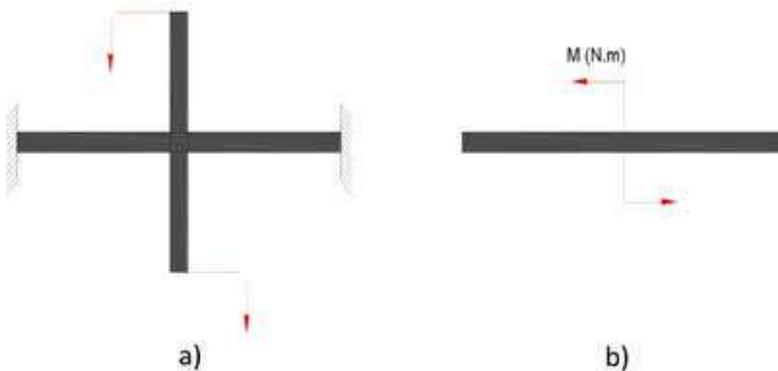


Fig. 1.20. Viga sometida a momento concentrado por medio de poleas. Al ejercer tensión en las cuerdas, estas generan un momento concentrado en la viga.



### 1.1.2.3 Tipos de apoyos en las vigas

Uno de los parámetros importantes que forman parte del comportamiento de las vigas son los apoyos, ya que de ellos dependerá la presencia de una o varias reacciones. Según la facilidad o dificultad que presenten los apoyos para que las vigas puedan girar o desplazarse horizontalmente, se clasifican de la siguiente manera:

a) **Apoyo fijo articulado:** Permite el giro de la viga, pero no el desplazamiento en sentido horizontal y vertical.

Fig. 1.21. a) b) Representación esquemática del apoyo fijo articulado con sus respectivas reacciones.

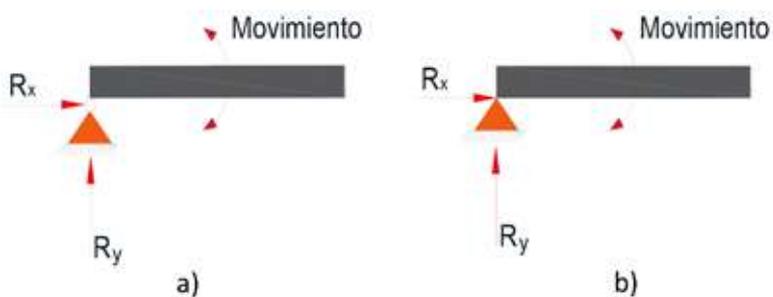
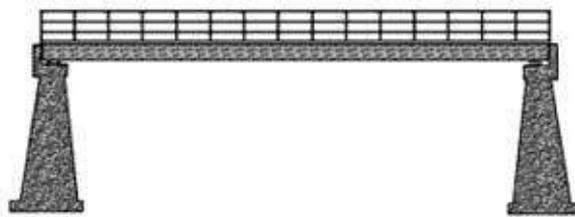


Fig. 1.22. Puente con apoyo fijo articulado: el puente puede rotar en uno de sus extremos que no puede desplazarse horizontalmente ni verticalmente.



**b) Apoyo móvil articulado:** Permite el giro de la viga en los puntos de apoyo, además del desplazamiento horizontal.

Fig. 1.23. a) b) c) Representación esquemática del apoyo móvil articulado con su respectiva reacción.

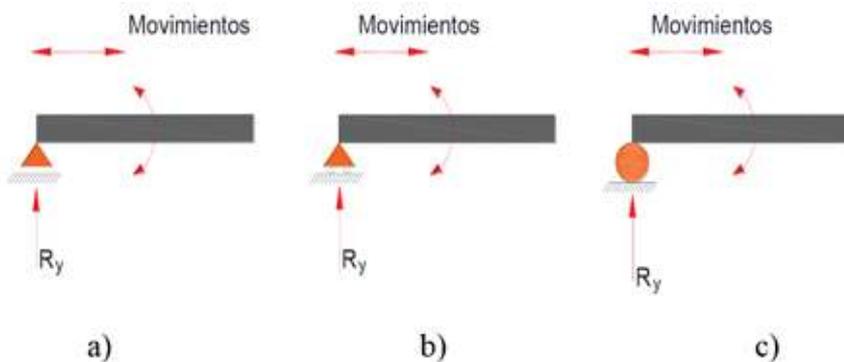
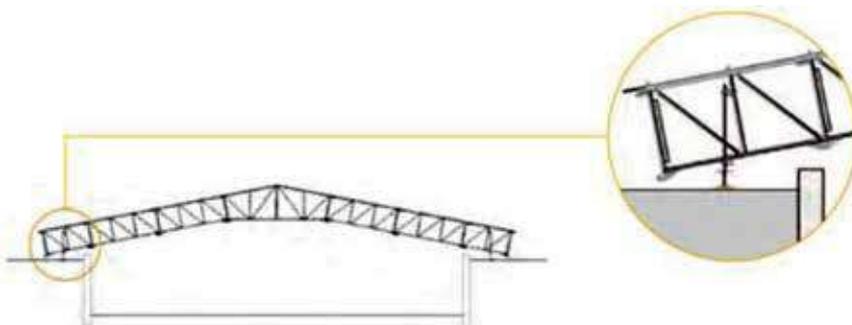


Fig. 1.24. La estructura de techo en la figura tiene apoyos móviles articulados, debido a que necesita desplazamiento horizontal para evitar los esfuerzos de compresión a causa de la expansión del material con el calor del ambiente.



c) **Empotramiento o cantiléver:** Con este tipo de apoyo, la viga no puede girar ni desplazarse en sentido vertical ni horizontal; en consecuencia, aparecen varias reacciones ejercidas por la pared de sujeción.

Fig. 1.25. a) b) Viga en cantiléver y sus respectivas reacciones.

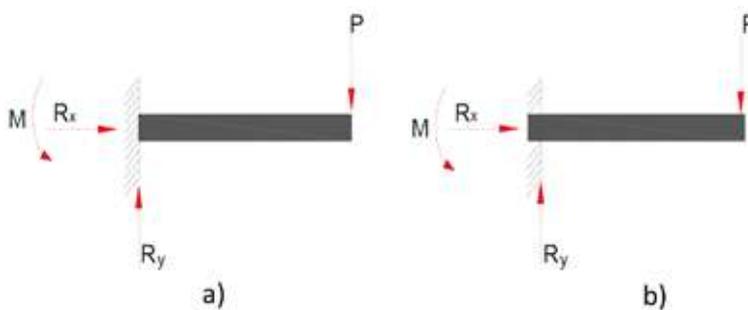


Fig. 1.26. Viga empotrada que sostiene al puente: no permite rotación ni traslación vertical y horizontal.



**d) Articulación (bisagra):** Permite unir, conectar dos secciones de viga.

Fig. 1.27. a) b) Representación esquemática de la articulación con sus respectivas reacciones.

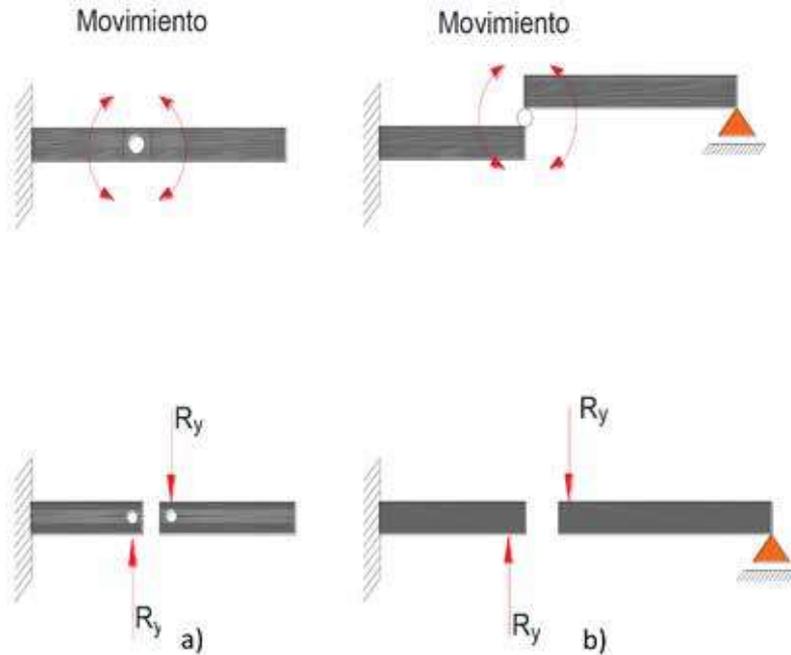
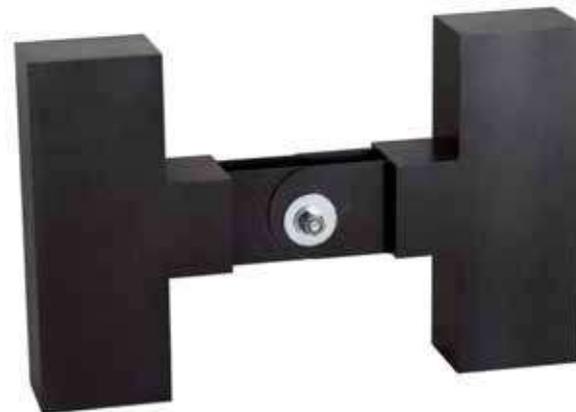


Fig. 1.28. En la figura se muestra una articulación con la que, durante los terremotos, las articulaciones y las vigas metálicas permiten a la estructura de un edificio responder con flexibilidad cuando se someten a los movimientos del suelo, manteniendo cierta elasticidad estructural durante sismos moderados.



#### 1.1.2.4 Clasificación de las vigas

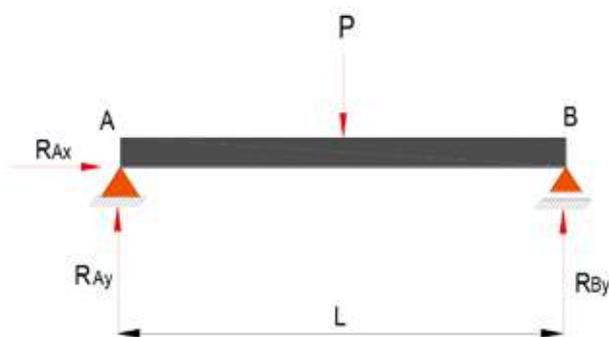
Por su resolución, se clasifican en dos tipos:

##### a) ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS:

Son aquellas vigas en que las ecuaciones de la estática ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma MO = 0$ ) son suficientes para calcular el valor de las reacciones actuantes. A este grupo pertenecen:

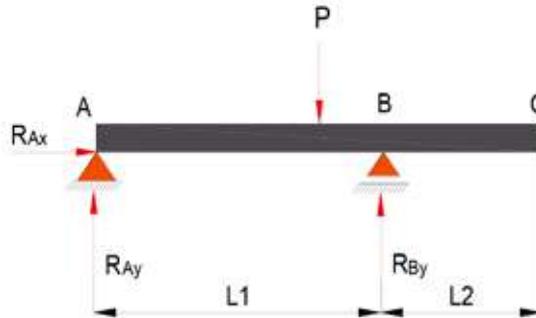
**a.1) Viga simplemente apoyada:** Son aquellas en las cuales los apoyos no presentan restricción alguna al giro y al desplazamiento horizontal al menos en un apoyo. La distancia entre apoyos se denomina luz.

Fig. 1.29. Representación esquemática de una viga simplemente apoyada.



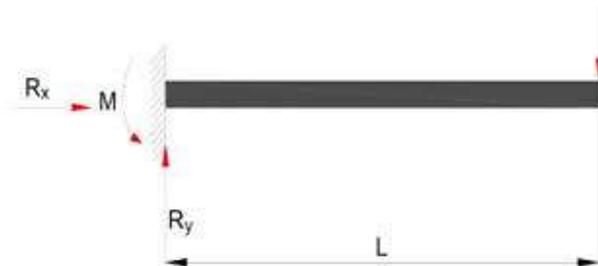
**a.2) Viga simplemente apoyada y con un tramo en voladizo:** Es aquella viga con 2 tramos: uno simplemente apoyado, y el otro que sobresale de los apoyos, quedando en voladizo.

Fig. 1.30. Representación esquemática de una viga simplemente apoyada y con un tramo en voladizo.



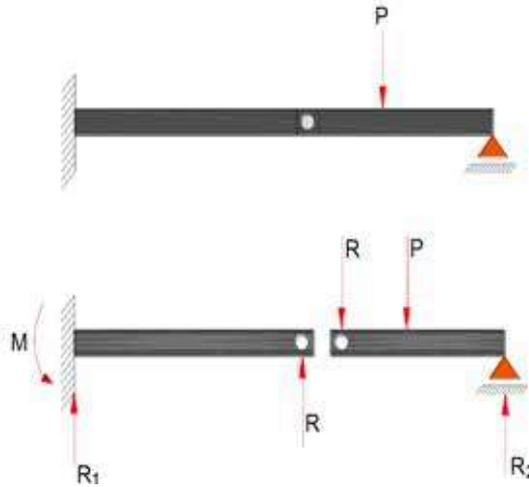
**a.3) Viga empotrada o en cantiléver:** Se trata de vigas empotradas en un extremo, mientras tanto el otro permanece libre.

Fig. 1.31. Representación esquemática de una viga en voladizo.



**a.4) Viga articulada:** Está formada por dos o más tramos. Estos tramos están unidos mediante una articulación, la que permite que en estos puntos las vigas puedan girar fácilmente.

Fig. 1.32. Representación esquemática de una viga articulada.

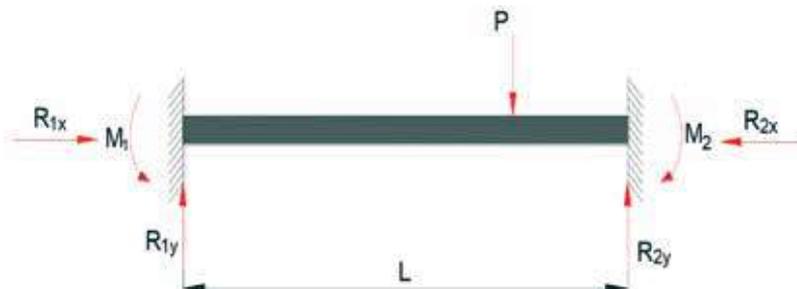


## b) ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS O HIPERESTÁTICAS

Para ser calculadas las reacciones de estas vigas, las ecuaciones básicas de la estática ( $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ ,  $\Sigma M_o = 0$ ) no son suficientes. Es necesario plantear un método de cálculo; por ejemplo, el estudio de las deformaciones en las vigas, donde tenemos las siguientes:

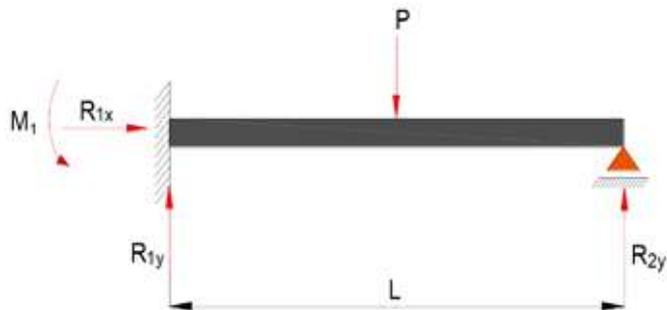
**b.1) Viga doblemente empotrada:** Es aquella viga cuyos extremos están empotrados.

Fig. 1.33. Representación esquemática de una viga doblemente apoyada.



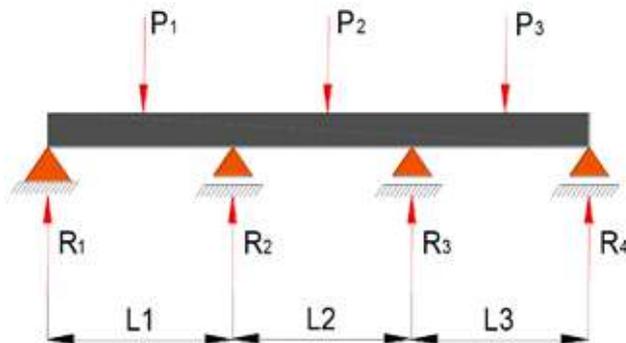
**b.2) Viga empotrada y simplemente apoyada:** Tiene uno de sus extremos empotrado y el otro simplemente apoyado.

Fig. 1.34. Representación esquemática de una viga empotrada y simplemente apoyada.



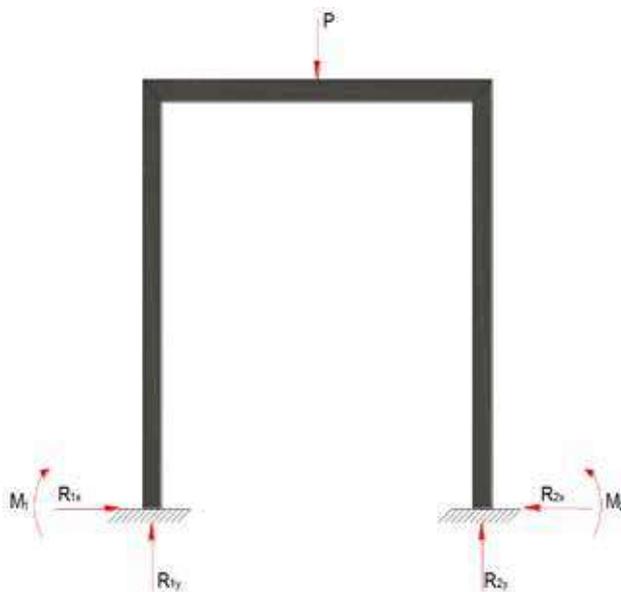
**b.3) Viga de apoyos continuos:** Generalmente tiene dispuestos varios apoyos móviles articulados y solamente un fijo articulado.

Fig. 1.35. Representación esquemática de una viga de apoyos continuos.



**b.4) Pórticos:** Son vigas quebradas cuyos extremos se encuentran empotrados.

Fig. 1.36. Representación esquemática de un pórtico.



Hasta el momento hemos visto los elementos, cargas, apoyos y tipos de vigas; ahora tenemos que realizar un pequeño repaso de cálculo de las reacciones por medio de la estática.

## 1.1.2.5 Cálculo de reacciones

a) Viga simplemente apoyada con carga puntual.

Problema modelo 1.1

Fig. 1.37a. Esquema para el problema 1.1

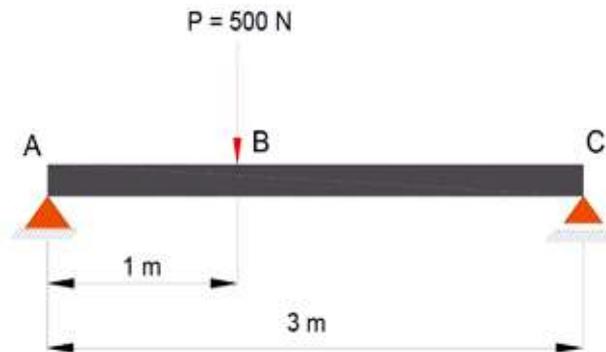
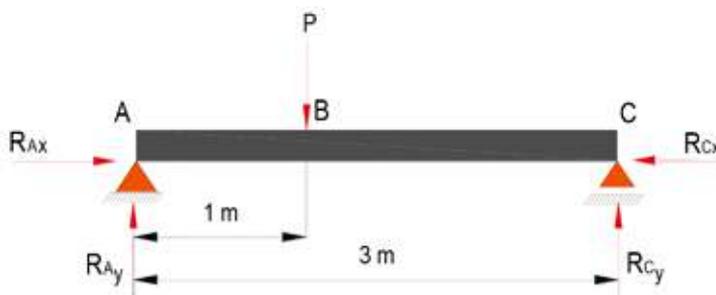


Fig. 1.37b. Diagrama de reacciones.



$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$P(1\text{m}) - R_{Cy}(3\text{m}) = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{500\text{ N}(1\text{m})}{3\text{m}}$$

$$R_{Cy} = 166,66\text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P + R_{Cy} = 0$$

$$R_{Ay} = P - R_{Cy}$$

$$R_{Ay} = 500\text{ N} - 166,66\text{ N}$$

$$R_{Ay} = 333,33\text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+$$

$$R_{Ax} = 0\text{ N}$$

**Problema modelo 1.2**

Fig. 1.38a. Esquema para el problema 1.2

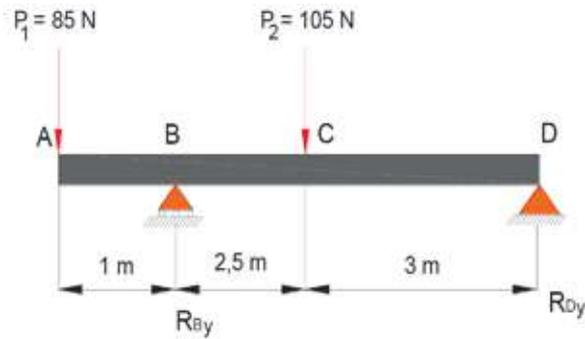
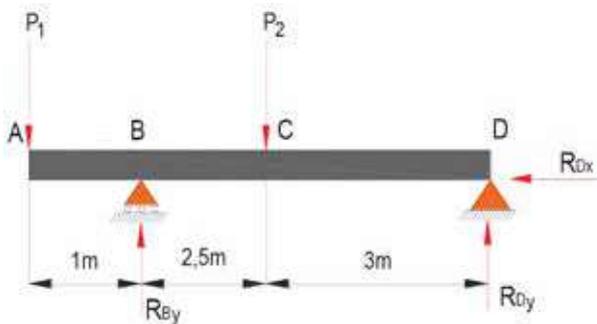


Fig. 1.38b. Diagrama de reacciones



$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ -P_1(1,5m) + P_2(2,5m) - \\ R_{Dy}(7m) = 0 \\ -85\text{ N}(1,5m) + 105\text{ N}(2,5m) - \\ R_{Dy}(7m) = 0 \\ R_{Dy} = \frac{-85\text{ N}(1,5m) + 105\text{ N}(2,5m)}{7m} \end{aligned}$$

$$R_{Dy} = 19,2857\text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^- \\ -P_1 + R_{By} - P_2 + R_{Dy} = 0 \\ R_{By} + R_{Dy} = P_1 + P_2 \\ R_{By} + 19,2857\text{ N} = 85\text{ N} + 105\text{ N} \\ R_{By} = 85\text{ N} + 105\text{ N} - 19,2857\text{ N} \end{aligned}$$

$$R_{By} = 170,7143\text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+ \\ R_{Dx} = 0\text{ N} \end{aligned}$$

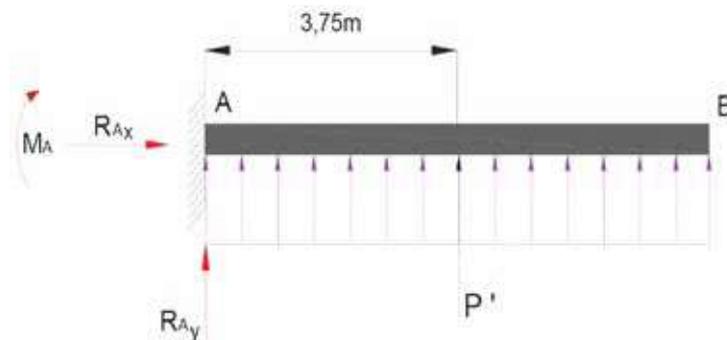
b) Carga uniformemente distribuida.

Problema modelo 1.3

Fig. 1.39a. Esquema para el problema 1.3



Fig. 1.39b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = q * L$$

$$P' = 55 \frac{\text{N}}{\text{m}} (7,5 \text{ m})$$

$$P' = 412,5 \text{ N} \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^-$$

$$-R_{Ay} + P' = 0$$

$$-R_{Ay} + 412,5 \text{ N} = 0$$

$$R_{Ay} = 412,5 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^-$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$M_A - P' \left( \frac{7,5\text{m}}{2} \right) = 0$$

$$M_A - 412,5 \text{ N} \left( \frac{7,5\text{m}}{2} \right) = 0$$

$$M_A = 1546,875 \text{ N.m}$$

**Problema modelo 1.4**

Fig. 1.40a. Esquema problema 1.4

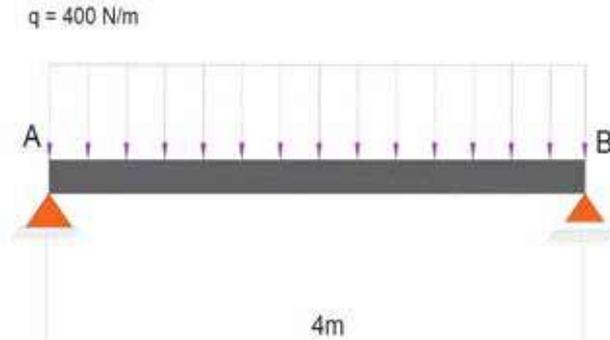
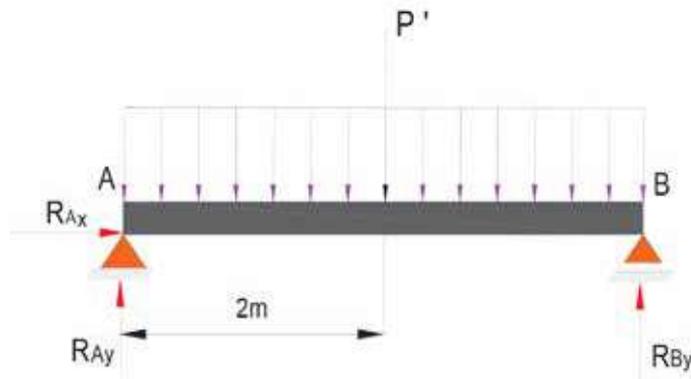


Fig. 1.40b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = q * L$$

$$P' = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}} (4\text{m})$$

$P' = 1600 \text{ N} \rightarrow$  ubicado en el cg

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrow^+ \quad \curvearrow^-$$

$$P'(2\text{m}) - R_{By}(4\text{m}) = 0$$

$$1600 \text{ N}(2\text{m}) - R_{By}(4\text{m}) = 0$$

$$R_{By} = \frac{1600 \text{ N}(2\text{m})}{(4\text{m})}$$

$R_{By} = 800 \text{ N}$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P' + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} = 1600 \text{ N} - 800 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = 800 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ N}$$

c) Viga en voladizo con carga variada triangular.

Problema modelo 1.5

Fig. 1.41a. Esquema para el problema 1.5

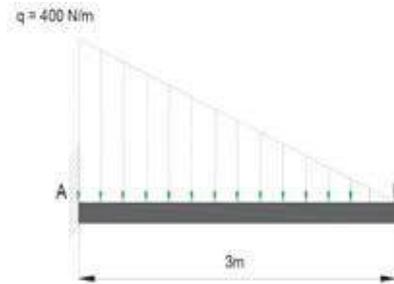
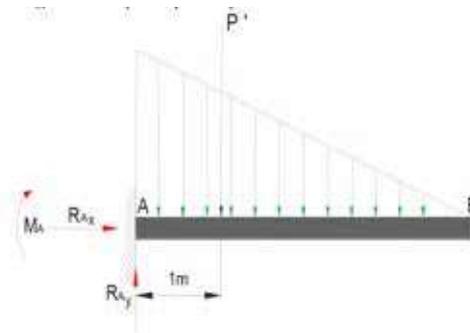


Fig. 1.41b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = \frac{q * L}{2}$$

$$P' = \frac{400 \frac{N}{m} (3m)}{2}$$

$$P' = 600 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^- \\ P'(1m) - M_A &= 0 \\ M_A &= 600 N(1m) \\ M_A &= 600 N \cdot m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^- \\ R_{Ay} - P' &= 0 \\ R_{Ay} - 600 N &= 0 \\ R_{Ay} &= 600 N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+ \\ R_{Ax} &= 0 N \end{aligned}$$

### Problema modelo 1.6

Fig. 1.42a. Esquema para el problema 1.6

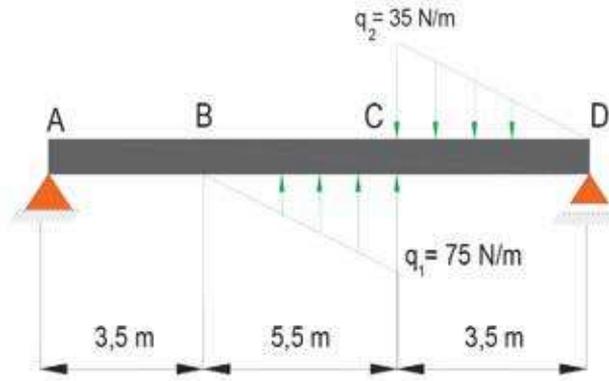
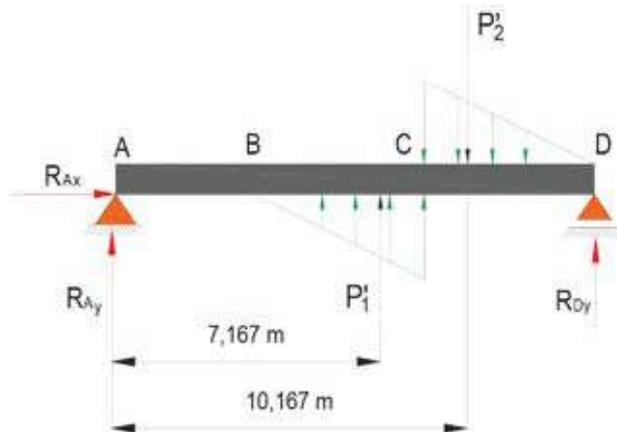


Fig. 1.42b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P'_1 = \frac{q_1 * L}{2}$$

$$P'_1 = \frac{75 \frac{N}{m} (5,5m)}{2}$$

$$P'_1 = 206,25 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$P'_2 = \frac{q_2 * L}{2}$$

$$P'_2 = \frac{35 \frac{N}{m} (3,5m)}{2}$$

$$P'_2 = 61,25 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$-R_{Dy}(12,5m) - P'_1(3,5 + \frac{2}{3} * 5,5m) + P'_2(9 + \frac{1}{3} * 3,5m) = 0$$

$$-R_{Dy}(12,5m) - 206,25 N \left[ 3,5 + \left( \frac{2}{3} * 5,5m \right) \right] + 61,25 N \left[ 9 + \left( \frac{1}{3} * 3,5m \right) \right] = 0$$

$$R_{Dy} = -68,43 N$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} + P'_1 - P'_2 + R_{Dy} = 0$$

$$R_{Ay} = -P'_1 + P'_2 - R_{Dy}$$

$$R_{Ay} = (-206,25 + 61,25 + 68,43) N$$

$$R_{Ay} = -76,57 N$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+$$

$$R_{Ax} = 0 N$$

d) Viga simplemente apoyada con carga combinada.

Problema modelo 1.7

Fig. 1.43a. Esquema para el problema 1.7

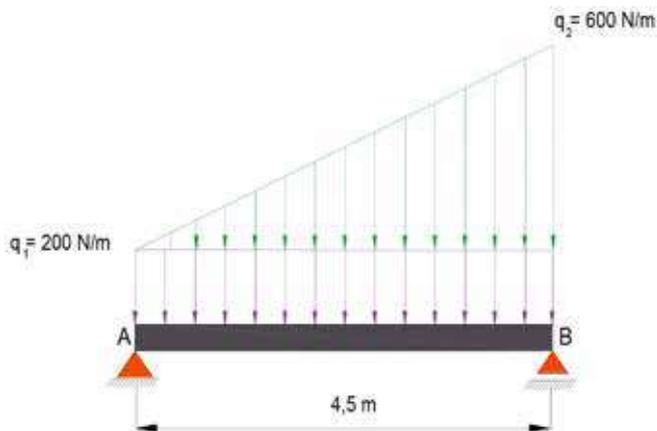
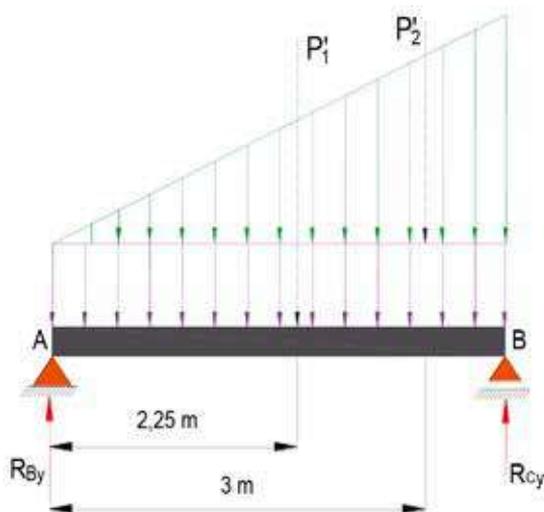


Fig. 1.43b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P'_1 = q_1 L$$

$$P'_1 = 200 \text{ N} (4,5\text{m})$$

$$P'_1 = \mathbf{900 \text{ N}}$$

$$P'_2 = \frac{(q_2 - q_1)L}{2}$$

$$P'_2 = \frac{(600 - 200) \frac{\text{N}}{\text{m}} (4,5\text{m})}{2}$$

$$P'_2 = \mathbf{900 \text{ N}}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ P'_1 \left( \frac{4,5}{2} \text{m} \right) + P'_2 \left( \frac{2}{3} * 4,5\text{m} \right) \\ - R_{By} (4,5\text{m}) = 0 \\ 900 \text{ N} (2,25\text{m}) + 900 \text{ N} (3\text{m}) \\ - R_{By} (4,5\text{m}) = 0 \end{aligned}$$

$$R_{By} = \frac{900 \text{ N} (2,25\text{m}) + 900 \text{ N} (3\text{m})}{4,5\text{m}}$$

$$R_{By} = \mathbf{1050 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P'_1 - P'_2 + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} = P'_1 + P'_2 - R_{By}$$

$$R_{Ay} = 900 \text{ N} + 900 \text{ N} - 1050 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = \mathbf{750 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+$$

$$R_{Ax} = \mathbf{0 \text{ N}}$$

### Problema modelo 1.8

Fig. 1.44a. Esquema para el problema 1.8

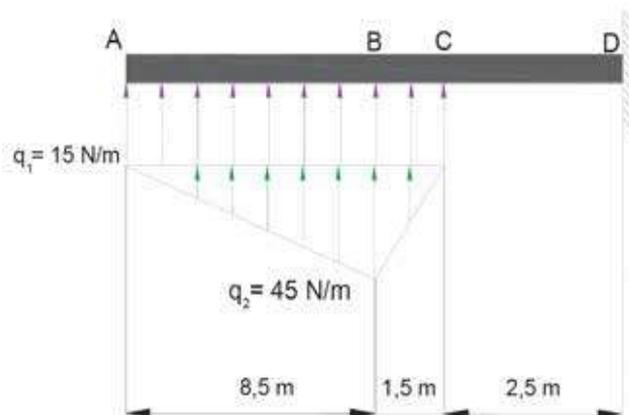
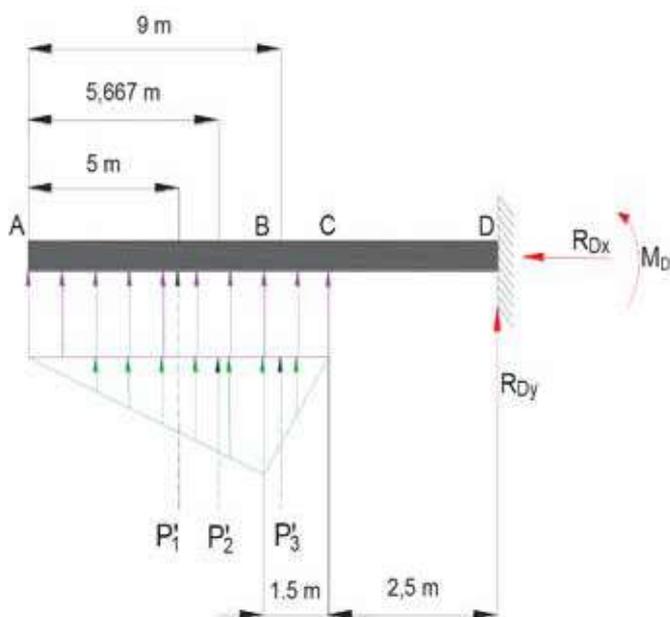


Fig. 1.44b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P'_1 = q_1 * L$$

$$P'_1 = 15 \frac{N}{m} (10 m)$$

$$P'_1 = 150 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$P'_2 = \frac{(q_2 - q_1) * L}{2}$$

$$P'_2 = \frac{(45 - 15) \frac{N}{m} (8,5m)}{2}$$

$$P'_2 = 127,5 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$P'_3 = \frac{(q_2 - q_1) * L}{2}$$

$$P'_3 = \frac{(45 - 15) \frac{N}{m} (1,5m)}{2}$$

$$P'_3 = 22,5 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$P'_1 + P'_2 + P'_3 - R_{Dy} = 0$$

$$R_{Dy} = P'_1 + P'_2 + P'_3$$

$$R_{Dy} = 150 N + 127,5 N + 22,5 N$$

$$R_{Dy} = 300 N$$

$$\sum F_x = 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+$$

$$R_{Dx} = 0 N$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$-P'_1 \left( \frac{8,5}{2} m \right) - P'_2 \left( \frac{2}{3} * 8,5m \right)$$

$$- P'_3 \left[ 8,5 + \left( \frac{1}{3} * 1,5m \right) \right]$$

$$+ R_{Dy} (12,5m) - M_D = 0$$

$$M_D = -150 N \left( \frac{8,5}{2} m \right) - 127,5 N \left( \frac{2}{3} * 8,5m \right)$$

$$- 22,5 N \left[ 8,5 + \left( \frac{1}{3} * 1,5m \right) \right]$$

$$+ 300 N (12,5m)$$

$$M_D = 2187,5 N.m$$

e) Viga simplemente apoyada con momento concentrado.

Problema modelo 1.9

Fig. 1.45a. Esquema para el problema 1.9.

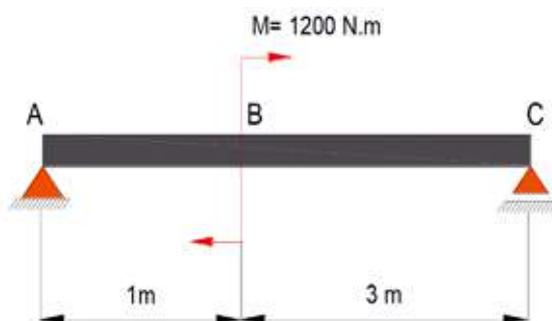
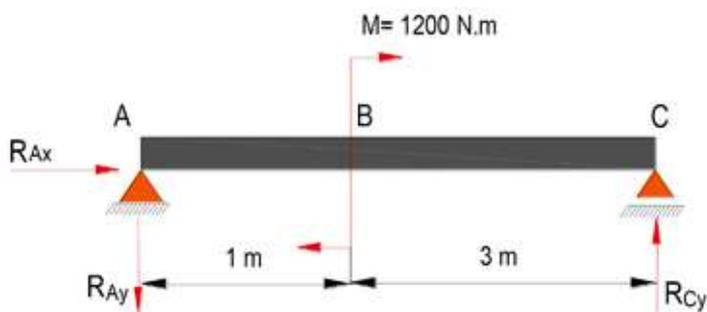


Fig. 1.45b. Diagrama de reacciones.



$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ M - R_{Cy}(4m) &= 0 \\ R_{Cy} &= \frac{1200 \text{ N.m}}{4m} \end{aligned}$$

$$R_{Cy} = 300 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^- \\ -R_{Ay} + R_{Cy} &= 0 \\ R_{Ay} &= R_{Cy} \end{aligned}$$

$$R_{Ay} = 300 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+ \\ R_{Ax} &= 0 \text{ N} \end{aligned}$$

Problema modelo 1.10

Fig. 1.46a. Esquema para el problema 1.10

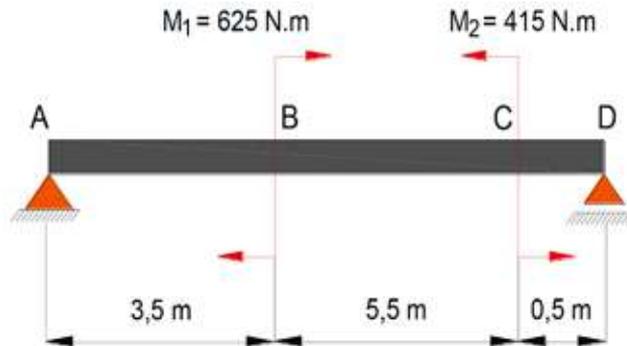
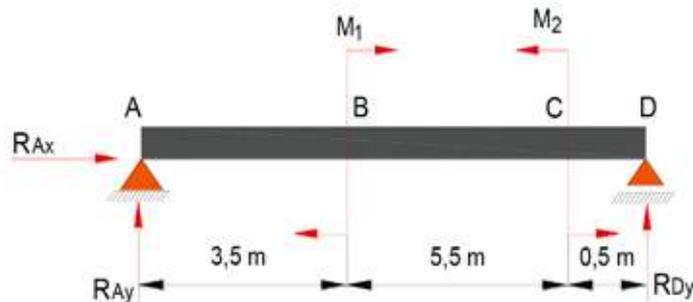


Fig. 1.46b. Diagrama de reacciones.



$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \quad \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ M_1 - M_2 - R_{Dy}(9,5m) &= 0 \\ R_{Dy} &= \frac{(-625 + 415) \text{ N.m}}{9,5 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$R_{Dy} = -22,1052 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad \uparrow \quad \downarrow \\ R_{Ay} + R_{Dy} &= 0 \\ R_{Ay} &= -R_{Dy} \end{aligned}$$

$$R_{Ay} = 22,1052 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \leftarrow \quad \rightarrow \\ R_{Ax} &= 0 \text{ N} \end{aligned}$$

f) Viga articulada con distintos tipos de carga.

Problema modelo 1.11

Fig. 1.47a. Esquema para el problema 1.11

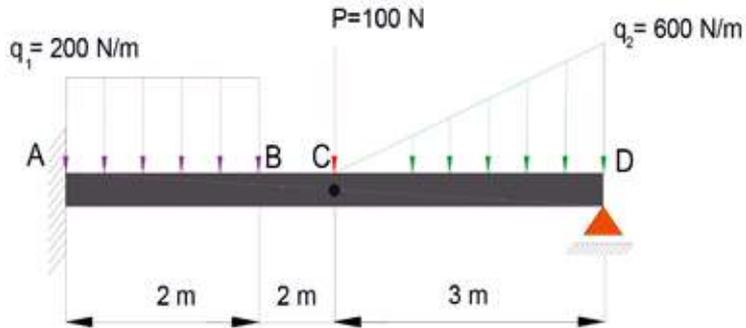
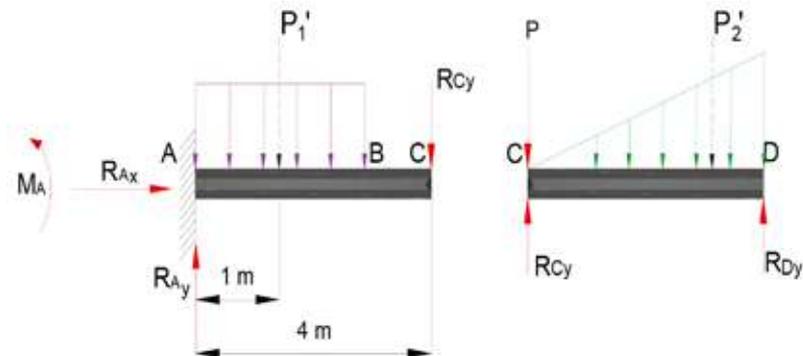


Fig. 1.47b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



Nota: La carga  $P$  se ubica a cualquiera de los lados.

$$P'_1 = q_1(2m)$$

$$P'_1 = \left(200 \frac{N}{m}\right)(2m)$$

$$P'_1 = 400 \text{ N}$$

$$P'_2 = \frac{q_2(3m)}{2}$$

$$P'_2 = \frac{\left(600 \frac{N}{m}\right)(3m)}{2}$$

$$P'_2 = 900 \text{ N}$$

TRAMO CD

$$\sum M_D = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$-P'_2 \left( \frac{1}{3} m \right) - P(3m) + R'_{Cy}(3m) = 0$$

$$R'_{Cy} = \frac{900 N(1m) + 100 N(3m)}{3m}$$

$$\mathbf{R'_{Cy} = 400}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R'_{Cy} - P - P'_2 + R_{Dy} = 0$$

$$R_{Dy} = -R'_{Cy} + P + P'_2$$

$$R_{Dy} = (-400 + 100 + 900) N$$

$$\mathbf{R_{Dy} = 600 N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow^+ \quad \leftarrow^-$$

$$\mathbf{R_{Ax} = 0 N}$$

TRAMO AC

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P'_1 - R'_{Cy} = 0$$

$$R_{Ay} = P'_1 + R'_{Cy}$$

$$R_{Ay} = 400 N + 400 N$$

$$\mathbf{R_{Ay} = 800 N}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$P'_1(1m) + R'_{Cy}(4m) - M_A = 0$$

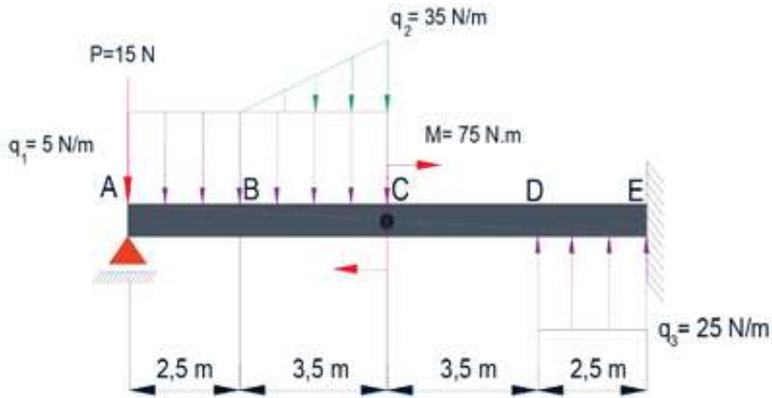
$$M_A = P'_1(1m) + R'_{Cy}(4m)$$

$$M_A = 400 N(1m) + 400 N(4m)$$

$$\mathbf{M_A = 2000 N \cdot m}$$

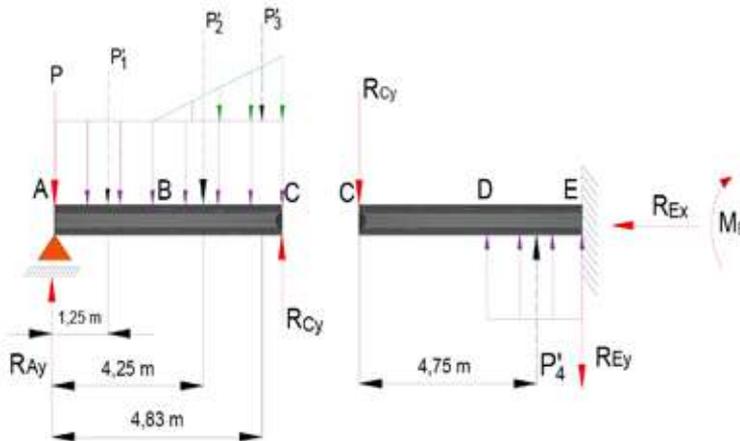
**Problema modelo 1.12**

Fig. 1.48a. Esquema para el problema 1.12



**Análisis**

Fig. 1.48b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



*Nota: El momento ubicado en el punto C, debido a que se encuentra en una articulación, no se toma en cuenta, ya que solo haría girar al perno de sujeción entre ambos tramos de viga AC y CE.*

$$P'_1 = q_1 * L$$

$$P'_1 = 5 \frac{N}{m} (2,5 m)$$

$$P'_1 = 12,5 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$P'_2 = q_1 * L$$

$$P'_2 = 5 \frac{N}{m} (3,5 m)$$

$$P'_2 = 17,5 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$P'_3 = \frac{(q_2 - q_1) * L}{2}$$

$$P'_3 = \frac{(35 - 5) \frac{N}{m} (3,5 m)}{2}$$

$$P'_3 = 52,5 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

$$P'_4 = q_3 * L$$

$$P'_4 = 25 \frac{N}{m} (2,5 m)$$

$$P'_4 = 62,5 N \rightarrow \text{ubicado en el cg}$$

TRAMO AC

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright \quad \curvearrowleft$$

$$P'_1(1,25m) + P'_2 \left( 2,5 m + \frac{3,5}{2} m \right) + P'_3 \left( 2,5 m + \frac{2}{3} * 3,5 m \right) - R_{Cy}(6m) = 0$$

$$12,5 N(1,25m) + 17,5 N \left( 2,5 m + \frac{3,5}{2} m \right) + 52,5 N \left( 2,5 m + \frac{2}{3} * 3,5 m \right) - R_{Cy}(6m) = 0$$

$$R_{Cy} = 57,2916 N$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow_-$$

$$-P + R_{Ay} - P'_1 - P'_2 - P'_3 +$$

$$R_{Cy} = 0$$

$$R_{Ay} = P + P'_1 + P'_2 + P'_3 -$$

$$R_{Cy}$$

$$R_{Ay}$$

$$= (15 + 12,5 + 17,5$$

$$+ 52,5 - 57,2916) N$$

$$R_{Ay} = 40,2084 N$$

$$\sum F_x = 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+$$

$$R_{Ex} = 0 N$$

TRAMO CE

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^-$$

$$-R_{Cy} + P'_4 - R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} = -R_{Cy} + P'_4$$

$$R_{Ey} = -57,2916 \text{ N} + 62,5 \text{ N}$$

$$R_{Ey} = 5,2084 \text{ N}$$

$$\sum M_E = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$-R_{Cy}(6\text{m}) + P'_4(1,25\text{m}) + M_{Ey} =$$

$$0$$

$$M_{Ey} = 57,2916 \text{ N}(6\text{m}) -$$

$$62,5 \text{ N}(1,25\text{m})$$

$$M_E = 265,6246 \text{ N.m}$$

### 1.1.3 Fuerzas cortantes - momentos flectores

En este apartado se analizarán los esfuerzos y las deformaciones en elementos prismáticos sujetos a flexión. La flexión es un concepto muy importante, ya que se utiliza en el diseño de muchos componentes estructurales y de máquinas, tales como vigas y traveses.

**Prisma mecánico.** También conocido como pieza prismática, es un modelo mecánico de sólido deformable, usado para calcular elementos estructurales como vigas y pilares. Geométricamente, un prisma mecánico puede generarse al mover una sección transversal plana a lo largo de una curva, de tal manera que el centro de masa de la sección esté en todo momento sobre la curva y el vector tangente a la curva sea perpendicular a la sección transversal plana.

Las vigas son comúnmente elementos prismáticos largos y rectos. Las vigas de acero y de aluminio juegan un papel importante tanto en la ingeniería estructural como en la mecánica. Las vigas de madera se emplean, sobre todo, en la construcción residencial. En la mayor parte de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga. Tales cargas transversales solo causan flexión y corte en la viga. Cuando las cargas no se encuentran en ángulo recto con la viga, también producen cargas axiales en ella.

El par flector  $M_f$  crea esfuerzos normales en la sección transversal, mientras que la fuerza cortante  $V$  produce esfuerzos cortantes en dicha sección. En la mayoría de los casos, el criterio dominante en el diseño por resistencia de una viga es el valor máximo del esfuerzo normal en la viga. La determinación de los esfuerzos normales en una viga será el tema a tratar a continuación.

### 1.1.3.1 Diagramas de cortante y momento flector

Para construir los diagramas de cortante y momento flector de una viga sometida a varios tipos de carga, se debe efectuar el análisis realizando un corte en cada tramo de viga.

#### CONVENCIÓN DE SIGNOS

Si el análisis se va a realizar de izquierda a derecha, la fuerza cortante y el momento flector que aparecerán serán negativos (figura 1.49a). Lo contrario, es decir, si el análisis de cada tramo de la viga se va a realizar de derecha a izquierda, la fuerza cortante y el momento flector que aparecerán en la viga producto del corte realizado para su análisis, serán positivos (figura 1.49b)

Fig. 1.49. Convención de signos para la construcción de diagrama de cortante y momento flector. a) Análisis de izquierda a derecha. b) De derecha a izquierda.

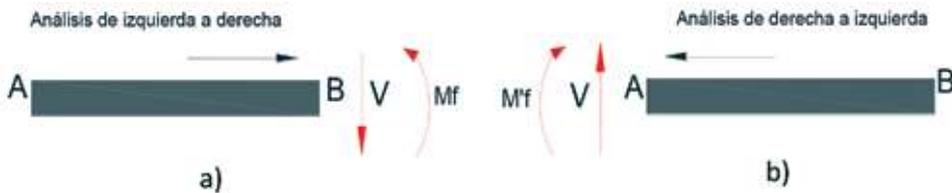


Fig. 1.50. Esquema de una viga simplemente apoyada.

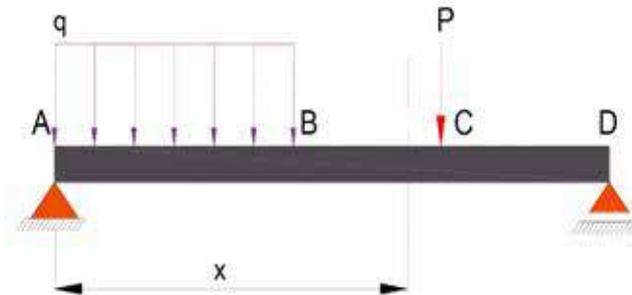
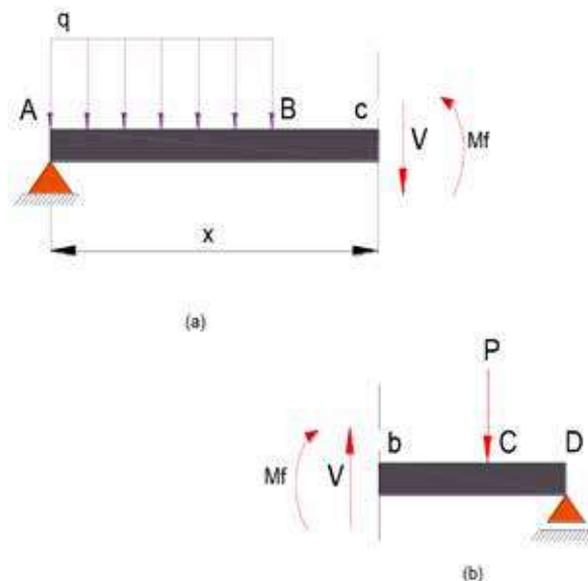


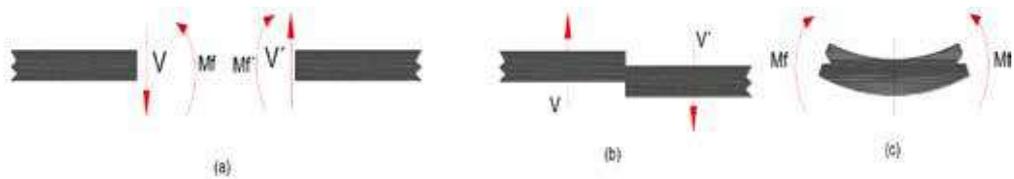
Fig. 1.51. Convención de signos en viga simplemente apoyada.  
a) Izquierda a derecha. b) Derecha a izquierda.



En los ejemplos y problemas que realizaremos, los diagramas de cortante y momento flector se obtendrán determinando los valores de  $V$  y  $M_f$  en puntos de interés de la viga. Estos valores se calcularán efectuando un corte por cada tramo de viga, sea de izquierda a derecha o de derecha a izquierda (figura 1.49a y 1.49b) y considerando que se encuentra en equilibrio. Ya que las fuerzas cortantes  $V$  y  $V'$  tienen sentidos opuestos, el registrar el corte en el punto C con una flecha hacia arriba o hacia abajo no tendría significado, a menos que se indique al mismo tiempo cuál de los cuerpos libres AC y DB se está considerando. Por esta razón, el corte  $V$  se registrará con un signo: uno positivo si las fuerzas cortantes se dirigen como se observa en la figura 1.51b y uno negativo en el caso contrario (figura 1.51a). Una convención similar se aplicará al momento flector  $M_f$ . Se considera positivo si los pares flectores se dirigen como se muestra en la figura 1.51b, y negativos en el caso contrario (figura 1.51a).

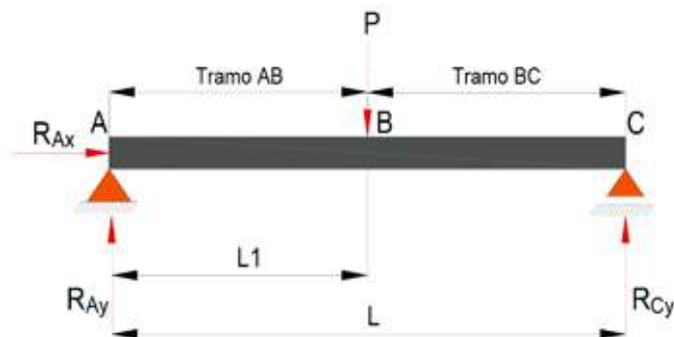
El momento flector en cualquier punto dado de una viga es positivo cuando las fuerzas externas que actúan sobre la viga tienden a flexionar la viga en ese punto, como se muestra en la figura 1.52c.

Fig. 1.52. Convención de signos para la construcción de cortante y momento flector.



## CARGA PUNTUAL

Fig. 1.53a. Esquema de una viga simplemente apoyada con una carga puntual.



$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ P(L_1) - R_{Cy}(L) = 0 \\ R_{Cy} = \frac{P(L_1)}{L} \end{aligned}$$

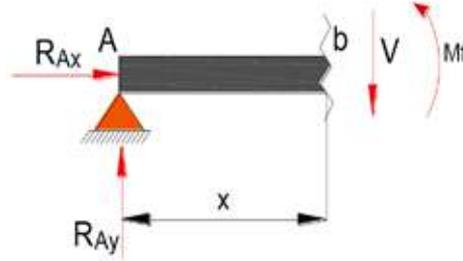
$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow + \quad \downarrow - \\ R_{Ay} - P + R_{Cy} = 0 \\ R_{Ay} + R_{Cy} = P \\ R_{Ay} = P - R_{Cy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad + \rightarrow - \leftarrow \\ R_{Ax} = 0 \end{aligned}$$

Construcción del diagrama de cortante y momento flector (análisis de izquierda a derecha).

TRAMO AB

Fig. 1.53b. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow + \downarrow - \\ -V + R_{Ay} = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad + \rightarrow - \leftarrow$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ kg}$$

$$V = R_{Ay}$$

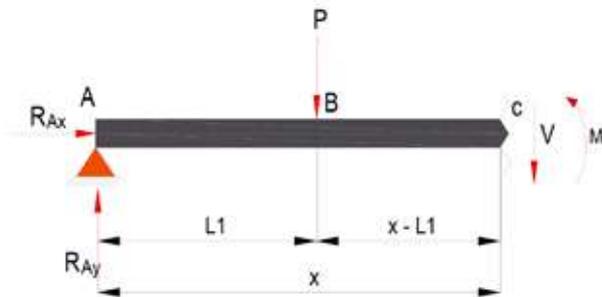
$$\Sigma M_b = 0 \quad \curvearrow + \curvearrow -$$

$$R_{Ay}(x) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x)$$

TRAMO BC

Fig. 1.53c. Viga realizada corte en tramo AC análisis izquierda-derecha.



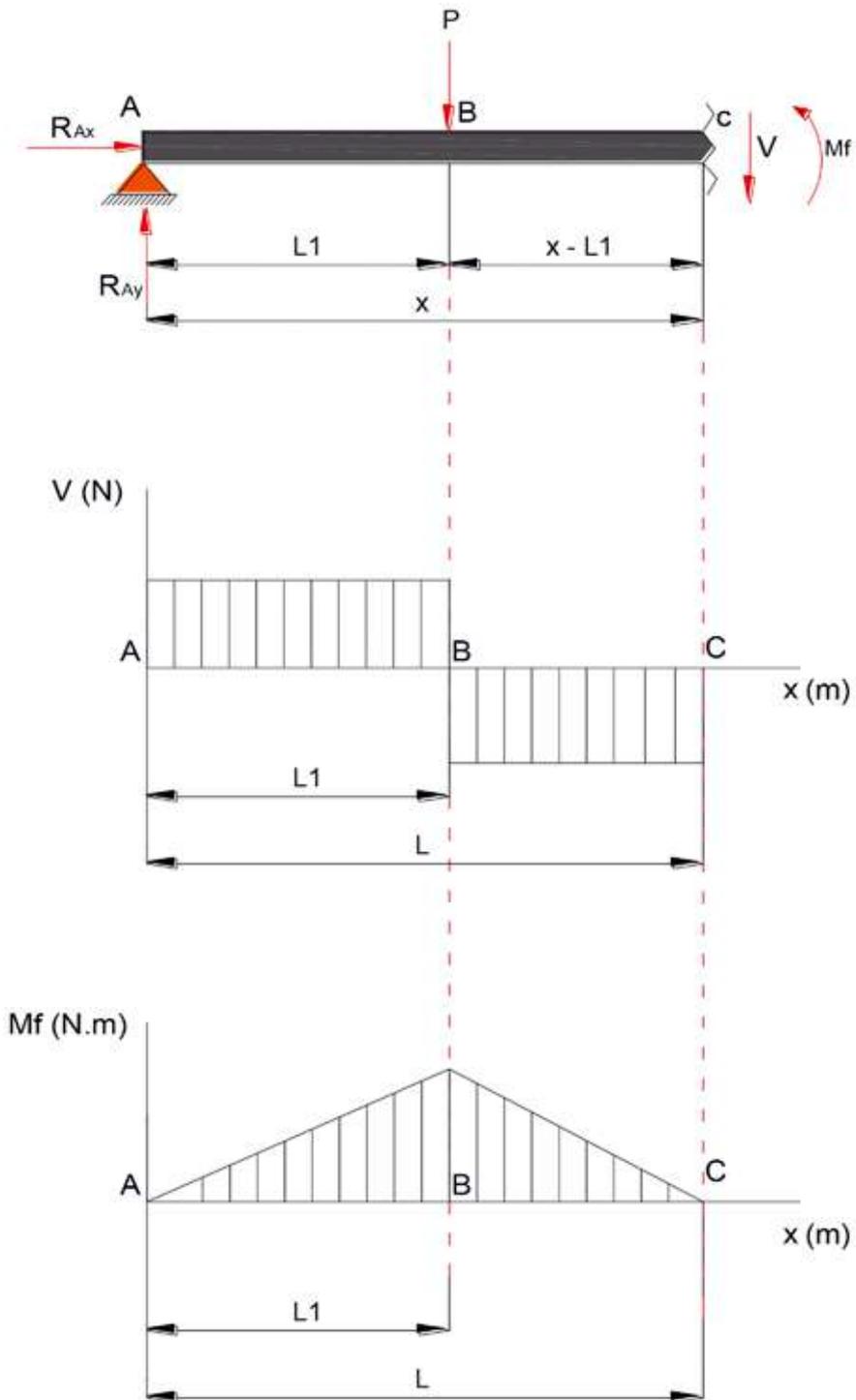
$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow + \downarrow - \\ R_{Ay} - P - V = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_C = 0 \quad \curvearrow + \curvearrow - \\ R_{Ay}(x) - P(x - L_1) - M_f = 0 \end{aligned}$$

$$V = R_{Ay} - P$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P(x - L_1)$$

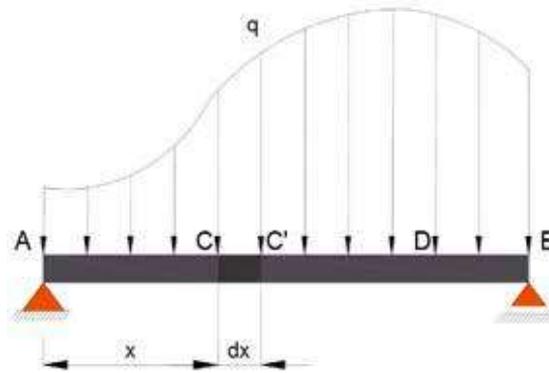
Fig. 1.53d. Diagrama de cortante y momento flector de una carga puntual.



### 1.1.3.2 Relaciones entre la carga, el cortante y el momento flector

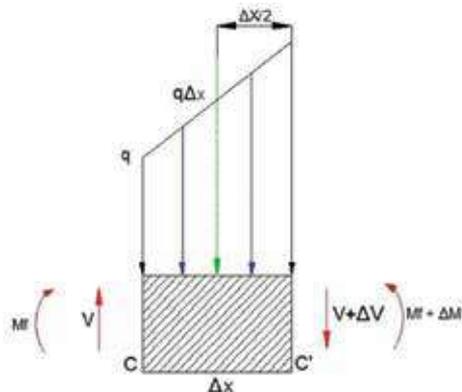
La construcción del diagrama de cortante y, especialmente, del diagrama de momento flector se facilitará en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, el cortante y el momento flector.

Fig. 1.54. Relación entre la carga y el momento flector.



Se considera una viga simplemente apoyada AB que lleva una carga distribuida que por unidad de longitud (figura 1.54), y sean C y C' dos puntos en la viga a una distancia  $\Delta x$  uno del otro. El cortante y el momento flector en C se denotarán por  $V$  y por  $M_f$ , respectivamente, y se supondrán positivos; el cortante y el momento flector en C' se denotarán por  $V + \Delta V$  y por  $M_f + \Delta M_f$ .

Fig. 1.55. Relación entre la carga y el momento flector.



Ahora observamos que se desprende la porción de viga  $CC'$  y se dibuja su diagrama de cuerpo libre (figura 1.55). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud  $q\Delta x$  y fuerzas y pares internos en  $C$  y en  $C'$ . Ya que el cortante y el momento flector se han supuesto positivos, las fuerzas y pares se dirigirán como se indica en la figura.

**Relaciones entre la carga y el cortante:** Al realizar la sumatoria de fuerzas verticales que actúan sobre el cuerpo  $CC'$ , podemos observar que es igual a cero, y por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v &= 0 \quad \uparrow + \downarrow - \\ V - (V + \Delta V) - q\Delta x &= 0 \\ \Delta V &= -q\Delta x\end{aligned}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación entre  $\Delta x$  y haciendo que  $\Delta x$  se aproxime a cero, se tiene que:

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (\text{Ec. 1.1})$$

La ecuación 1.1 indica que para una viga cargada como se muestra en la figura 1.54, la pendiente  $dV/dx$  de la curva de cortante es negativa, el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.

Integrando la ecuación 1.1 entre los puntos  $C$  y  $D$ , se describe:

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} q dx \quad (\text{Ec. 1.2})$$

$$V_D - V_C = - (\text{area bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \quad (\text{Ec. 1.2'})$$

Este resultado también podría haberse obtenido considerando el equilibrio de la porción de viga  $CD$ , ya que el área bajo la curva de carga presenta el total de la carga aplicada entre  $C$  y  $D$ .

Debe también tomarse en cuenta que la ecuación 1.1 no es válida en un punto donde se aplique una carga concentrada; la curva de cortante es discontinua en tal punto como se demostró anteriormente; de manera similar, las ecuaciones 1.2

y 1.2' dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, debido a que no consideran el cambio súbito en el cortante causado por la carga concentrada; por lo tanto, la ecuación 1.2 y 1.2' deberán aplicarse solo entre cargas concentradas sucesivas.

**Relaciones entre cortante y momento flector:** Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 1.55, y escribiendo ahora que la sumatoria de momentos alrededor de C' es cero, se tiene:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{C'} &= 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ -(M + \Delta M) + M + V\Delta x - q\Delta x \frac{\Delta x}{2} &= 0 \\ V\Delta x - q\Delta x \frac{\Delta x}{2} &= \Delta M \\ \Delta M &= V\Delta x - \frac{1}{2}q(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre  $\Delta x$  y haciendo que  $\Delta x$  se aproxime a cero, se tiene:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (\text{Ec 1.3})$$

La ecuación 1.3 indica que la pendiente  $dM/dx$  de la curva de momento flector es igual al valor de la cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde el cortante tenga un valor bien definido, es decir, en cualquier punto donde se encuentre aplicada una carga concentrada. La ecuación 1.3 también muestra que  $V = 0$  en puntos donde Mf es máximo. Esta propiedad facilita la determinación de los puntos donde es posible que la viga falle bajo flexión.

Integrando la ecuación 1.3 entre los puntos C y D, se escribe:

$$M_D Mf_D - M_C Mf_C = - \int_{x_C}^{x_D} V dx \quad (\text{Ec. 1.4})$$

$$M_D Mf_D - M_C Mf_C = \text{area bajo la curva de cortante entre C y D} \quad (\text{Ec. 1.4'})$$

Note que el área bajo la curva de cortante deberá considerarse positiva donde el esfuerzo cortante es positivo, y negativo donde el esfuerzo cortante es negativo. Las 2 ecuaciones 1.4 y 1.4' son válidas aun cuando se aplican cargas concentradas en C y D, en tanto la curva de cortante haya sido correctamente dibujada.

Las ecuaciones dejan de ser válidas, sin embargo, si un par se aplica en un punto entre C y D, ya que no toman en consideración el cambio súbito en el momento cortante causado por un par.

### 1.1.3.3 Ejemplos de diagrama de cortante y momento flector

#### a) Carga puntual.

#### Problema modelo 1.13

Fig. 1.56a. Esquema para el problema 1.13.

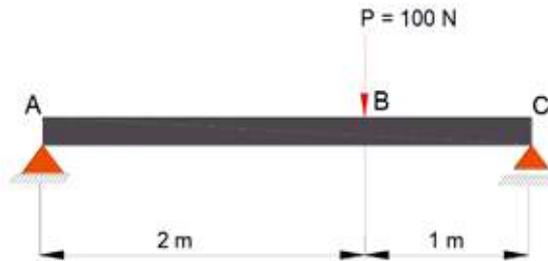
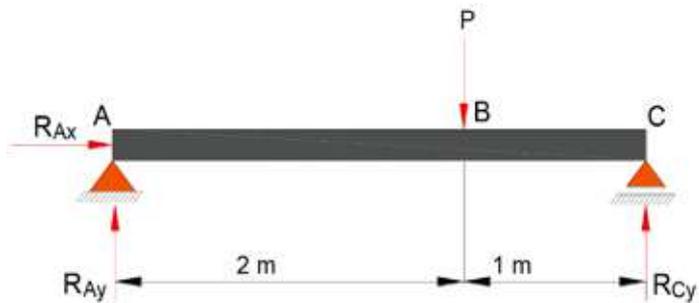


Fig. 1.56b. Diagrama de reacciones.



$$\Sigma F_x = 0 \quad + \rightarrow - \leftarrow$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$P(2\text{m}) - R_{Cy}(3\text{m}) = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{100\text{N}(2\text{m})}{3\text{m}}$$

$$R_{Cy} = 66,66 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow + \downarrow -$$

$$R_{Ay} - P + R_{Cy} = 0$$

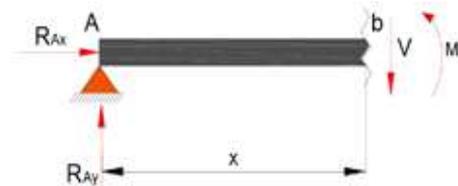
$$R_{Ay} = P - R_{Cy}$$

$$R_{Ay} = 100 \text{ N} - 66,66 \text{ N}$$

$$R_{Ay} = 33,33 \text{ N}$$

### TRAMO AB

Fig. 1.56c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\Sigma F_v = 0 \quad \uparrow + \downarrow -$$

$$R_{Ay} - V = 0$$

$$V = R_{Ay}$$

$$V = 33,33 \text{ N}$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow V = 33,33 \text{ N}$$

$$x = 2 \text{ m} \rightarrow V = 33,33 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad + \rightarrow - \leftarrow$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ N}$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$R_{Ay}(x) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x)$$

$$M_f = 33,33(x)$$

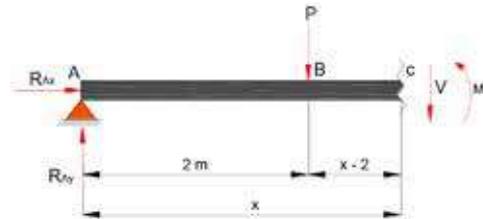
$$x = 0 \text{ m} \quad M_f = 0 \text{ N.m}$$

$$x = 2 \text{ m} \quad M_f$$

$$= 66,66 \text{ N.m}$$

## TRAMO BC

Fig. 1.56d. Viga realizada corte en tramo BC análisis izquierda-derecha.



$$\Sigma F_v = 0 \quad \uparrow + \downarrow -$$

$$R_{Ay} - P - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - P$$

$$V = 33,33 N - 100 N$$

$$x = 2 \text{ m} \quad V = -66,66 N$$

$$x = 3 \text{ m} \quad V = -66,66 N$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad \curvearrow + \curvearrow -$$

$$R_{Ay}(x) - P(x - 2) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P(x - 2)$$

$$M_f = 33,33(x) - 100(x - 2)$$

$$x = 2 \text{ m} \quad M_f = 66,66 \text{ N.m}$$

$$x = 3 \text{ m} \quad M_f = 0 N$$

Ahora vamos a comprobar integrando la ecuación del cortante y debemos obtener el valor del momento flector.

$$V = R_{Ay} - P$$

$$V = -66,66 N$$

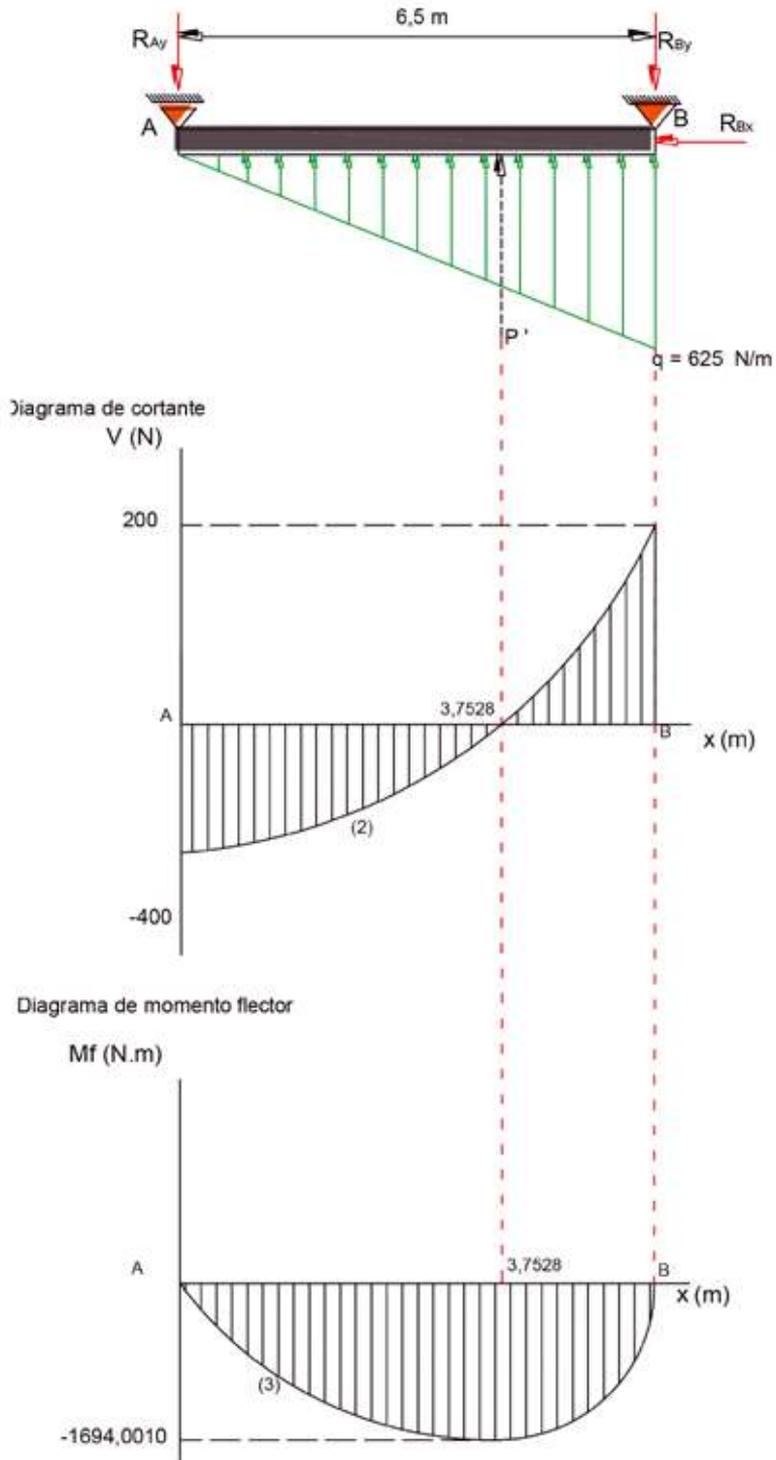
$$\int V \, dv = \int_2^3 -66,66 \, dx$$

$$M_f = 66,66 \text{ N.m}$$

$$V_{max} = -66,66 N$$

$$M_{fmax} = 66,66 \text{ N.m}$$

Fig. 1.56e. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.13.



**Problema modelo 1.14**

Este ejercicio es el mismo que el anterior, con la particularidad de que ahora los cortes se realizan de derecha a izquierda, y comprobando que se obtienen los mismos resultados.

Fig. 1.57a. Esquema para el problema 1.14.

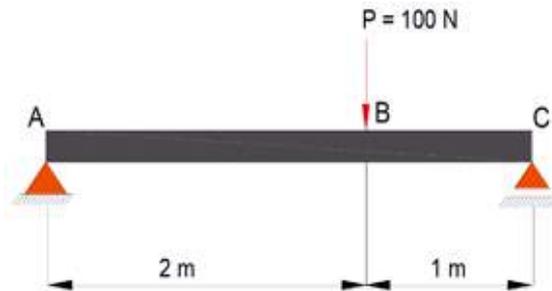
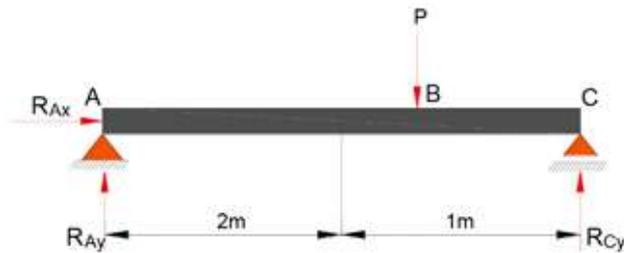


Fig. 1.57b. Diagrama de reacciones.

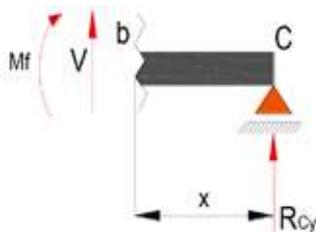


$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \quad + \rightarrow - \leftarrow \\ R_{Ax} &= 0 \text{ N} \\ \Sigma M_A &= 0 \quad \curvearrow + \curvearrow - \\ P(2m) - R_{Cy}(3m) &= 0 \\ R_{Cy} &= \frac{100 \text{ N}(2m)}{3m} \\ R_{Cy} &= 66,66 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \quad \uparrow + \downarrow - \\ R_{Ay} - P + R_{Cy} &= 0 \\ R_{Ay} &= P - R_{Cy} \\ R_{Ay} &= 100 \text{ N} - 66,66 \text{ N} \\ R_{Ay} &= 33,33 \text{ N} \end{aligned}$$

TRAMO CB

Fig. 1.57c. Viga realizada corte en tramo CB análisis derecha-izquierda.



$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$R_{Ay} - V = 0$$

$$V = R_{Ay}$$

$$V = -66,66 \text{ N}$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^-$$

$$R_A(x) - M_f = 0$$

$$M_f = R_A(x)$$

$$M_f = 33,33(x)$$

$$x = 0 \text{ m} \quad V = -66,66 \text{ N}$$

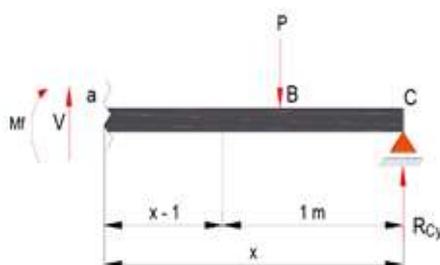
$$x = 1 \text{ m} \quad V = -66,66 \text{ N}$$

$$x = 0 \text{ m} \quad M_f = 0 \text{ N}$$

$$x = 2 \text{ m} \quad M_f = 66,66 \text{ N.m}$$

TRAMO BC

Fig. 1.57d. Viga realizada corte en tramo BC análisis derecha-izquierda.



$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$R_{Cy} - P + V = 0$$

$$V = P - R_{Cy}$$

$$V = 100 - 66,66$$

$$\sum M_a = 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^-$$

$$-R_{Cy}x + P(x - 1) + M_f = 0$$

$$M_f = R_{Cy}(x) - P(x - 1)$$

$$M_f = 66,66(x) - 100(x - 1)$$

$$x = 1 \text{ m} \quad V = 33,33 \text{ N}$$

$$x = 3 \text{ m} \quad V = 33,33 \text{ N}$$

$$x = 1 \text{ m} \quad M_f = 66,66 \text{ N.m}$$

$$x = 3 \text{ m} \quad M_f = 0 \text{ N.m}$$

Fig. 1.57e. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.14.

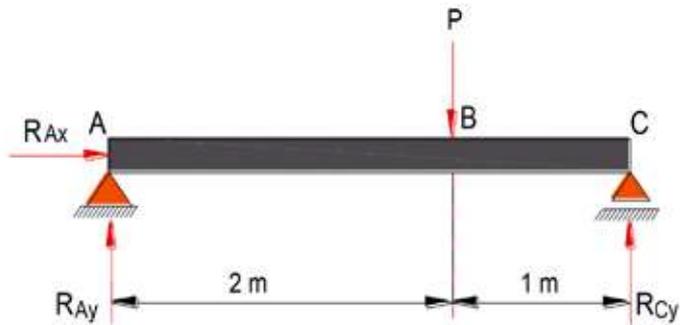


Diagrama de cortante

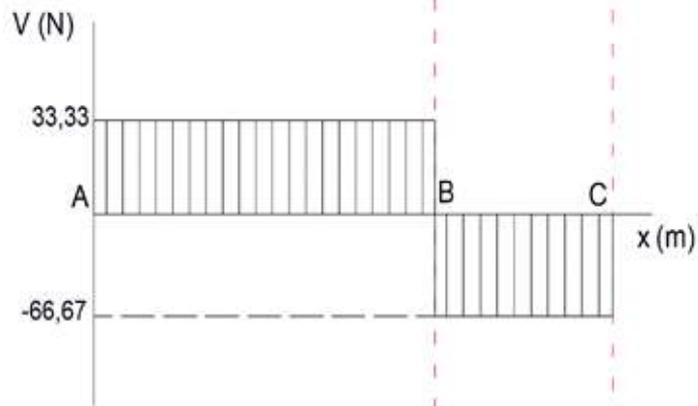
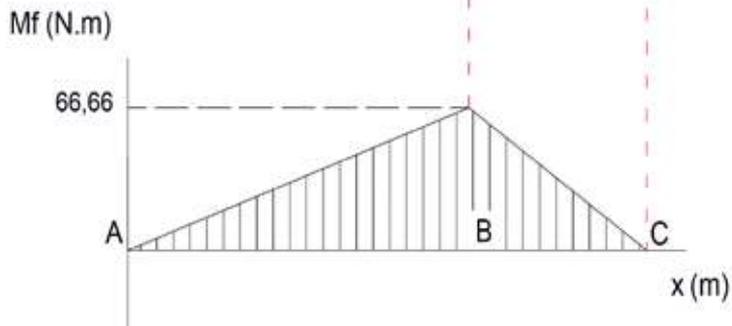


Diagrama de momento flector



**Importante notar que:**

- En el diagrama de cortante se genera un salto debido a la carga de la reacción en A, en la dirección de la carga y en la magnitud de la misma.
- Un área positiva en el diagrama de cortante genera una pendiente positiva en el diagrama de momentos flectores.
- Un área negativa en el diagrama de cortante genera una pendiente negativa en el diagrama de momentos flectores.
- Tanto el diagrama de cortante como el de momentos flectores al final tendrán que cerrarse.
- La pendiente de la curva en el diagrama de  $M_f$  es mayor en 1 grado con respecto al diagrama de cortante.
- El área bajo la curva de cada tramo del diagrama de cortante es igual al valor del momento flector de cada tramo del diagrama de momento flector.
- Note que en el punto donde  $V = 0$  en el diagrama de  $M_f$  genera un punto máximo.

## Problema modelo 1.15

Fig. 1.58a. Esquema para el problema 1.15.

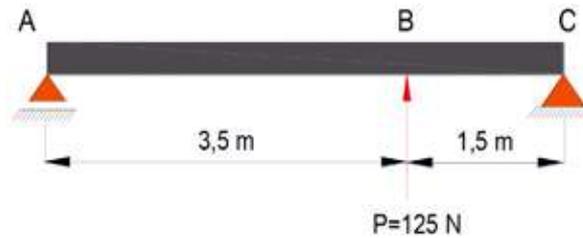
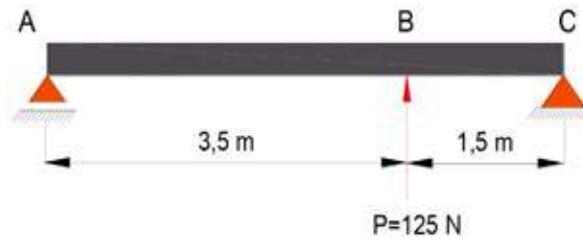


Fig. 1.58b. Diagrama de reacciones.



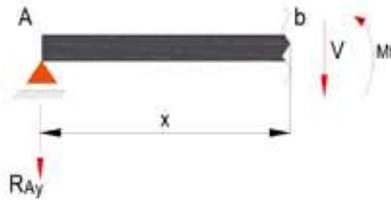
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ -P(3,5\text{m}) + R_{Cy}(5\text{m}) = 0 \\ R_{Cy} = \frac{125 \text{ N}(3,5\text{m})}{5\text{m}} \\ R_{Cy} = \mathbf{87,5 \text{ N}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+ \\ R_{Cx} = \mathbf{0 \text{ N}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^- \\ -R_{Ay} + P - R_{Cy} = 0 \\ R_{Ay} = P - R_{Cy} \\ R_{Ay} = 125 \text{ N} - 87,5 \text{ N} \\ R_{Ay} = \mathbf{37,5 \text{ N}} \end{aligned}$$

TRAMO AB

Fig. 1.58c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$-R_{Ay} - V = 0$$

$$V = -R_{Ay}$$

$$V = -37,5 \text{ N}$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^-$$

$$-R_A(x) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_A(x)$$

$$M_f = -37,5(x)$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow V = -37,5 \text{ N}$$

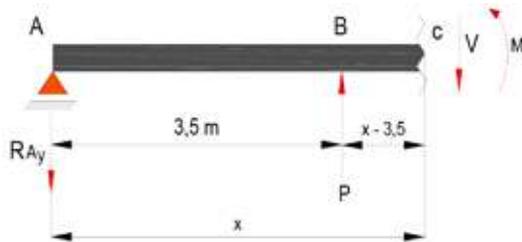
$$x = 0 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N.m}$$

$$x = 3,5 \text{ m} \rightarrow V = -37,5 \text{ N}$$

$$x = 3,5 \text{ m} \rightarrow M_f = -131,25 \text{ N.m}$$

TRAMO BC

Fig. 1.58d. Viga realizada corte en tramo BC análisis izquierda-derecha.



$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$-R_{Ay} + P - V = 0$$

$$V = P - R_{Ay}$$

$$V = 125 \text{ N} - 37,5 \text{ N}$$

$$\sum M_c = 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^-$$

$$-R_{Ay}x + P(x - 3,5) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_{Ay}x + P(x - 3,5)$$

$$M_f = -37,5x + 125(x - 3,5)$$

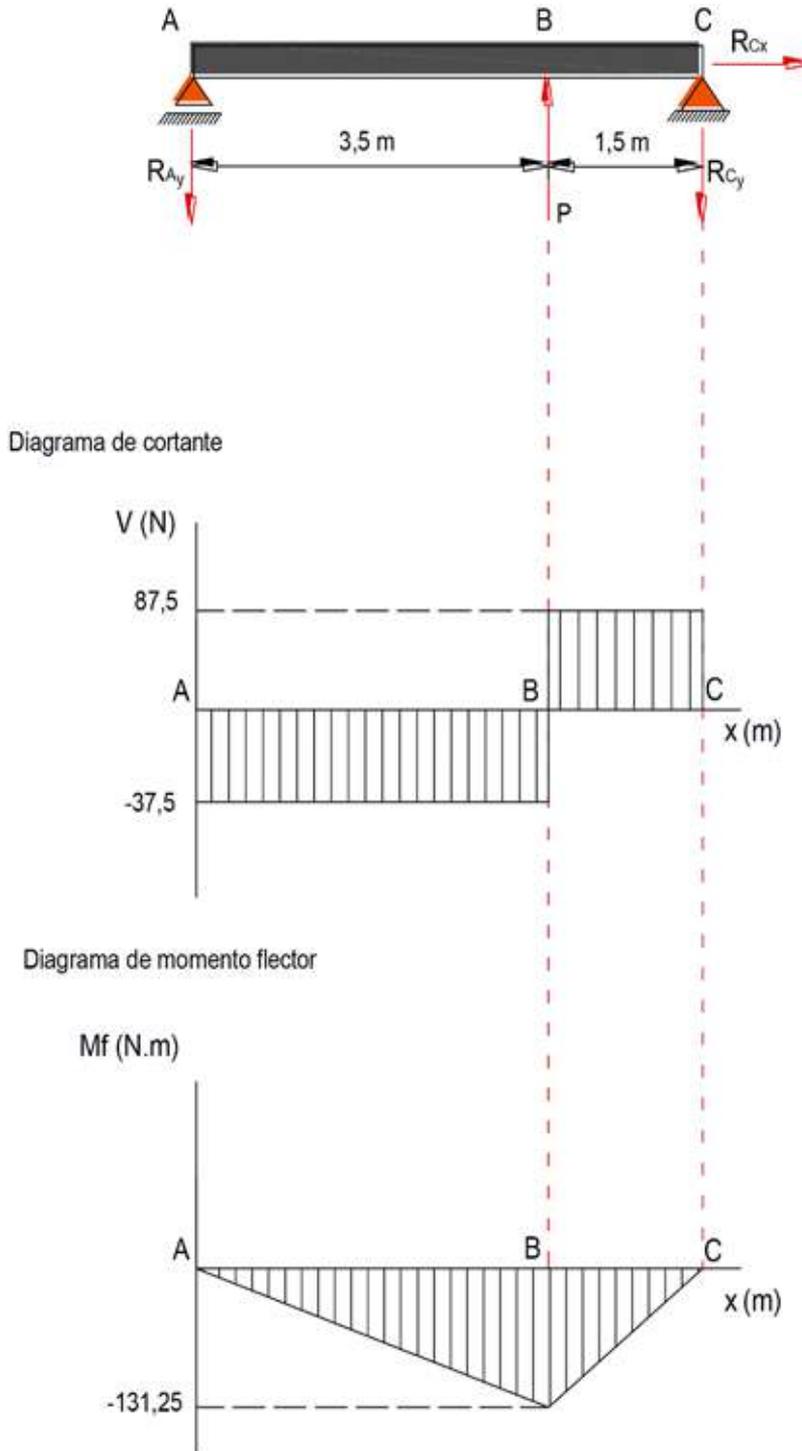
$$x = 3,5 \text{ m} \quad V = 87,5 \text{ N}$$

$$x = 3,5 \text{ m} \quad M_f = -131,25 \text{ N.m}$$

$$x = 5 \text{ m} \quad V = 87,5 \text{ N}$$

$$x = 5 \text{ m} \quad M_f = 0 \text{ N.m}$$

Fig. 1.58e. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.15.



b) Carga uniformemente distribuida

Problema modelo 1.16

Fig. 1.59a. Esquema para el problema 1.16.

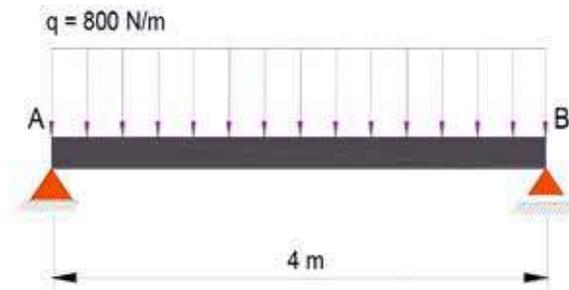
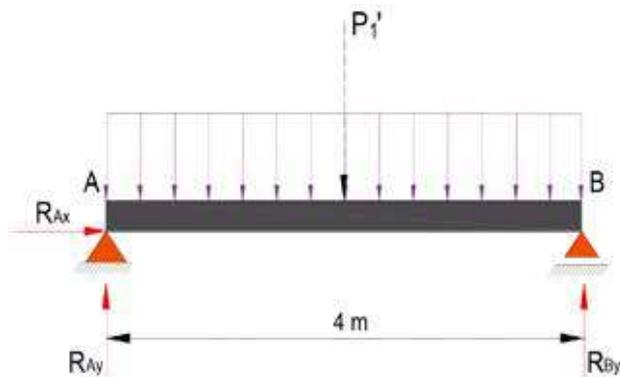


Fig. 1.59b Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = q * L$$

$$P' = 800 \frac{N}{m} (4 m)$$

$$P' = 3200 N$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$P'(2 m) - R_{By}(4 m) = 0$$

$$3200 N(2 m) - R_{By}(4 m) = 0$$

$$R_{By} = \frac{6400 N \cdot m}{4m}$$

$$R_{By} = 1600 N$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P' + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} = P' - R_{By}$$

$$R_{Ay} = (3200 - 1600) N$$

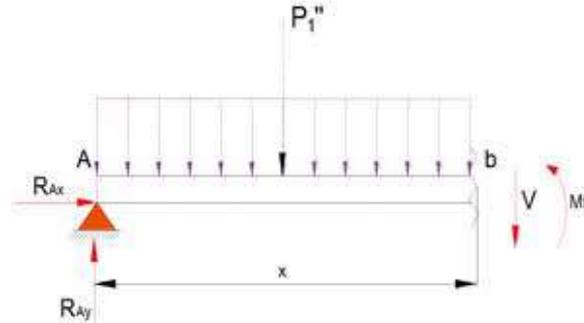
$$R_{Ay} = 1600 N$$

$$\sum F_x = 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+$$

$$R_{Ax} = 0 N$$

## TRAMO AB

Fig. 1.59c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$P'' = q * x$$

$$P'' = 800 x$$

$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$R_{Ay} - P'' - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - P''$$

$$V = 1600 - 800(x)$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow V = 1600 \text{ N}$$

$$x = 4 \text{ m} \rightarrow V = -1600 \text{ N}$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$R_{Ay}(x) - P''\left(\frac{x}{2}\right) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P''\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_f = 1600(x) - \frac{800(x^2)}{2}$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N.m}$$

$$x = 2 \text{ m} \rightarrow M_{f\text{m}\acute{a}\text{x}} = 1600 \text{ N.m}$$

$$x = 4 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N.m}$$

Cuando  $V$  es cero,  $M_f$  es máximo en ese punto.

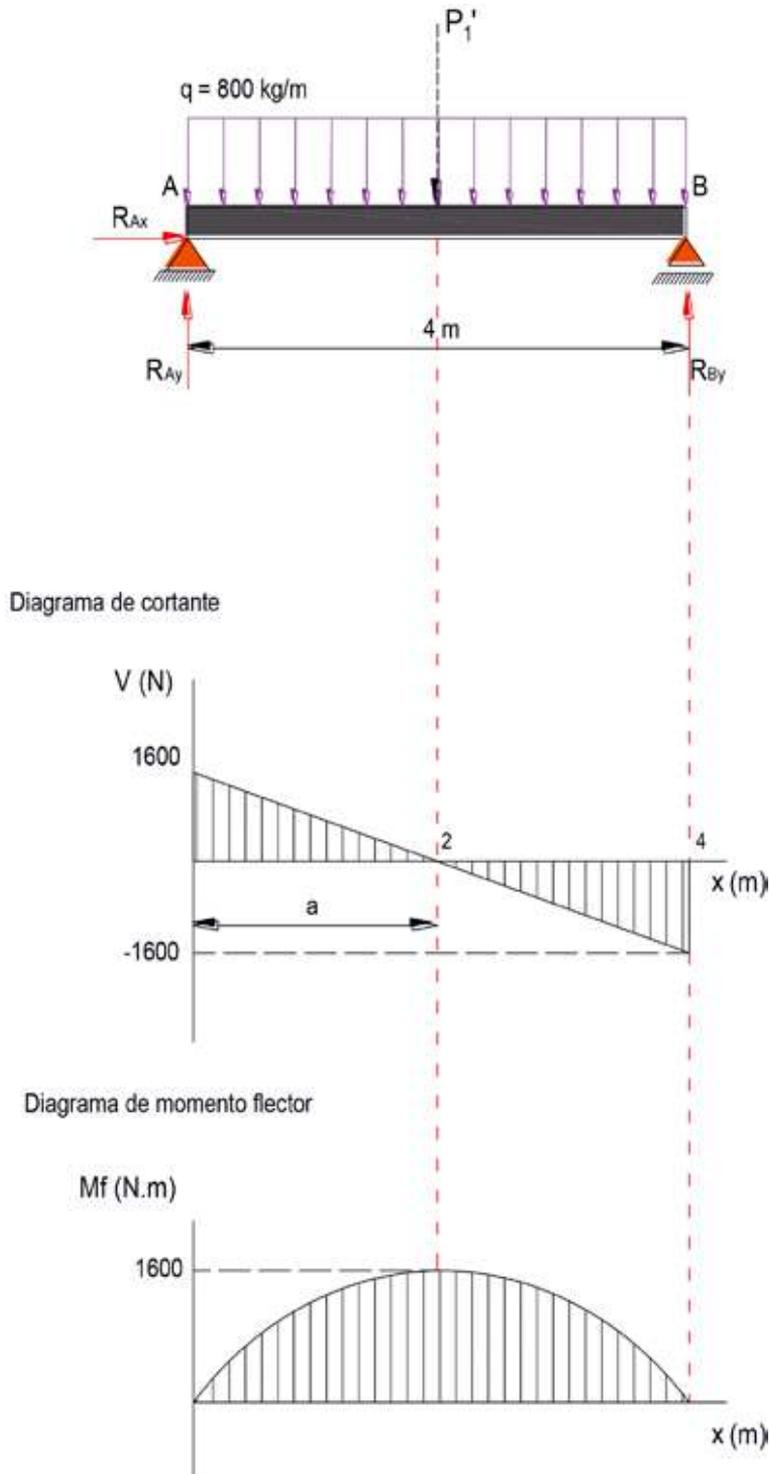
$$V = R_A - q(x)$$

$$0 = 1600 \text{ N} - 800 \frac{\text{N}}{\text{m}} x$$

$$x = \frac{1600 \text{ N}}{800 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

$$x = 2 \text{ m}$$

Fig. 1.59d. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.16.



Problema modelo 1.17

Fig. 1.60a. Esquema para el problema 1.17.

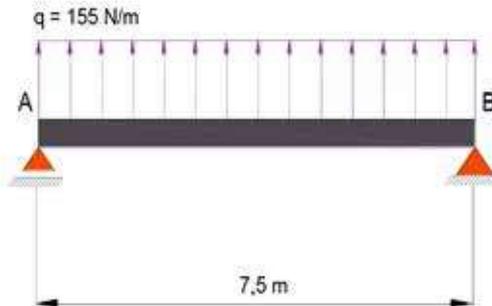
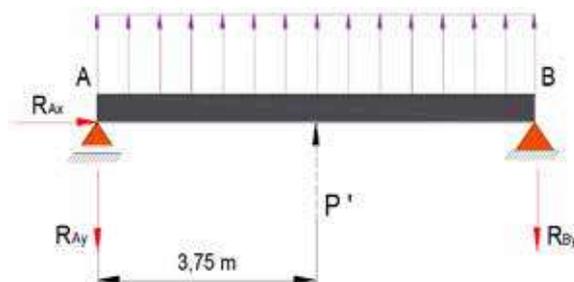


Fig. 1.60b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = q * L$$

$$P' = 155 \frac{N}{m} * 7,5m$$

$$P' = 1162,5 N$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$-P'(3,75m) + R_{By}(7,5m) = 0$$

$$R_{By} = \frac{1162,5 N(3,75m)}{7,5m}$$

$$R_{By} = 581,25 N$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$-R_{Ay} + P' - R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} = +P' - R_{By}$$

$$R_{Ay} = (1162,5 - 581,25) N$$

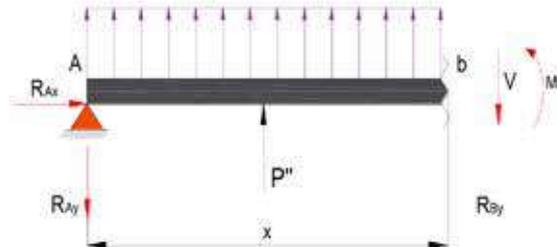
$$R_{Ay} = 581,25 N$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+$$

$$R_{Bx} = 0$$

TRAMO AB

Fig. 1.60c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$P'' = q * x$$

$$P'' = 155 x$$

$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^-$$

$$-R_{Ay} + P'' - V = 0$$

$$V = -R_{Ay} + P''$$

$$V = -581,25 + 155(x)$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow V = -581,25 \text{ N}$$

$$x = 7,5 \text{ m} \rightarrow V = 581,25 \text{ N}$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$-R_{Ay}(x) + P''\left(\frac{x}{2}\right) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_{Ay}(x) + P''\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_f = -581,25(x) + \frac{155(x^2)}{2}$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N}$$

$$x = 7,5 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N}$$

$$x = 3,75 \text{ m} \rightarrow M_f = -1089,8437 \text{ N}$$

Cuando  $V$  es cero,  $M_f$  es máximo en ese punto.

$$V = -581,25 + 155(x)$$

$$0 = 581,25 \text{ N} - 155 \frac{\text{N}}{\text{m}} x$$

$$x = \frac{581,25 \text{ N}}{155 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

$$x = 3,75 \text{ m}$$

Fig. 1.60d. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.17.

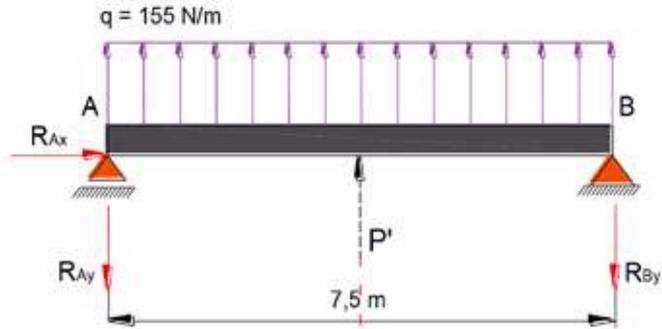


Diagrama de cortante

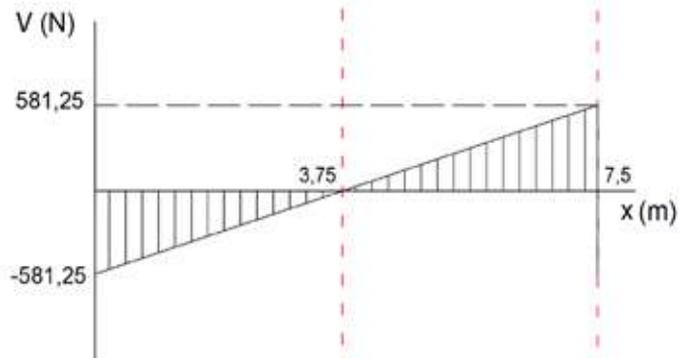
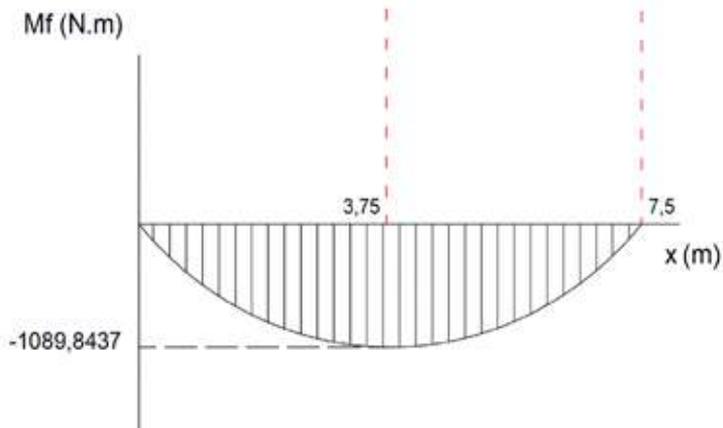


Diagrama de momento flector



### c) Carga variada triangular

#### Problema modelo 1.18

Fig. 1.61a. Esquema para el problema 1.18.

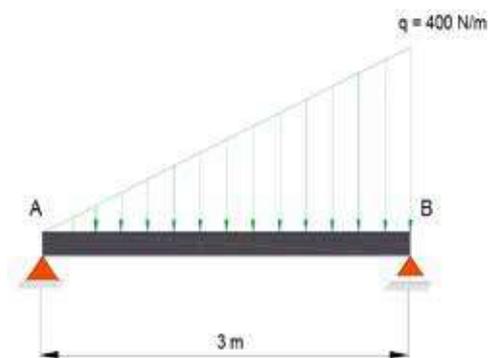
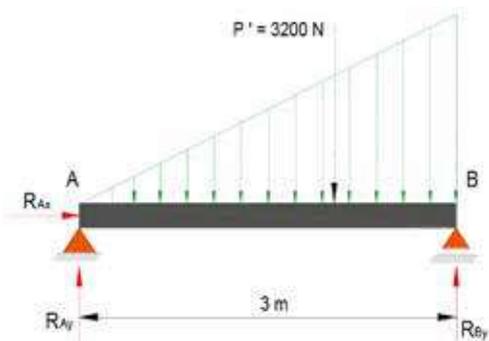


Fig. 1.61b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = \frac{q * L}{2}$$
$$P' = \frac{400 \frac{\text{N}}{\text{m}} (3\text{m})}{2}$$
$$P' = 600 \text{ N}$$

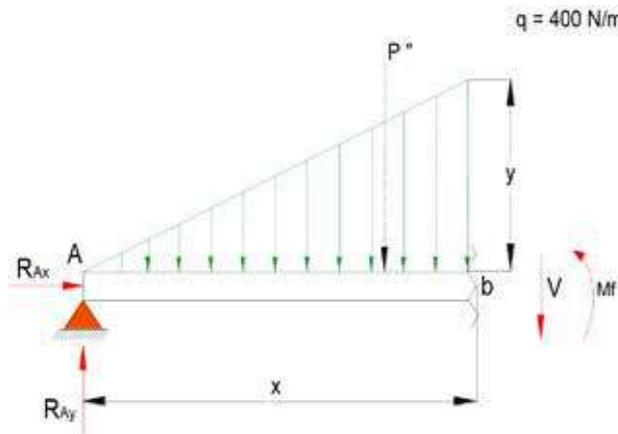
$$\Sigma F_x = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$
$$R_{Ax} = 0 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ P' \left( \frac{2}{3} * 3m \right) - R_{By} (3m) = 0 \\ 600 N(2m) - R_{By} (3m) = 0 \\ R_{By} = \frac{1200 N \cdot m}{3} \\ \mathbf{R_{By} = 400 N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^- \\ R_{Ay} - P' + R_{By} = 0 \\ R_{Ay} = P' - R_{By} \\ R_{Ay} = 600 N - 400 N \\ \mathbf{R_{Ay} = 200 N} \end{aligned}$$

TRAMO AB

Fig. 1.61c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\begin{aligned} P'' &= \frac{y * x}{2} \\ \frac{y}{q} &= \frac{x}{3} \quad (\text{Relación triángulos}) \\ y &= \frac{q * x}{3} \\ P'' &= \frac{q * x^2}{6} \\ P'' &= \frac{400 x^2}{6} \end{aligned}$$

$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$R_{Ay} - P'' - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - P''$$

$$V = 200 - \frac{400(x^2)}{6}$$

$$x = 0\text{m} \rightarrow V = 200\text{ N}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow V = -400\text{ N}$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$R_{Ay}(x) - P''\left(\frac{x}{3}\right) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P''\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$M_f = 200(x) - \frac{400(x^3)}{18}$$

$$x = 0\text{m} \rightarrow M_f = 0\text{ N.m}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow M_f = 0\text{ N.m}$$

$$x = 1,73\text{m} \rightarrow M_f = 230,94\text{ N.m}$$

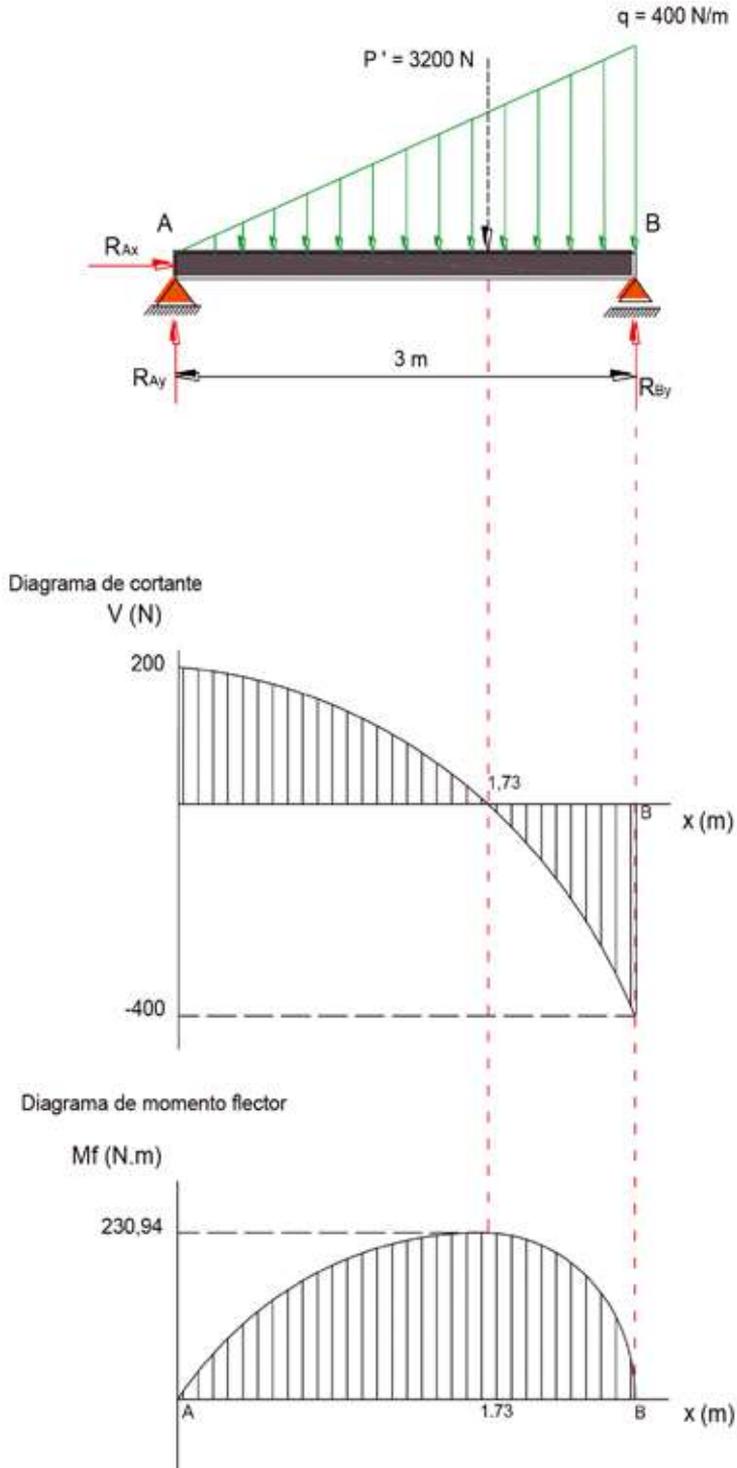
Cuando  $V$  es cero,  $M_f$  es máximo:

$$0 = 200 - \frac{400(x^2)}{6}$$

$$x = \sqrt{\frac{200 * 6}{400}}$$

$$x = 1,73\text{ m}$$

Fig. 1.61d. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.18.



### Problema modelo 1.19

Fig. 1.62a. Esquema para el problema 1.19.

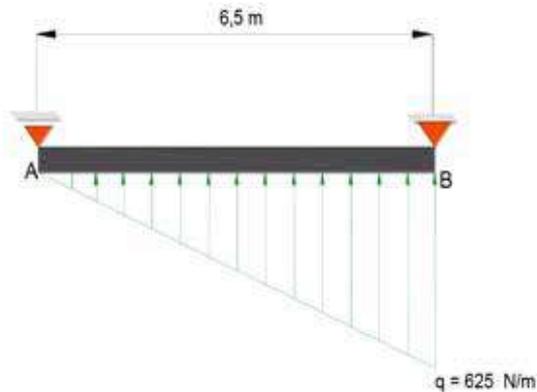
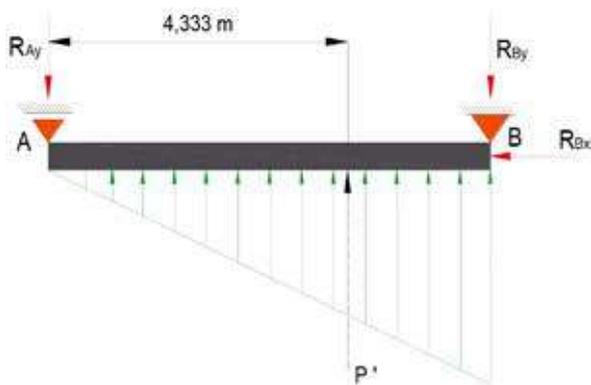


Figura 1.62b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = \frac{q * L}{2}$$
$$P' = \frac{625 \frac{N}{m} (6,5m)}{2}$$

$$P' = 2031,25 N$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ -P' \left[ \frac{2}{3} (6,5m) \right] - R_{By}(6,5m) = 0 \\ R_{By} = \frac{2031,25N(4,333m)}{6,5m} \end{aligned}$$

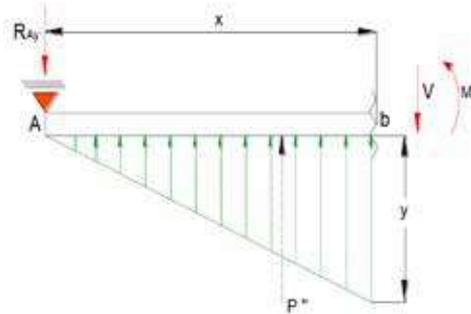
$$R_{By} = 1354,1564 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^- \\ -R_{Ay} + P' - R_{By} = 0 \\ R_{Ay} = P' - R_{By} \\ R_{Ay} = 2031,25N - 1354,1564 \text{ N} \\ R_{Ay} = 677,0936 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \circlearrowleft^- \quad \rightarrow^+ \\ R_{Bx} = 0 \end{aligned}$$

TRAMO AB

Figura 1.62c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$P'' = \frac{y * x}{2}$$

$$\frac{y}{q} = \frac{x}{6,5}$$

(Relación triángulos)

$$y = \frac{q * x}{6,5}$$

$$P'' = \frac{625x^2}{13}$$

$$\begin{aligned} \sum F_v &= 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_- \\ -R_{Ay} + P'' - V &= 0 \\ V &= -R_{Ay} + P'' \end{aligned}$$

$$V = -677,0936 + \frac{625x^2}{13}$$

$$x = 0m \rightarrow V = -677,0936 N$$

$$x = 6.5m \rightarrow V = 1354,1562 N$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$-R_{Ay}(x) + P''\left(\frac{x}{3}\right) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_{Ay}(x) + P''\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$M_f = -677,0936(x) + \frac{625x^3}{39}$$

$$x = 0m \rightarrow M_f = 0 N.m$$

$$x = 6,5m \rightarrow M_f = 0 N.m$$

$$x = 3,7528m \rightarrow M_f$$

$$= -1694 N.m$$

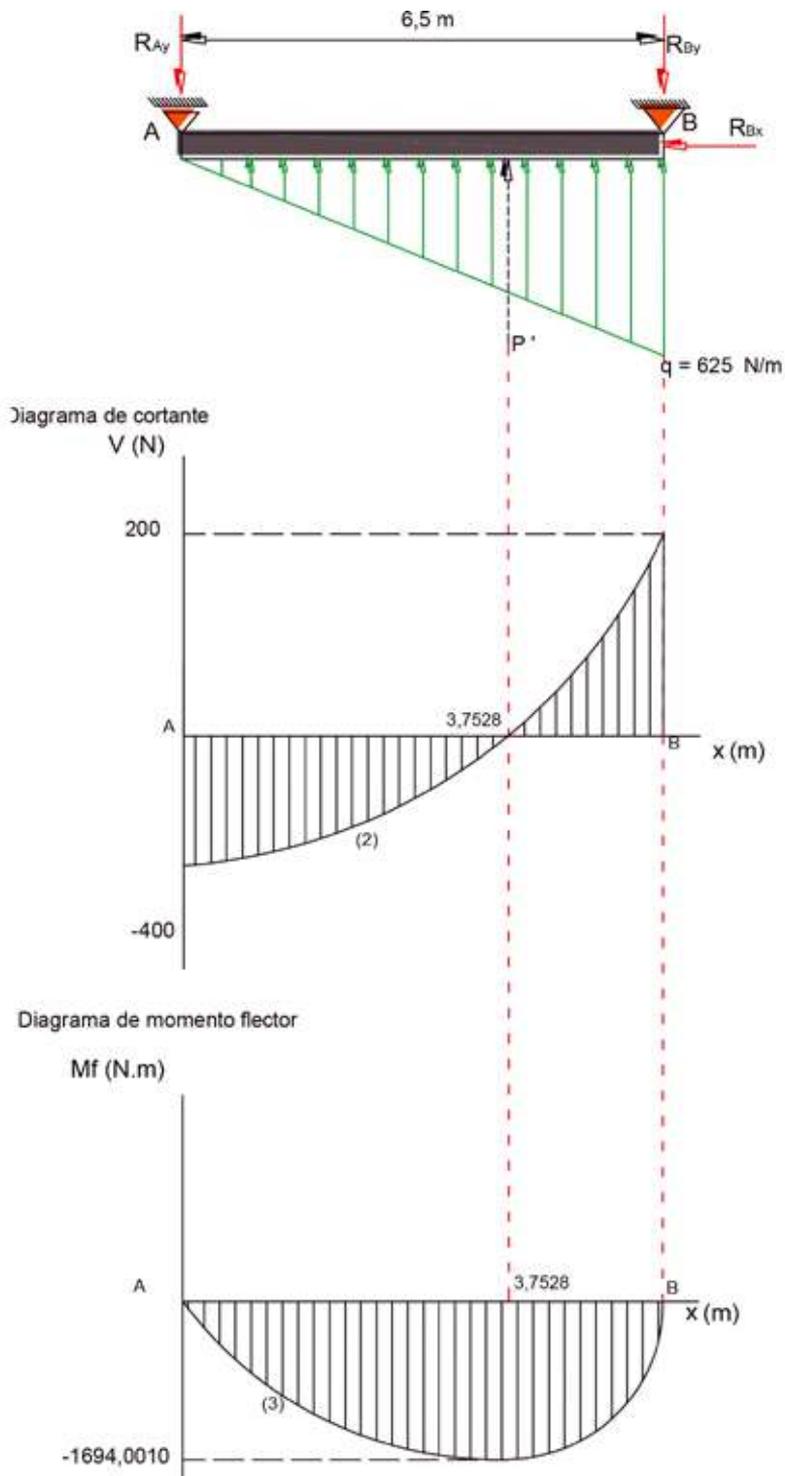
Cuando  $V$  es cero,  $M_f$  es máximo:

$$0 = -677,0936 + \frac{625x^2}{13}$$

$$x = \sqrt{\frac{677,0936 \times 13}{625}}$$

$$x = 3,7528 m$$

Fig. 1.62d. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.19.



d) Momento concentrado

Problema modelo 1.20

Fig. 1.63a. Esquema para el problema 1.20.

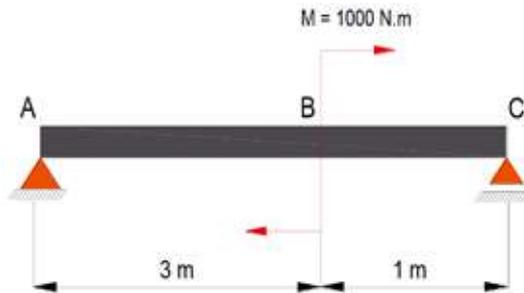
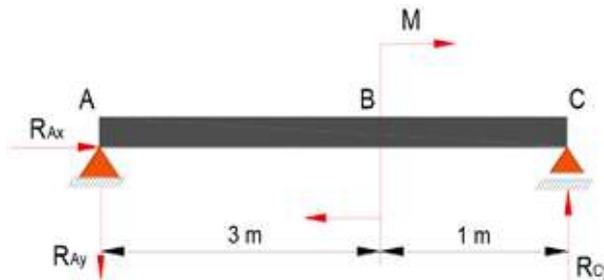


Fig. 1.63b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



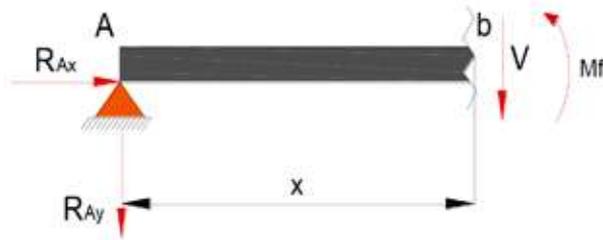
$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ M - R_{Cy}(4m) &= 0 \\ R_{Cy} &= \frac{1000 \text{ N.m}}{4m} \\ R_{Cy} &= 250 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^- \\ -R_{Ay} + R_{Cy} &= 0 \\ R_{Ay} &= R_{Cy} \\ R_{Ay} &= 250 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+ \\ R_{Ax} &= 0 \end{aligned}$$

TRAMO AB

Fig. 1.63c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\Sigma F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$-R_{Ay} - V = 0$$

$$V = -R_{Ay}$$

$$V = -250 \text{ N}$$

$$x = 0\text{m} \rightarrow V = -250 \text{ N}$$

$$x = 0\text{m} \rightarrow V = -250 \text{ N}$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$-R_{Ay}(x) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_{Ay}(x)$$

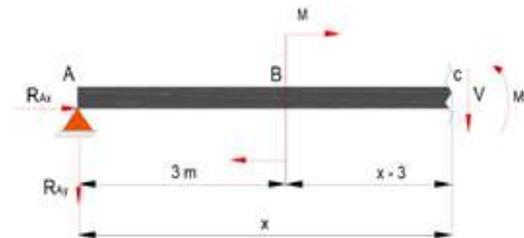
$$M_f = -250(x)$$

$$x = 0\text{m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N.m}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow M_f = -750 \text{ N.m}$$

TRAMO BC

Fig. 1.63d. Viga realizada corte en tramo BC análisis izquierda-derecha.



$$\Sigma F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$-R_{Ay} - V = 0$$

$$V = -R_{Ay}$$

$$V = -250 \text{ N}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow V = -250 \text{ N}$$

$$x = 4\text{m} \rightarrow V = -250 \text{ N}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$-R_{Ay}(x) + M - M_f = 0$$

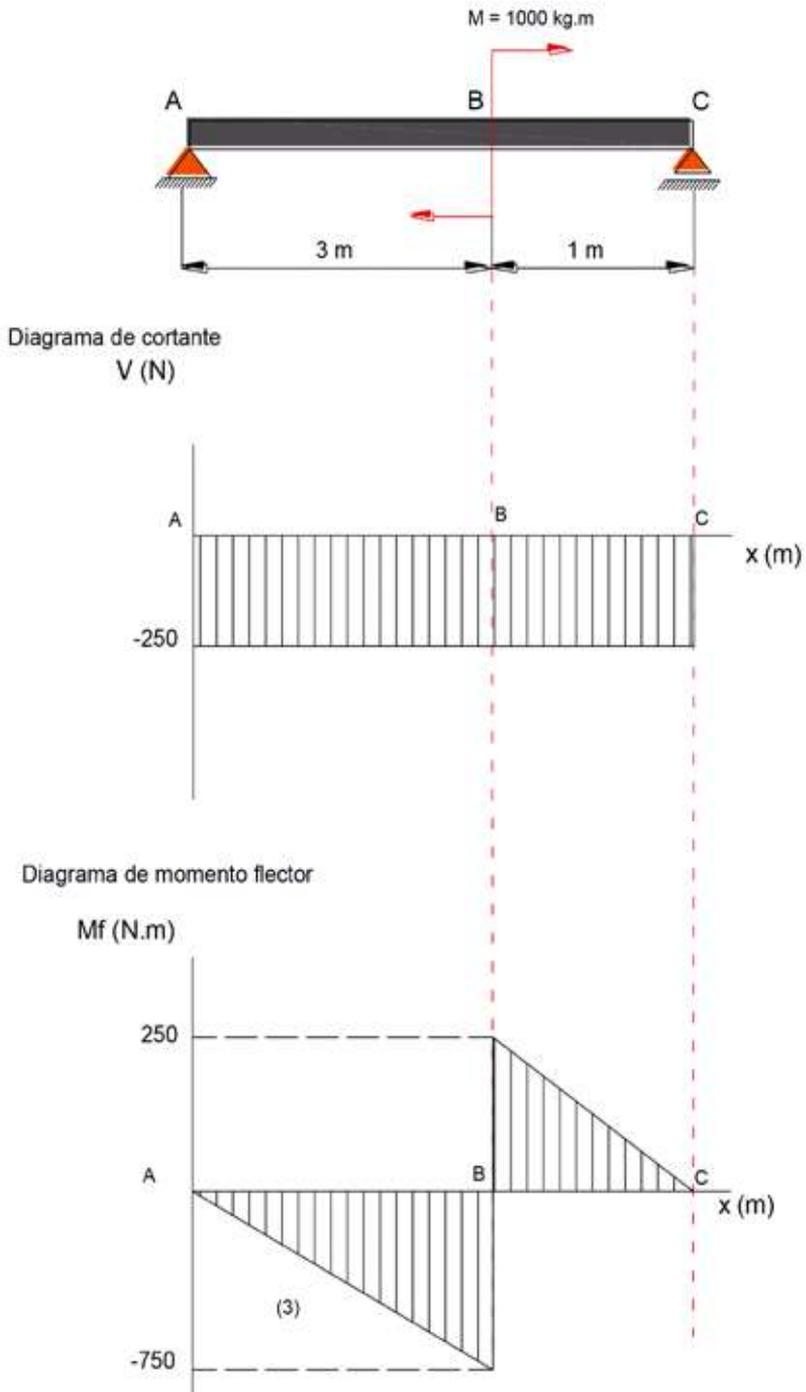
$$M_f = -R_{Ay}(x) + M$$

$$M_f = -250(x) + 1000$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow M_f = 250 \text{ N.m}$$

$$x = 4\text{m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N.m}$$

Fig. 1.63e. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.20.



Nota: El momento concentrado en el diagrama de momentos genera un salto.

**Problema modelo 1.21**

Fig. 1.64a. Esquema para el problema 1.21.

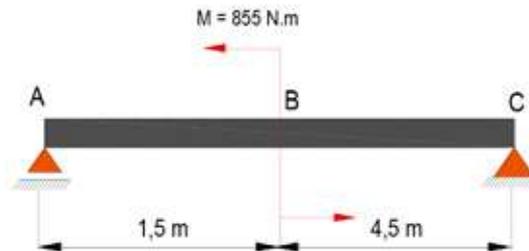
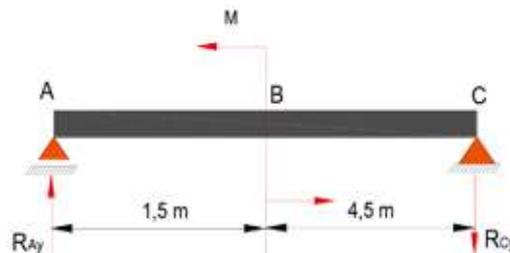


Fig. 1.64b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ -M + R_{Cy}(6m) = 0 \\ R_{Cy} = \frac{855 \text{ N.m}}{6 \text{ m}} \\ R_{Cy} = 142,5 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^- \\ R_{Ay} - R_{Cy} = 0 \\ R_{Ay} = R_{Cy} \\ R_{Ay} = 142,5 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \leftarrow^- \quad \rightarrow^+ \\ R_{Ax} = 0 \end{aligned}$$

**TRAMO AB**

Fig. 1.64c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$R_{Ay} - V = 0$$

$$V = R_{Ay}$$

$$V = 142,5 \text{ N}$$

$$-R_{Ay}(x) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_{Ay}(x)$$

$$M_f = -142,5(x)$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow V = 142,5 \text{ N}$$

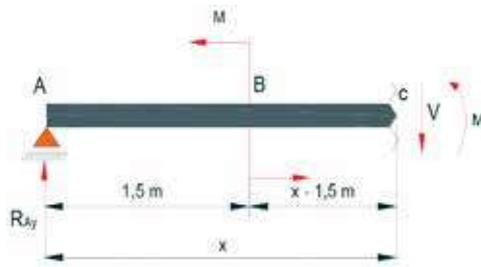
$$x = 1,5 \text{ m} \rightarrow V = 142,5 \text{ N}$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N.m}$$

$$x = 1,5 \text{ m} \rightarrow M_f = 213,75 \text{ N.m}$$

TRAMO BC

Fig. 1.64d. Viga realizada corte en tramo BC análisis izquierda-derecha.



$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - V = 0$$

$$V = R_{Ay}$$

$$V = 142,5 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$R_{Ay}(x) - M - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - M$$

$$M_f = 142,5(x) - 855$$

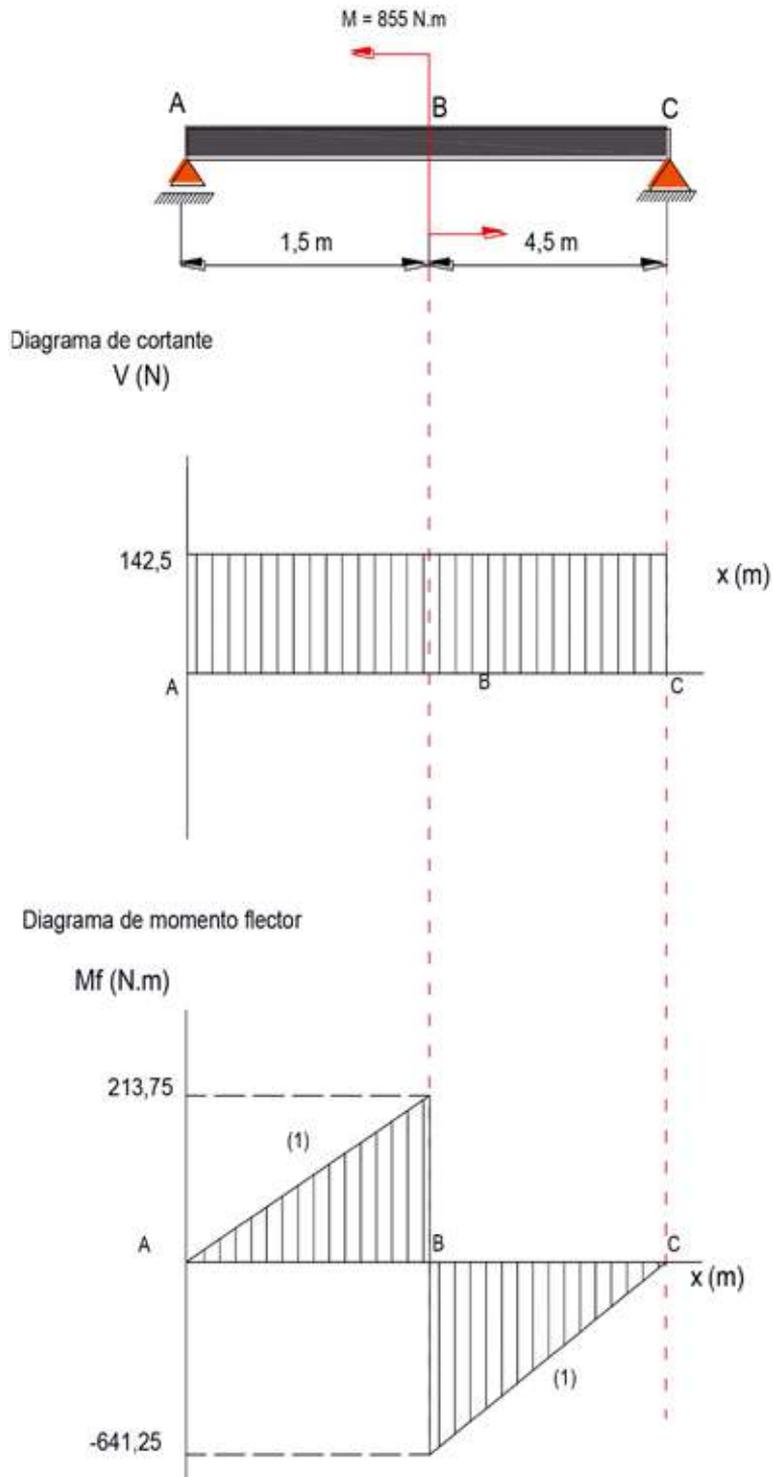
$$x = 1,5 \text{ m} \rightarrow V = 142,5 \text{ N}$$

$$x = 6 \text{ m} \rightarrow V = 142,5 \text{ N}$$

$$x = 1,5 \text{ m} \rightarrow M_f = -641,25 \text{ N.m}$$

$$x = 6 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N.m}$$

Fig. 1.64e. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.21.



**Problema modelo 1.22**

Fig. 1.65a. Esquema para el problema 1.21.

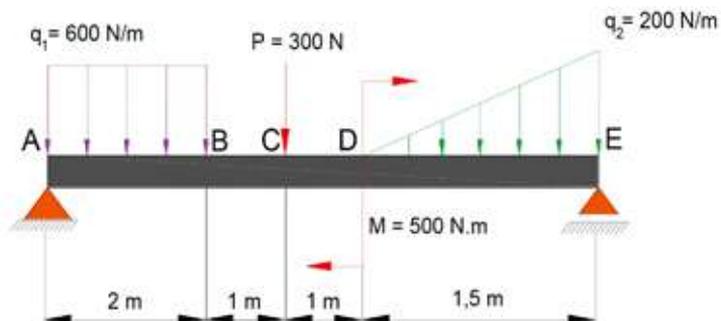
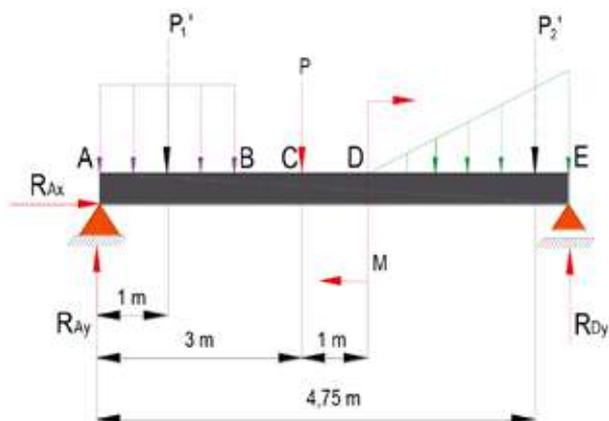


Fig. 1.65b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P'_1 = q * L$$

$$P'_1 = 600 \frac{N}{m} (2m)$$

$$P'_1 = 1200 \text{ N}$$

$$P'_2 = \frac{q * L}{2}$$

$$P'_2 = \frac{200 \frac{N}{m} (1,5m)}{2}$$

$$P'_2 = 150 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$P_1'(1m) + P(3m) + M + P_2'(5m) - R_{Ey}(5,5m) = 0$$

$$R_{Ey} = \frac{1200 \text{ N}(1m) + 300 \text{ N}(3m) + 500 \text{ N.m} + 150 \text{ N}(5m)}{5,5m}$$

$$R_{Ey} = 609,09 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P_1' - P - P_2' + R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ay} = P_1' + P + P_2' - R_{Ey}$$

$$R_{Ay} = 1200 \text{ N} + 300 \text{ N} +$$

$$150 \text{ N} - 609,09 \text{ N}$$

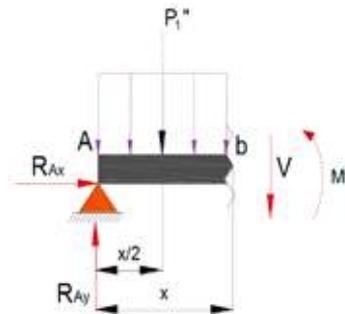
$$R_{Ay} = 1040,91 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ N}$$

### TRAMO AB

Fig. 1.65c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$P_1'' = q * x$$

$$P_1'' = 600(x)$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad \uparrow^+ \quad \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P_1'' - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - P_1''$$

$$V = 1040,91 - 600(x)$$

$$x = 0m \rightarrow V = 1040,91 \text{ N}$$

$$x = 2m \rightarrow V = -159,09 \text{ N}$$

$$\Sigma M_b = 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^-$$

$$R_{Ay}(x) - P_1''\left(\frac{x}{2}\right) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P_1''\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_f = 1040,91(x) - \frac{600(x^2)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 x = 0\text{m} &\rightarrow M_f = 0\text{ N.m} \\
 x = 1,73\text{m} &\rightarrow M_f = 902,89\text{ N.m} \\
 x = 2\text{m} &\rightarrow M_f = 881,81\text{ N.m}
 \end{aligned}$$

Cuando  $V$  es cero,  $M_f$  es máximo.

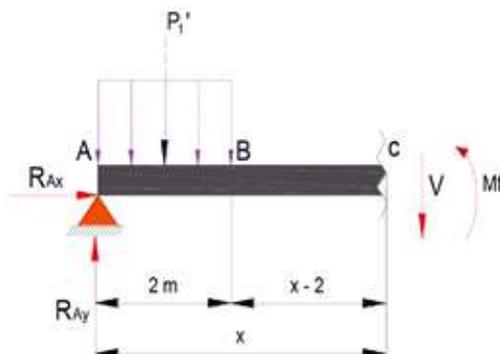
$$0 = 1040,91 - 600(x)$$

$$x = \frac{1040,91}{600}$$

$$x = 1,73\text{m}$$

TRAMO BC

Fig. 1.65d. Viga realizada corte en tramo BC análisis izquierda-derecha.



$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P_1' - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - P_1'$$

$$V = 1040,91\text{ N} - 1200\text{ N}$$

$$V = -159,09\text{ N}$$

$$x = 2\text{m} \rightarrow V = -159,09\text{ N}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow V = -159,09\text{ N}$$

$$\sum M_C = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$R_{Ay}(x) - P_1'(x-1) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P_1'(x-1)$$

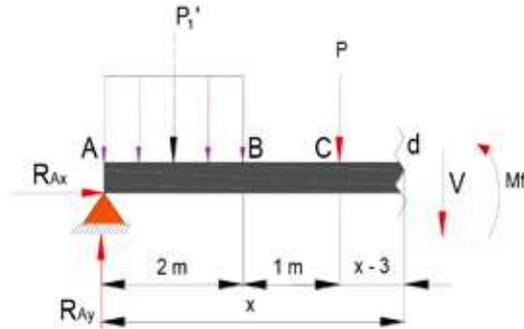
$$M_f = 1040,91(x) - 1200(x-1)$$

$$x = 2\text{m} \rightarrow M_f = 881,82\text{ N.m}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow M_f = 722,73\text{ N.m}$$

TRAMO CD

Fig. 1.65e. Viga realizada corte en tramo CD análisis izquierda-derecha.



$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow^-$$

$$R_{Ay} - P_1' - P - V = 0$$

$$V = 1040,91 \text{ N} - 1200 \text{ N} - 300 \text{ N}$$

$$V = -459,09 \text{ N}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow V = -459,09 \text{ N}$$

$$x = 4\text{m} \rightarrow V = -459,09 \text{ N}$$

$$\sum M_d = 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^-$$

$$R_{Ay}(x) - P_1'(x-1) - P(x-3) - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P_1'(x-1) - P(x-3)$$

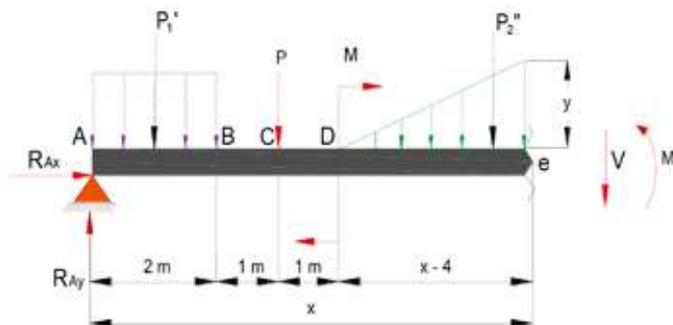
$$M_f = 1040,91(x) - 1200(x-1) - 300(x-3)$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow M_f = 722,73 \text{ N.m}$$

$$x = 4\text{m} \rightarrow M_f = 263,64 \text{ N.m}$$

TRAMO DE

Fig. 1.65f. Viga realizada corte en tramo DE análisis izquierda-derecha.



$$P_2'' = \frac{y(x-4)}{2}$$

$$\frac{y}{q_2} = \frac{x-4}{1,5}$$

*Relación de triángulos*

$$y = \frac{q_2(x-4)}{1,5}$$

$$P_2'' = \frac{200(x-4)^2}{3}$$

$$\Sigma Fv = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$R_{Ay} - P_1' - P - P_2'' - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - P_1' - P - P_2''$$

$$V = 1040,91 - 1200 - 300 - \frac{200(x-4)^2}{3}$$

$$x = 4m \rightarrow V = -459,09 N$$

$$x = 5,5m \rightarrow V = -609,09 N$$

$$\Sigma M_e = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$R_{Ay}(x) - P_1'(x-1) - P(x-3) + M$$

$$- \frac{P_2''(x-4)}{3} - M_f = 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P_1'(x-1) - P(x-3) + M - \frac{P_2''(x-4)}{3}$$

$$M_f = 1040,91(x) - 1200(x-1)$$

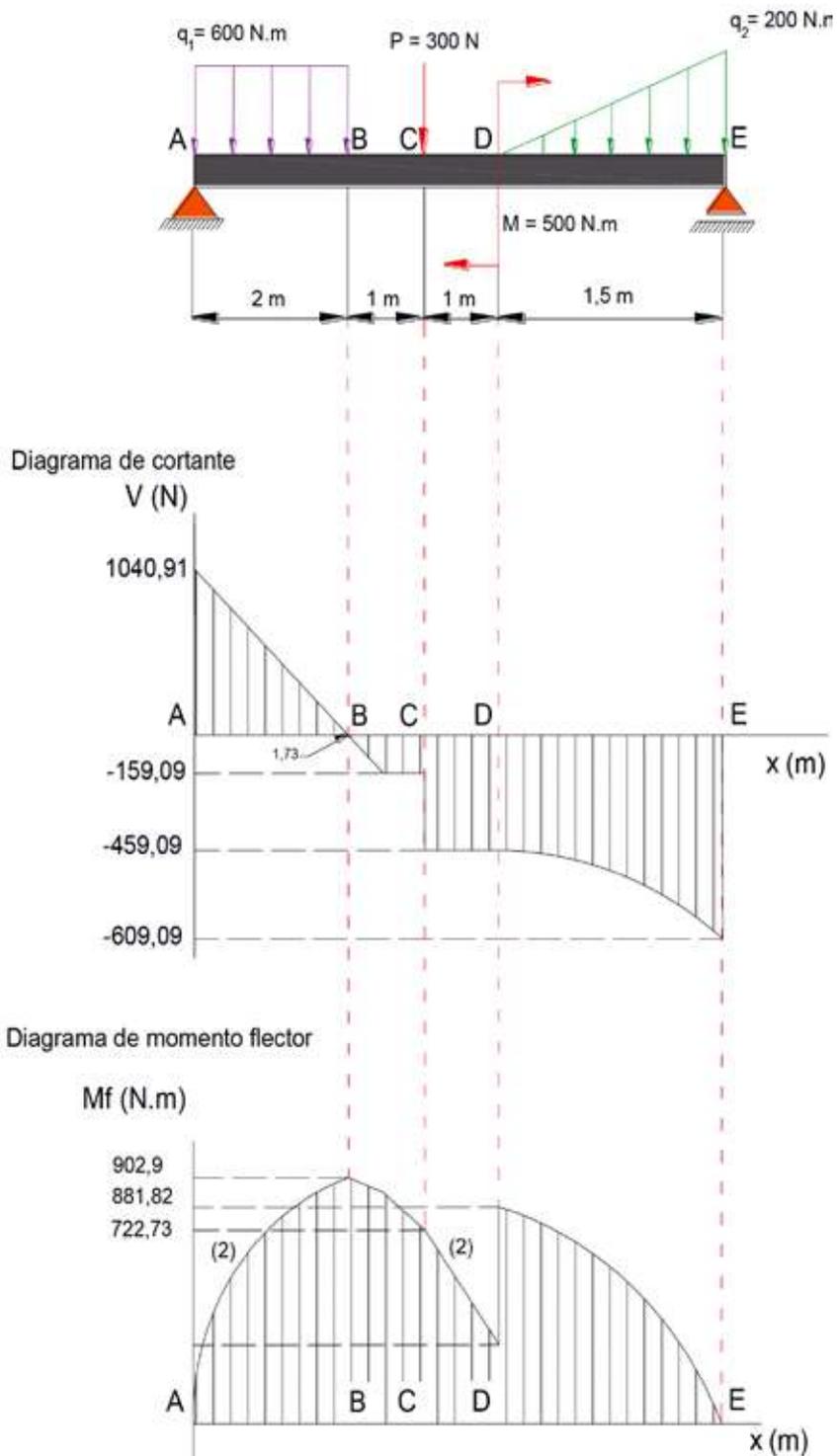
$$- 300(x-3) + 500$$

$$- \frac{100(x-4)^3}{4,5}$$

$$x = 4m \rightarrow M_f = 763,64 N.m$$

$$x = 5,5m \rightarrow M_f = 0 N.m$$

Fig. 1.65g. Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.22.



### Problema modelo 1.23

Fig. 1.66a. Esquema para el problema 1.21.

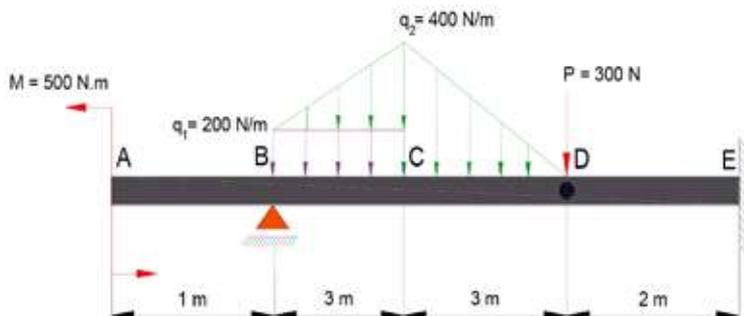
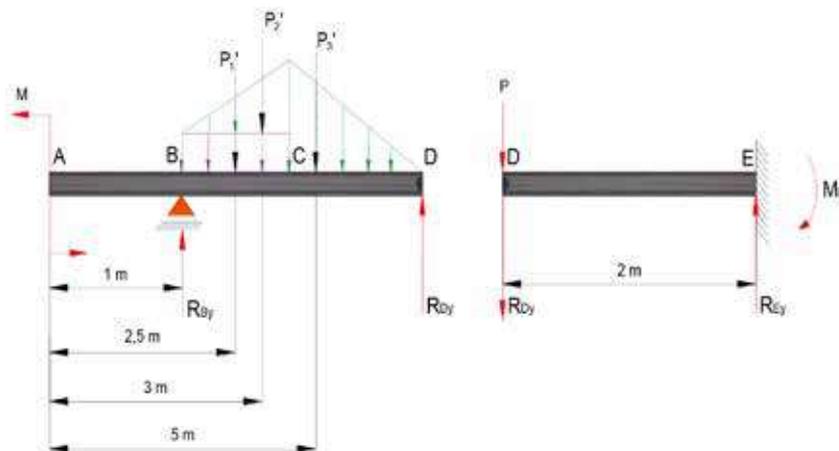
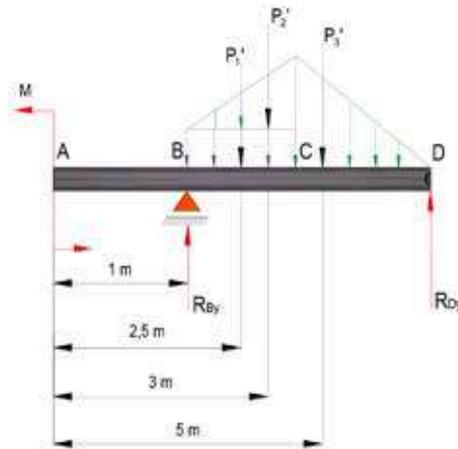


Fig. 1.66b. Viga realizada la separación de la articulación en el punto D.



TRAMO AD

Fig. 1.66c. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes del tramo AD.



$$P'_1 = q_1 L$$

$$P'_1 = \left(200 \frac{N}{m}\right)(3m)$$

$$P'_1 = 600 N$$

$$P'_2 = \frac{(q_2 - q_1)L}{2}$$

$$P'_2 = \frac{(400 - 200) \frac{N}{m}(3m)}{2}$$

$$P'_2 = 300 N$$

$$P'_2 = \frac{q_2 L}{2}$$

$$P'_2 = \frac{400 \frac{N}{m}(3m)}{2}$$

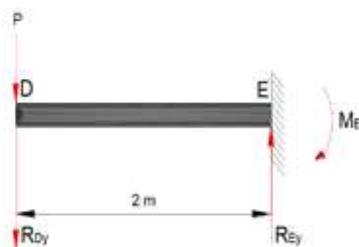
$$P'_2 = 300 N$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ -M + P'_1(1,5\text{ m}) + P'_2(2\text{ m}) + P'_3(4\text{ m}) - R_{Dy}(6\text{ m}) &= 0 \\ R_{Dy} &= \frac{-M + P'_1(1,5\text{ m}) + P'_2(2\text{ m}) + P'_3(4\text{ m})}{6\text{ m}} \\ R_{Dy} &= \frac{-500\text{ N}\cdot\text{m} + 600\text{ N}(1,5\text{ m}) + 300\text{ N}(2\text{ m}) + 600\text{ N}(4\text{ m})}{6\text{ m}} \\ \mathbf{R_{Dy}} &= \mathbf{566,66\text{ N}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad +\uparrow \downarrow- & \sum F_x &= 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+ \\ R_{By} - P'_1 - P'_2 - P'_3 + R_{Dy} &= 0 & \mathbf{R_{Ax}} &= \mathbf{0\text{ N}} \\ R_{By} &= P'_1 + P'_2 + P'_3 - R_{Dy} \\ R_{By} &= 600\text{ N} + 300\text{ N} + 600\text{ N} - 566,66\text{ N} \\ \mathbf{R_{By}} &= \mathbf{933,34\text{ N}} \end{aligned}$$

TRAMO DE

Fig. 1.66d. Diagrama de reacciones del tramo DE.



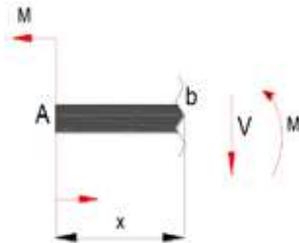
$$\begin{aligned} \sum M_E &= 0 \quad \curvearrowright^+ \quad \curvearrowleft^- \\ -R_{Dy}(2\text{ m}) - P(2\text{ m}) - M_E &= 0 \\ M_E &= R_{Dy}(2\text{ m}) + P(2\text{ m}) \\ M_E &= 566,66\text{ N}(2\text{ m}) + 300\text{ N}(2\text{ m}) \\ M_E &= 1133,32\text{ N}\cdot\text{m} + 600\text{ N}\cdot\text{m} \\ \mathbf{M_E} &= \mathbf{1733,32\text{ N}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \quad +\uparrow \downarrow- \\ -R_{Dy} - P + R_{Ey} &= 0 \\ R_{Ey} &= R_{Dy} + P \\ R_{Ey} &= 566,66\text{ N} + 300\text{ N} \\ \mathbf{R_{Ey}} &= \mathbf{866,66\text{ N}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+ \\ \mathbf{R_{Ex}} &= \mathbf{0\text{ N}} \end{aligned}$$

TRAMO AB

Fig. 1.66e. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\sum F_v = 0 \quad +\uparrow \downarrow -$$

$$V = 0 \text{ N}$$

$$x = 0 \rightarrow V = 0 \text{ N}$$

$$x = 1 \text{ m} \rightarrow V = 0 \text{ N}$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrow + \curvearrow -$$

$$-M - M_f = 0$$

$$M_f = -M$$

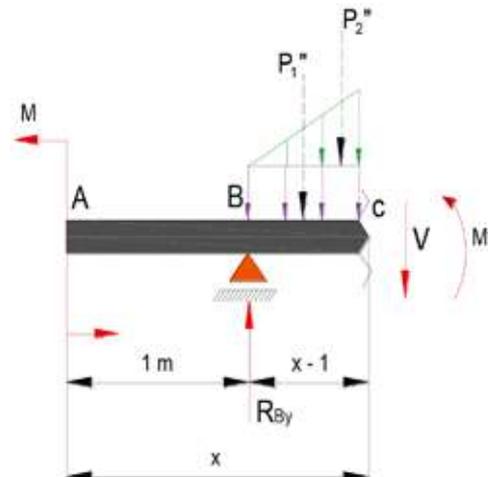
$$M_f = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow M_f = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$x = 1 \text{ m} \rightarrow M_f = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

TRAMO BC

Fig. 1.66f. Viga realizada corte en tramo BC análisis izquierda-derecha.



$$P_1'' = q_1(x - 1)$$

$$P_1'' = 200x$$

$$P_2'' = \frac{(q_2 - q_1)(x - 1)}{2}$$

$$\frac{y}{q_2 - q_1} = \frac{x - 1}{3} \quad \text{Relación de triángulos}$$

$$y = \frac{200(x - 1)}{3}$$

$$P_2'' = \frac{200(x - 1)^2}{6}$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad +\uparrow \downarrow -$$

$$R_{By} - P_1'' - P_2'' - V = 0$$

$$V = R_{By} - P_1'' - P_2''$$

$$V = 933,34 - 200(x - 1) - \frac{100}{3}(x - 1)^2$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad \curvearrowright^+ \curvearrowleft^-$$

$$-M + R_{By}(x - 1) - P_1'' \left( \frac{x - 1}{2} \right)$$

$$- P_2'' \left( \frac{x - 1}{3} \right) - M_f$$

$$= 0$$

$$x = 1\text{m} \rightarrow V = 933,34 \text{ N}$$

$$x = 4\text{m} \rightarrow V = 33,34 \text{ N}$$

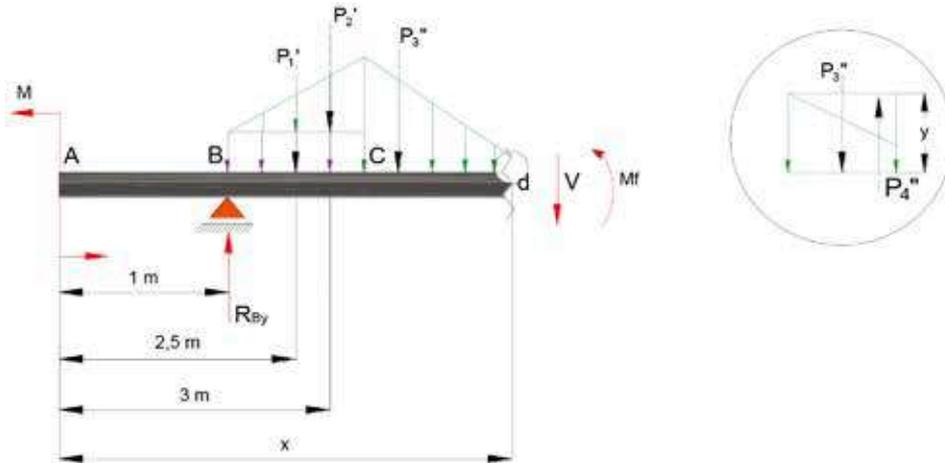
$$M_f = -500 + 933,33(x - 1) - 100(x - 1)^2 - \frac{100}{9}(x - 1)^3$$

$$x = 1\text{m} \rightarrow M_f = -500 \text{ N.m}$$

$$x = 4\text{m} \rightarrow M_f = 1100,2 \text{ N.m}$$

TRAMO CD

Fig. 1.66g. Viga realizada corte en tramo CD análisis izquierda-derecha.



$$P_3'' = q_2(x - 4)$$

$$P_3'' = 400(x - 4)$$

$$P_4'' = \frac{y(x - 4)}{2}$$

$$\frac{y}{q_2} = \frac{x - 4}{3}$$

$$y = \frac{q_2(x - 4)}{3}$$

$$y = \frac{400(x - 4)}{3}$$

$$P_4'' = \frac{400(x - 4)^2}{6}$$

Relación de triángulos

$$\Sigma F_v = 0 \quad \downarrow - \uparrow +$$

$$\Sigma M_c = 0 \quad \curvearrow + \curvearrow -$$

$$\begin{aligned}
 R_{By} - P'_1 - P'_2 - P''_3 + P''_4 - & -M + R_{By}(x-1) - P'_1(x-2,5) \\
 V = 0 & - P'_2(x-3) \\
 V = R_{By} - P'_1 - P'_2 - P''_3 + P''_4 & - P''_3\left(\frac{x-4}{2}\right) \\
 & + P''_4\left(\frac{x-4}{3}\right) - M_f \\
 V = 933,34 N - 600 N - 300 N & = 0 \\
 - 400(x-4) & M_f = -500 + 933,34(x-1) \\
 + \frac{200}{3}(x-4)^2 & - 600(x-2,5) \\
 V = 33,34 - 400(x-4) & - 300(x-3) \\
 + \frac{200}{3}(x-4)^2 & - \frac{400(x-4)^2}{3} \\
 & + \frac{200(x-4)^3}{9}
 \end{aligned}$$

$$x = 4m \rightarrow V = 33,34 N$$

$$x = 7m \rightarrow V = -566,66 N$$

$$x = 4m \rightarrow M_f = 1100,02 N.m$$

$$x = 4,09m \rightarrow M_f = 1101.41 N.m$$

$$x = 7m \rightarrow M_f = 0 N.m$$

Cuando  $V$  es cero,  $M_f$  es máximo:

$$0 = 33,34 - 400(x-4) + \frac{200}{3}(x-4)^2$$

$$0 = 66,66(x-4)^2 - 400(x-4) + 33,34$$

$$y = x - 4$$

$$ay^2 + by + c = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_1, x_2$$

$$\frac{400 \pm \sqrt{400^2 - 4(66,66)(33,34)}}{2(66,66)} = 5,92; 0,09$$

$$x - 4 = 5,92 ; 0,09$$

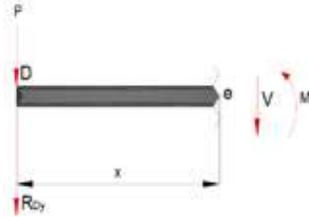
$$x_1 = 9,92 m$$

$$x_2 = 4,09 m \text{ ok}$$

Nota: La respuesta es  $x_2$ , debido a que esta cae dentro del rango evaluado.

## TRAMO DE

Fig. 1.66h. Viga realizada corte en tramo DE análisis izquierda-derecha.



$$\Sigma F_v = 0 \quad \uparrow_+ \quad \downarrow_-$$

$$-P - R_{Dy} - V = 0$$

$$V = -P - R_{Dy}$$

$$V = -300 \text{ N} - 566,66 \text{ N}$$

$$V = -866,66 \text{ N}$$

$$x = 0\text{m} \rightarrow V = -866,66 \text{ N}$$

$$x = 2\text{m} \rightarrow V = -866,66 \text{ N}$$

$$\Sigma M_e = 0 \quad \uparrow_+ \quad \downarrow_-$$

$$-R_{Dy}(x) - P(x) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_{Dy}(x) - P(x)$$

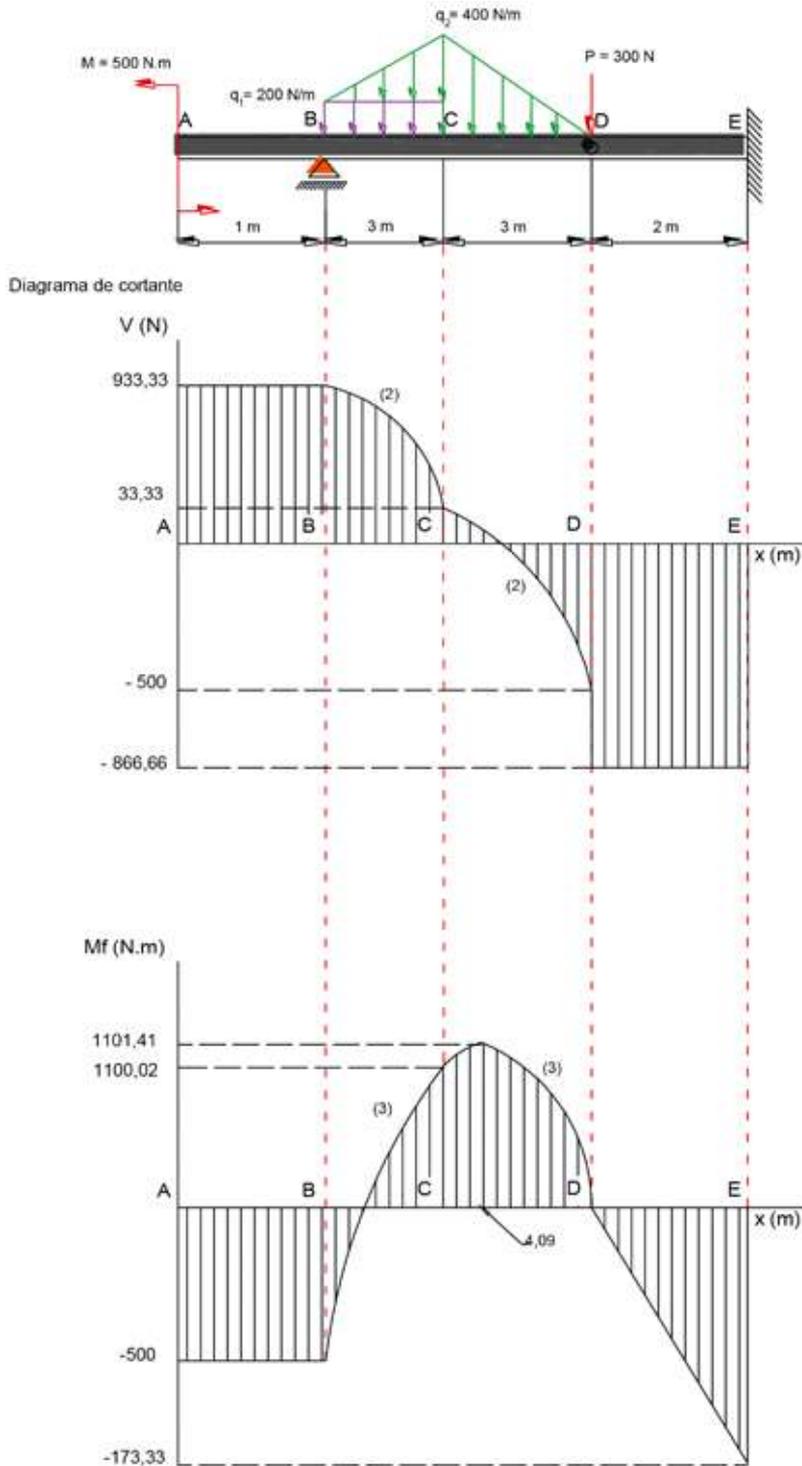
$$M_f = -566,66(x) - 300(x)$$

$$M_f = -866,66 x$$

$$x = 0\text{m} \quad M_f = 0 \text{ N.m}$$

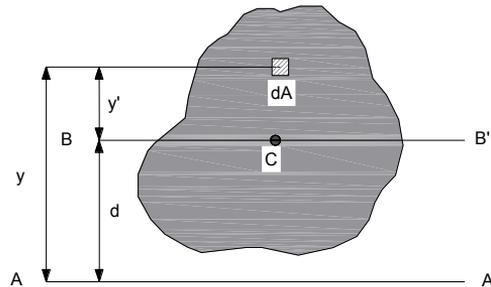
$$x = 2\text{m} \quad M_f = -1733,32 \text{ N.m}$$

Fig. 1.66i Diagrama de cortante y momento flector para el problema 1.23.



### 1.1.4. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER

Fig. 1.67. Área  $S$  con respecto al eje  $AA'$



Se considera el momento de inercia  $I$  de un área  $A$  con respecto a un eje  $AA'$  (figura 1.67). Si se representa con la  $y$  la distancia desde un elemento de área  $dA$

$$I = \int y^2 dA$$

hasta  $AA'$ , se escribe:

Ahora se dibuja a través del centroide  $C$  del área un eje  $BB'$  que es paralelo a  $AA'$ ; dicho eje es llamado eje centroidal. Representando con  $y'$  la distancia desde el elemento  $dA$  hasta  $BB'$ , se escribe  $y = y' + d$ , donde  $d$  es la distancia entre los ejes  $AA'$  y  $BB'$ . Sustituyendo por  $y$  en la integral anterior, se escribe:

$$I = \int y^2 dA$$

$$I = \int (y' + d)^2 dA$$

$$I = \int (y'^2 + 2y'd + d^2) dA$$

$$I = \int y'^2 dA + \int 2y'd dA + \int d^2 dA$$

$$I = \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

La primera integral representa el momento de inercia  $I$  del área con respecto al eje 20 centroidal  $BB'$ . La segunda integral representa el primer momento del área con respecto a  $BB'$ ; como el centroide  $C$  del área está localizada sobre dicho eje, la segunda integral debe ser igual a cero. Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total  $A$ . Por tanto, se tiene:

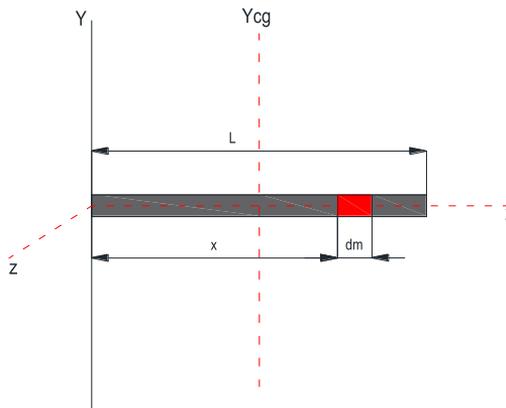
$$I = \bar{I} + A \cdot d^2 \quad (\text{Ec. 1.5})$$

Esta fórmula expresa el momento de inercia  $I$  de un área con respecto a cualquier eje dado  $AA'$  es 5 igual al momento de inercia  $\bar{I}$  del área con respecto a un eje centroidal  $BB'$  que es paralelo a  $AA'$  más el producto del área  $A$  y el cuadrado de la distancia  $d$  entre los ejes. Este teorema se conoce como el teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner. El teorema fue denominado así en honor de Jakob Steiner.

### PROBLEMA MODELO 1.24

Calcular el momento de inercia de una varilla delgada de longitud  $L$  y masa  $M$  respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por un extremo  $CG$ .

Fig. 1.68. Esquema para el problema 1.24.



Para calcular ahora el momento de inercia, es necesario aplicar el Teorema de Steiner.

$$I_y = I_{yCG} + MD^2$$

Siendo  $D$  la distancia entre los dos ejes, en este caso  $L$

$$I_y = I_{yCG} + M \left( \frac{L}{2} \right)^2$$

Sustituyendo el momento de inercia, entonces tenemos:

$$I_y = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4}$$

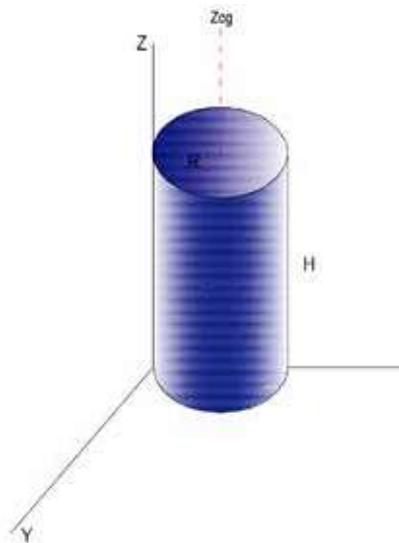
Finalmente tenemos:

$$I_y = I_z = \frac{ML^2}{3}$$

### PROBLEMA 1.25

Calcular el momento de inercia de un cilindro macizo homogéneo de radio  $R$  y altura  $H$  y masa  $M$  respecto del eje  $Z$  de la figura siguiente:

Fig. 1.69. Esquema 5 para el problema 1.25.



$$I_y = I_{yCG} + MD^2$$

Siendo D la distancia entre los dos ejes, en este caso R.

$$I_z = I_{zCG} + M(R)^2$$

Sustituyendo el momento de inercia, entonces tenemos:

$$I_z = \frac{MR^2}{2} + M(R)^2$$

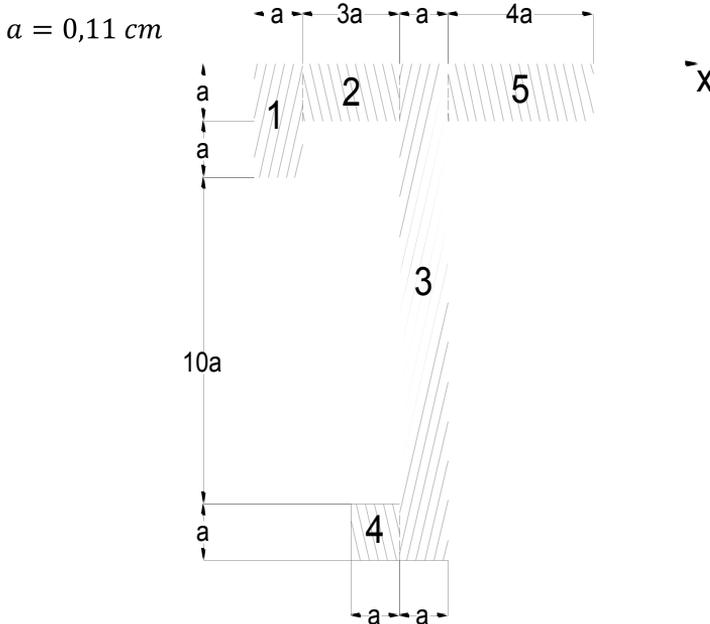
Finalmente tenemos:

$$I_z = \frac{3MR^2}{2}$$

Hallar el centro de gravedad y el momento de inercia de los siguientes perfiles:

### PROBLEMA 1.26

Fig. 1.70a. Esquema para el problema 1.26.



$$\bar{y} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A}$$

Donde:

A = área

y = Distancia desde el eje de referencia al centro de gravedad del área

$$\bar{y} = \frac{[(0,22 * 0,11)0,11] + \left[ (0,33 * 0,11) \frac{0,11}{2} \right] + \left[ (1,43 * 0,11) \frac{1,43}{2} \right] + \left[ (0,11 * 0,11) \left( 1,32 + \frac{0,11}{2} \right) \right] + \left[ (0,44 * 0,11) \frac{0,11}{2} \right]}{(0,22 * 0,11) + (0,33 * 0,11) + (1,43 * 0,11) + (0,11 * 0,11) + (0,44 * 0,11)}$$

$$\bar{y} = \frac{2,662 \times 10^{-3} + 1,99 \times 10^{-3} + 0,1124 + 0,0166 + 2,66}{0,0242 + 0,0363 + 0,1573 + 0,0121 + 0,0484}$$

$$\bar{y} = \frac{0,1363}{0,2783}$$

$$\bar{y} = 0,49cm$$

$$\bar{y} = 4,9 \times 10^{-3} m$$

$$I_{EN} = \sum I_{cg} + \sum A \cdot \bar{y}^2$$

Donde:

$\sum I_{cg}$  = Sumatoria de las inercias de cada área con respecto a su centro de gravedad.

$\sum A \cdot \bar{y}^2$  = Sumatoria de las áreas por la distancia desde el eje neutro al centro de gravedad de cada área

$$\sum I_{cg} = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$\sum I_{cg} = \frac{(0,11)(0,22)^3}{12} + \frac{(0,33)(0,11)^3}{12} + \frac{(0,11)(1,43)^3}{12} + \frac{(0,11)(0,11)^3}{12} + \frac{(0,44)(0,11)^3}{12}$$

$$\sum I_{cg} = 9,76 \times 10^{-5} + 3,66 \times 10^{-5} + 0,0268 + 1,22 \times 10^{-5} + 4,88 \times 10^{-5}$$

$$\sum I_{cg} = 0,027 cm^4$$

$$\sum I_{cg} = 2,7 \times 10^{-10} m^4$$

$$\sum A. \bar{y}^2 = (0,22 * 0,11)(0,38)^2 + (0,33 * 0,11)(0,435)^2 + (1,43 * 0,11)(0,225)^2 + (0,11 * 0,11)(0,885)^2 + (0,44 * 0,11)(0,435)^2$$

$$\sum A. \bar{y}^2 = 3,49x10^{-3} + 6,87x10^{-3} + 7,96x10^{-3} + 9,47x10^{-3} + 9,16x10^{-3}$$

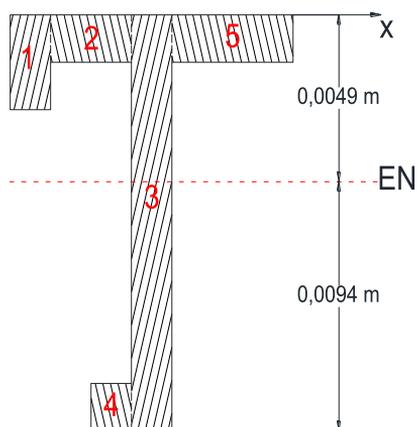
$$\sum A. \bar{y}^2 = 0,037 \text{ cm}^4$$

$$\sum A. \bar{y}^2 = 3,7x10^{-10} \text{ m}^4$$

$$I_{EN} = 2,7x10^{-10} \text{ m}^4 + 3,7x10^{-10} \text{ m}^4$$

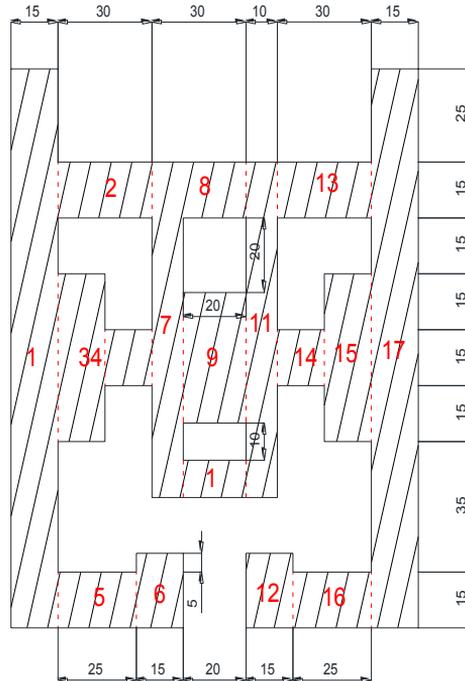
$$I_{EN} = 6,4x10^{-10} \text{ m}^4$$

Fig. 1.70b. Perfil del problema 1.26 con su centro de gravedad.



## PROBLEMA 1.27

Fig. 1.71a. Esquema para el problema 1.27.



$$\bar{y} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A}$$

$$\begin{aligned} \sum A \cdot y = & [(1,5 * 0,15)0,75] + [(0,3 * 0,15)1,175] + [(0,45 * 0,15)0,725] + \\ & [(0,15 * 0,15)0,725] + [(0,25 * 0,15)0,075] + [(0,2 * 0,15)0,1] + [(0,9 * \\ & 0,1)0,8] + [(0,15 * 0,2)1,175] + [(0,35 * 0,2)0,725] + [(0,1 * 0,2)0,4] + \\ & [(0,9 * 0,1)0,8] + [(0,2 * 0,15)0,1] + [(0,3 * 0,15)1,175] + [(0,15 * \\ & 0,15)0,725] + [(0,45 * 0,15)0,725] + [(0,25 * 0,15)0,075] + [(1,5 * 0,15)0,75] \end{aligned}$$

$$\sum A \cdot y = 0,823375 \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} \sum A = & (1,5 * 0,15) + (0,3 * 0,15) + (0,45 * 0,15) + (0,15 * 0,15) + \\ & (0,25 * 0,15) + (0,2 * 0,15) + (0,9 * 0,1) + (0,15 * 0,2) + (0,35 * 0,2) + \\ & (0,1 * 0,2) + (0,9 * 0,1) + (0,2 * 0,15) + (0,3 * 0,15) + (0,15 * 0,15) + \\ & (0,45 * 0,15) + (0,25 * 0,15) + (1,5 * 0,15) \end{aligned}$$

$$\Sigma A = 1,155 m^2$$

$$\bar{y} = \frac{0,823375 m^3}{1,155 m^2}$$

$$\bar{y} = 0,7128 m$$

$$I_x = \Sigma I_{cg} + \Sigma A \bar{y}^2$$

$$I_{cg} = \frac{bxh^3}{12}$$

$$I_{cg} = \frac{0,15(1,5^3)}{12} + \frac{0,15(0,3^3)}{12} + \frac{0,15(0,45^3)}{12} + \frac{0,15(0,15^3)}{12} + \frac{0,15(0,25^3)}{12} + \frac{0,15(0,2^3)}{12} + \frac{0,1(0,9^3)}{12} + \frac{0,2(0,15^3)}{12} + \frac{0,2(0,35^3)}{12} + \frac{0,2(0,1^3)}{12} + \frac{0,1(0,9^3)}{12} + \frac{0,15(0,2^3)}{12} + \frac{0,15(0,3^3)}{12} + \frac{0,15(0,15^3)}{12} + \frac{0,15(0,45^3)}{12} + \frac{0,15(0,25^3)}{12} + \frac{0,15(1,5^3)}{12}$$

$$I_{cg} = 0,115353125 m^4$$

$$\Sigma A.y^2 = [(1,5 * 0,15)0,0372^2] + [(0,3 * 0,15)0,4622^2] + [(0,45 * 0,15)0,0122^2] + [(0,15 * 0,15)0,0122^2] + [(0,25 * 0,15)0,6378^2] + [(0,2 * 0,15)0,6128^2] + [(0,9 * 0,1)0,0128^2] + [(0,15 * 0,2)0,4622^2] + [(0,35 * 0,2)0,0122^2] + [(0,1 * 0,2)0,3128^2] + [(0,9 * 0,1)0,0128^2] + [(0,2 * 0,15)0,6128^2] + [(0,3 * 0,15)0,4622^2] + [(0,15 * 0,15)0,0122^2] + [(0,45 * 0,15)0,0122^2] + [(0,25 * 0,15)0,06378^2] + [(1,5 * 0,15)0,0372^2]$$

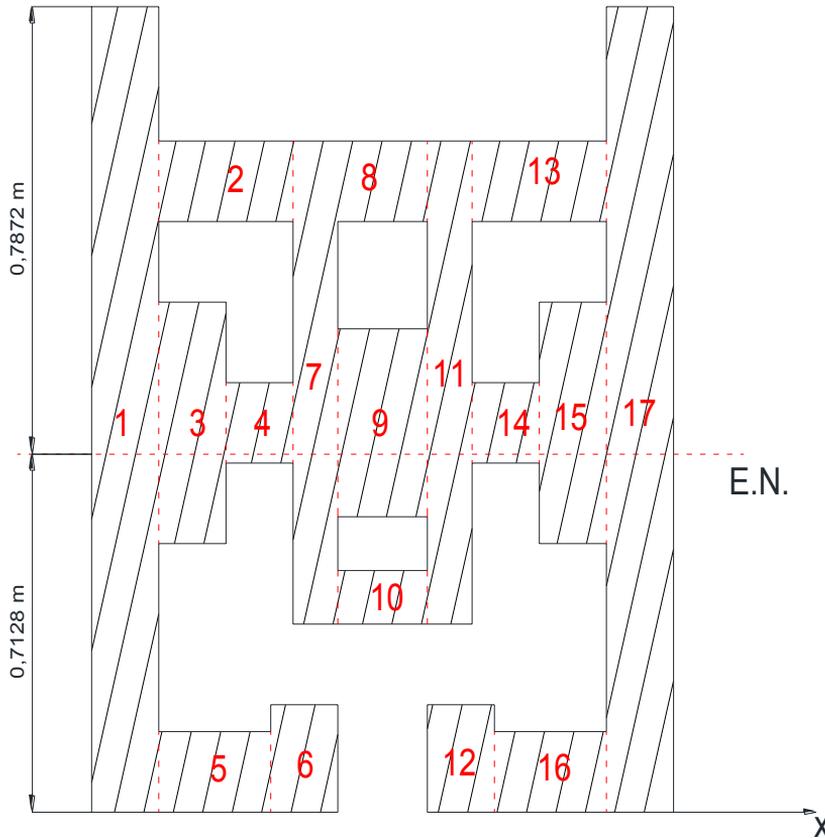
$$\Sigma A.y^2 = 0,0813223602 m^4$$

$$I_{EN} = I_{cg} + \Sigma A.y^2$$

$$I_{EN} = (0,115353125 + 0,0813223602) m^4$$

$$I_{EN} = 0,1966754852 m^4$$

Fig. 1.71b. Perfil del problema 1.27 con su centro de gravedad.



### 1.1.5. ESFUERZO NORMAL EN EL RANGO ELÁSTICO

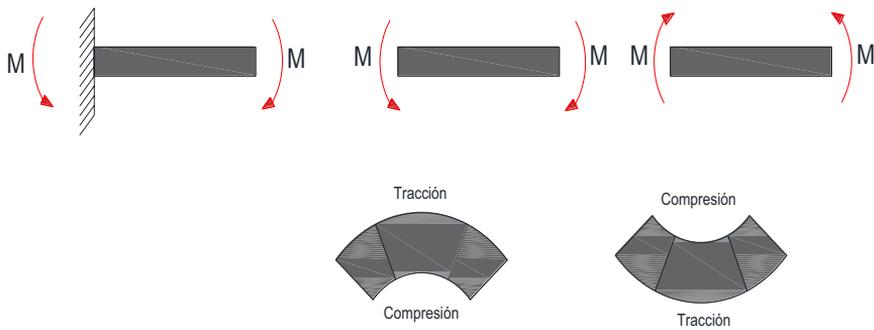
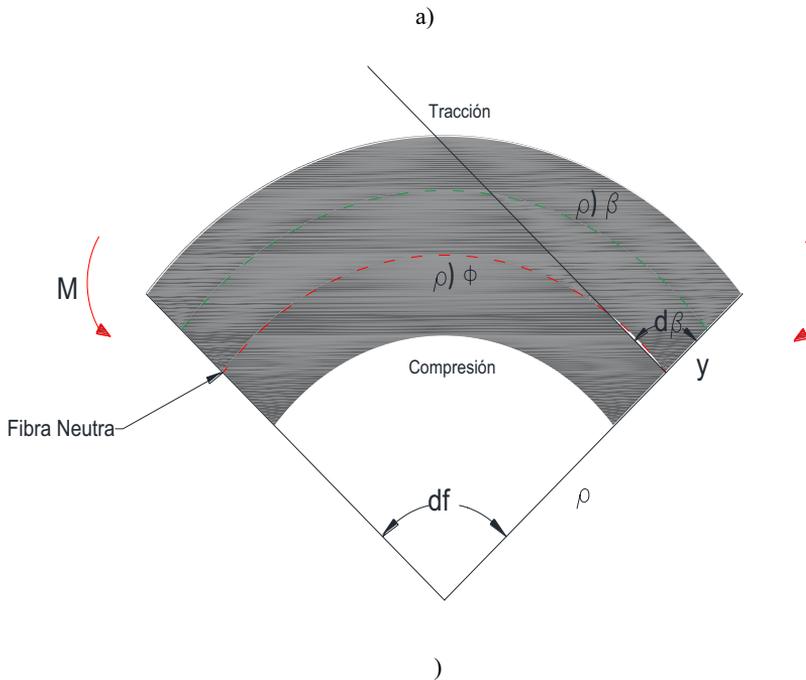


Fig. 1.72: a) Viga empotrada sometida a un par flector; b) Sección transversal.



En el momento flector  $M$  es tal que los esfuerzos normales en el elemento permanecen por debajo del esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ .

10 Los esfuerzos permanecen por debajo del límite elástico.

- No habrá deformaciones permanentes
- Se considera un material homogéneo

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (\text{Ec. 1.6})$$

$\epsilon_x$ : Deformación unitaria longitudinal normal

Si

$$\epsilon_x = \frac{-Y}{c} \epsilon_m \quad (\text{Ec. 1.7})$$

Reemplazando el valor de  $\sigma_x$  y multiplicando por  $E$  en la ecuación (1.2) se tiene

$$(E * \epsilon_x) = \frac{-Y}{c} (\epsilon_m * E)$$

$$\sigma_x = \frac{-Y}{c} \sigma_m \quad (\text{Ec. 1.8})$$

$\sigma_m$ : Es el máximo valor absoluto de esfuerzo

- En este punto los valores de  $\sigma_m$  y la ubicación de la superficie neutra son desconocidas. Y se pueden hallar usando las ecuaciones:

Componente en x del esfuerzo  $\int \sigma_x dA = 0$  (Ec. 1.9)

Momento alrededor del eje z  $\int -Y \sigma_x dA = M$  (Ec. 1.10)

El signo negativo se debe a que un esfuerzo de tensión ( $\sigma_x > 0$ ) lleva a un momento negativo de la fuerza normal  $\sigma_x dA$  alrededor del eje z.

Ahora, sustituyendo (1.8) en (1.9)

$$\begin{aligned} \int \sigma_x dA &= 0 \\ \int \sigma_x dA &= \int \left( \frac{-Y}{c} \sigma_m \right) dA = 0 \\ &= -\frac{\sigma_m}{c} \int Y dA = 0 \end{aligned}$$

$$\int Y dA = 0 \quad (\text{Ec. 1.11})$$

Ec. 1.11: Primer momento de sección transversal (área) es igual a cero.

Con la especificación de que el eje z debe coincidir con el eje neutro de la sección.

Reemplazando (1.8) en (1.10):

$$\int (-Y \sigma_x dA) = M$$
$$\int (-Y) \left( \frac{-Y}{c} \sigma_m \right) dA = M$$
$$\frac{\sigma_m}{c} \int Y^2 dA = M$$

Si se despeja el valor de  $\sigma_m$ , se tiene

$$\sigma_m = \frac{M c}{\int Y^2 dA} \quad (\text{Ec. 1.12})$$

Además, se conoce que el segundo momento de Área  $\int Y^2 dA$  es igual al momento de Inercia.

Entonces  $I = \int Y^2 dA$  (Ec. 1.13)

$$\sigma_m = \frac{M c}{I} \quad (\text{Ec. 1.14})$$

Si de la ecuación 1.8 encontramos un valor para  $\sigma_m$

$$\sigma_x = \frac{-Y}{c} \sigma_m$$
$$\sigma_m = -\frac{\sigma_x c}{Y}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.14

$$\sigma_m = \frac{M c}{I}$$
$$-\frac{\sigma_x c}{Y} = \frac{M c}{I}$$

Despejando el valor de  $\sigma_x$ , se tiene

$$\sigma_x = -\frac{M Y}{I} \quad (\text{Ec. 1.15})$$

Donde:

$\sigma_x$  = Esfuerzo normal en x

$M$  = Momento flector

$Y$  = Centro de gravedad respecto a y

$I$  = Momento de Inercia

Que es la ecuación del esfuerzo normal  $\sigma_x$  causado por la flexión del elemento, también se designa como esfuerzo de flexión.

Las ecuaciones 1.14 y 1.15 se llaman ecuaciones de flexión elástica, y el esfuerzo normal  $\sigma_x$  causado por la flexión del elemento se designa con frecuencia como esfuerzo de flexión. Se verifica que el esfuerzo es de compresión ( $\sigma_x < 0$ ) por encima del eje neutro ( $y > 0$ ) cuando el momento  $M$  es positivo la tensión ( $\sigma_x > 0$ ) cuando  $M$  es negativo.

Para ver la ubicación de la fibra neutra:

$$\sum F_x = 0 \quad \leftarrow \rightarrow$$

$$\int \sigma \cdot dA = 0$$

$$\int \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = 0$$

$$\frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

$$\int y dA = \text{momento estatico}$$

$$\frac{E}{\rho} \neq 0 \text{ por que la viga está deformada por lo tanto } \rho \neq \infty$$

Entonces

$$\int y dA = 0$$

$$y dA = 0$$

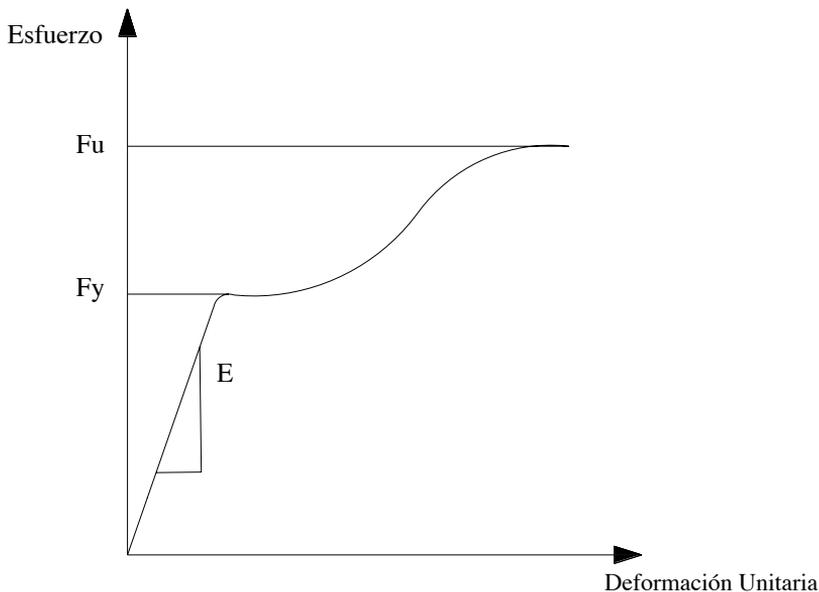
Por lo tanto  $y = 0$ , lo que quiere decir que la fibra neutra está en el centro de gravedad del perfil.

### 1.1.5.1. PERFILES ESTRUCTURALES DE ACERO

El acero es un material muy utilizado en la construcción de estructuras, y su fabricación industrializada ha generado un control de calidad adecuado que asegura estándares de rendimiento. Es un material con una elevada resistencia mecánica y una ductilidad alta; su capacidad de deformación plástica lo convierten en un material ideal en un diseño sismorresistente.

El acero a temperatura ambiente posee un comportamiento dúctil, que se muestra en la siguiente figura:

Fig. 1.73. Comportamiento del acero estructural.



En la gráfica anterior se puede observar un comportamiento lineal hasta alcanzar un esfuerzo  $F_y$  denominado límite de fluencia. Cuando el esfuerzo es menor a este valor, el material se encuentra en el rango elástico, es decir que las deformaciones presentes en el elemento desaparecen cuando la carga desaparece.

En esta zona se observa una pendiente de la recta  $E$  conocida como el Módulo de Elasticidad, que es igual a:

$$E = \frac{F}{\varepsilon}$$

Dónde:

$E$  = Módulo de elasticidad

$F$  = Esfuerzo

$\varepsilon$  = Deformación unitaria

El valor de  $E$  se puede considerar constante para la mayoría de aceros estructurales, y tiene un valor de  $1,99948 \times 10^8 \text{ kPa}$ .

Cuando el esfuerzo supera el valor de  $F_y$  se nota un comportamiento no lineal; y cuando el esfuerzo es igual a un valor  $F_u$  conocido como esfuerzo a la tracción, se ha llegado a la fractura del material. En esta zona se dice que el material tiene un comportamiento plástico, es decir, las deformaciones presentes son permanentes en el elemento.

Los valores tanto de  $F_y$  y  $F_u$  dependen del tipo de acero. A continuación, se detallan los aceros estructurales comúnmente usados (AISC, 2010).

Tabla 1.1. Propiedades de aceros estructurales.  
(Fuente: AISC. Manual de Construcción de Acero v13.)

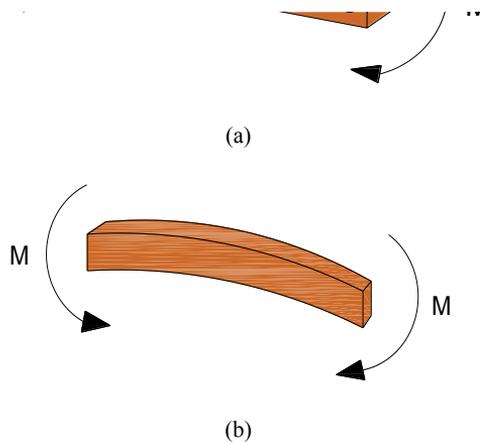


Fig. 1.1 a) Viga sometida a flexión. b) Diagrama de cuerpo libre de la viga en voladizo (flexión pura)

A continuación, mostraremos unos ejemplos de aplicación de flexión pura:

**Ejemplo1:** En la siguiente figura observamos a un levantador de pesas, es de mucha importancia saber a qué par flector está sometida la barra, para ello prime realizamos en diagrama de cuerpo libre.



El acero estructural se encuentra disponible en una amplia gama de perfiles estructurales a fin de satisfacer cualquier solicitud. Comúnmente, encontramos dos tipos de perfiles.

- Perfiles laminados en caliente.
- Perfiles laminados en frío.

Los perfiles laminados en caliente se forman por un proceso de extrusión, mientras que los laminados en frío se forman por un proceso de laminado en frío.

### **Perfiles laminados en caliente**

Los perfiles laminados en caliente son fabricados bajo norma, en la industria es común encontrar perfiles europeos y americanos.

Los perfiles europeos más comunes se mencionan a continuación:

**Perfil IPN:** Sección en forma de I, sus caras exteriores de las alas son normales al alma. Caras interiores inclinadas un 14%. Dimensiones desde 80 a 600 mm.

*Aplicación:* Resiste perfectamente a flexión. No mucho a compresión.

**Perfil IPE:** Sección de doble T, caras exteriores e interiores de las alas paralelas y normales al alma, espesor constante. Dimensiones desde 80 a 600 mm.

*Aplicación:* Resiste muy bien a flexión, soporta pequeñas compresiones.

**Perfil HE:** Sección semejante al perfil IPE pero la relación b/h es mayor. Dimensiones de 100 a 600 mm. Existen tres series: HEB (normal), HEA (ligera) y HEM (pesada).

*Aplicación:* Resiste muy bien a flexión y a compresión.

**Perfil UPN:** Sección en forma de U. Caras interiores con una inclinación del 8%. Dimensiones desde 80 hasta 300 mm.

*Aplicación:* Unido a otro perfil igual, trabaja muy bien a compresión. Individualmente soporta a tracciones y pequeñas compresiones.

**Perfil L:** Sección en forma de ángulo recto, con alas de igual longitud. Dimensiones desde 25-3 hasta 200-20 mm.

*Aplicación:* Soporta tracciones y pequeñas compresiones.

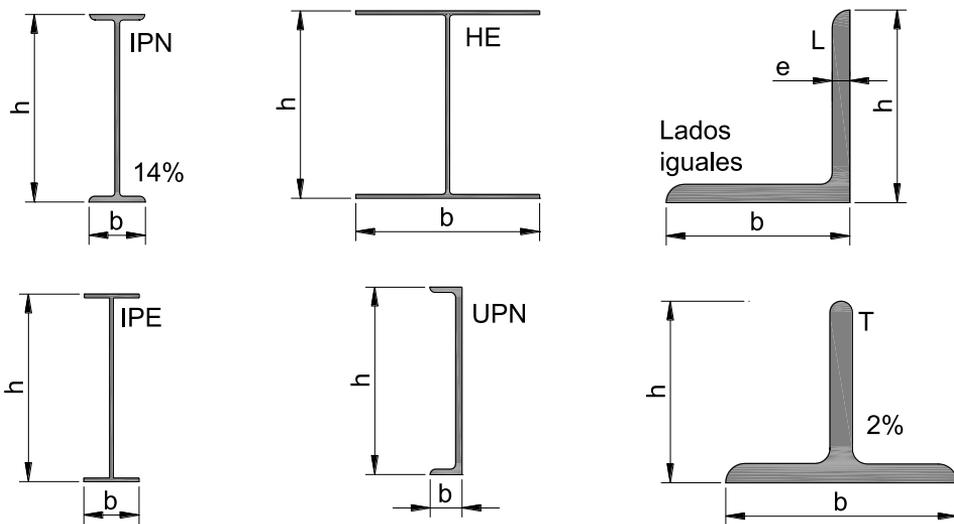
**Perfil LD:** Sección en ángulo recto. Alas de distinta longitud. Dimensiones desde 80-50-8 hasta 150-90-13 mm.

*Aplicación:* Soporta tracciones y pequeñas compresiones.

**Perfil T:** Sección en forma de T simple. Tiene un canto igual al ancho del ala. Dimensiones de desde 30-30-4 hasta 100-100-11 mm.

*Aplicación:* Soporta tracciones, flexiones no muy grandes y pequeñas compresiones.

Fig. 1.74. Perfiles laminados en caliente europeos.



Para los efectos de una correcta colocación de los perfiles metálicos, es indispensable conocer en qué sentido tiene más inercia; posteriormente, al estudiar los distintos tipos de vigas se verá la inercia de cada una de ellas, por lo pronto se puede indicar que los perfiles metálicos para vigas de mayor inercia en sentido descendente son:

Viga armada, perfil HEB, perfil IPE, perfil IPN, viga void a alveolada y viga de celosía.

La designación de los perfiles se efectúa en función de su tipo y sus dimensiones. Para perfiles de la serie I y U, es suficiente con indicar el tipo y su altura, ejemplo:

IPN 180 nos indica el tipo (IPN) y su altura total (180 mm).

Para los perfiles de tipo angular (L) debemos indicar si se trata de perfiles de lados iguales o desiguales, además se debe indicar el espesor, ejemplo:

L 50x50x3 nos indica que cada lado mide 50 mm y que el espesor del ala es de 3 mm.

Los perfiles americanos son similares a los europeos, entre los principales tenemos:

**Perfil S:** Sección en forma de I, las caras interiores de las alas son inclinadas,

**Perfil W:** Sección en forma de I, perfil de alas paralelas, dimensiones de 100 a 1100 mm.

**Perfil HP:** Sección en forma de H, de alas anchas para pilotes, dimensiones de 200 a 360 mm.

**Perfil C:** Sección en forma de U estándar de alas inclinadas, dimensiones de 75 a 380 mm.

**Perfil MC:** Sección en forma de U de alas inclinadas, dimensiones de 150 a 460 mm.

**Perfil L:** Sección angular de lados iguales, dimensiones de 19 a 203 mm.

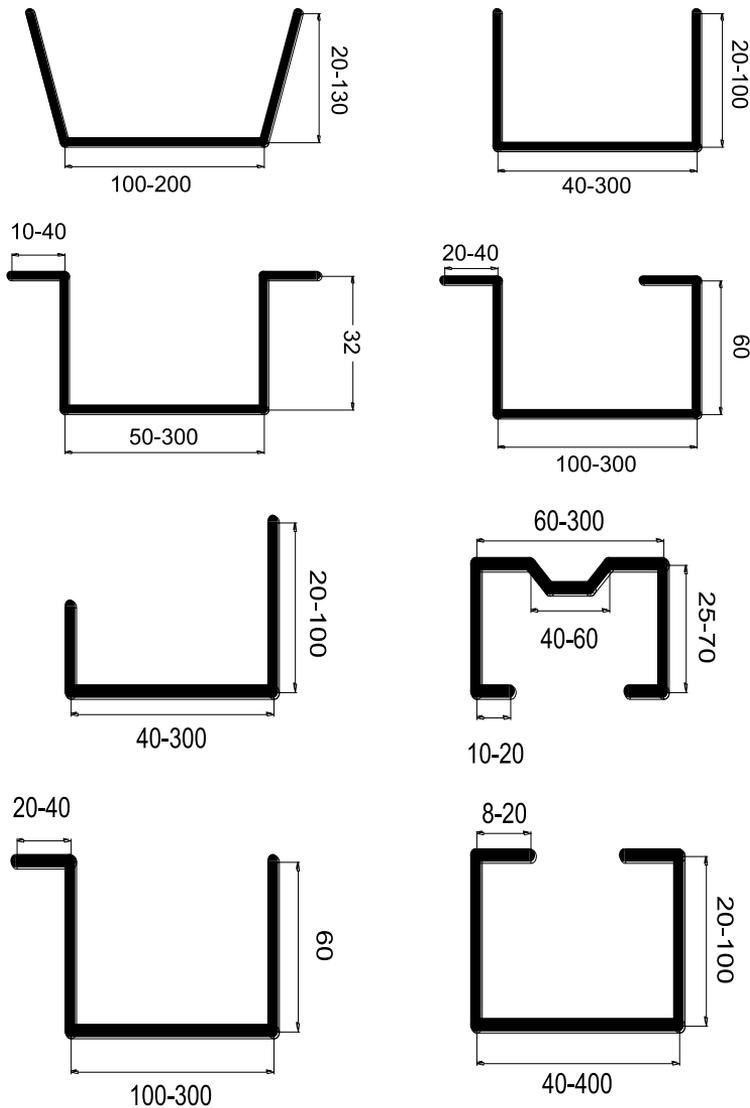
La designación de los perfiles se efectúa en función de su tipo, la altura y su peso. Por ejemplo:

W 12x58 nos indica el tipo (W), su altura total (12 in) y su peso 58 lb/ft.

Además de la gran variedad de secciones laminadas en caliente disponibles, existe una amplia diversidad de perfiles formados en frío. Su utilización en el

diseño está incluida en Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members del AISI (American Iron and Steel Institute), que coordina en lo posible con el AISC (American Institute of Steel Construction).

Fig. 1.75. Perfiles laminados en frío.



### 1.1.5.2 LOS PERFILES CON MAYOR ALTURA SON MEJORES EN LA FLEXIÓN

Volviendo a la ecuación 1.14, se nota que la razón  $I/c$  depende solo de la geometría de la sección transversal. Esta relación se denomina modulo elástico de la sección y se representa por  $S$ .

$$S = \frac{I}{c} \quad (\text{Ec. 1. 16})$$

Sustituyendo  $S$  por  $I/c$  en la ecuación 1.14, se escribe esta ecuación en forma alterna:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad (\text{Ec. 1. 17})$$

Como el esfuerzo máximo  $\sigma_m$  es inversamente proporcional al módulo elástico  $S$ , es claro que las vigas deben diseñarse con un  $S$  tan grande como sea práctico. Por ejemplo, en el caso de una viga de madera de sección rectangular de ancho  $b$  y altura  $h$ , se tiene;

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{1bh^2}{6}$$

$$S = \frac{1}{6}Ah \quad (\text{Ec. 1. 18})$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal de la viga. Esto muestra que, de dos vigas con igual sección transversal  $A$  (fig. 1.74), la viga con mayor altura  $h$  tendrá el mayor módulo de sección y, por lo tanto, será más efectiva para resistir la flexión.

Reemplazando la ecuación 1.18 en 1.17 tenemos:

$$\sigma_m = \frac{M_f}{\frac{1}{6}Ah} \quad (\text{Ec. 1. 19})$$

Analizando la ecuación 1.19 podemos concluir lo siguiente:

El área va a permanecer constante la única variación es la altura ( $h$ ) ya que si la altura ( $h$ ) aumenta, el esfuerzo normal  $\sigma_m$  disminuye y esa es la razón por la que los perfiles con mayor altura ( $h$ ) son mejores para la flexión.

Fig. 1.76. Secciones transversales de vigas de madera.

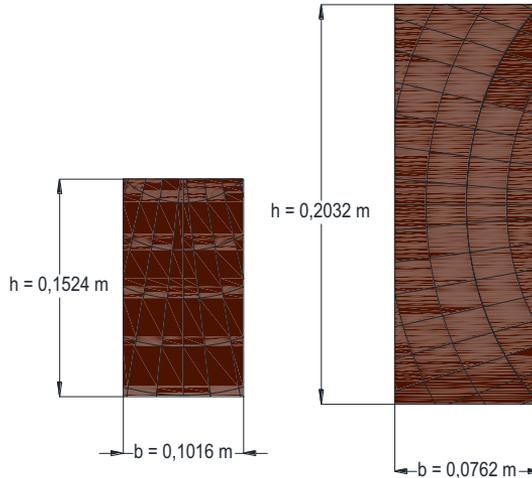
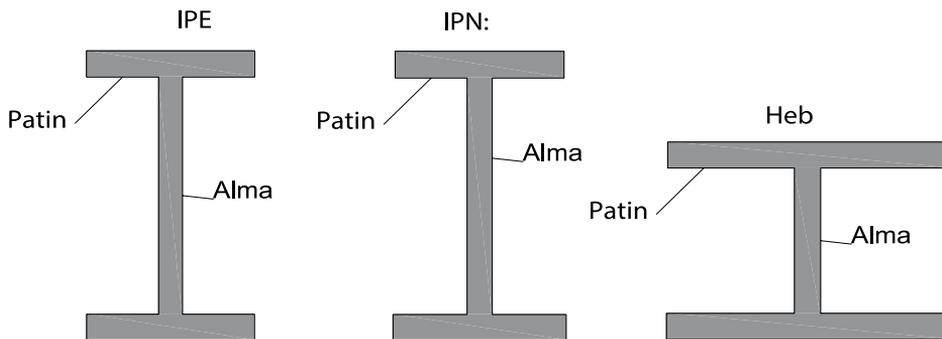


Fig. 1.77. Perfiles IPE, IPN, HEB.



Como podemos ver, los perfiles tipo IPE e IPN son los más utilizados en la flexión ya que, como lo mencionamos anteriormente, los perfiles con mayor altura son mejores en la flexión.

Tanto en el perfil IPE e IPN podemos ver que la altura (alma) es mayor que el patín mientras que en el perfil HEB observamos que el patín es mayor que la altura (alma); y por esta razón este tipo de perfiles no son recomendados en la flexión

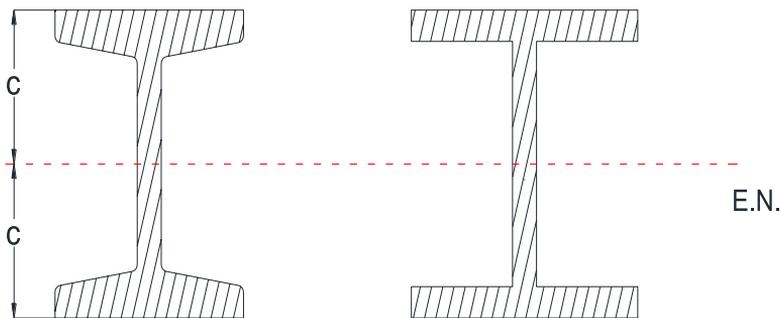
En caso de acero estructural, las vigas estándares estadounidenses (vigas S) y las vigas de aleta ancha (vigas W) (fig. 1.78) son preferibles a otros perfiles, ya que gran porción de su sección transversal se coloca lejos del eje neutro (fig. 1.79); así, para un área de sección transversal dada y una altura dada, su diseño

proporciona grandes valores de  $I$  y, por tanto, de  $S$ . Los valores del módulo elástico de la sección de vigas comúnmente fabricadas pueden obtenerse en tablas que traen una lista de diferentes propiedades geométricas de tales vigas. Para determinar el esfuerzo máximo  $\sigma_m$  en una sección de la viga estándar, el ingeniero solo tiene que leer el valor del módulo elástico  $S$  en una tabla y dividir el momento flector  $M$  en la sección entre  $S$ .

Fig. 1.78. El marco de muchas construcciones está formado con vigas de acero de aleta ancha.



Fig. 1.79. Secciones transversales de vigas de acero.



La deformación del elemento causada por el momento flector  $M$  se mide por la curvatura de la superficie neutra. La curvatura se define como el inverso del radio de curvatura  $\rho$  y puede obtenerse resolviendo la ecuación (1.7) entre  $1/\rho$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \quad (\text{Ec. 1.20})$$

Pero el rango elástico se tiene  $\epsilon_m = \sigma_m/E$ . Sustituyendo por  $\epsilon_m$  en (1.20), y recordando (1.14):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{1}{E_C} \frac{M_C}{I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (\text{Ec. 1.21})$$

### 1.1.6 ESFUERZOS TANGENCIALES

Los esfuerzos tangenciales, también denominados esfuerzos internos, son un conjunto de fuerzas y momentos aplicados sobre una sección transversal plana de un elemento estructural que son estáticamente equivalentes a una distribución de tensiones internas sobre el área de esa sección.

Fig. 1.80. a) b) Representación esquemática de los esfuerzos tangenciales.

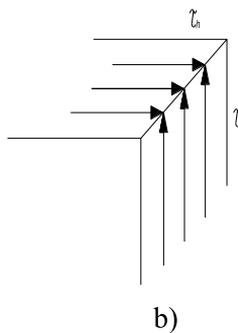
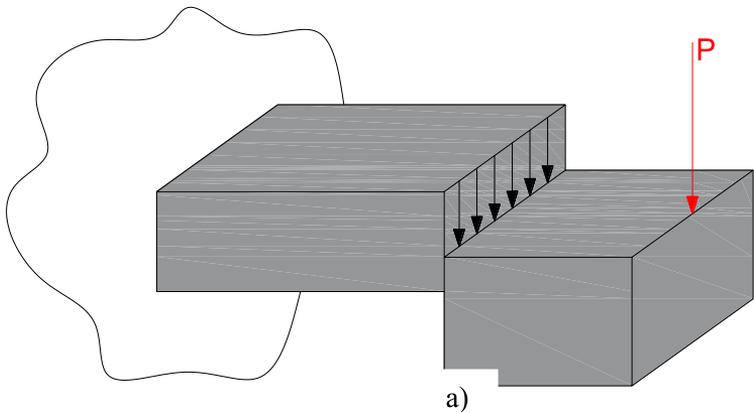


Fig. 1.82. Corte de viga. Demostración esfuerzo cortante.

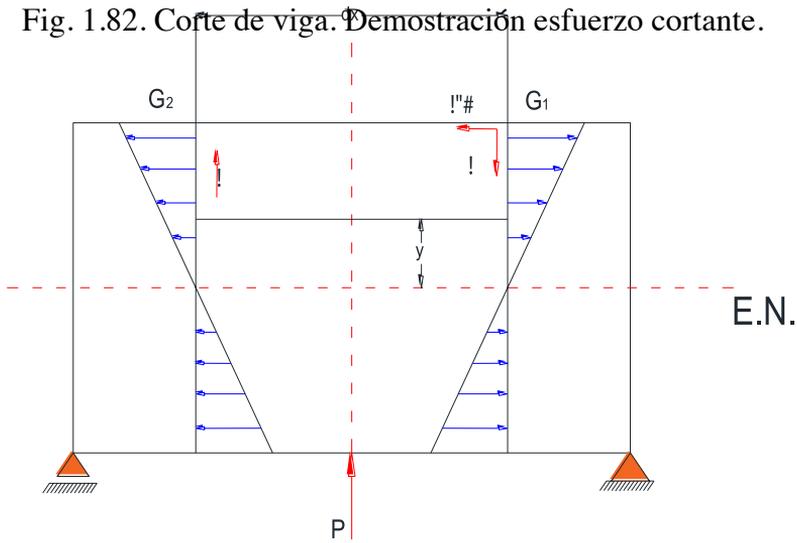
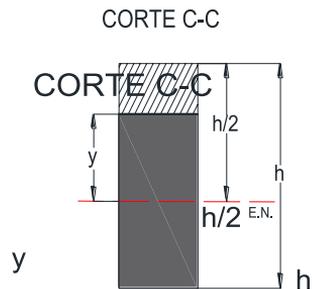
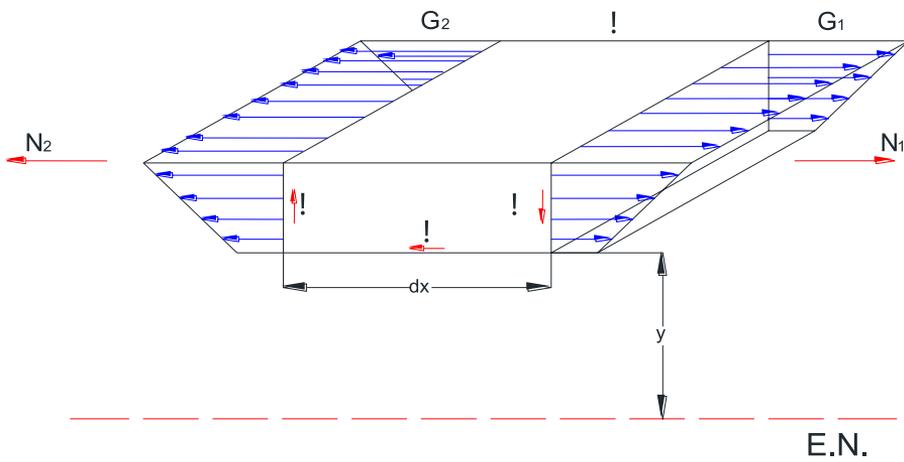


Fig. 1.81 Sección de la viga.



Asumimos para facilitar el análisis que  $d_y = d_x$

$$\tau = \frac{V \cdot S_x}{I_x \cdot b} \quad (\text{Ec. 1.21})$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow^+ \leftarrow^-$$

$$-N_2 + N_1 + \tau(b \, dx) = 0$$

$$-\sigma_2 \, dA + \sigma_1 \, dA + \tau \, dx \, b = 0$$

$$-\frac{M_{f2}}{I_x} \int y \, dA + \frac{M_{f1}}{I_x} \int y \, dA + \tau \, dx \, b = 0$$

$$\int y \, dA = S_x$$

$S_x = \text{Primer momento estatico}$

$$\frac{M_{f2}}{I_x} S_x - \frac{M_{f1}}{I_x} S_x = \tau b \, dx$$

$$\frac{S_x}{I_x} (M_{f2} - M_{f1}) = \tau b \, dx$$

$$\frac{S_x}{I_x} \left( \frac{M_{f2} - M_{f1}}{dx} \right) = \tau b$$

$$\frac{S_x}{I_x} \left( \frac{dM}{dx} \right) = \tau b$$

$$\frac{S_x}{I_x} V = \tau b$$

Donde:

$V = \text{Fuerza cortante máxima.}$

$I_x = \text{Momento de inercia.}$

$S_x = \text{Momento estático.}$

$b = \text{Espesor del material.}$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = \sigma * A$$

$$N_1 = \sigma_1 \, dA$$

$$N_2 = \sigma_2 \, dA$$

$$\sigma_1 = \frac{M_{f1} \bar{y}}{I_x}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{f2} \bar{y}}{I_x}$$

### 1.1.6.1. EJEMPLOS ESFUERZOS TANGENCIALES

#### PROBLEMA MODELO 1.28

La viga mostrada en la figura está sometida a varias cargas. ¿Resiste o no?

Fig. 1.83a. Esquema para el problema 1.28.

$$\sigma_{ad} = 2,94 \times 10^7 \frac{N}{m^2} \quad \tau_{ad} = 4,9 \times 10^7 \frac{N}{m^2}$$

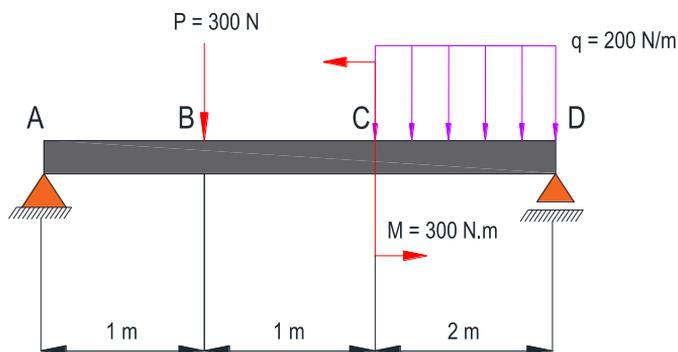
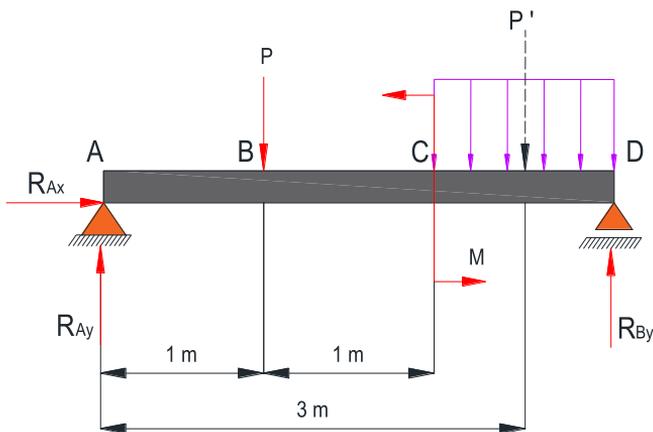


Fig. 1.83b. Diagrama de reacciones y cargas equivalentes.



$$P' = q * L$$

$$P' = 200 \frac{N}{m} (2m)$$

$$P' = 400 N$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright \quad \curvearrowleft$$

$$P(1m) - M + P'(3m) + R_{Dy}(4m) = 0$$

$$300N(1m) - 300N \cdot m + 400N(3m) + R_{Dy}(4m) = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{300N(1m) - 300N \cdot m + 400N(3m)}{4m}$$

$$R_{Dy} = 300 N$$

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$R_{Ay} - P - P' + R_{Dy} = 0$$

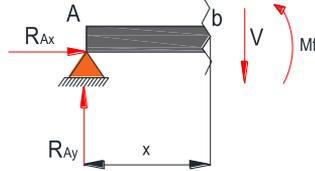
$$R_{Ay} = P + P' - R_{Dy}$$

$$R_{Ay} = 300N + 400N - 300N$$

$$R_{Ay} = 400 \text{ N}$$

TRAMO AB

Fig. 1.83c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\begin{aligned} \sum F_v &= 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_- \\ R_{Ay} - V &= 0 \\ V &= R_{Ay} \\ V &= 400 \text{ N} \end{aligned}$$

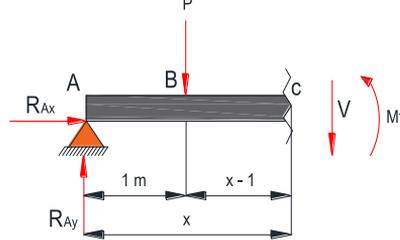
$$\begin{aligned} \sum M_b &= 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^- \\ R_A(x) - M_f &= 0 \\ M_f &= R_A(x) \\ M_f &= 400(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ m} \quad V &= 400 \text{ N} \\ x = 1 \text{ m} \quad V &= 400 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ m} \quad M_f &= 0 \text{ N.m} \\ x = 1 \text{ m} \quad M_f &= 400 \text{ N.m} \end{aligned}$$

TRAMO BC

Fig. 1.83d. Viga realizada corte en tramo BC análisis izquierda-derecha.



$$\begin{aligned} \sum F_v &= 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_- \\ R_{Ay} - P - V &= 0 \\ V &= -P + R_{Ay} \\ V &= -300 \text{ N} + 400 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_c &= 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^- \\ R_{Ay}x - P(x-1) - M_f &= 0 \\ M_f &= R_{Ay}x - P(x-1) \\ M_f &= 400x - 300(x-1) \end{aligned}$$

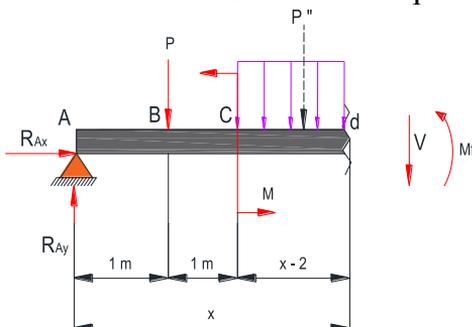
$$\begin{aligned} x = 1 \text{ m} \quad V &= 100 \text{ N} \\ x = 2 \text{ m} \quad V &= 100 \text{ N} \end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ m} \quad M_f = 400 \text{ N.m}$$

$$x = 2 \text{ m} \quad M_f = 500 \text{ N.m}$$

TRAMO CD

Fig. 1.83e. Viga realizada corte en tramo CD análisis izquierda-derecha.



$$P'' = q * x$$

$$P'' = 200(x - 2)$$

$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$$

$$R_{Ay} - P - P'' - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - P - P''$$

$$V = 400 \text{ N} - 300 \text{ N} - 200(x - 2)$$

$$x = 2 \text{ m} \quad V = 100 \text{ N}$$

$$x = 4 \text{ m} \quad V = -300 \text{ N}$$

$$\sum M_b = 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^-$$

$$R_{Ay}(x) - P(x - 1) + M$$

$$- P'' \left( \frac{x - 2}{2} \right) - M_f$$

$$= 0$$

$$M_f = R_{Ay}(x) - P(x - 1) - M$$

$$- P'' \left( \frac{x - 2}{2} \right)$$

$$M_f = 400(x) - 300(x - 1)$$

$$- 300 \text{ N.m}$$

$$- \frac{200(x - 2)^2}{2}$$

$$x = 2 \text{ m} \quad M_f = 200 \text{ N.m}$$

$$x = 2,5 \text{ m} \quad M_{f_{\text{máx}}} = 225 \text{ N.m}$$

$$x = 4 \text{ m} \quad M_f = 0 \text{ N.m}$$

Cuando  $V$  es cero;  $M_f$  es máximo en ese punto

$$V = R_{Ay} - P - P''$$
$$0 = 400N - 300N - 200(x - 2)$$
$$0 = 100N - 200\frac{N}{m}x + 400N$$

$$x = \frac{500N}{200\frac{N}{m}}$$

$$x = 2,5 \text{ m}$$

Fig. 1.83f. Diagrama de cortante y momento flector para problema 1.28.

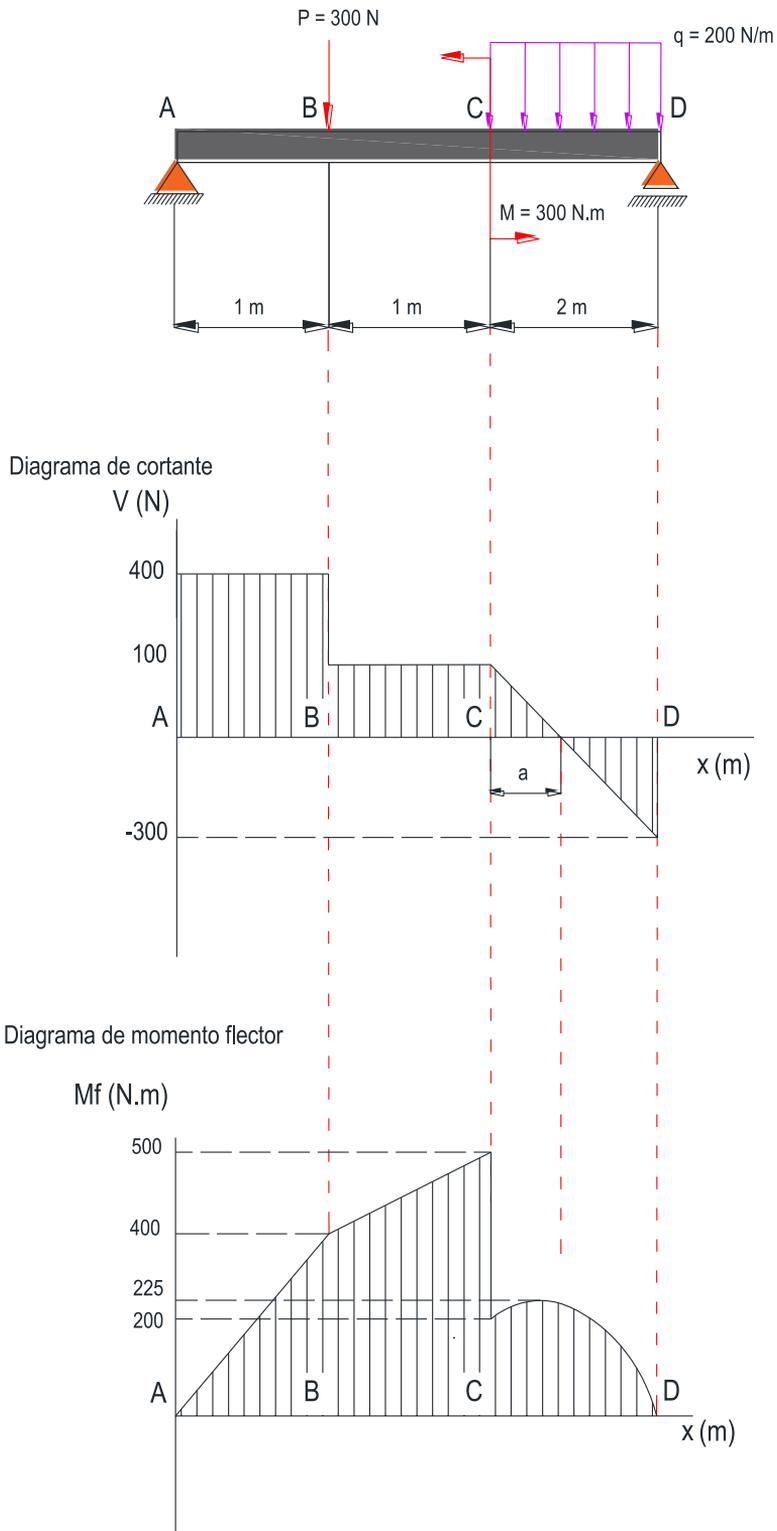
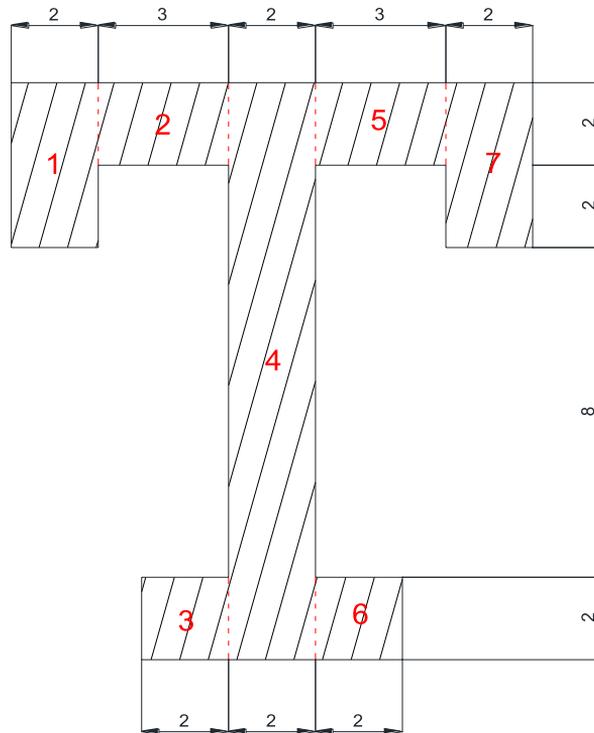


Fig. 1.83g. Esquema del perfil estructural para el problema 1.28 (Medidas en cm).



Centro de gravedad del perfil:

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{(2 * 4)(2) + (3 * 2)(1) + (2 * 2)(13) + (2 * 14)(7) + (3 * 2)(1) + (2 * 2)(13) + (2 * 4)(2)}{(2 * 4) + (3 * 2) + (2 * 2) + (2 * 14) + (3 * 2) + (2 * 2) + (2 * 4)}$$

$$\bar{y} = 5,375 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 5,375 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Momento de inercia

$$I_{EN} = \sum I_{cg} + \sum A \bar{y}^2$$

$$\sum I_{cg} = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$\Sigma I_{cg} = \frac{2(4^3)}{12} + \frac{3(2^3)}{12} + \frac{2(2^3)}{12} + \frac{2(14^3)}{12} + \frac{3(2^3)}{12} + \frac{2(2^3)}{12} + \frac{2(4^3)}{12}$$

$$\Sigma I_{cg} = 485,333 \text{ cm}^4$$

$$\Sigma I_{cg} = 4,85333x 10^{-6}m^4$$

$$\Sigma A\bar{y}^2 = (2 * 4)(3,375^2) + (3 * 2)(4,375^2) + (2 * 2)(7,625^2) + (2 * 14)(1,625^2) + (3 * 2)(4,375^2) + (2 * 2)(7,625^2) + (2 * 4)(3,375^2)$$

$$\Sigma A\bar{y}^2 = 950,7275 \text{ cm}^4$$

$$\Sigma A\bar{y}^2 = 9,507275x 10^{-6}m^4$$

$$I_x = 4,85333x 10^{-6}m^4 + 9,507275x 10^{-6}m^4$$

$$I_x = 14,360606x 10^{-6}m^4$$

Análisis de los esfuerzos normales:

$$\sigma_{compresión} = \frac{M_{f\acute{m}ax}y_{comp}}{I_x}$$

$$\sigma_{compresión} = \frac{500Nm * 8,625x10^{-2}m}{4,360606x 10^{-6}m^4}$$

$$\sigma_{compresión} = 9889,680x10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\sigma_{tracción} = \frac{M_{f\acute{m}ax}y_{tracción}}{I_x}$$

$$\sigma_{tracción} = \frac{500Nm * 5,375x10^{-2}m}{4,360606x 10^{-6}m^4}$$

$$\sigma_{tracción} = 6163,134x10^3 \frac{N}{m^2}$$

Punto A

$$\sigma_{Atracción} = 6163,134x10^3 \frac{N}{m^2}$$

Punto B

$$\sigma_{Btracción} = \frac{M_{f\acute{m}ax}y_{Btracción}}{I_x}$$

$$\sigma_{Btracción} = \frac{500Nm * 3,375x10^{-2}m}{4,360606x 10^{-6}m^4}$$

$$\sigma_{Btracción} = 3869,874x10^3 \frac{N}{m^2}$$

*Punto C*

$$\sigma_{Ctracción} = \frac{M_{f\acute{m}ax}y_{Ctracción}}{I_x}$$

$$\sigma_{Ctracción} = \frac{500Nm * 1,375x10^{-2}m}{4,360606x 10^{-6}m^4}$$

$$\sigma_{Ctracción} = 1576,615x10^3 \frac{N}{m^2}$$

*Eje Neutro*

$$\sigma = 0$$

*Punto D*

$$\sigma_{Dcompresión} = \frac{M_{f\acute{m}ax}y_{Dcomp}}{I_x}$$

$$\sigma_{Dcompresión} = \frac{500Nm * 6,625x10^{-2}m}{4,360606x 10^{-6}m^4}$$

$$\sigma_{Dcompresión} = 7596,421x10^3 \frac{N}{m^2}$$

*Punto E*

$$\sigma_{compresión} = 9889,680x10^3 \frac{N}{m^2}$$

El  $\sigma_{normal\ m\acute{a}ximo} = 9889,680x10^3 \frac{N}{m^2}$  se encuentra a compresión

Como  $\sigma_{admisible} > \sigma_{trabajo}$

$$29400x10^3 \frac{N}{m^2} > 9889,680x10^3 \frac{N}{m^2}$$

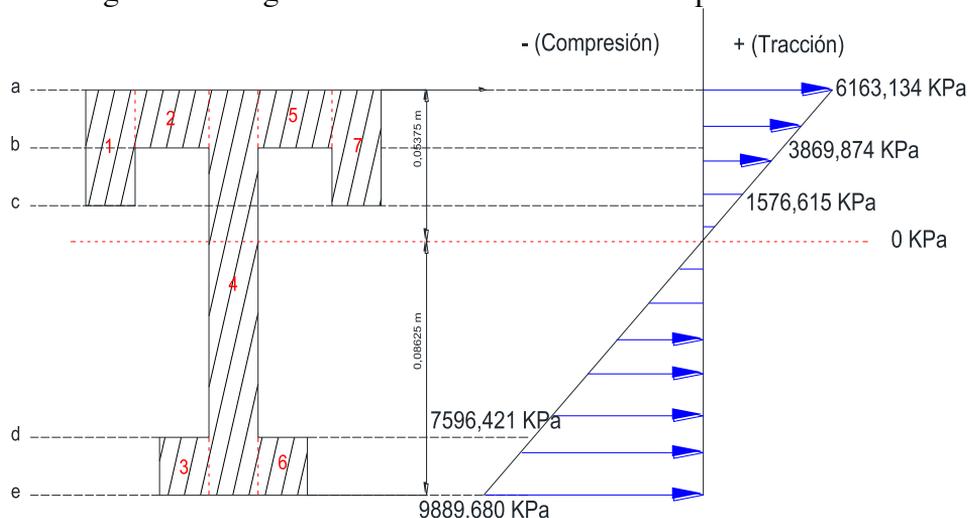
El material del perfil resiste con un coeficiente de seguridad

$$n = \frac{\sigma_{ad}}{\sigma_{trab}}$$

$$n = \frac{29400 \times 10^3 \frac{N}{m^2}}{9889,680 \times 10^3 \frac{N}{m^2}}$$

$$n = 2,97$$

Fig. 1.83h Diagrama de esfuerzos normales del problema 1.28



### Análisis de los esfuerzos cortantes

$$\tau = \frac{V \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

- Análisis de momentos estáticos  $s_x = A * \bar{y}$

$$s_{x_a} = 0$$

$$s_{x_b} = (0,12m)(0,02m)(4,375 \times 10^{-2}) = 1,05 \times 10^{-4} m^3$$

$$s_{x_c} = 1,05 \times 10^{-4} m^3 + (3)(0,02m)(0,02m)(2,375 \times 10^{-2}m) = 1,335 \times 10^{-4} m^3$$

$$s_{x_{EN}} = 1,335 \times 10^{-4} m^3 + (0,02m)(1,375 \times 10^{-2}m) \left( \frac{1,375 \times 10^{-2}m}{2} \right) = 1,353 \times 10^{-4} m^3$$

$$s_{x_{EN}} = 9,15 \times 10^{-5} m^3 + (0,02m)(6,625 \times 10^{-2}m) \left( \frac{6,625 \times 10^{-2}m}{2} \right) cm^3 = 1,353 \times 10^{-4} m^3$$

$$s_{x_d} = (0,06m)(0,02m)(7,625 \times 10^{-2}m) = 9,15 \times 10^{-5}m^3$$

$$s_{x_e} = 0$$

$$\tau = \frac{V \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

$$\tau_a = 0$$

$$\tau_{b_1} = \frac{(400N)(1,05 \times 10^{-4} m^3)}{(4,360606 \times 10^{-6} m^4)(0,12 m)} = 80,264 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\tau_{b_2} = \frac{(400N)(1,05 \times 10^{-4} m^3)}{(4,360606 \times 10^{-6} m^4)(0,06 m)} = 160,528 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\tau_{c_1} = \frac{(400 N)(1,335 \times 10^{-4} m^3)}{(4,360606 \times 10^{-6} m^4)(0,06 m)} = 204,100 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\tau_{c_2} = \frac{(400 N)(1,335 \times 10^{-4} m^3)}{(4,360606 \times 10^{-6} m^4)(0,02 m)} = 612,300 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\tau_{EN} = \frac{(400 N)(1,353 \times 10^{-4} m^3)}{(4,360606 \times 10^{-6} m^4)(0,02 m)} = 620,555 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\tau_{d_1} = \frac{(400 N)(9,15 \times 10^{-5} m^3)}{(4,360606 \times 10^{-6} m^4)(0,02 m)} = 419,666 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\tau_{d_1} = \frac{(400 N)(9,15 \times 10^{-5} m^3)}{(4,360606 \times 10^{-6} m^4)(0,06 m)} = 139,888 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$\tau_e = 0$$

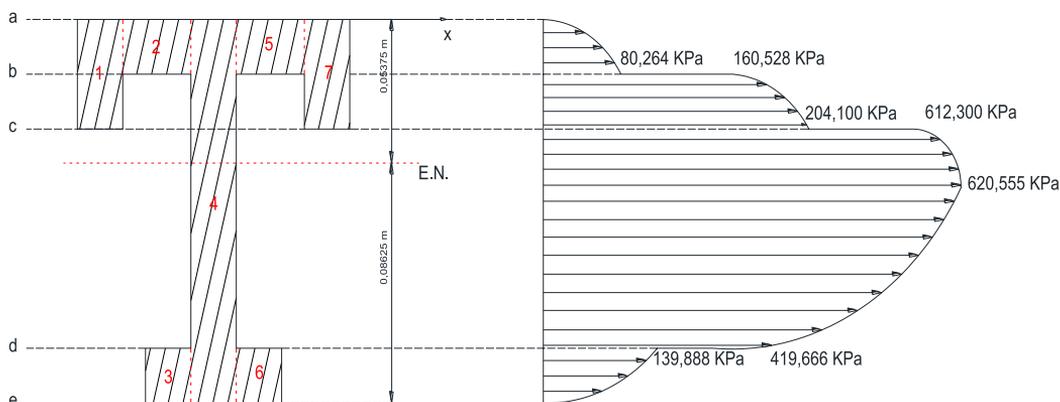
Se tiene que  $\tau_{trabajo} < \tau_{permisible}$

$$620,555 \times 10^3 \frac{N}{m^2} < 4900 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$n = \frac{\tau_{permisible}}{\tau_{trabajo}} = \frac{4900 \times 10^3 \frac{N}{m^2}}{620,555 \times 10^3 \frac{N}{m^2}} = 7,89$$

$$n = 7,89$$

Fig. 1.83i Diagrama de esfuerzos cortantes del problema 1.28.



### Conclusión

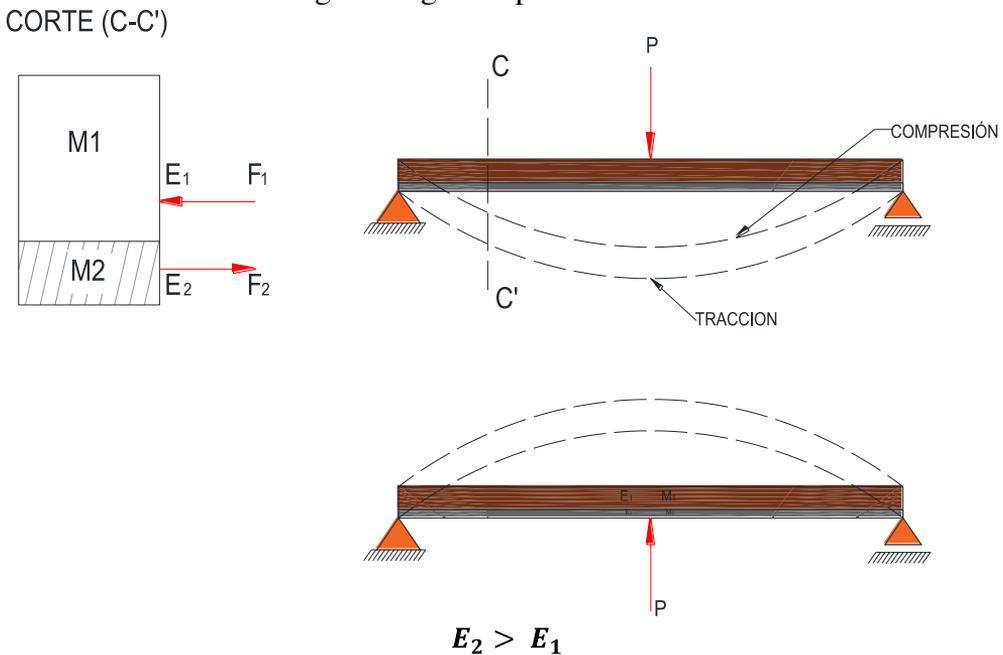
- Los esfuerzos normales en los extremos del perfil son máximos tanto a tracción como compresión.
- El esfuerzo cortante en los extremos del perfil es cero.
- El esfuerzo normal en el eje neutro es cero; por lo que la fibra neutra no se deforma.
- El esfuerzo cortante en el eje neutro no siempre es máximo, depende la configuración del perfil (espesor  $b$ ).

## CAPÍTULO II

### 2.1. VIGAS COMPUESTAS

En este capítulo se continúa con el estudio de la flexión, pero ahora en elementos hechos de varios materiales con módulos de elasticidad diferentes. En este tipo de elementos el eje neutro no pasa por el centroide de la sección transversal compuesta, razón por la cual se hará uso de la relación entre los módulos de elasticidad de los materiales para obtener así una sección transformada correspondiente a un elemento equivalente compuesto de un solo material.

Fig. 2.1 viga compuesta



No debe haber deslizamiento  $\tau = 0$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_1 - F_2 = 0$$

$$F_1 = F_2$$

$$F = \sigma A$$

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Ley de Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{E_1}{E_2} \sigma_2 A_1 = \sigma_2 A_2$$

$$A_1 = \frac{E_2}{E_1} \cdot A_2$$

$$n$$

= relación de los módulos de elasticidad

$$A_1 = n A_2$$

$n = \text{multiplicativo } n > 1, E_2 > E_1$

$n = \text{divisor}$

$n < 1, E_2 < E_1$

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E_2} \cdot \sigma_2$$

$$A_2 = \frac{E_1}{E_2} \cdot A_1$$

$$A_2 = nA_1$$

$$A_2 = n * b * h \text{ en donde solo se afecta a } b$$

## 2.2. EJERCICIOS DE VIGAS COMPUESTAS

### PROBLEMA 2.1

Se construye una viga cajón con 4 tabloncitos unidos por pernos, como se ve en la figura. Si la fuerza cortante máxima que debe soportar la viga es de 5 kN, calcular el espaciamiento máximo (e) entre los pernos, sabiendo que cada perno es capaz de soportar una fuerza cortante de 0.75 kN.

Fig. 2.2a. Esquema para el problema 2.1.

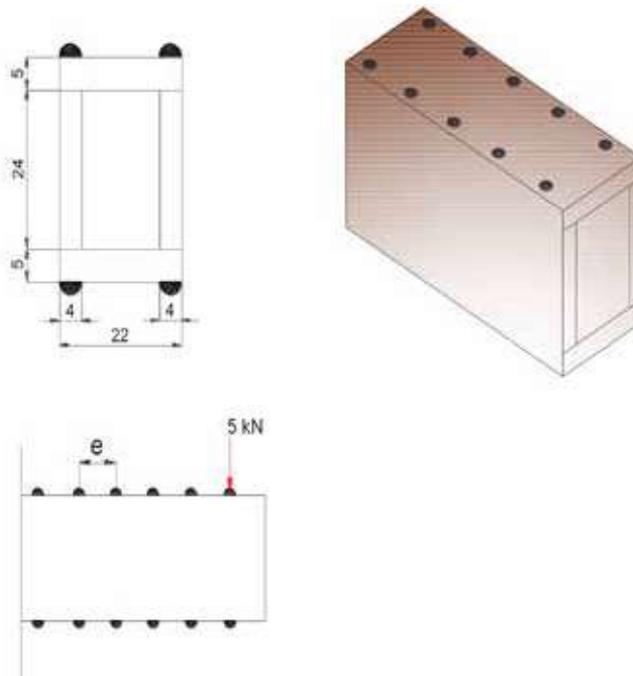
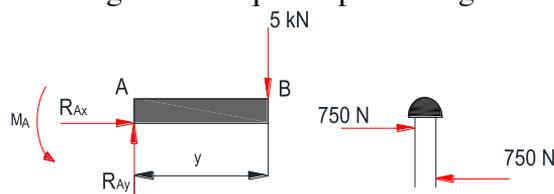


Fig. 2.2b. Esquema para la viga.



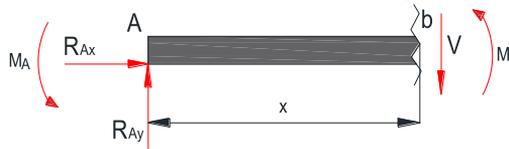
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_- \\ R_{Ay} - 5kN &= 0 \\ \mathbf{R_{Ay} = 5 kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^- \\ -M_A + (5)y &= 0 \\ \mathbf{M_A = 5y kN.m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \quad \leftarrow^- \rightarrow^+ \\ \mathbf{R_{Ax} = 0}\end{aligned}$$

CORTE AB

Fig. 2.2c. Viga realizada corte en tramo AB análisis izquierda-derecha.



$$\begin{aligned}\sum F_v &= 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_- \\ R_{Ay} - V &= 0 \\ V &= R_{Ay} \\ \mathbf{V = 5 kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_b &= 0 \quad \curvearrow^+ \curvearrow^- \\ R_A(x) - M_A - M_f &= 0 \\ M_f &= R_A(x) - M_A \\ \mathbf{M_f = 5(x) - 5y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x = 0 m} \quad \mathbf{V = 5 kN} \\ \mathbf{x = y m} \quad \mathbf{V = 5 kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x = 0 m} \quad \mathbf{M_f = -5y kN.m} \\ \mathbf{x = y m} \quad \mathbf{M_f = 5(x) - 5y kN.m}\end{aligned}$$

Fig. 2.2d. Diagrama de cortante del problema 2.1.

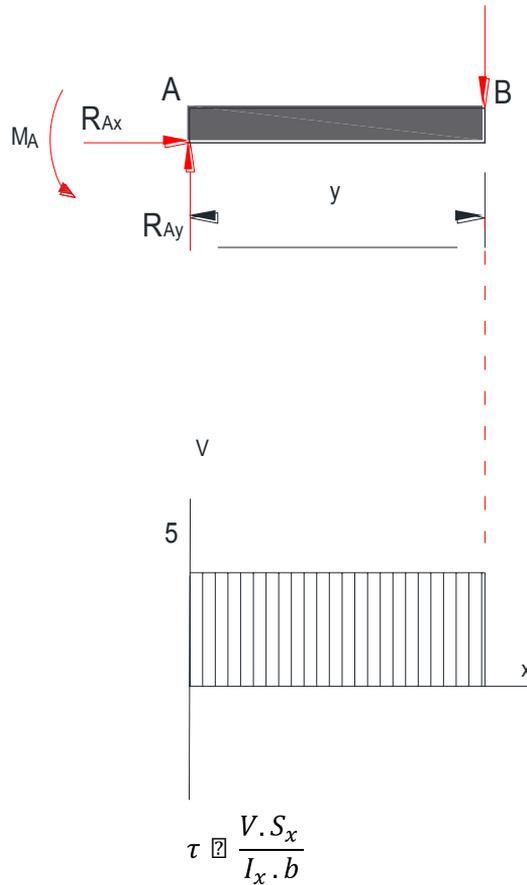
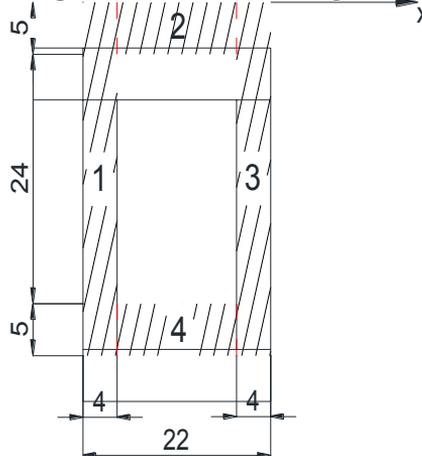


Fig. 2.2e. Perfil de la viga.



Centro de gravedad del perfil:

$$\bar{y} = \frac{\sum A \cdot y}{\sum A}$$

$$\sum A \cdot y = [(0,04 * 0,34)0,17] + [(0,14 * 0,05)0,025] + [(0,14 * 0,05)0,315] + [(0,04 * 0,34)0,17] = 70,04 \text{ m}$$

$$\sum A \cdot y = 70,04 \text{ m}^3$$

$$\sum A = (0,04 * 0,34) + (0,14 * 0,05) + (0,14 * 0,05) + (0,04 * 0,34)$$

$$\sum A = 4,12 \text{ m}^2$$

$$\bar{y} = \frac{70,04 \text{ m}^3}{4,12 \text{ m}^2}$$

$$\bar{y} = 0,17 \text{ m}$$

Momento de inercia:

$$I_x = \sum I_{cg} + \sum A \bar{y}^2$$

$$\sum I_{cg} = \frac{0,04(0,34^3)}{12} + \frac{0,14(0,05^3)}{12} + \frac{0,14(0,05^3)}{12} + \frac{0,04(0,34^3)}{12}$$

$$\sum I_{cg} = 2,6494 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\sum A \bar{y}^2 = (0,14 * 0,05)(0,145^2) + (0,14 * 0,05)(0,145^2)$$

$$\sum A \bar{y}^2 = 2,9435 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_x = 5,5929 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Análisis de esfuerzos cortantes:

$$\tau = \frac{V \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

- Análisis de momentos estáticos  $s_x = A * \bar{y}$

$$s_{x_a} = 0 \text{ m}^3$$

$$s_{x_b} = (0,22 * 0,05)(0,145) = 1,595 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$s_{x_{EN}} = 1,595 \times 10^{-3} \text{ m}^3 + (0,12)(0,08)(0,06) = 2,171 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$s_{x_{EN}} = 1,595 \times 10^{-3} + (0,12)(0,08)(0,06) = 2,171 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$s_{x_c} = (0,22 * 0,05)(0,145) = 1,595 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$s_{x_d} = 0 \text{ m}^3$$

$$\tau_a = 0 \text{ kPa}$$

$$\tau_{b_1} = \frac{(5 \text{ kN})(1,595 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(5,5929 \times 10^{-4} \text{ m}^4)(0,22 \text{ m})} = 64,814 \text{ kPa}$$

$$\tau_{b_2} = \frac{(5 \text{ kN})(1,595 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(5,5929 \times 10^{-4} \text{ m}^4)(0,08 \text{ m})} = 178,23 \text{ kPa}$$

$$\tau_{EN} = \frac{(5 \text{ kN})(2,171 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(5,5929 \times 10^{-4} \text{ m}^4)(0,08 \text{ m})} = 242,60 \text{ kPa}$$

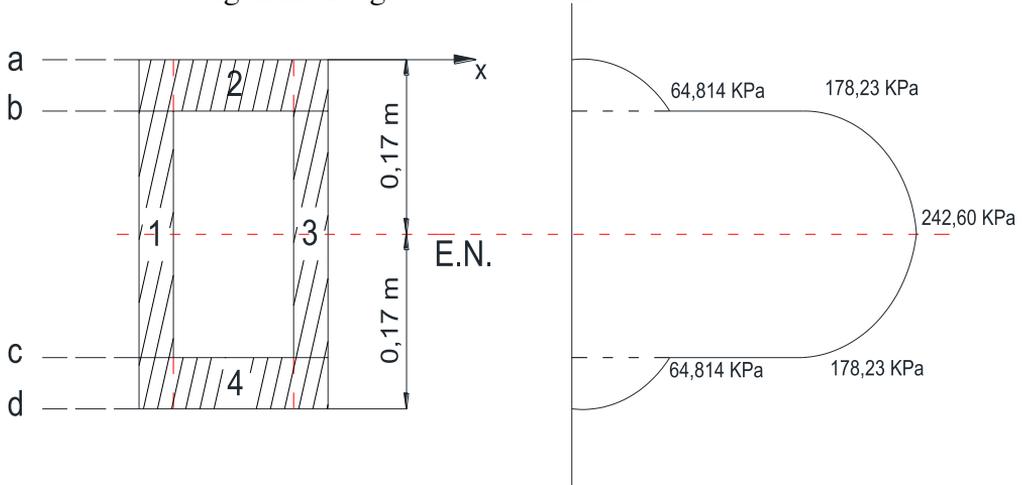
$$\tau_{c_1} = \frac{(5 \text{ kN})(1,595 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(5,5929 \times 10^{-4} \text{ m}^4)(0,08 \text{ m})} = 178,23 \text{ kPa}$$

$$\tau_{c_2} = \frac{(5 \text{ kN})(1,595 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(5,5929 \times 10^{-4} \text{ m}^4)(0,22 \text{ m})} = 64,814 \text{ kPa}$$

$$\tau_d = 0 \text{ kPa}$$

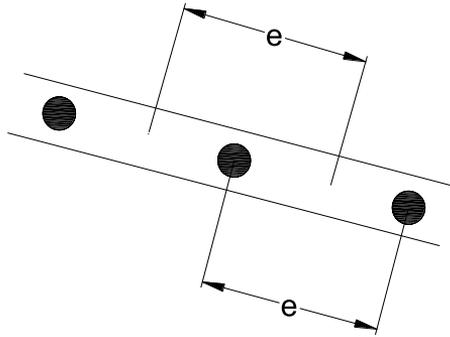
!

Fig. 2.2f. Diagrama de esfuerzos cortantes.



Área de la viga por la cual debe responder cada perno = Área de la influencia de cada perno.

Fig. 2.2g. Esquema de los pernos en la viga.



Área de influencia de cada 5 perno =  $(0,04_m)(e_{máx})$

Recordemos que:

$$F_{actante\ del\ perno} = \tau_{actante\ viga} * \\ Area\ de\ la\ viga\ por\ la\ cual\ debe\ responder\ cada\ perno$$

$$F_{actante\ del\ perno} = 750N$$

$$750\ N = \left(242,60\ \frac{kN}{m^2}\right)(0,04m)(e_{máx})$$

$$e_{máx} = \frac{750N}{(242,60 * 10^3\ \frac{N}{m^2})(0,04m)}$$

$$e_{máx} = 0,0772\ m$$

## PROBLEMA 2.2

La viga de concreto reforzada tiene el área de sección transversal mostrada en la figura si se somete a un momento flexionante de  $M = 50\ N \cdot m$ ; determine el esfuerzo normal en cada una de las varillas de acero de refuerzo y esfuerzo normal máximo en el concreto. Considere que  $E_{acero} = 199947,9kPa$  y  $E_{concreto} = 284211,2\ kPa$

$$Área\ de\ barras = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)(2) = \frac{\pi(0,0254m)^2}{2} = 1,013 \times 10^{-3}\ m^2$$

La ubicación de los elementos concreto y acero es correcto.

Todo a concreto.

Fig. 2.3a. Esquema del problema 2.2.

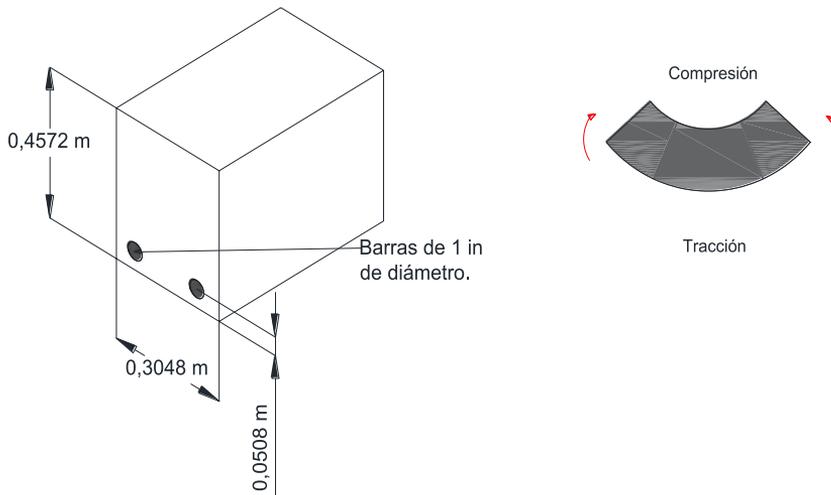
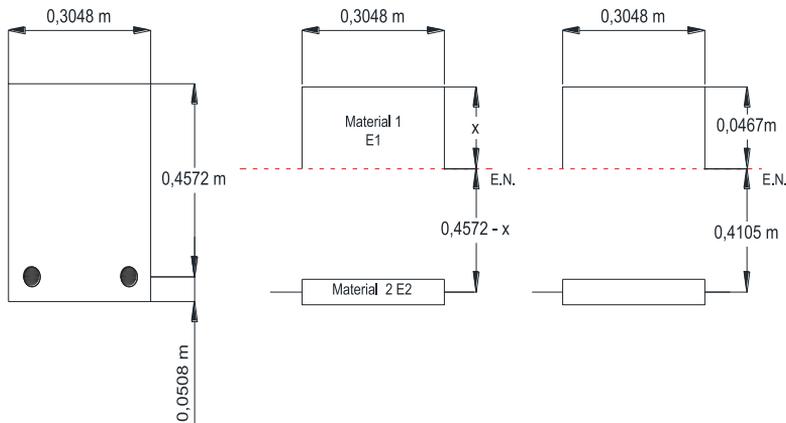


Fig. 2.3b. Perfil del problema 2.2.



Cálculo centro de gravedad.

$$A_{concreto} = nA_{acero}$$

$$n = \frac{E_{acero}}{E_{concreto}}$$

$$n = \frac{199947,9}{284211,2}$$

$$n = 0,805 \text{ factor divisor}$$

$$\begin{aligned}
 A_{concreto} &= (0,805)(1,013 \times 10^{-3} \text{ m}^2) \\
 A_{concreto} &= 8,155 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\
 (0,3048x) \left(\frac{x}{2}\right) &= (8,1305 \times 10^{-4})(0,4572 - x) \\
 0,1524x^2 + 8,155 \times 10^{-4}x - 3,7172 \times 10^{-4} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \mathbf{0,0467 \text{ m ok}} \\
 x_2 &= -0,0521 \text{ No}
 \end{aligned}$$

$$I_{EN} = \Sigma I_{cg} + \Sigma A\bar{y}^2$$

$$\Sigma I_{cg} = \frac{(0,3048)(0,0467^3)}{12} = 2,59 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\Sigma A\bar{y}^2 = (0,3048)(0,0467) \left(\frac{0,0467}{2}\right)^2 + (8,155 \times 10^{-4})(0,4105^2)$$

$$\Sigma A\bar{y}^2 = 1,451 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{EN} = 2,59 \times 10^{-6} \text{ m}^4 + 1,451 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{EN} = \mathbf{1,4769 \times 10^{-4} \text{ m}^4}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{máx concreto (real)}} &= \frac{Mf \cdot y}{I_{EN}} \\
 \sigma_{\text{máx concreto (real)}} &= \frac{(50 \text{ N} \cdot \text{m})(0,0467 \text{ m})}{1,4769 \times 10^{-4} \text{ m}^4}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{máx concreto (real)}} = \mathbf{15810,1 \frac{N}{m^2}}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{máx acero (ficticio)}} &= \frac{Mf \cdot y}{I_{EN}} \\
 \sigma_{\text{máx acero (ficticio)}} &= \frac{(50 \text{ N} \cdot \text{m})(0,4105 \text{ m})}{1,4769 \times 10^{-4} \text{ m}^4}
 \end{aligned}$$

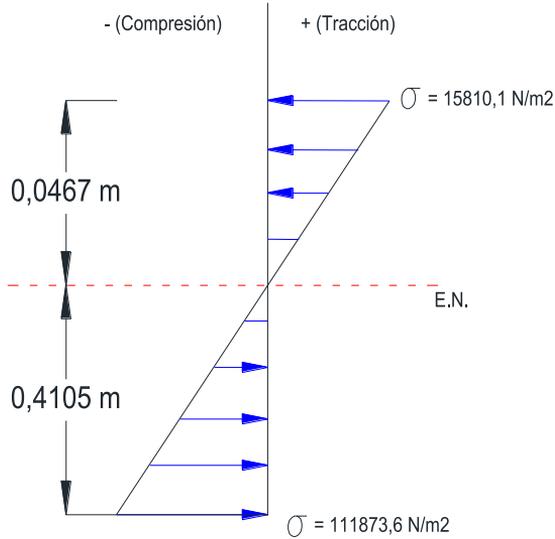
$$\sigma_{\text{máx acero (ficticio)}} = 138973,5 \frac{N}{m^2}$$

$$\sigma_{\text{máx acero (real)}} = (n) \left(138973,5 \frac{N}{m^2}\right)$$

$$\sigma_{\text{máx acero (real)}} = (0,805) \left(138973,5 \frac{N}{m^2}\right)$$

$$\sigma_{\text{máx acero (real)}} = 111873,6 \frac{N}{m^2}$$

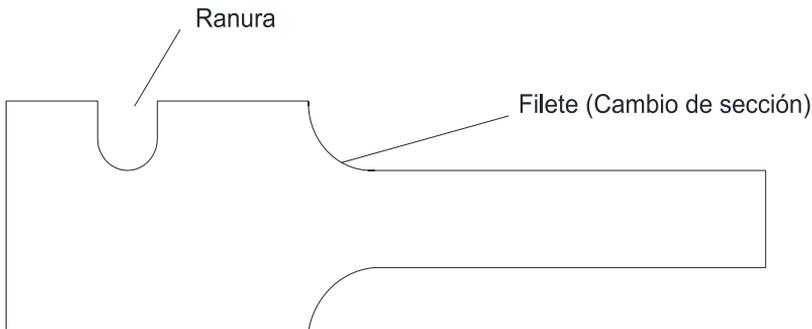
Fig. 2.3c. Diagrama de esfuerzos normales.



### 2.3. CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS (FILETES Y RANURAS)

En resistencia de materiales, cuando se emplean vigas, en ellas al producirse cambios de sección, agujeros, surcos, chaveteros, etc., se producen las concentraciones de esfuerzos; por tal motivo, es necesaria la aplicación de los filetes y ranuras que son los cuales ayudan a que estas concentraciones de esfuerzos disminuyan notablemente gracias a que evitan que se concentren esfuerzos.

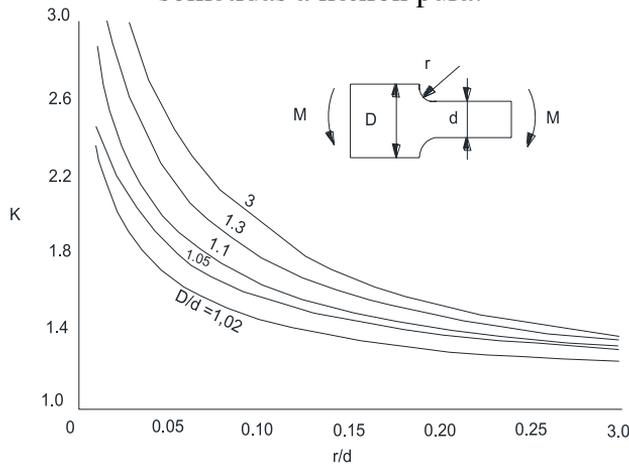
Figura 2.4. Filetes y ranuras.



## 2.3.1 FILETES

Los filetes son secciones de viga de las cuales ha sido retirado material, porque no en toda la viga existen los mismos esfuerzos; por tanto, no es necesario que tenga el mismo espesor en toda la longitud de la viga.

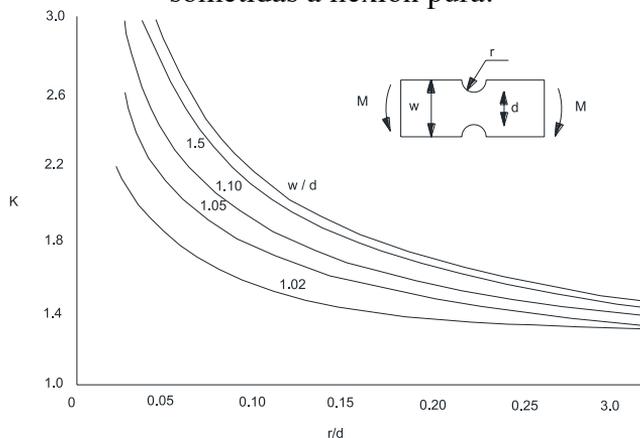
Fig. 2.5. Factores de concentración de esfuerzos en vigas planas con filetes sometidas a flexión pura.



## 2.3.2 RANURAS

Las ranuras, a igual que los filetes, evitan la concentración de esfuerzos solo que a diferencia estas también suelen servir para el acople de otras vigas.

Fig. 2.6. Factores de concentración de esfuerzos en vigas planas con ranuras sometidas a flexión pura.



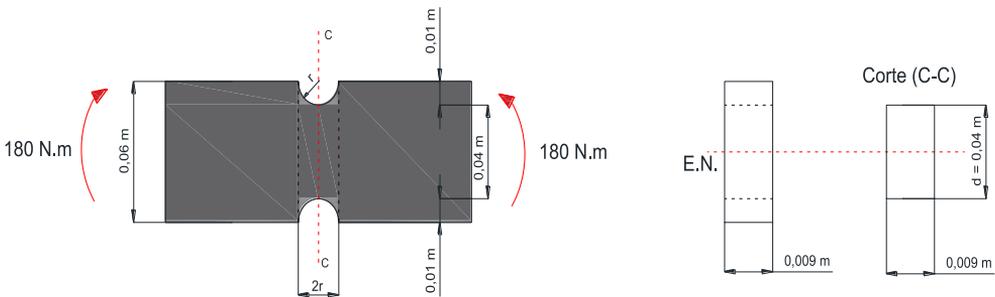
El valor de  $K$  en las figuras 2.5 y 2.6 representa el valor de la concentración de esfuerzo que puede producirse.

### 2.3.3. EJERCICIOS DE CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS (FILETES Y RANURAS)

#### PROBLEMA 2.3

Se van a maquinarse ranuras de 0,01 m de profundidad en una barra de acero de 0,06 m de ancho y 0,009 m de espesor. Determine el ancho mínimo permisible de las ranuras si el esfuerzo en la barra no debe sobrepasar de 150MPa cuando el momento flector es de 180Nm.

Fig. 2.7a. Esquema del problema 2.3.



$$d = D - 2r$$

$$d = 0,06 \text{ m} - (2)(0,01 \text{ m})$$

$$d = 0,04 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = k \frac{M_f \cdot y}{I_x}$$

$$I_{EN} = \frac{(0,009\text{m})(0,04\text{m})^3}{12}$$

$$I_{EN} = 4,8 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\sigma_{\text{máx}} = k \frac{(180\text{MPa})(0,02 \text{ m})}{4,8 \times 10^{-8} \text{ m}^4}$$

$$k = \frac{(150 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})(4,8 \times 10^{-8} \text{ m}^4)}{(180 \text{ Nm})(0,02 \text{ m})}$$

$$k = 2$$

$$\frac{D}{d} = 1,5$$

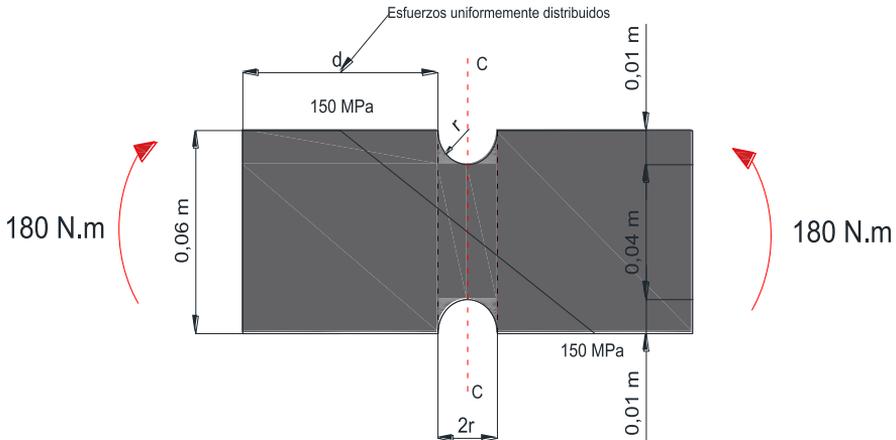
$$\frac{d}{r} = 0,135$$

$$r = 0,0054 \text{ m}$$

$$e_{\text{ranura}} = 2r = (2)(0,0054 \text{ m})$$

$$e_{\text{ranura}} = 0,0108 \text{ m}$$

Fig. 2.7b. Diagrama de esfuerzo normal.

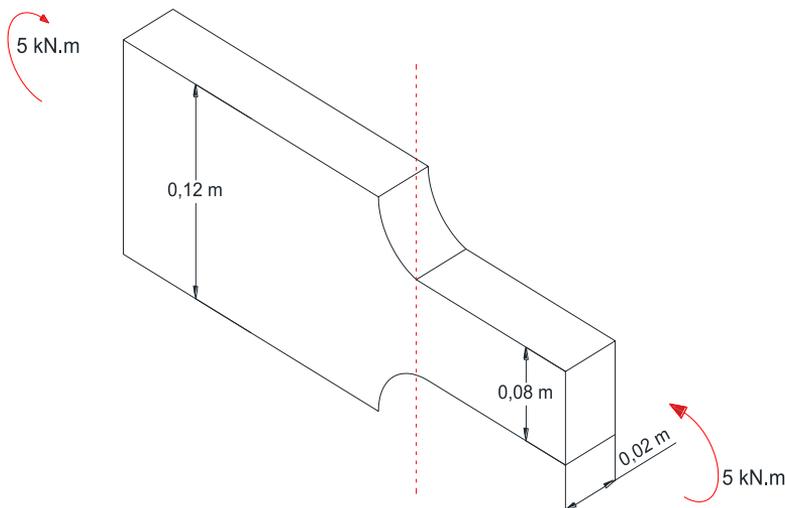


*Nota: Es mejor que  $r$  suba para que  $k$  baje y todos los esfuerzos no se concentren.*

### PROBLEMA 2.4

La transición en el área de la sección transversal de la barra de acero se logra mediante filetes (radios de acuerdo), como se muestra en la figura. Si la barra está sometida a un momento flexionante de 5000 Nm, determine el esfuerzo máximo normal desarrollado en el acero. El límite de elasticidad es de 500MPa.

Fig. 2.8a. Esquema del problema 2.4.



$$r = 0,016 \text{ m}$$

$$d = 0,08 \text{ m}$$

$$D = 0,12 \text{ m}$$

$$\frac{r}{d} = 0,2$$

$$\frac{D}{d} = 1,5$$

$$k = 1,45$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = k \frac{M_f \cdot y}{I_x}$$

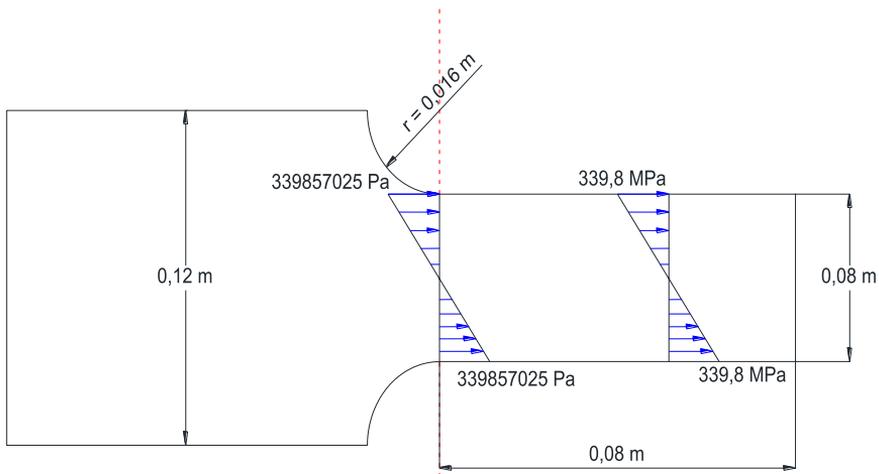
$$I_{EN} = \frac{(0,02\text{m})(0,08\text{m})^3}{12}$$

$$I_{EN} = 8,533 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = (1,45) \frac{(5000 \text{ N} \cdot \text{m})(0,04\text{m})}{8,533 \times 10^{-7} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 339857025 \text{ Pa}$$

Fig. 2.8b. Diagrama de esfuerzo normal.

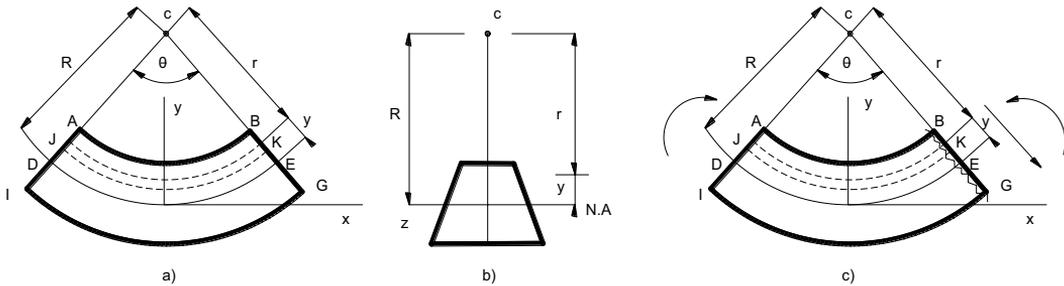


El esfuerzo a partir de  $0,08\text{m} = 339857025 \text{ Pa} = 339,8 \text{ MPa}$

*Nota: Si  $r$  es mayor  $k$  va a ser menor (conviene que  $r$  sea mayor).*

## 2.3. FLEXIÓN DE ELEMENTOS CURVOS

Fig. 2.9. Flexión en elementos curvos.



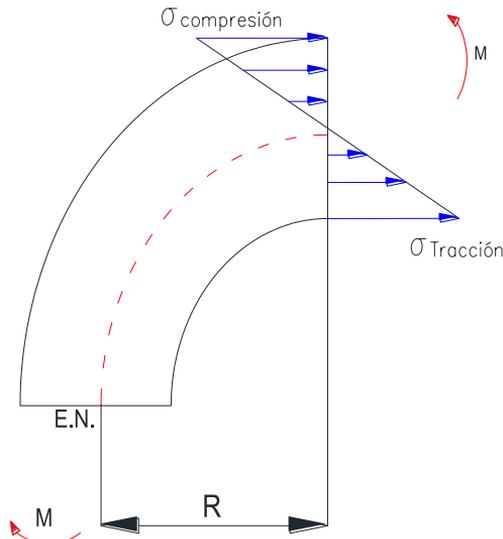
El análisis de esfuerzos debidos a flexión se ha restringido a elementos rectos. A continuación se considerarán los esfuerzos producidos por la aplicación de pares iguales y opuestos a elementos inicialmente curvos. A continuación nos limitaremos al estudio de elementos curvos de sección transversal uniforme con un plano de simetría, en el cual actúan los pares flectores, y se supondrá que todos los esfuerzos permanecen por debajo del límite de proporcionalidad. Si la curvatura inicial del elemento es pequeña, es decir, si su radio de curvatura es grande comparado con la altura de la sección, puede obtenerse una buena aproximación si se supone que el elemento es recto y se usan las ecuaciones de las deformaciones en un elemento simétrico sometido a flexión pura y las ecuaciones de esfuerzos y deformaciones en el rango elástico que ya hemos estudiado anteriormente. Sin embargo, cuando el radio de curvatura y las dimensiones de la sección transversal son del mismo orden de magnitud, debe utilizarse un método diferente de análisis, el cual fue introducido por el ingeniero alemán E. Winkler (1835-1888).

A continuación analizaremos el elemento curvo de sección transversal uniforme de la figura 2.9. Su sección transversal es simétrica con respecto al eje (figura 2.9a) y, en su estado no esforzado, sus superficies superior e inferior intersecan el plano vertical  $xy$  según los arcos de círculo  $AB$  y  $DE$  centrados en  $C$ . Ahora se aplican dos pares iguales y opuestos  $M$  y  $M'$  en el plano de simetría del elemento (figura 2.9c). Un razonamiento similar al de la sección 4.3 mostraría que cualquier sección plana transversal que contenga a  $C$  permanecerá plana, y que los diversos arcos de círculo indicados en la figura 2.9a se transformarán en arcos circulares y concéntricos con  $C'$  un centro  $C'$  diferente de  $C$ . Más específicamente, si los pares  $M$  y  $M'$  se dirigen como se muestra, la curvatura de los diferentes arcos de círculo aumentará, esto es  $R' < R$ . También se nota que los pares  $M$

y  $M$  harán disminuir la longitud de la superficie superior del elemento ( $A'B' < AB$ ) y la de la superficie inferior aumentará ( $D'E' > DE$ ). Se concluye que debe existir una superficie neutra en el elemento, cuya longitud permanece constante.

En la figura 4.1b se ha representado la intersección de la superficie neutra con el plano  $xy$  por el arco  $DE$  de radio  $R$ , y en la figura 4.1c por el arco  $D'E'$  de radio  $R'$ . Si  $\theta$  y  $\theta'$  son los ángulos centrales correspondientes a  $DE$  y  $D'E'$ , se dice que la longitud de la superficie neutra permanece constante.

Fig 2.10.. Sección de un elemento curvo sometido a tracción y compresión.



$$R\theta = R'\theta' \quad (\text{Ec. 2.1})$$

Considerando ahora el arco del círculo  $JK$  localizado a una distancia  $y$  sobre la superficie neutra y designado por  $r$  y  $r'$  el radio de este arco, antes de aplicar la flexión y después de ella se expresa el alargamiento de  $JK$  como:

$$\delta = r'\theta' - r\theta \quad (\text{Ec. 2.2})$$

Observando en la figura 2.9. que:

$$r = R - y \quad r' = R' - y \quad (\text{Ec. 2.3})$$

Y reemplazando las expresiones 2.2 en la ecuación 2.1, se escribe

$$\begin{aligned} \delta &= (R' - y)\theta' - (R - y)\theta \\ \delta &= R'\theta' - y\theta' - R\theta + y\theta \\ \delta &= -y(\theta' - \theta) + R'\theta' - R\theta \end{aligned}$$

Recordando la ecuación 2.2 y haciendo que  $(\theta' - \theta) = \Delta\theta$  tenemos

$$\delta = -y\Delta\theta \quad (\text{Ec. 2.4})$$

La deformación normal  $\epsilon_x$  en los elementos de JK se obtiene dividiendo el alargamiento  $\delta$  entre la longitud original  $r\theta$  del arco JK.

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = \frac{-y\Delta\theta}{r\theta}$$

Recordando la primera de las relaciones (2.3),

$$\epsilon_x = \frac{-y \epsilon_x}{(R - y)\theta} \quad (\text{Ec. 2.5})$$

La relación obtenida muestra que, mientras cada sección transversal permanece plana, la deformación normal  $\epsilon_x$  no varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra.

El esfuerzo normal  $S_x$  puede obtenerse mediante la ley de Hooke,  $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$  sustituyendo en la ecuación 2.5. Se tiene

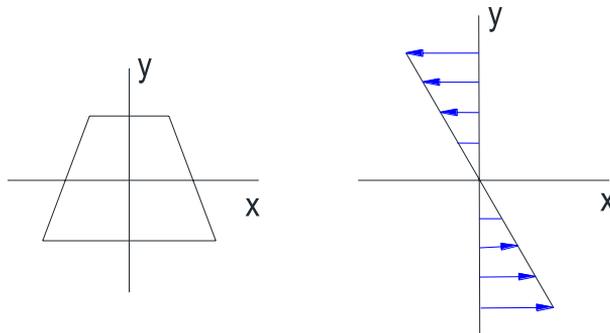
$$\sigma_x = -\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{y}{R - y} \quad (\text{Ec. 2.6})$$

Remplazando la ecuación 2.3 en 2.6, tenemos

$$\sigma_x = -\frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R - r}{r} \quad (\text{Ec. 2.7})$$

La ecuación 2.7. muestra que, como  $\epsilon_x$ , el esfuerzo normal  $\sigma_x$  no varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra. Graficando  $\sigma_x$  contra  $y$ , se obtiene un arco de hipérbola (figura 2.11).

Fig. 2.11. Localización de la superficie neutra.



Para determinar la localización de la superficie neutra en el elemento y el valor del coeficiente  $E\Delta\theta / \theta$ , utilizado en las ecuaciones 2.6 y 2.7, recuerde ahora que las fuerzas elementales que actúan en cualquier sección transversal deben ser estáticamente equivalentes al momento flector  $M_f$ . Expresando, como lo hicimos anteriormente para un elemento recto, que la suma de las fuerzas elementales que actúan en la sección es cero, y que la suma de sus momentos con respecto al eje transversal  $z$  debe ser igual al momento flector  $M_f$ , se tiene:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (\text{Ec. 2.8})$$

$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad (\text{Ec. 2.9})$$

Sustituyendo  $\sigma_x$  de la ecuación 2.7 en la ecuación 2.8, se escribe:

$$-\int \frac{E \cdot \Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$\int \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} = \int dA$$

De donde se sigue que la distancia  $R$  desde el centro de curvatura  $C$  a la superficie neutra, se da por la relación.

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \quad (\text{Ec. 2.10})$$

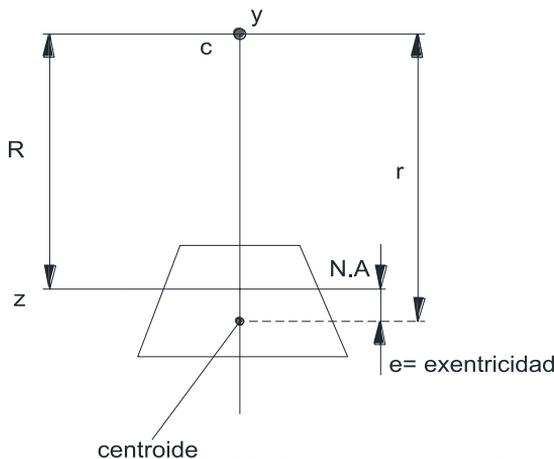


Fig. 2.12. Superficie neutra localizada.

Advierta que el valor obtenido para R no es igual a la distancia  $r'$  desde C al centroide de la sección transversal, pues  $r'$  se define por una relación diferente, específicamente:

Donde:  $r'$  es el radio medio de un diferencial de área.

$$r' = \frac{1}{A} \int r dA \quad (\text{Ec. 2. 11})$$

Se concluye así que, en un elemento curvo, el eje neutro de una sección transversal no pasa por el centroide de la sección (figura 2.12).

Sustituyendo ahora  $\sigma_x$  de la ecuación 2.7 en la ecuación 2.10,

$$\int -y \left( -\frac{E\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R-r}{r} \right) \cdot dA = M$$

$$\int y \left( \frac{E\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{R-r}{r} \right) \cdot dA = M$$

Como  $y = R - r$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} \int (R-r) \cdot \left( \frac{R-r}{r} \right) \cdot dA = M$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} \int \frac{(R-r)^2}{r} \cdot dA = M$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} \int \frac{R^2 - 2Rr + r^2}{r} dA = M$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} \int \left( \frac{R^2}{r} - 2R + r \right) dA = M$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} \left( \int \frac{R^2}{r} dA - \int 2R dA + \int r dA \right) = M$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} \left( R^2 \int \frac{dA}{r} - 2RA + \int r dA \right) = M$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} \left( R^2 \frac{A}{R} - 2RA + r'A \right)$$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} (RA - 2RA + r'A) = M$$

Recordando las ecuaciones 2.10 y 2.11, se nota que el primer término entre paréntesis es igual a RA, mientras el último es igual a  $r'A$ . Se tiene, entonces:

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta}(-RA + r'A) = M$$

Despejando  $\frac{E\Delta\theta}{\theta}$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A(r' - R)} \quad (\text{Ec. 2.12})$$

Sabemos que  $e = (r' - R)$

$$\frac{E\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \quad (\text{Ec. 2.13})$$

$r'$  coincide con el centroide y el radio de curvatura en el eje neutro

Sustituyendo  $E\Delta\theta/\theta$  de 2.13 en las ecuaciones 2.6 y 2.7, se obtiene la siguiente expresión alternativa para el esfuerzo normal  $\sigma_x$  en una viga curva:

$$\sigma_x = -\frac{E\Delta\theta}{\theta} \cdot \frac{y}{R - y}$$

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R - y)} \quad (\text{Ec. 2.14})$$

Y

$$\sigma_x = \frac{M(r - R)}{Aer} \quad (\text{Ec. 2.15})$$

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \quad \text{Desarrollada para elementos rectos}$$

Ahora vamos a determinar el cambio de curvatura de la superficie neutra causada por el momento flector  $M$ . Resolviendo la ecuación 2.1 para la curvatura  $1/R'$  de la superficie neutra deformada, se obtiene.

$$R\theta = R'\theta'$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \frac{\theta'}{\theta}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{\theta + \Delta\theta}{R\theta}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{\theta}{R\theta} + \frac{\Delta\theta}{R\theta}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{M}{AEe} \right)$$

El cambio de curvatura de la superficie neutra es:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{M}{AEe}$$

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{AEe} \quad (\text{Ec. 2.16})$$

### 2.4.1. EJERCICIOS DE FLEXIÓN DE ELEMENTOS CURVOS

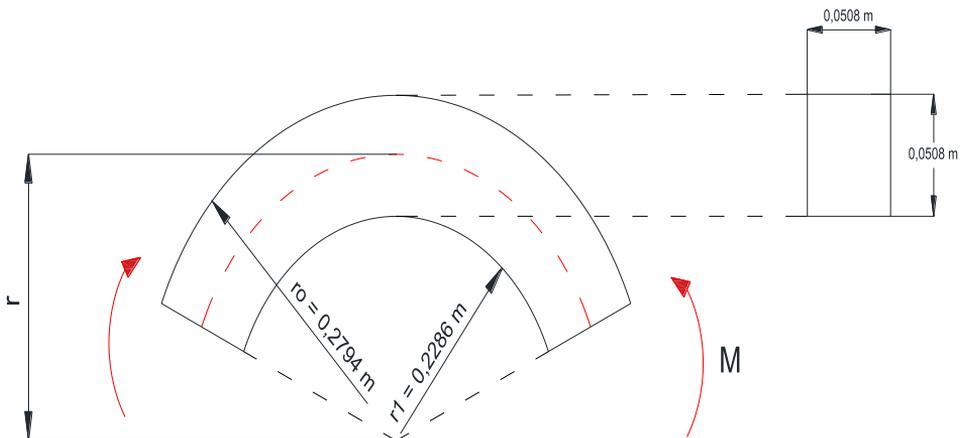
#### PROBLEMA 2.5

Una barra de acero de sección transversal rectangular tiene la forma de arco circular, como se muestra en la figura. Si el esfuerzo normal permisible es

$$\tau_{per} = 2 \frac{MN}{m^2}.$$

determinar el momento flexionante máximo M que puede aplicarse a la barra

Fig. 2.13a. Esquema para el problema 2.5.



Datos:

$$\tau_{\text{peracero}} = 2 \frac{MN}{m^2}$$

$M=?$

$$\int_A \frac{dA}{r} = b \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$= (0,0508m) \ln \left( \frac{0,2794m}{0,2286m} \right)$$

$$\int_A \frac{dA}{r} = 0,01019 m$$

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{(0,0508m)(0,0508m)}{0,01019 m}$$

$$R = 0,2532 m$$

Esfuerzo a compresión  $\tau_{\text{com}} = -2000 \frac{N}{m^2}$

$$\tau = \frac{M(R - r_2)}{Ar_2(\bar{r} - R)}$$

$$-2000000 \frac{N}{m^2} = \frac{M(0,2532 m - 0,2794m)}{(0,0508m)(0,0508m)(0,2794m)(0,254 m - 0,2532 m)}$$

$$M = 44,03 N.m$$

Esfuerzo normal a tracción  $\rightarrow \tau_{\text{tracción}} = 2000 \frac{lb}{in^2}$

$$\tau = \frac{M(R - r_1)}{Ar_1(\bar{r} - R)}$$

$$2000000 \frac{N}{m^2} = \frac{M(0,2532 m - 0,2286m)}{(0,0508m)(0,0508m)(0,2286m)(0,254 m - 0,2532 m)}$$

$$M = 38,36 N.m$$

Parte Superior  $\rightarrow$  compresión

Parte inferior  $\rightarrow$  tracción

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$= \frac{0,2794m + 0,2286m}{2}$$

$$\bar{r} = 0,254 m$$

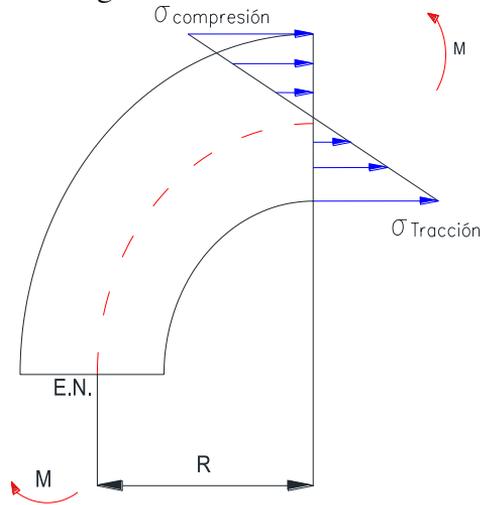
El momento máximo que puede aplicarse es  $M = 38,36 \text{ N.m}$

Con  $M_{m\acute{a}x} = 38,36 \text{ N.m}$  calculamos el esfuerzo a compresión.

$$\tau = \frac{(38,36 \text{ N.m})(0,2532 \text{ m} - 0,2794\text{m})}{(0,0508\text{m})(0,0508\text{m})(0,2794\text{m})(0,254 \text{ m} - 0,2532 \text{ m})}$$

$$\tau = -1742352 \rightarrow \tau_{comp} = 1,7 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

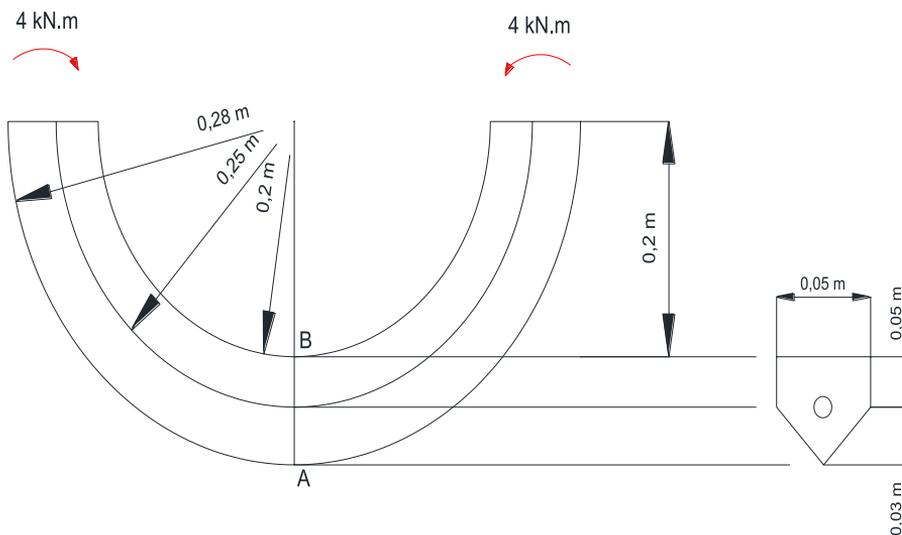
Fig. 2.13b. Diagrama de esfuerzo normal.



**PROBLEMA 2.6**

La barra curva tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si está sometida a momentos flexionantes de 4000 N.m, determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en la barra.

Fig 2.14a. Esquema para el problema 2.6.



$$\Sigma A = (0,05 \text{ m})^2 + \frac{1}{2}(0,05 \text{ m})(0,03 \text{ m})$$

$$\Sigma A = 3,25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\bar{r} = \frac{\Sigma \bar{r}A}{\Sigma A}$$

$$\bar{r} = \frac{(0,225 \text{ m})(0,05 \text{ m})^2 + (0,260 \text{ m})(\frac{1}{2})(0,05 \text{ m})(0,03 \text{ m})}{3,25 \times 10^{-3} \text{ m}^2}$$

$$\bar{r} = 0,2331 \text{ m}$$

Cuadrado:

$$\int_A^B \frac{dA}{r} = (0,05 \text{ m}) \ln \left( \frac{0,250 \text{ m}}{0,200 \text{ m}} \right) = 0,011157 \text{ m}$$

Triangulo:

$$\int_A^B \frac{dA}{r} = \frac{(0,05 \text{ m})(0,280 \text{ m})}{(0,280 - 0,250) \text{ m}} \ln \left( \frac{0,280 \text{ m}}{0,250 \text{ m}} \right) - 0,05 \text{ m} = 0,0028867 \text{ m}$$

$$R = \frac{\sum A}{\sum \int_A \frac{dA}{r}} = \frac{3,25 \times 10^{-3} m^2}{0,011157 m + 0,0028867 m}$$

$$R = 0,23142 m$$

Esfuerzo normal en B → compresión  $r_B = 0,2 m$

$$\tau_B = \frac{M(R - r_B)}{Ar_B(\bar{r} - R)}$$

$$\tau_B = \frac{(-4000 N \cdot m)(0,23142 m - 0,2 m)}{(3,25 \times 10^{-3} m^2)(0,2 m)(0,2331 m - 0,23142 m)}$$

$$\tau_B = -116000000 Pa$$

$$\tau_B = 116 MPa \text{ (compresión)}$$

Esfuerzo normal en A → tracción  $r_A = 0,280 m$

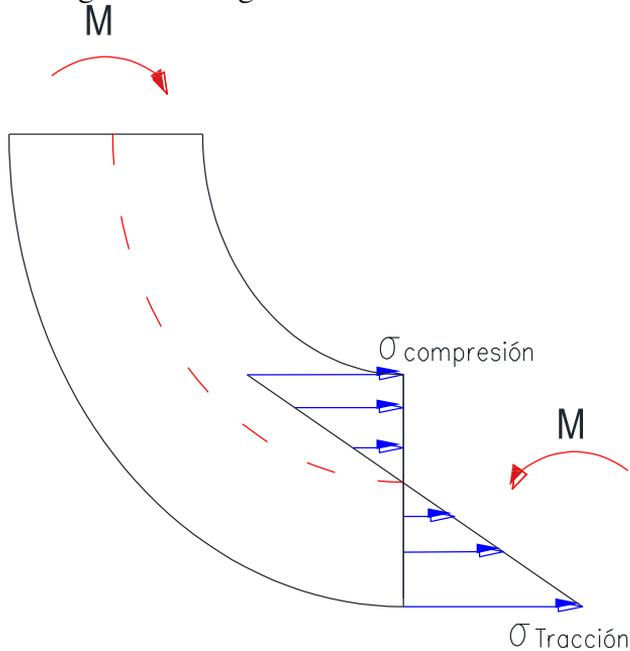
$$\tau_A = \frac{M(R - r_A)}{Ar_A(\bar{r} - R)}$$

$$\tau_B = \frac{(-4000 N \cdot m)(0,23142 m - 0,28 m)}{(3,25 \times 10^{-3} m^2)(0,28 m)(0,2331 m - 0,23142 m)}$$

$$\tau_B = 129000000 Pa$$

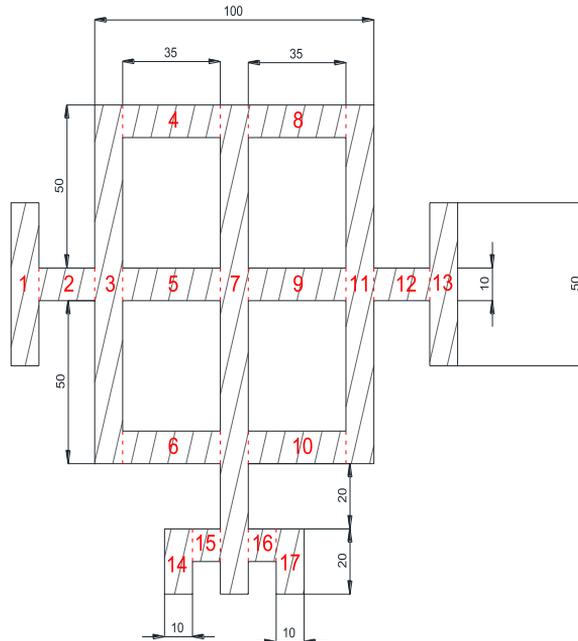
$$\tau_B = 129 MPa$$

Fig 2.14b. Diagrama de esfuerzo normal.

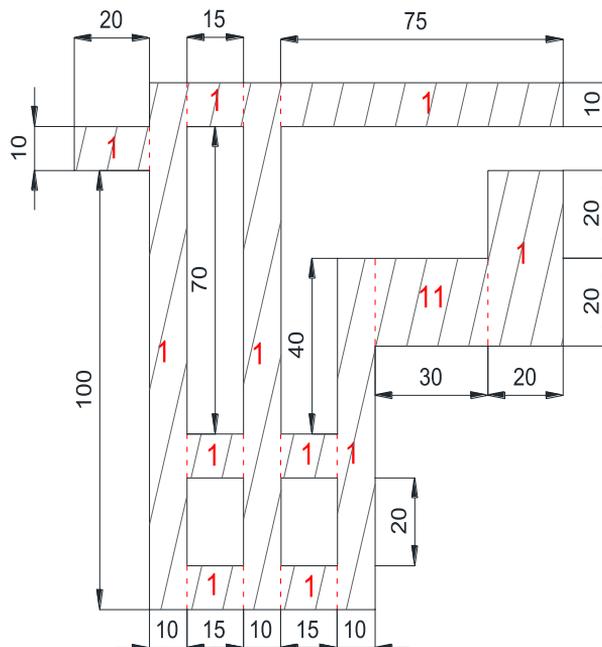


### 3. PROBLEMAS PROPUESTOS

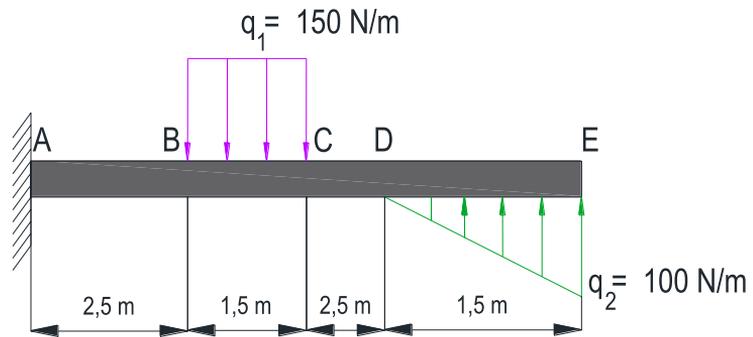
3.1. Hallar el centro de gravedad y momento de inertia del siguiente perfil.  
Medidas del perfil en mm.



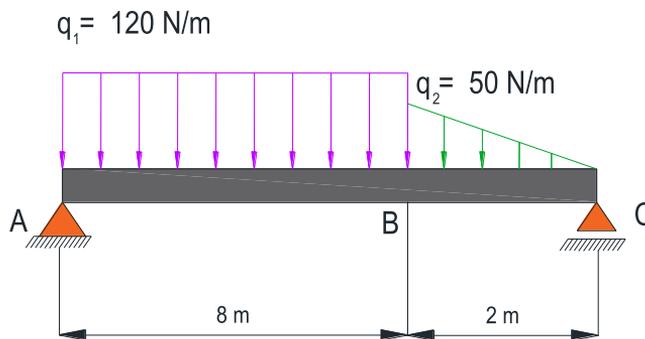
3.2. Hallar el centro de gravedad y momento de inertia del siguiente perfil.  
Medidas del perfil en mm.



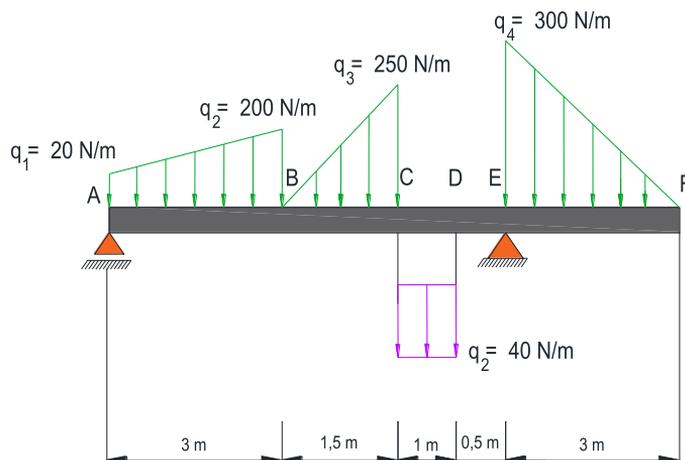
3.3. Hallar las reacciones en el empotramiento.



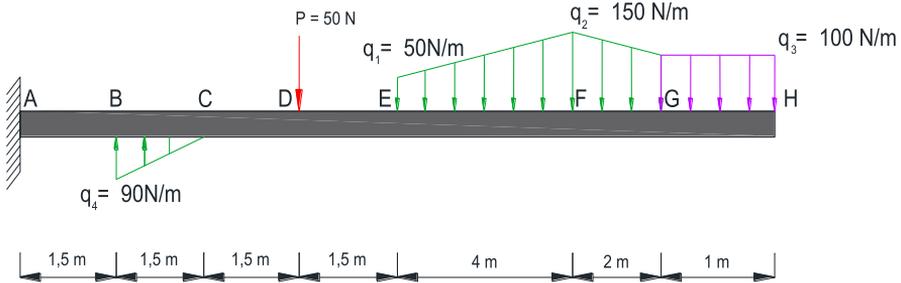
3.4. Hallar las reacciones en los apoyos.



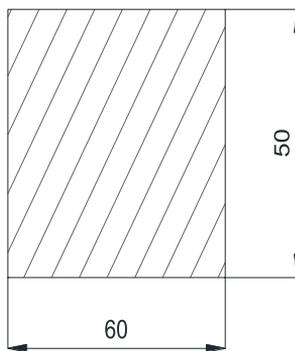
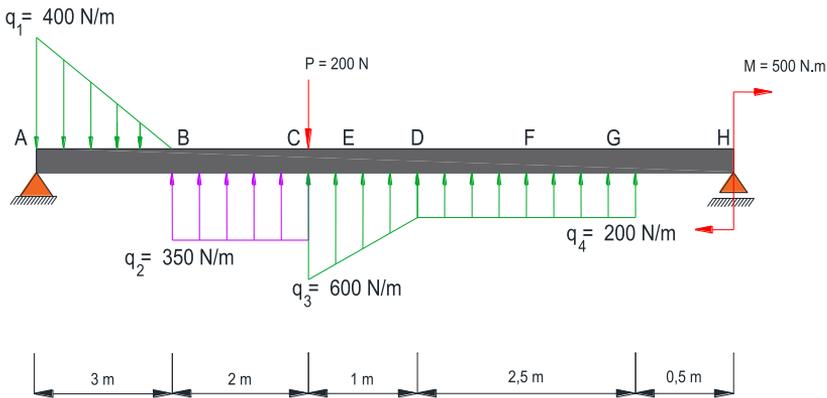
3.5. Hallar las reacciones en los apoyos.



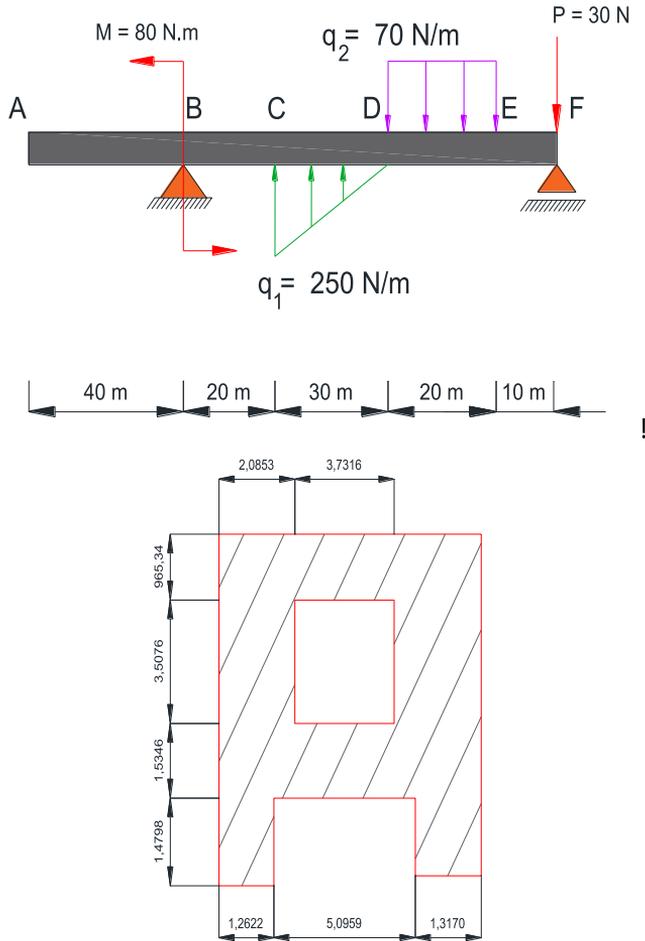
3.6. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo valor a) del cortante, y b) del momento flector.



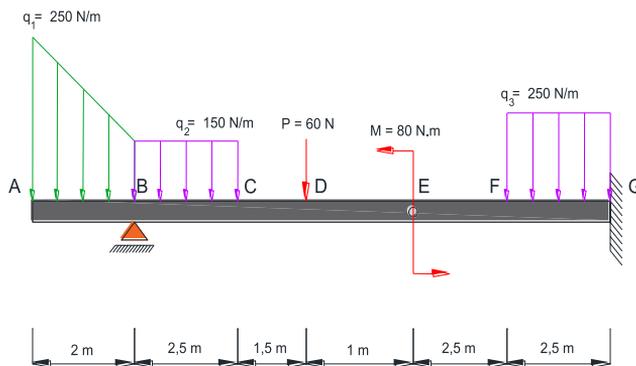
3.7. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura, y determine el máximo esfuerzo normal debido a la flexión. Medidas del perfil en mm.

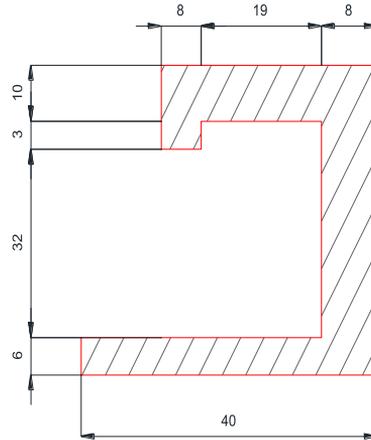


3.8. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura; además, determine el máximo esfuerzo normal debido a la flexión. Medidas del perfil en mm.

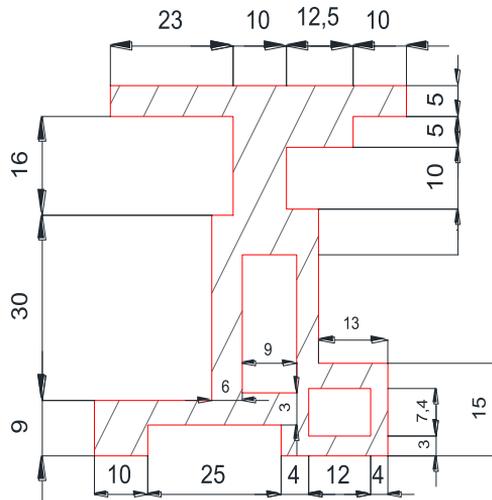
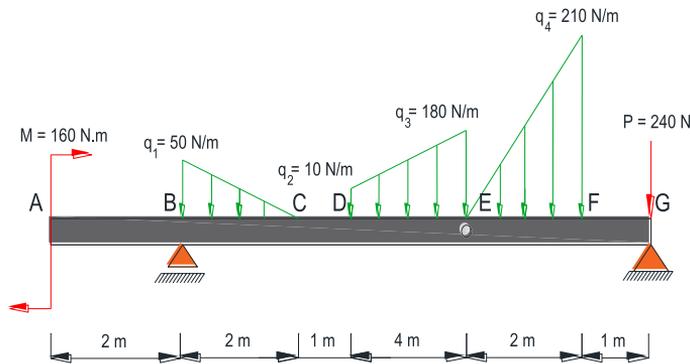


3.9. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura; además, determine el máximo esfuerzo normal y tangencial debido a la flexión. Medidas del perfil en mm.

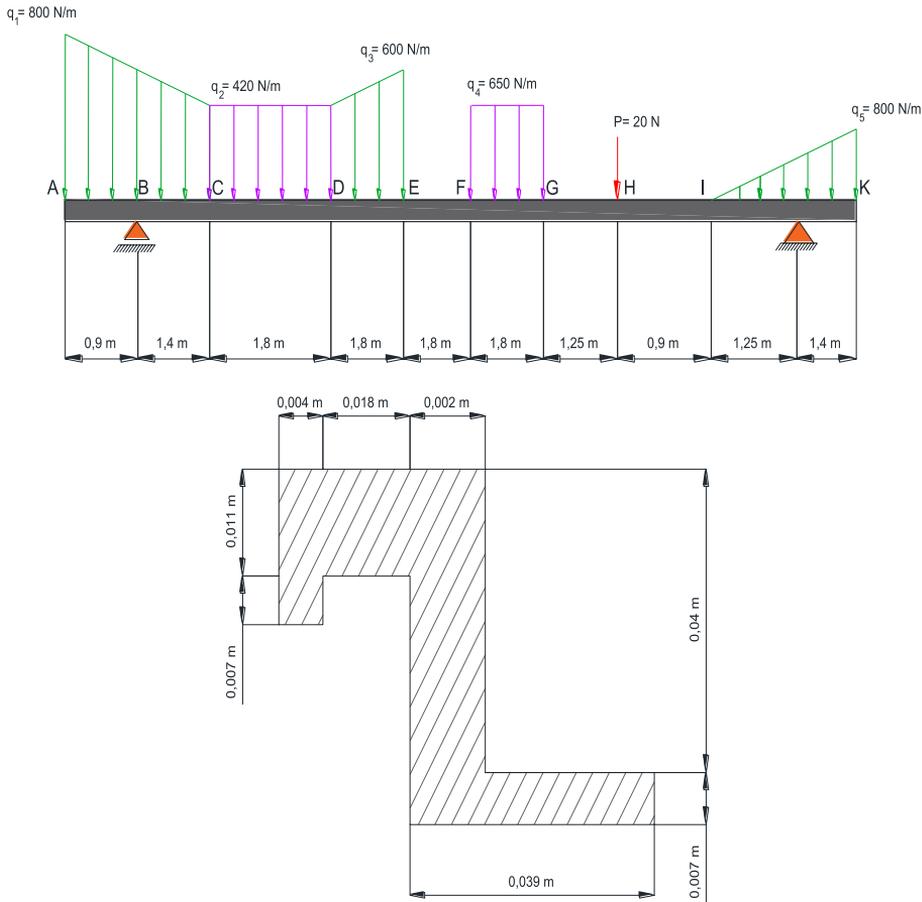




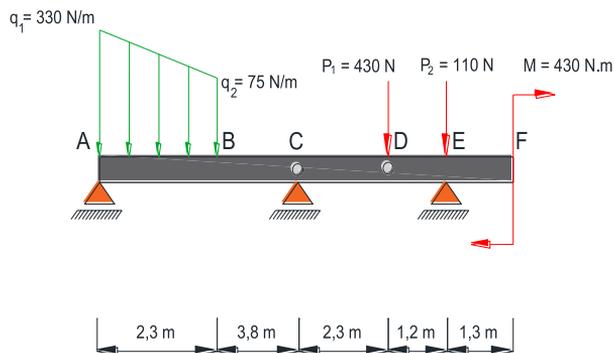
3.10. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura; además, determine el máximo esfuerzo normal y tangencial debido a la flexión. Medidas del perfil en mm.

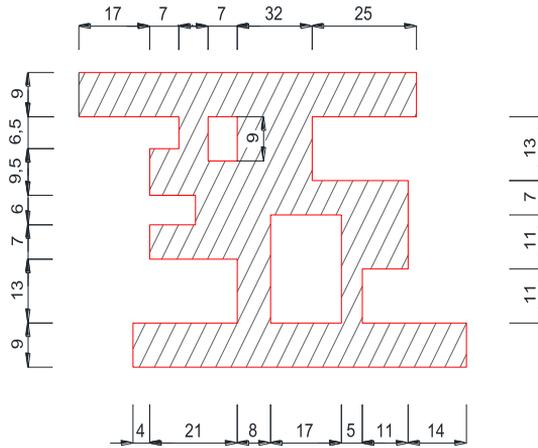


3.11. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura; además. determine el máximo esfuerzo normal y tangencial debido a la flexión.

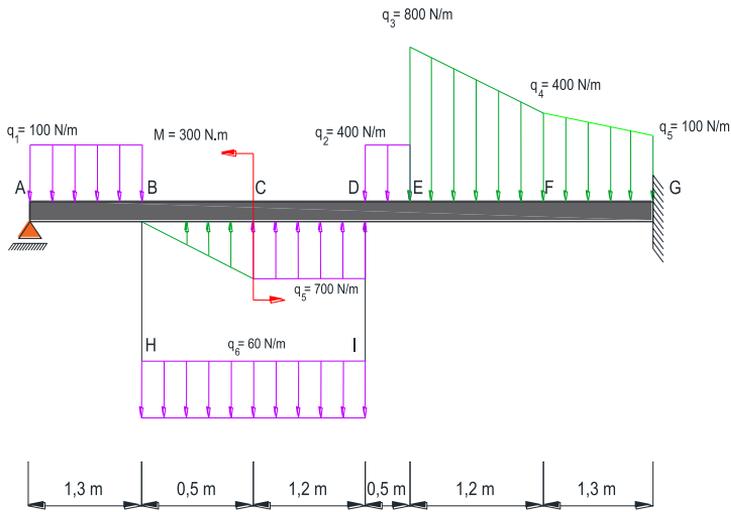


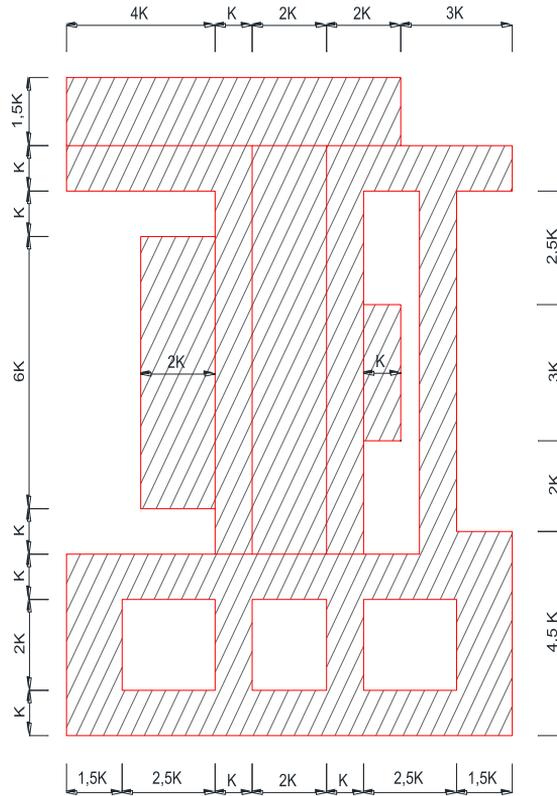
3.12. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura; además. determine el máximo esfuerzo normal y tangencial debido a la flexión. Medidas del perfil en mm.



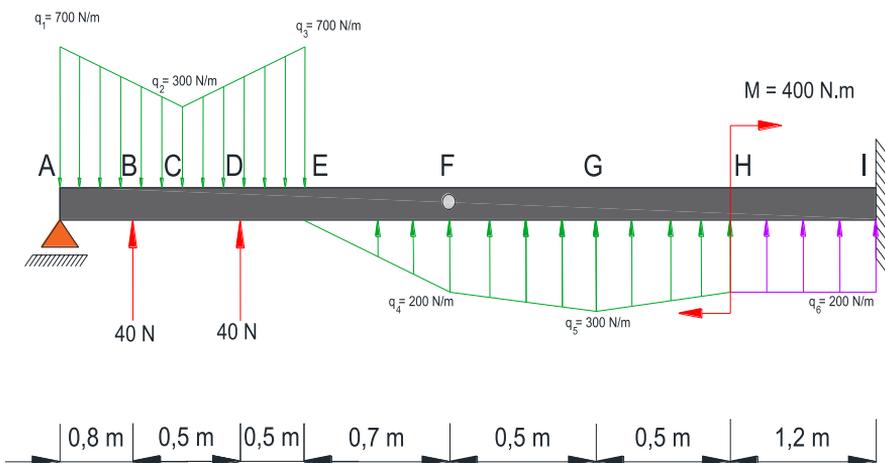


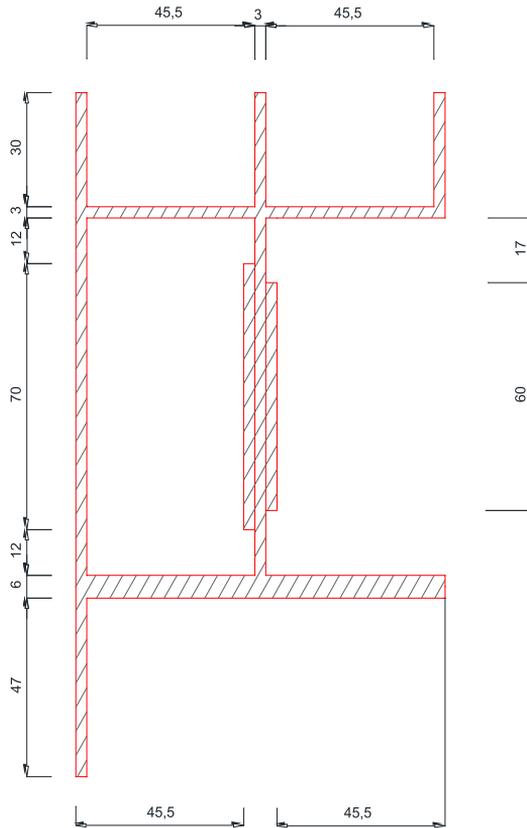
3.13. Hallar los diagramas de cortante y momento flector mediante ecuaciones en cada tramo, los diagramas de esfuerzo tangencial y normal en el perfil de la viga.  $K = 17 \text{ mm}$ .



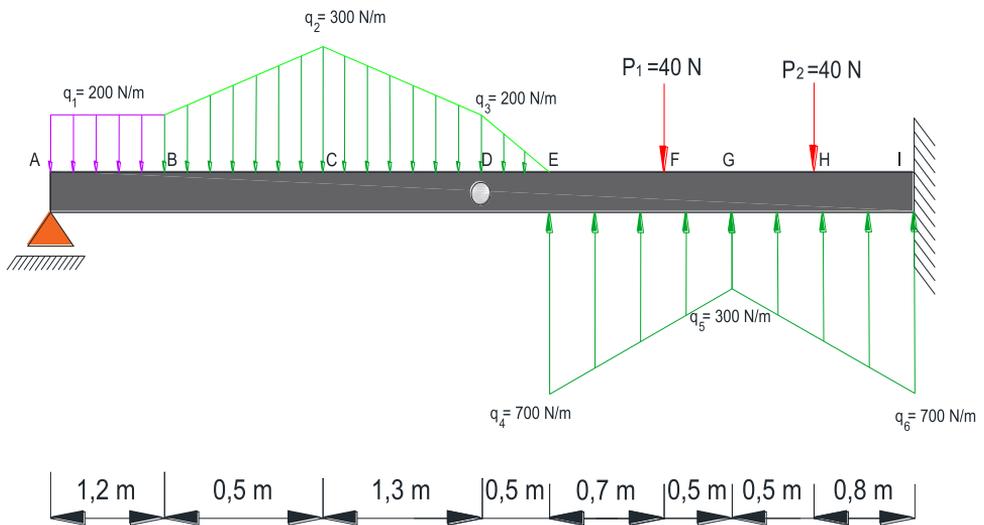


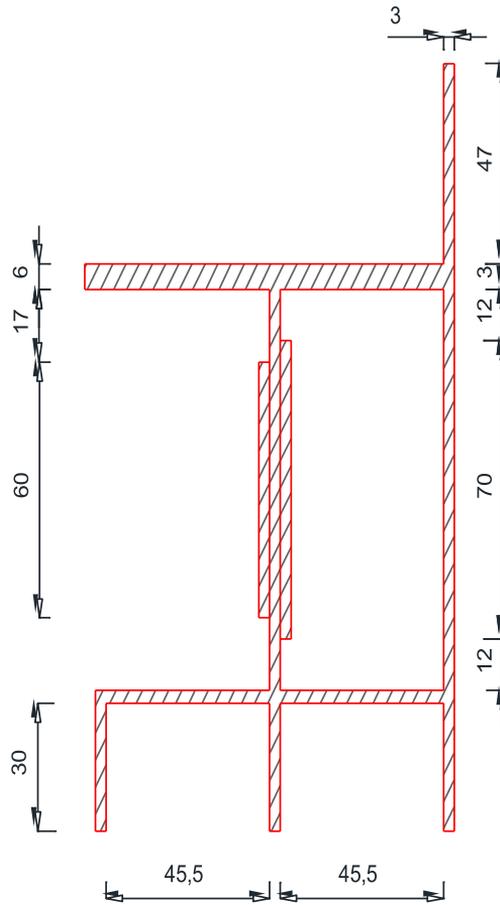
3.14. Hallar los diagramas de cortante y momento flector con ecuaciones en cada tramo de la viga.  $2,058 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ . Medidas del perfil en mm.



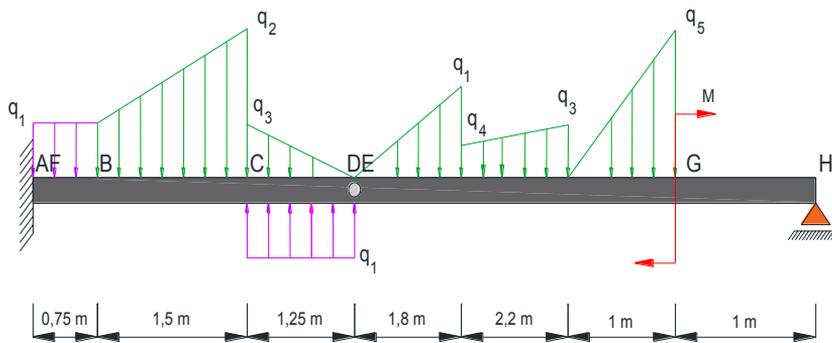


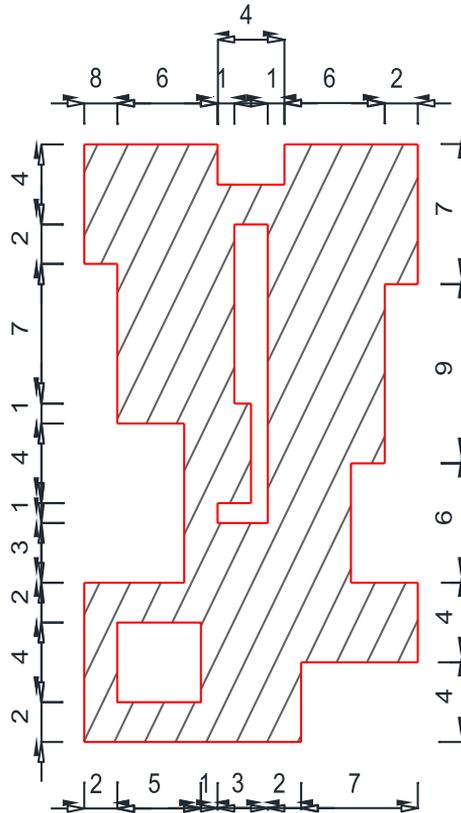
3.15. Hallar los diagramas de cortante y momento flector con ecuaciones en cada tramo de la viga. Medidas del perfil en mm.



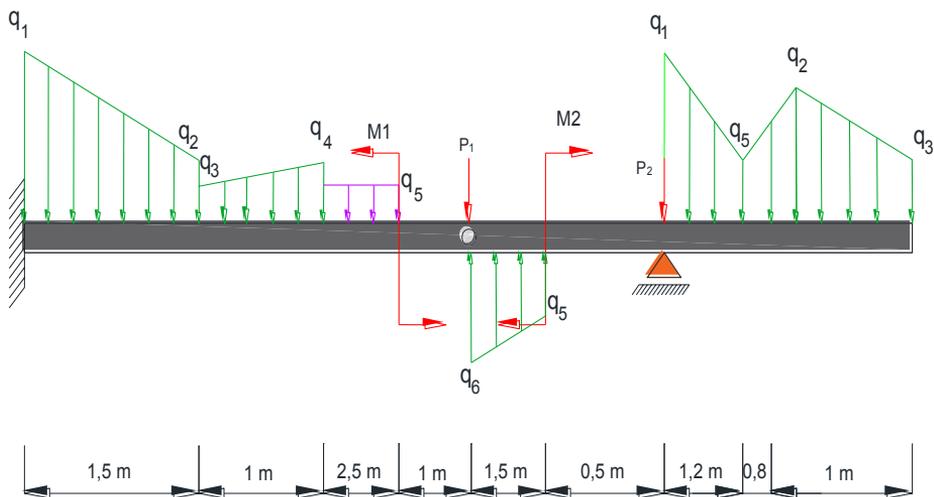


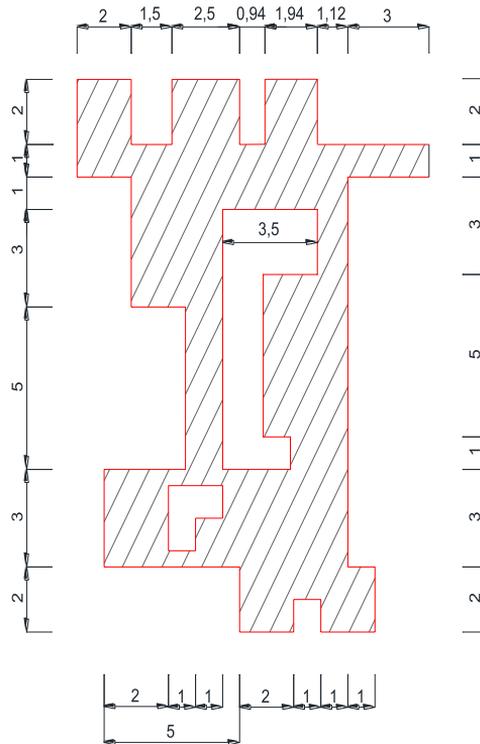
3.16. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura; además, determine el máximo esfuerzo normal y tangencial debido a la flexión. Medidas del perfil en mm.



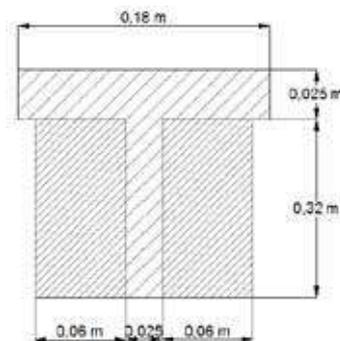


3.17. Dibuje los diagramas de cortante y de momento flector para la viga y las cargas que se muestran en la figura; además, determine el máximo esfuerzo normal y tangencial debido a la flexión. Medidas del perfil en mm.



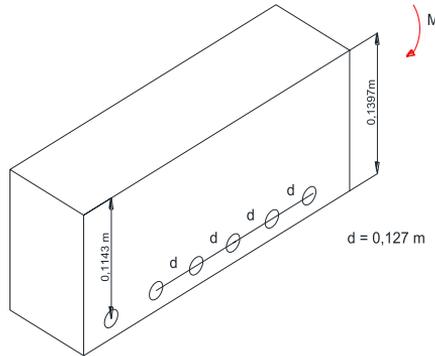


3.18. Una viga de acero en T se ha reforzado poniéndole dos pedazos de la manera que se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 12.5 GPa para la madera y 200 MPa para el acero. Considerando que se aplica un momento flector  $M= 65000 \text{ N.m}$  a la viga compuesta, encontrar a) el esfuerzo máximo de la madera, y b) el esfuerzo en el acero a lo largo de la fibra externa.



3.19. Una losa de concreto para piso está reforzada por varillas de acero 0,015875 m colocadas a 0,0254 m por encima de la cara inferior de la losa y espaciadas 0,127 m entre centros. El módulo de elasticidad es 20684271 kPa para el concreto utilizado y de 199947953 kPa para el acero. Considerando que en un momento flector de 5649,2 N. m. se aplica a cada tramo de 0,3048 m de ancho

de la losa; determinar a) el esfuerzo máximo en el concreto, y b) el esfuerzo en el acero.



3.20. Una barra que tiene la sección transversal mostrada en la figura se ha formado al unir fuertemente piezas de latón y aluminio. Si los módulos de elasticidad y esfuerzo permisible del aluminio son 70 GPa y 100 GPa respectivamente, y los módulos de elasticidad y esfuerzo permisible del latón son 105 MPa y 160 MPa respectivamente; determinar el momento flector máximo permisible cuando la barra compuesta se flexiona alrededor de un eje horizontal.



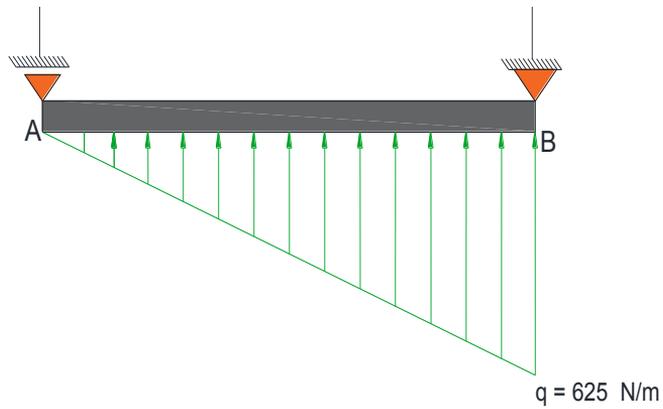


Fig. 1.62a Esquema para el problema 1.19

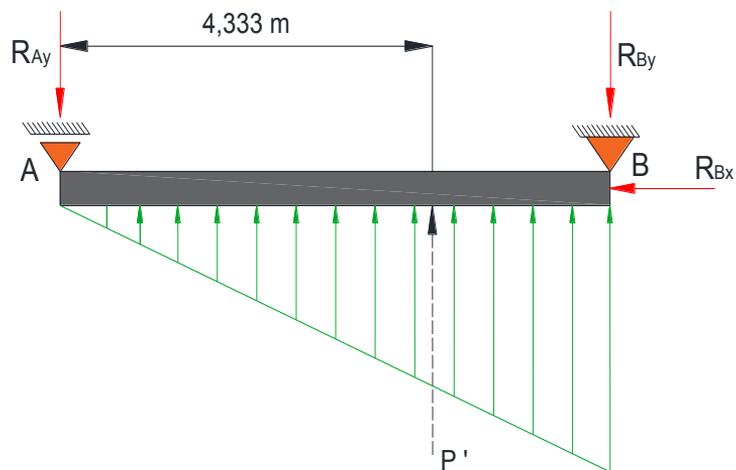


Figura 1.62b Diagrama de reacciones y cargas equivalentes

$$P' = \frac{q * L}{2}$$

$$P' = \frac{625 \frac{\text{N}}{\text{m}} (6,5\text{m})}{2}$$

$$P' = 2031,25 \text{ N}$$

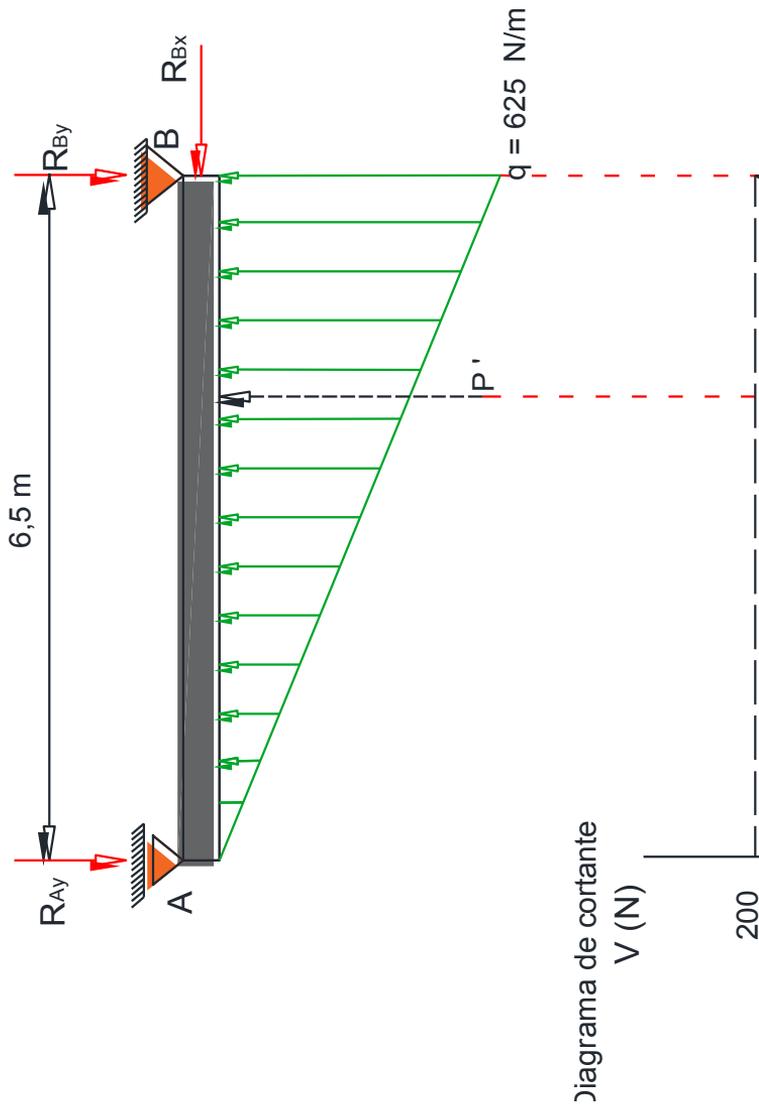
Cuando  $V$  es cero,  $M_f$  es máximo

$$0 = -677,0936 + \frac{625x^2}{13}$$

$$x = \sqrt{\frac{677,0936 * 13}{625}}$$

$$x = 3,7528 \text{ m}$$

Resistencia de materiales



# Problema modelo 1.20

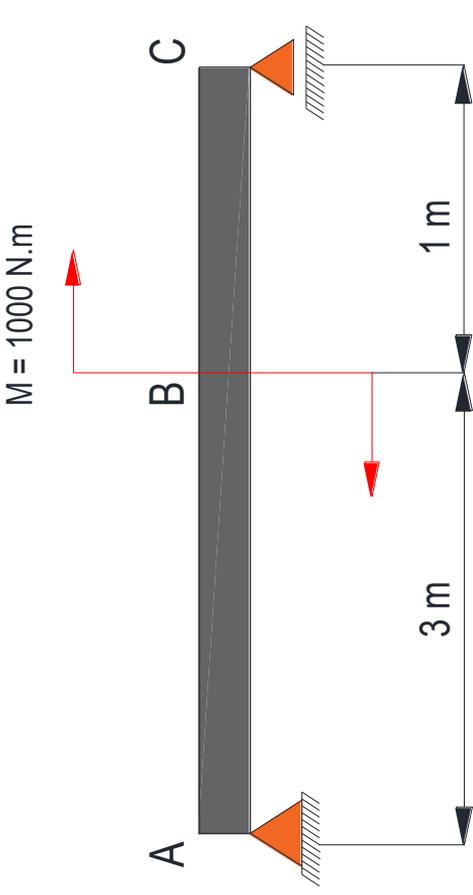
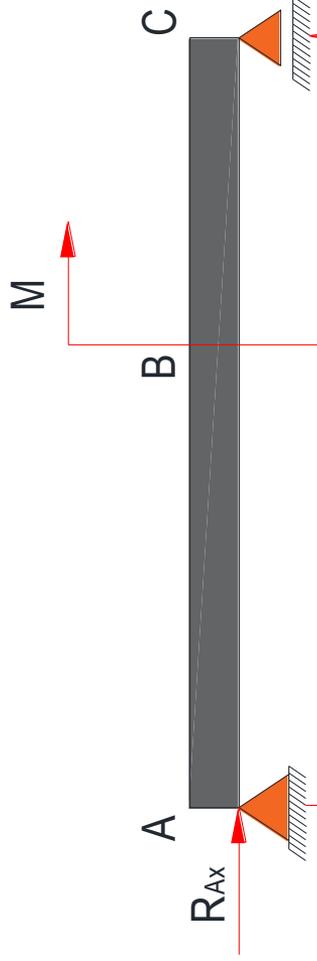


Fig. 1.63a Esquema para el problema 1.19



$$-R_{Ay} - V = 0$$

$$V = -R_{Ay}$$

$$V = -250 \text{ N}$$

$$-R_{Ay}(x) - M_f = 0$$

$$M_f = -R_{Ay}(x)$$

$$M_f = -250(x)$$

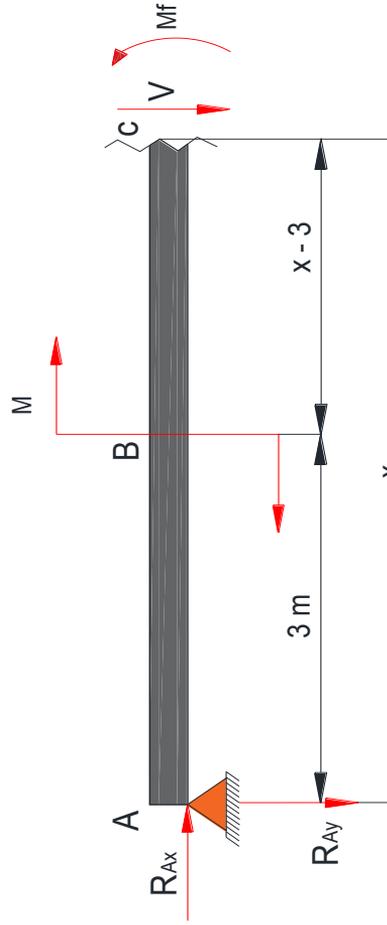
$$x = 0\text{m} \rightarrow V = -250 \text{ N}$$

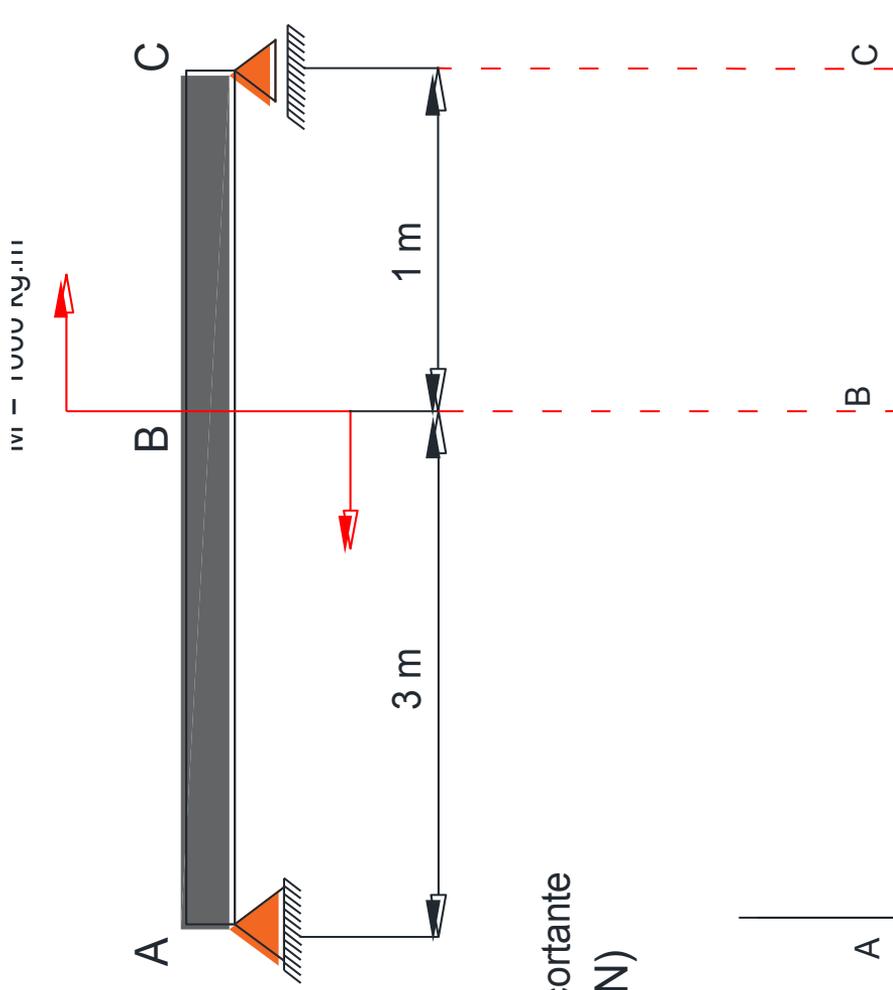
$$x = 0\text{m} \rightarrow M_f = -250 \text{ N}$$

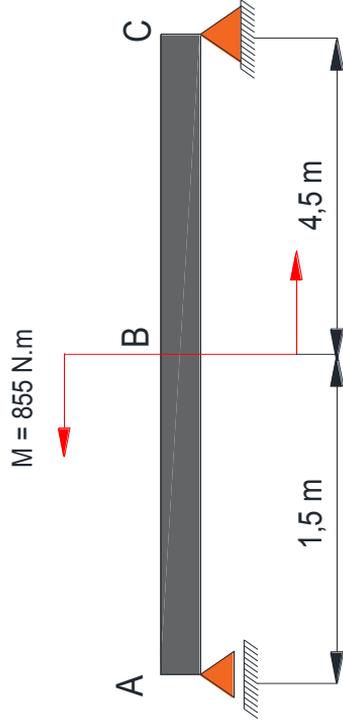
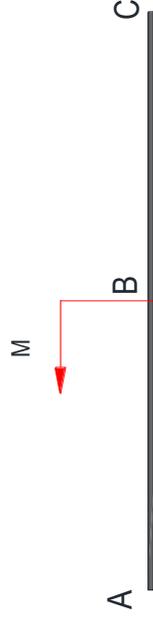
$$x = 0\text{m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$x = 3\text{m} \rightarrow M_f = -750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

TRAMO BC





**PROBLEMA MODELO 1.21****Fig. 1.64a** Esquema para el problema 1.21

$$V = R_{Ay}$$

$$V = 142,5 \text{ N}$$

$$M_f = -R_{Ay}(x)$$

$$M_f = -142,5(x)$$

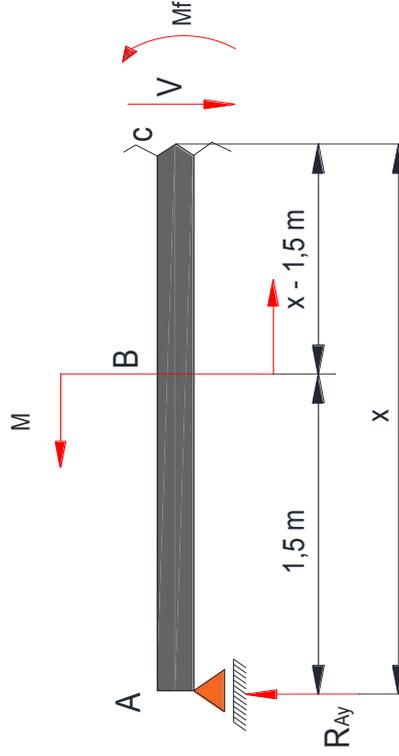
$$x = 0 \text{ m} \rightarrow V = 142,5 \text{ N}$$

$$x = 1,5 \text{ m} \rightarrow V = 142,5 \text{ N}$$

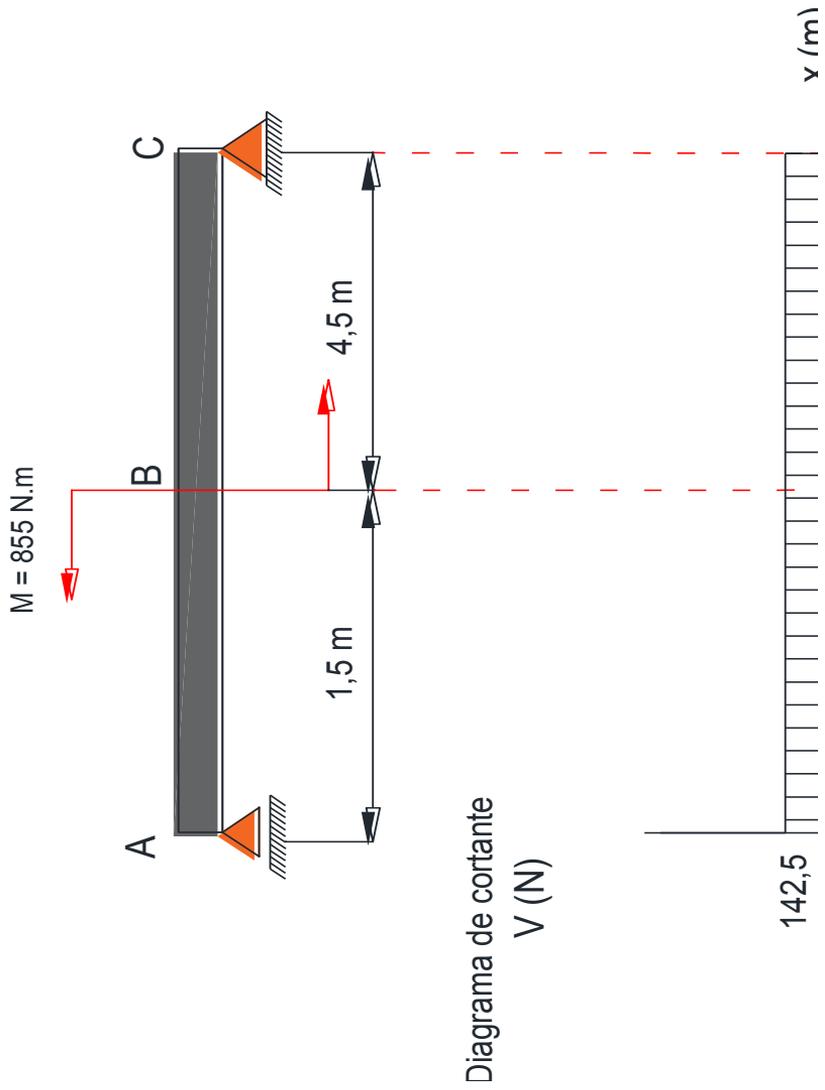
$$x = 0 \text{ m} \rightarrow M_f = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$x = 1,5 \text{ m} \rightarrow M_f = 213,75 \text{ N}\cdot\text{m}$$

TRAMO BC



Resistencia de materiales



## ACERCA DE LOS AUTORES.

Isaías Caicedo, Javier Orna, Diego Mayorga y Edwin Viteri a la presente fecha trabajan como docentes ocasionales en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Durante este tiempo han efectuado importantes ponencias e impartido seminarios sobre resistencia de materiales y estructuras metálicas. Actualmente continúan realizando varios trabajos de Investigación.

Isaías, Javier, Diego y Edwin comparten la idea de que la cátedra universitaria denominada Resistencia de Materiales debe enseñarse partiendo de los principios básicos, y que los estudiantes entenderían y recordarían mejor los diversos conceptos involucrados si a estos se los presenta de manera gráfica y con una resolución lógica completa y detallada. Juntos redactaron notas para la cátedra de Sólidos II, a las que añadieron problemas y pronto tuvieron en sus manos su primer libro, titulado *Resistencia de Materiales-Flexión*. Sin embargo, el interés de ellos por aportar en la enseñanza de los cursos básicos profesionalizantes (Sólidos I y Sólidos II) de mecánica no ha menguado, y por ello comenzaron a trabajar en el presente libro, titulado *Resistencia de Materiales. Teoría y Ejercicios*, libro que ha sido completamente editado de nuevo para hacerlo de lectura más sencilla; se ha corregido, mejorado y reelaborado cuidadosamente todas las figuras para aumentar su claridad y precisión.

## AGRADECIMIENTO

Agradezco a los estudiantes, quienes son la razón y motivación para la elaboración de este libro; a colegas y lectores de nuestro primer libro, *Resistencia de Materiales-Flexión*, quienes con sus sugerencias y consejos cooperaron para mejorar la presentación de este nuevo trabajo. Quiero expresar una especial gratitud a mis colegas y amigos Ing. Javier Orna, Ing. Diego Mayorga, Ing. Edwin Viteri, cuya colaboración en la preparación de esta obra fue esencial; a mi familia y amigos, quienes me brindaron su apoyo incondicional; y a quienes hagan uso del material expuesto.

*Isaías Caicedo*

En el diseño de estructuras o máquinas, el cabal dominio de la mecánica de materiales es indispensable. La importancia de la flexión en vigas para el diseño estructural condujo a realizar el estudio completo de este tema que incluye:

**Capítulo 1: Esfuerzos Normales y Cortantes**

Comprende: (breve repaso de la de Estática) Determinación de diagramas de Cortante, Momentos Flectores, Esfuerzo Normal y Cortante.

**Capítulo 2: Vigas Compuestas, Concentraciones de Esfuerzos, Flexión Elementos Curvos**

Comprende: Métodos para determinar valores de Esfuerzos en una Viga Compuesta como: Sección Transformada. Análisis de las Concentraciones de Esfuerzos en Ranuras y Filetes. Análisis de la flexión en elementos curvos.

Sin embargo, puesto que cada uno de estos temas se trata por separado, el profesor y el estudiante puede optar fácilmente solo por aquellos métodos que sean de su mayor interés.

Teniendo en mente los principales problemas de los estudiantes se ha procurado explicar los conceptos fundamentales sin escatimar palabras, pero procurando al mismo tiempo excesiva verbosidad y empleando un lenguaje claro y conciso.

**Isaías Caicedo, Javier Orna, Diego Mayorga, Edwin Viteri** a la presente fecha continúan trabajando como Docentes Ocasionales en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, durante este tiempo han efectuado importantes Ponencias e 5 impartido Seminarios sobre Resistencia de Materiales y Estructuras Metálicas, actualmente continúan realizando varios trabajos de Investigación.

Isaías, Javier, Diego y Edwin comparten la idea de que la cátedra universitaria denominada Resistencia de Materiales debe enseñarse partiendo de los principios básicos y que los estudiantes entenderían y recordarían mejor los diversos conceptos involucrados si a estos se los presenta de manera gráfica y su resolución lógica completa y detallada. Juntos redactaron notas para la cátedra de Sólidos II a las que añadieron problemas y pronto tuvieron en sus manos su primer libro titulado "Resistencia de Materiales Flexión".

Sin embargo, el interés de ellos por aportar en la enseñanza de los cursos básicos 15 profesionalizantes (Sólidos I y Sólidos II) de mecánica no ha menguado, y por ello comenzaron a trabajar en el presente libro titulado "Resistencia de Materiales Teoría y Ejercicios", este libro ha sido completamente editado de nuevo para hacerlo de lectura más sencilla, se ha corregido, mejorado y reelaborado cuidadosamente todas las figuras para aumentar su claridad y precisión.

ISBN: 978-9942-38-017-3



9 789942 380173

